

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт
вычислительной математики им. Г.И.Марчука Российской академии наук

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт
проблем безопасного развития атомной энергетики Российской академии наук

На правах рукописи

Ануприенко Денис Валерьевич

**Эффективные методы решения задач фильтрации и
пороупругости на неструктурированных сетках**

Специальность 1.2.2 —

«Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

к.ф.-м.н.

Капырин Иван Викторович

Москва — 2023

Оглавление

	Стр.
Введение	5
Глава 1. Математическое описание течения жидкости в деформируемой пористой среде	11
1.1 Общие понятия о пористых средах	11
1.2 Подход Ричардса для описания фильтрации воды и воздуха	12
1.3 Закон Дарси, напор, относительная проницаемость	12
1.4 Замыкающие соотношения для влагосодержания, напора и относительной проницаемости	13
1.4.1 Модель Ван Генухтена – Муалема	14
1.4.2 Модель фильтрации в напорно-безнапорном режиме	15
1.5 Вывод уравнения Ричардса	16
1.6 Напряженно-деформированное состояние скелета	17
1.7 Закон Гука	18
1.8 Вывод уравнений пороупругости	19
1.8.1 Предположения и определения	19
1.8.2 Уравнение механического равновесия для скелета	20
1.8.3 Модификация уравнения Ричардса	20
1.9 Граничные и начальные условия	21
1.9.1 Граничные условия для уравнений фильтрации	21
1.9.2 Граничные условия для уравнений упругости	21
1.9.3 Начальные условия	21
Глава 2. Дискретизация уравнений	23
2.1 Расчетные сетки	23
2.2 Дискретизация уравнения фильтрации	24
2.2.1 Дискретизация по времени	24
2.2.2 Дискретизация по пространству	25
2.2.3 Метод конечных объемов	26
2.2.4 Метод опорных операторов	30
2.3 Дискретизация уравнения упругости	33
2.3.1 Обобщенная постановка для подзадачи упругости	35
2.3.2 Построение локальных аппроксимационных пространств .	36

2.3.3	Глобальное аппроксимационное пространство и нахождение приближенного решения	37
2.4	Итоговая схема МКО – МВЭ	39
2.4.1	Дискретизация сопрягающих членов	39
2.4.2	Свойства схемы	40
Глава 3. Методы решения систем уравнений, возникающих при дискретизации		42
3.1	Метод продолжения по нелинейности для стационарного уравнения Ричардса	42
3.1.1	О нелинейных системах, возникающих при дискретизации уравнения Ричардса	42
3.1.2	Метод Ньютона	43
3.1.3	Метод Пикара (простой итерации)	44
3.1.4	Комбинированный решатель	44
3.1.5	Линейный поиск	45
3.1.6	Трудности и альтернативные подходы	46
3.1.7	Метод установления	47
3.1.8	Метод продолжения по нелинейности – общие идеи	48
3.1.9	Предикторы в методе продолжения	51
3.2	Методы решения систем уравнений, возникающих при дискретизации уравнений пороупругости	51
Глава 4. Численные эксперименты		56
4.1	Первичное тестирование метода продолжения, сравнение эффективности с методом установления	56
4.1.1	Сравнение методов установления и продолжения на задаче о дамбе	57
4.1.2	Сравнение методов установления и продолжения на задаче для объекта А	58
4.1.3	Эффект линейного поиска и сравнение функций \mathcal{K}_{lin} и \mathcal{K}_{pow}	59
4.1.4	Случай замыкающих соотношений Ван Генухтена – Муалема для объекта А	62
4.1.5	Задача о Кучинском полигоне твердых бытовых отходов .	64

4.1.6	Выводы по серии экспериментов	65
4.2	Исследование эффективности различных корректоров в методе продолжения	65
4.2.1	Модель безнапорной фильтрации: модифицированная задача о дамбе	66
4.2.2	Модель безнапорной фильтрации: объект А	67
4.2.3	Модель Ван Генухтена – Муалема: модифицированная задача о дамбе	68
4.2.4	Выводы по серии экспериментов	71
4.3	Исследование эффективности предиктора первого порядка в методе продолжения	71
4.3.1	Задача о капиллярном барьере	72
4.3.2	Задача о хранилище радиоактивных отходов	74
4.3.3	Выводы по серии экспериментов	76
4.4	Исследование сходимости численного решения задач пороупругости на не \mathbb{K} -ортогональных сетках	77
4.5	Исследование эффективности монолитного подхода и метода итерационного расщепления для пороупругости при параллельных вычислениях	79
4.5.1	Задача о пласте с разломом	79
4.5.2	Задача о глубинной закачке	81
4.5.3	Выводы по серии экспериментов	84
Заключение	87
Список литературы	88

