Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Кафедра вычислительной математики

Курсовая работа

«Численное моделирование фильтрации в пористой среде методом конечных объёмов»

Выполнил: студент Петрунников Тимур Максимович
Научный руководитель: Ануприенко Денис Валерьевич

Москва, 2025

Содержание

1 Введение

Фильтрация жидкости в пористой среде является ключевым процессом в гидрогеологии и инженерной практике. Течение подземных вод управляется законом Дарси и законом сохранения массы, что приводит к диффузионным уравнениям с нелинейными характеристиками среды. Практические задачи требуют учитывать сложную геометрию домена и неоднородность проницаемости, что делает аналитические решения невозможными. Метод конечных объёмов обеспечивает локальное сохранение массы и адаптивность к произвольным сеткам, поэтому он получил широкое применение в моделировании фильтрации.

Цель данной работы — разработка и исследование неявной конечнообъёмной схемы для моделирования однофазной фильтрации в пористой среде. Задачи:

- провести обзор методов конечных разностей и конечных объёмов;
- сформулировать математическую модель стационарных и нестационарных задач фильтрации, включая уравнение Ричардса;
- реализовать неявную FVM-схему с методом простой итерации (Пикара);
- протестировать алгоритм на задаче Celia и проанализировать сходимость и водный баланс.

Результаты могут быть применены в экологическом мониторинге, проектировании ирригационных систем и моделировании миграции загрязнений.

2 Обзор литературы

Метод конечных разностей (МКР) предлагает простую аппроксимацию производных с использованием сеточных разностей и хорошо подходит для регулярных сеток [4]. Однако для задач с сложной геометрией и сохранением массы МКР требует значительных доработок.

Метод конечных объёмов (МКО) изначально развивался в гидрогазодинамике и теплообмене [1]. Он базируется на интегральной формулировке законов сохранения в каждом контрольном объёме, что гарантирует строгий баланс массы. МКО применяют к произвольным сеткам и сложным доменам, сохраняя физическую консервативность [5].

В задачах ненасыщенной фильтрации уравнение Ричардса используется с зависимостями $\theta(h)$ и относительной проницаемостью $K_r(h)$ по моделям Ван-Генухтена–Муалема [2, 3]. Итерационные методы (Пикара, Ньютона) обеспечивают решение нелинейных систем с контролем невязки и массосбережения.

Таким образом, МКО сочетает в себе физическое обоснование, гибкость сетки и строгий закон сохранения, что делает его предпочтительным для моделирования фильтрации.

3 Постановка задачи

Рассматривается одномерная область $x \in [0, L]$ с пористой средой. Модель непрерывности и закон Дарси приводят к уравнению:

$$\phi \frac{\partial \theta(h)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\Big(K(h)\, \frac{\partial h}{\partial x}\Big) = f(x,t), \tag{1}$$

где ϕ — пористость, $\theta(h)$ — объёмное влагосодержание, $K(h) = K_s\, K_r(h)$ — проводимость, f — источник/сток. Начальные условия:

$$h(x,0) = h_{\text{init}}(x),$$

граничные условия:

$$h(L,t) = H_{\text{left}}, \quad -K(h)\, \frac{\partial h}{\partial x}\bigg|_{x=0} = 0.$$

4 Методика численного решения

4.1 Дискретизация по пространству и времени

Разобьём область на m ячеек длиной $\Delta x = L/m$. Объём i-й ячейки — Δx. Временной слой имеет шаг Δt. Используем неявную схему:

$$\phi\, \Delta x\, \frac{\theta_i^{n+1} - \theta_i^n}{\Delta t} + \Delta t\big(q_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - q_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}\big) = 0,$$

$$q_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} = -K_{i+\frac{1}{2}} \frac{h_{i+1}^{n+1} - h_i^{n+1}}{\Delta x}.$$

4.2 Формулы для внутренних ячеек

Для внутренних ячеек имеем:

$$\begin{aligned}
y_i\, \Delta x \sim f\big(x_{i+\frac{1}{2}}\big)\, \Delta x &= q_{i+1}^{n+1} - q_i^{n+1} + s_i \frac{h_i^{n+1} - h_i^n}{\Delta t}\, \Delta x \\
&= \frac{2K_i}{\Delta x}\Big(-h_{i-1}^{n+1} \frac{K_{i-1}}{K_i + K_{i-1}} - h_{i+1}^{n+1} \frac{K_{i+1}}{K_i + K_{i+1}} \\
&\quad + h_i^{n+1} \frac{K_{i+1}(K_i + K_{i-1}) + K_{i-1}(K_i + K_{i+1})}{(K_i + K_{i+1})(K_i + K_{i-1})}\Big) + s_i \frac{h_i^{n+1} - h_i^n}{\Delta t}\, \Delta x \\
&\Rightarrow -h_{i-1}^{n+1} \frac{K_{i-1}}{K_i + K_{i-1}} - h_{i+1}^{n+1} \frac{K_{i+1}}{K_i + K_{i+1}} \\
&\quad + h_i^{n+1}\Big(\frac{K_{i+1}(K_i + K_{i-1}) + K_{i-1}(K_i + K_{i+1})}{(K_i + K_{i+1})(K_i + K_{i-1})} + s_i \frac{\Delta x^2}{2K_i\, \Delta t}\Big) \\
&= f\big(x_{i+\frac{1}{2}}\big)\, \frac{\Delta x^2}{2K_i} + s_i \frac{\Delta x^2}{2K_i\, \Delta t}\, h_i^n.
\end{aligned} \tag{2}$$

