

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕЧЕНИЯ ПОДЗЕМНЫХ ВОД

Москва
2025

1 Метод конечных разностей для одномерного уравнения Пуассона

1.1 Постановка задачи

Многие стационарные, то есть установившиеся, не меняющиеся во времени процессы (распространение тепла, распределение электрических зарядов, течение подземных вод) в одномерных объектах (телах, у которых одно из измерений существенно больше остальных, например: стержнях, тонких колонках из пористого материала и др.) описываются следующими уравнениями:

$$\begin{cases} \frac{\partial q}{\partial x} = f(x), \\ q(x) = -\frac{\partial u}{\partial x}, \end{cases} \quad (1)$$

где u – основная неизвестная (температура, напор подземных вод, электрический потенциал, концентрации примеси в жидкости и др.), q – поток (тепла, массы, заряда и т.д.), а f – функция источников. Первое уравнение в (1) описывает закон сохранения (тепла, массы, заряда) в дифференциальной форме, а второе уравнение говорит о том, что движение происходит от области с большей температурой (напором, потенциалом) в область с меньшей (в некоторых разделах физики эти законы имеют имена – закон Фурье, закон Фика, закон Дарси и др.).

Соединив два уравнения в (1), можно получить уравнение Пуассона:

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x). \quad (2)$$

Очевидно, что у этого уравнения бесконечно много решений. Чтобы получить практически значимое единственное решение, нужно рассмотреть уравнение в конкретной области (далее для простоты – на единичном отрезке) и задать некоторую информацию на границах:

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x), & x \in \Omega = (0, L), \\ u(0) = a, u(L) = b \end{cases} \quad (3)$$

Система (3) называется *краевой задачей* для уравнения Пуассона, заданные на границах отрезка значения искомой функции u – *граничными условиями*. Граничные условия такого типа называются условиями Дирихле. В случае, когда вместо исходной функции задан поток q , граничное условие называется условием Неймана.

1.2 Метод конечных разностей

Краевая задача (3), конечно, может быть решена аналитически. Однако при переходе к многомерным задачам, областям Ω сложной формы, единственным вариантом в большинстве случаев является численное решение. Рассмотрим подходы к нему на примере простой одномерной задачи.

Первым делом выполняется разбиение расчетной области (в нашем случае – отрезка) на маленькие отрезки. Это разбиение называется сеткой (см. рис. 1). Точки разбиения называются узлами, а получающиеся отрезки – ячейками. Вводя сетку с N ячейками, мы имеем $N + 1$ узлов и шаг сетки, то есть размер ячейки, равный $\Delta x = L/N$. Формально говоря, узлы имеют координаты $x_i = i\Delta x$, $i = 0, \dots, N$. Ячейка с номером i представляет собой отрезок $[x_i, x_{i+1}]$.

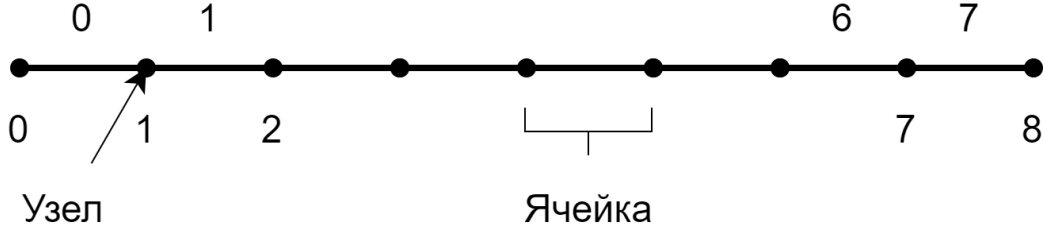


Рис. 1: Одномерная сетка с номерами узлов снизу и номерами ячеек сверху

Решением краевой задачи (3) в классическом смысле является некоторая функция $u \in C^2(0, L) \cap C[0; 1]$ и т.д. и т.п. В численном же решении мы будем искать набор значений в узлах:

$$y_i \approx u(x_i), \quad i = 0, \dots, N. \quad (4)$$

Поскольку значения в граничных узлах определяются граничными условиями, фактически задача сводится к поиску y_1, \dots, y_{N-1} .