Введение

Актуальность темы исследования. Математическое моделирование на основе начально-краевых задач для уравнений в частных производных широко используется при изучении множества процессов, протекающих в геологических средах. Такое моделирование является необходимым при изучении состояния подземных вод [1; 2], при разработке месторождений углеводородов [3; 4], при планировании закачки углекислого газа в подземные хранилища [5; 6], а также при оценке безопасности пунктов захоронения радиоактивных отходов [7; 8]. Физические процессы, рассматриваемые при решении перечисленных задач, схожи, и среди них можно выделить некоторые группы. Так, процессы течения жидкостей (воды, нефти, сжиженного углекислого газа и других) относятся к гидродинамическим процессам. Такие процессы, как теплопередача в жидкостях и пористых средах, тепловыделение в радиоактивных отходах относятся к тепловым процессам. К механическим процессам относятся деформации, возникающие под воздействием течения жидкостей, тепловых и других эффектов в пористых средах или подземных инженерных конструкциях. Наконец, химические процессы включают в себя разнообразные химические реакции. В литературе совокупность этих процессов обозначается аббревиатурой ТГ-МХ¹. Многие наблюдаемые явления, среди которых тепловая и плотностная конвекция [9—11], некоторые гидромеханические явления, такие как эффект Манделя–Крайера [12; 13], можно предсказать только с помощью моделей, включающих процессы из нескольких описанных выше групп. В связи с этим, в последние десятилетия сложилось понимание необходимости совместного моделирования ТГМХ-процессов. Такое моделирование является предметом обширных исследований, среди которых можно выделить, например, длящийся с 1992 года проект DECOVALEX [14—17], связанный с захоронениями радиоактивных отходов; работы по моделированию захоронений углекислого газа [18—20] и добычи углеводородов [21—23]. Модели и методы, используемые в перечисленных приложениях, во многом схожи, и новые разработки могут быть актуальны сразу в нескольких областях.

¹В англоязычной литературе часто встречается аббревиатура ТНМС от thermo-hydro-mechanical-chemical.

Технологии прогнозирования с помощью моделирования ТГМХ-процессов развиваются в различных направлениях. Расширяется спектр учитываемых физических явлений и уточняется их описание, для чего можно совмещать хорошо налаженные технологии моделирования разных групп ТГМХ-процессов в рамках одного симулятора [24—26]. Повышается точность рассмотрения моделируемых объектов за счет подробного воспроизведения расчетной сеткой деталей строения геологических областей, инженерных конструкций и других мелко-масштабных объектов [27]. Как правило, используются неструктурированные сетки, которые в случае сложной геологической структуры области, наличия инженерных объектов (для которых сетки иногда строятся отдельными генераторами) и рассекающих сетку трещин содержат в себе ячейки, которые могут быть произвольными многогранниками [28]. Такие сетки значительно сужают круг численных методов, которые можно использовать для дискретизации уравнений в частных производных, описывающих ТГМХ-процессы. Так, метод конечных элементов [29—31], широко применяемый для различных задач математической физики [32; 33], в том числе для моделирования подземных ТГМХ-процессов [34; 35], испытывает значительные трудности при применении на ячейках сложной формы, что подталкивает к поиску альтернативных подходов. Популярным методом дискретизации, подходящим для широкого класса ячеек, является метод конечных объемов [36—38]. Этот метод широко используется для решения задач, связанных с подземными течениями [3; 39; 40], а по части ТГМХ-процессов имеется опыт совместного моделирования тепловых и гидродинамических процессов [10; 41; 42], а также подключения химических [43]. При использовании конечнообъемного подхода для гидромеханических задач существуют различные подходы к дискретизации механической подзадачи. Так, часто используется метод конечных элементов [44; 45], что, как уже отмечалось, сужает круг подходящих расчетных сеток. Возможно также построение полностью конечнообъемных дискретизаций для гидромеханических задач [46—49], не лишенных некоторых недостатков, например, неустойчивости при малом размере шага по времени [50]. Альтернативным подходом, набирающим популярность в последнее время, является метод виртуальных элементов [51; 52]. Существует опыт применения этого метода совместно с методом конечных объемов для моделирования процессов пороупругости [53]. Такая связка позволяет проводить расчеты на ячейках достаточно сложной формы при сохранении некоторых положительных качеств метода конечных элементов. Исходя из этих

фактов, метод виртуальных элементов является перспективным кандидатом на роль метода дискретизации механических подзадач в связке с методом конечных объемов при моделировании ТГМХ-процессов. Одними из шагов, которые могут быть сделаны в развитии такого подхода, являются усложнение физической модели процессов и расширение класса подходящих расчетных сеток за счет применения усложненной конечнообъемной дискретизации.