4.3 Левая ячейка

$$
\begin{aligned}
y_0\,\Delta x \sim f\big(x_{\frac12}\big)\,\Delta x &= -\frac{2K_1K_0}{K_0+K_1}\frac{h_1^{n+1}-h_0^{n+1}}{\Delta x} + \frac{2K_{-\frac12}K_0}{K_0+K_{-\frac12}}\frac{h_0^{n+1}-H_0}{\Delta x/2} \\
&\quad + s_0\frac{h_0^{n+1}-h_0^{n}}{\Delta t}\,\Delta x \\
&\Rightarrow -\frac{K_1}{K_0+K_1}h_1^{n+1} + \Big(\frac{2K_{-\frac12}(K_0+K_1)+K_1(K_0+K_{-\frac12})}{(K_0+K_{-\frac12})(K_0+K_1)} + s_0\frac{\Delta x^2}{2K_0\,\Delta t}\Big)h_0^{n+1} \\
&= \frac{\Delta x^2}{2K_0}f\big(x_{\frac12}\big) + \frac{2H_0}{K_0+K_{-\frac12}} + s_0\frac{\Delta x^2}{2K_0\,\Delta t}\,h_0^{n}.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

4.4 Правая ячейка

$$
\begin{aligned}
y_{m-1}\,\Delta x &\sim f\big(x_{m-\frac12}\big)\,\Delta x \\
&= -\frac{2K_{m-1}K_{m-\frac12}}{K_{m-1}+K_{m-\frac12}}\frac{b-h_{m-1}}{\Delta x/2} + \frac{2K_{m-1}K_{m-2}}{K_{m-1}+K_{m-2}}\frac{h_{m-1}-h_{m-2}}{\Delta x} \\
&\quad + s_{m-1}\frac{h_{m-1}^{n+1}-h_{m-1}^{n}}{\Delta t}\,\Delta x \\
&\Rightarrow \Big(\frac{2K_{m-\frac12}(K_{m-1}+K_{m-2})+K_{m-2}(K_{m-1}+K_{m-\frac12})}{(K_{m-1}+K_{m-\frac12})(K_{m-1}+K_{m-2})} + s_{m-1}\frac{\Delta x^2}{2K_{m-1}\,\Delta t}\Big)h_{m-1}^{n+1} \\
&\quad - \frac{K_{m-2}}{K_{m-1}+K_{m-2}}h_{m-2}^{n+1} \\
&= \frac{\Delta x^2}{2K_{m-1}}f\big(x_{m-\frac12}\big) + \frac{2b}{K_{m-1}+K_{m-\frac12}} + s_{m-1}\frac{\Delta x^2}{2K_{m-1}\,\Delta t}\,h_{m-1}^{n}.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

5 Программная реализация

Код реализован на Python с использованием NumPy и SciPy. Основной алгоритм:

1. Создание сетки x_i, начальные условия h_i^0, параметры ϕ, K_s, параметры модели Ван-Генухтена.
2. Цикл по времени: для каждого шага $n \to n+1$:
   (a) Вычисление $\theta_i^n = \theta(h_i^n)$ по (**??**).
   (b) Эффективная проводимость $K_{i+\frac12} = \big(K_sK_r(h^n)\big)$.
   (c) Сборка системы $A\,h^{n+1} = b$ с учётом дискретизации.
   (d) Решение линейной системы (метод Томаса или `scipy.linalg.solve`).
   (e) Обновление h_i^{n+1} и θ_i^{n+1}.
3. Контроль водного баланса и невязки.

6 Тестовая задача Celia

Классический тест Целии [2]: $L = 0.4\,\text{м}$, начальные $h(x, 0)$ заданы из референсных данных, на $x = L$ в $(t > 0)$ поддерживается $h = 0$, на $x = 0$ поток $q = 0$. Параметры $\phi = 0.287$, $\theta_r = 0.075$, $\alpha = 1.611 \times 10^6$, $n = 3.96$, $K_s = 9.44 \times 10^{-5}\,/$. Результаты моделирования сравниваются с референсными профилями и проверяется сохранение массы.