Идея метода конечных разностей состоит в замене производных в уравнении на некоторые конечные разности. Так, например, можно использовать выражения

$$\begin{aligned} y_{x,i} &= \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} = u'(x_i) + \mathcal{O}(\Delta x), \\ y_{\bar{x},i} &= \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x} = u'(x_i) + \mathcal{O}(\Delta x), \end{aligned} \quad (5)$$

называемые разностными производными вперед и назад. Оценки на погрешность аппроксимации справедливы для достаточно гладких функций.

Разностная аппроксимация второй производной имеет вид

$$y_{x\bar{x},i} \equiv y_{\bar{x}x,i} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta x^2} = u''(x_i) + \mathcal{O}(\Delta x^2). \quad (6)$$

Для определения значений y_i составляется система линейных алгебраических уравнений. В каждом внутреннем узле исходное уравнение заменяется на разностную аппроксимацию:

$$\begin{cases} -\frac{y_2 - 2y_1 + a}{\Delta x^2} = f(x_1), \\ -\frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{\Delta x^2} = f(x_2), \\ \dots \\ -\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta x^2} = f(x_i), \dots \\ -\frac{b - 2y_{N-1} + y_{N-2}}{\Delta x^2} = f(x_{N-1}) \end{cases} \quad (7)$$

Если умножить все уравнения на Δx^2 , в матричном виде система принимает следующий вид:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{N-2} \\ y_{N-1} \end{bmatrix} = \Delta x^2 \begin{bmatrix} f(x_1) + a/\Delta x^2 \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ \vdots \\ f(x_{N-2}) \\ f(x_{N-1}) + b/\Delta x^2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Матрица системы является симметричной, знакоопределенной и разреженной (число ненулевых элементов порядка размера матрицы). Это типично для матриц, возникающих

при дискретизации уравнений в частных производных. Обычно для решения таких линейных систем применяются специальные методы, учитывающие свойства матрицы. В данном случае для трехдиагональной матрицы можно применить метод прогонки, имеющий идеальную сложность $\mathcal{O}(N)$.

1.3 Метод конечных объемов

Метод конечных объемов (англ. finite volume method), также известный как метод контрольного объема, интегро-интерполяционный метод и метод баланса— метод дискретизации уравнений в частных производных, хорошо подходящий для уравнений, включающих законы сохранения (подобно уравнениям (1)). Идея состоит в записи закона сохранения в интегральной форме на каждой ячейке (так называемом конечном объеме). Для этого первое уравнение в (1) интегрируется по ячейке:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial q}{\partial x} dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx, \quad (9)$$

$$q_{i+1} - q_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx, \quad (10)$$

Иначе говоря, разность потоков через границы ячейки равна интегральному значению источника в ячейке. Теперь необходимо как-то выразить потоки и аппроксимировать интеграл в правой части. В МКО это делается достаточно просто. Важное отличие от МКР заключается в том, что дискретные неизвестные относятся к ячейкам, а не к узлам! То есть, вместо поиска неизвестных y_1, \dots, y_{N-1} , соответствующих значениям во внутренних узлах, ищутся значения y_0, \dots, y_{N-1} , соответствующие значениям в центрах ячеек:

$$y_i \approx u(x_{i+1/2}). \quad (11)$$

Далее потоки в узлах выражаются конечными разностями с использованием в двух соседних ячейках, разграничивающихся узлом:

$$-\frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} + \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx, \quad (12)$$

Осталось аппроксимировать интеграл в правой части. Сделаем это с использованием значения источника в центре ячейки:

$$-\frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} + \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x} = f(x_{i+1/2})\Delta x. \quad (13)$$

Такие уравнения справедливы для внутренних ячеек. Для граничных ячеек с номерами 0 и $N-1$ несколько отличается аппроксимация потока. Конечная разность в этих случаях берется между значением в центре граничной ячейки и значением на границе, которые разделяет расстояние $\Delta x/2$, а не Δx :

$$-\frac{y_1 - y_0}{\Delta x} + \frac{y_0 - a}{\Delta x/2} = f(x_{1/2})\Delta x, \quad (14)$$

$$-\frac{b - y_{N-1}}{\Delta x/2} + \frac{y_{N-1} - y_{N-2}}{\Delta x} = f(x_{N-1/2})\Delta x. \quad (15)$$

Матричное представление системы следующее (если, как и в МКР, умножить уравнения на Δx):

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-2} \\ y_{N-1} \end{bmatrix} = \Delta x^2 \begin{bmatrix} f(x_{1/2}) + 2a/\Delta x^2 \\ f(x_{1+1/2}) \\ f(x_{2+1/2}) \\ \vdots \\ f(x_{N-3/2}) \\ f(x_{N-1/2}) + 2b/\Delta x^2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Эта система очень похожа на систему (8), полученную методом конечных разностей. Решение системы выполняется аналогично. На одномерных задачах разница решений практически незаметна, однако на более сложных задачах автоматическое выполнение закона сохранения массы в МКО позволяет получать физически более корректные решения.

2 Стационарное уравнение фильтрации в неоднородной одномерной области

2.1 Постановка задачи

Уравнения модели похожи на приведенные в начале уравнения (1). Уточним их со специфической для подземных вод терминологией и учетом неоднородности области. Уравнения имеют вид

$$\begin{cases} \frac{\partial q}{\partial x} = f(x), \\ q(x) = -K(x) \frac{\partial h}{\partial x}, \end{cases} \quad (17)$$

куда входят следующие величины (далее L – единицы длины, T – единицы времени):

- h – напор воды (англ. water head), основная неизвестная, $[L]$;
- q – поток воды (англ. flux), $[LT^{-1}]$;
- $K(x)$ – меняющийся по пространству коэффициент фильтрации (как правило – кусочно-постоянный на ячейках), $[LT^{-1}]$;
- $f(x)$ – источники и стоки, как правило, связанные с работой закачивающих или откачивающих скважин и подобных объектов, $[T^{-1}]$.

Эти уравнения описывают течение подземных вод в так называемых напорных условиях, когда поры среды заполнены водой до конца. Коэффициент фильтрации определяет способность среды пропускать воду.

2.2 Метод конечных объемов

Поскольку первое уравнение в системах (1) и (17) одинаково, так как описывает закон сохранения массы, отличие в построении схемы МКО заключается в выражении для потока, которое теперь должно учитывать неоднородность среды.

Построим выражение для потока через узел i , разграничивающий ячейки с номерами i и $i-1$, имеющие коэффициенты фильтрации K_{i-1} и K_i . Для этого введем вспомогательное значение напора в разграничивающем узле – h_* , и запишем с помощью него потоки в обеих ячейках:

$$q_{left} = -K_{i-1} \frac{h_* - h_{i-1}}{\Delta x/2}, \quad (18)$$

$$q_{right} = -K_i \frac{h_i - h_*}{\Delta x/2}. \quad (19)$$

Если приравнять эти потоки и выразить h_* , то выражение для потока через узел i получится следующим:

$$q_i = -\frac{2K_i K_{i-1}}{K_{i-1} + K_i} \frac{h_i - h_{i-1}}{\Delta x}, \quad (20)$$

что является, подобно случаю уравнения Пуассона, конечной разностью с коэффициентом фильтрации, вычисленным по формуле среднего гармонического.

Для потоков на границе среднее гармоническое не используется, берется значение коэффициента фильтрации из ячейки.