7 Результаты и обсуждение

Рис. 1: Фронт фильтрации на разных временных срезах.

Сравнение профилей показывает согласие с данными Целии. Невязка быстро убывает до $\varepsilon \sim 10^{-6}$. Водный баланс соблюдается в пределах численной погрешности.

8 Заключение

Разработана и протестирована неявная конечнообъёмная схема для моделирования однофазной фильтрации в пористой среде. Алгоритм демонстрирует хорошую сходимость и строгую сохранность массы. Тест Целии подтвердил физическую корректность и точность решения. В последующих работах рекомендуется применять метод

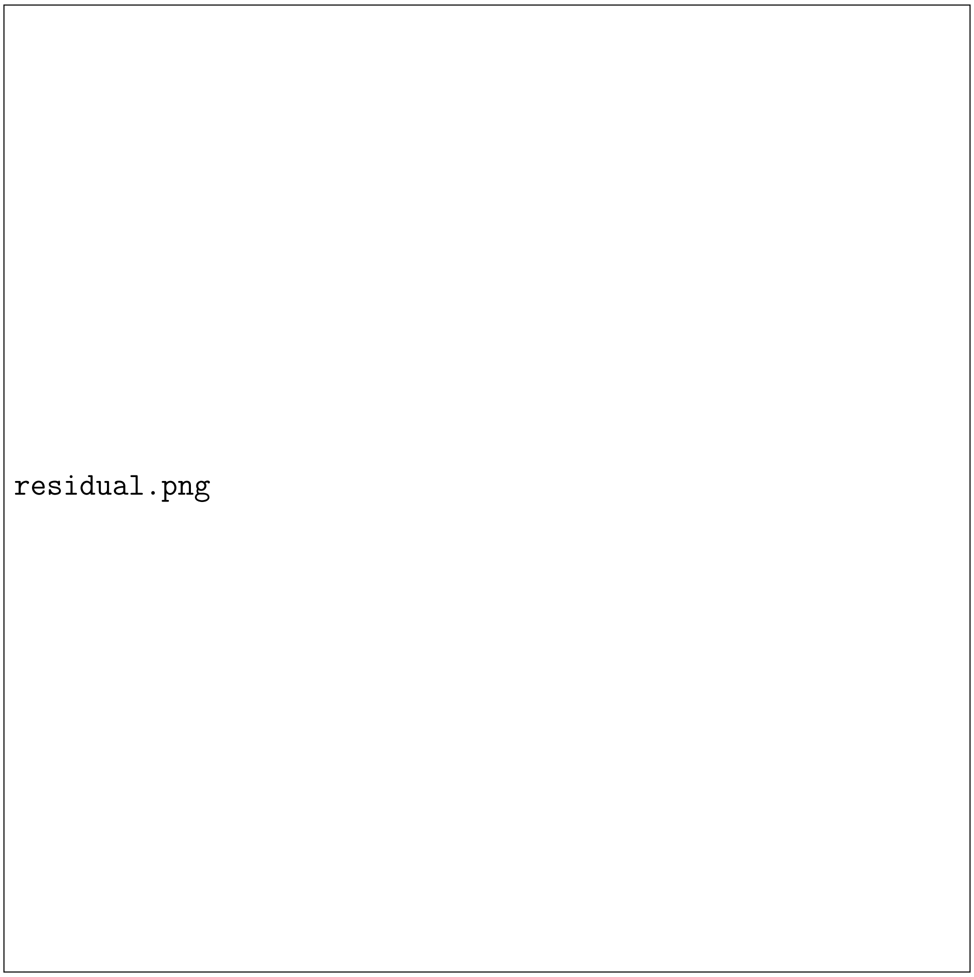

Рис. 2: Невязка решения по итерациям метода Ньютона.

Ньютона с автодифференцированием для ускорения сходимости и расширять схему на многомерные задачи.

Список литературы

[1] J. Bear. *Dynamics of Fluids in Porous Media.* New York: Elsevier, 1972.

[2] M. A. Celia, E. T. Bouloutas, R. L. Zarba. A general mass-conservative numerical solution of Richards' equation. *Water Resources Research*, 26(7):1483–1496, 1990.

[3] M. T. van Genuchten. Closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 44(5):892–898, 1980.

[4] А. А. Самарский, А. Н. Гулин. *Методы конечных разностей.* М.: Наука, 1989.

[5] Н. Е. Леонтьев. *Основы теории фильтрации.* М.: МГУ, 2017.

water_balance.png

Рис. 3: Водный баланс: накопленная масса vs поступление.