Итоговая система уравнений является, как и ранее, линейной системой вида

$$Ah = p, \quad (21)$$

где A – трехдиагональная матрица, h – вектор значений напора в ячейках сетки, а p – вектор правой части, содержащий вклад от источников/стоков и граничных условий.

3 Нестационарное уравнение фильтрации в неоднородной одномерной области

3.1 Постановка задачи

Эта задача отличается введением времени, то есть решение (напор) зависит не только от пространственной координаты x , но и от времени t , то есть $h = h(x, t)$. Задача ставится следующим образом:

$$\begin{cases} s_{stor}(x) \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} (K(x) \frac{\partial h}{\partial x}) = f(x), & x \in (0, L), t \in (0, t_{\max}) \\ h(0, t) = H_0, \quad h(L, t) = H_L, \\ h(x, 0) = H_{init}(x) \end{cases} \quad (22)$$

Коэффициент $s_{stor}(x)$ при производной по времени называется коэффициентом упругой емкости (англ. specific storage).

Задача (22) называется начально-краевой задачей для уравнения фильтрации. Она описывает изменение в пространстве и времени напора в одномерной неоднородной области, определяемое значениями напора на границе (H_0, H_L), а также начальным распределением напора H_{init} .

3.2 О численном решении нестационарных задач

Ранее под численным решением (для стационарной задачи) понимался набор приближенных значений в узлах (в случае МКР) или в ячейках (в случае МКО). Что меняется с введением времени? Временной отрезок также разбивается на меньшие с шагом $\Delta t = t_{\max}/N_t$, а решением является набор распределений по пространству («снимков») в отдельные моменты времени. Для численного решения вводится верхний индекс, обозначающий номер шага по времени. Так, для МКО используются следующее обозначение:

$$h_i^n \approx h(x_{i+1/2}, t_n), \quad t_n = n\Delta t. \quad (23)$$

Производную по времени аппроксимируем простейшей конечной разностью

$$\frac{\partial h}{\partial t} \approx \frac{h^{n+1} - h^n}{\Delta t}, \quad (24)$$

однако остается вопрос, с какого временного шага брать аппроксимацию производных по пространству, а также значение источника f .

3.3 Дискретизация по времени – неявная схема

Если брать эти значения с шага $n + 1$, то схема имеет следующий вид (приведено для внутренних ячеек):

$$s_{stor,i} \frac{h_i^{n+1} - h_i^n}{\Delta t} \Delta x + (q_{i+1}^{n+1} - q_i^{n+1}) = f(x_{i+1/2,t_{n+1}}) \Delta x. \quad (25)$$

Если умножить уравнения на Δx , то матричный вид системы можно связать с представлением (21):

$$\left(A + \frac{\Delta x^2}{\Delta t} I \right) h^{n+1} = p + \frac{\Delta x^2}{\Delta t} h^n. \quad (26)$$

Таким образом, для совершения шага по времени неявной схемой необходимо решать линейную систему с трехдиагональной матрицей, как и при решении стационарной задачи.

4 Задания

Нужно запрограммировать описанные методы. Можно на Python, тогда нужно использовать NumPy.

- Запрограммировать решение уравнения Пуассона с помощью МКР, для чего нужно составить систему вида (8) и решить ее прогонкой, после чего – нарисовать решение
- То же самое для МКО, система вида (16)
- Подставить в программы точное решение, например $u = \sin(x)$, и подсчет ошибки в C -норме (максимальное отличие по модулю в узлах (МКР) или ячейках (МКО)). Убедиться, что с уменьшением Δx ошибка падает квадратично
- Запрограммировать решение уравнения фильтрации в неоднородной области (17), для чего уточнить вид системы (21), учитывая выражение для потока (20)
- Запрограммировать решение нестационарной задачи неявной схемой – все примерно то же самое, только чуть меняется матрица, и решений становится много, по одному на шаг по времени