Как расширение спектра учитываемых физических процессов, так и развитие методов дискретизации приводят к усложнению возникающих систем алгебраических уравнений относительно сеточных неизвестных. Создание эффективных способов решения этих уравнений является актуальной задачей. При этом значительные сложности могут возникать даже в моделях, учитывающих лишь одну группу процессов, например, фильтрационных [54–56]. При моделировании ТГМХ-процессов эти трудности не уходят, а могут даже обостряться за счет сочетания различных подзадач, что побуждает использовать такие подходы, как разделение на подзадачи по группам процессов [44; 57]. Таким образом, создание эффективных решателей является актуальной задачей в моделировании ТГМХ-процессов.

Наконец, растущая детализация моделей объектов делает нередкими расчеты на сетках, содержащих миллиарды ячеек [58–60]. При проведении таких расчетов необходимостью является их распараллеливание и задействование высокопроизводительных вычислительных систем. Поэтому разрабатываемые технологии должны быть параллелизованы и исследованы на предмет эффективности параллелизации.

Целью данной работы является разработка методов решения задач, возникающих при моделировании процесса течения подземных вод в условиях переменной насыщенности, а также при моделировании этого процесса совместно с упругой деформацией пористой среды.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Изучить математические модели течения подземных вод в пористых средах и деформации этих сред, определить постановку задач для отдельного и совместного моделирования;
2. Выбрать численные методы для дискретизации полученной системы уравнений и проанализировать их свойства;

3. Разработать методы решения возникающих систем нелинейных алгебраических уравнений, в том числе: специальный метод решения стационарных задач течения подземных вод в условиях переменной насыщенности;
4. Программно реализовать описанные подходы, обеспечить возможность их применения в параллельном режиме и проанализировать эффективность параллелизации.

Научная новизна: Для решения систем уравнений, возникающих при дискретизации стационарного уравнения Ричардса, применен метод продолжения по параметру со специальной параметризацией относительной проницаемости. Показано, что метод представим в виде процедуры типа предиктор–корректор, исследованы различные предикторы и корректоры с точки зрения влияния на время решения задач. Для задачи пороупругости в условиях переменной насыщенности среды водой построена дискретизация на основе методов конечных объемов и виртуальных элементов, для возникающих систем алгебраических уравнений наряду с монолитным подходом применен метод итерационного расщепления.

Практическая значимость работы состоит в создании программного комплекса, реализующего предложенные в работе методы с помощью платформы INMOST². Это позволяет встроить их в программный комплекс GeRa [61], применяемый рядом организаций для оценки безопасности проектируемых пунктов захоронения радиоактивных отходов и других влияющих на подземные воды объектов. Метод продолжения в GeRa доведен до практического применения и доступен для пользователей; с его помощью удалось значительно сократить время расчета для ряда практических задач.

Методология и методы исследования. Методы, использованные в данной работе, включают в себя численные методы решения систем нелинейных уравнений в частных производных, а также методологию построения численного эксперимента.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Разработан метод продолжения по параметру с параметризацией относительной проницаемости для решения стационарных задач ненасыщенной фильтрации на основе уравнения Ричардса. Метод внедрен в

²Integrated Numerical Modelling and Object-oriented Supercomputing Technologies, Интегрированные объектно-ориентированные суперкомпьютерные технологии для численного моделирования

- программный комплекс GeRa, что в сравнении с ранее реализованным методом позволило расширить круг решаемых практических задач и существенно ускорить время расчетов (до двух порядков);
2. Метод продолжения представлен в виде процедуры типа предиктор–корректор, исследовано влияние различных предикторов и корректоров на время решения;
 3. Построена схема дискретизации уравнений пороупругости на сетках из многогранников в случае неполной насыщенности среды водой, использующая методы конечных объемов и виртуальных элементов;
 4. Созданы параллелизованные комплексы программ на основе платформы INMOST, реализующие описанные подходы.

Достоверность полученных результатов обеспечивается использованием устоявшихся подходов к описанию физических процессов на основе задач для уравнений в частных производных, опорой на известные численные методы дискретизации и решения систем уравнений, а также сравнением результатов, полученных разработанным комплексом программ, с аналитическими решениями и результатами, полученными аттестованными программными средствами.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на конференции «Ломоносовские чтения» (г. Москва, 2019 г.), конференции «The Week of Applied Mathematics and Mathematical Modelling» (г. Владивосток, 2019 г.), XX и XIX научных конференциях «Школа молодых учёных ИБРАЭ РАН» (г. Москва, 2019 и 2022 гг.), 64-й Всероссийской научной конференции МФТИ (г. Москва, 2019 г.), Международных научных конференциях студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» (г. Москва, 2020, 2021, 2022 гг.), международных конференциях «Вычислительная математика и приложения» (пгт. Сириус, 2021 и 2022 гг.), международной конференции «Суперкомпьютерные дни в России» (г. Москва, 2022 г.).

Личный вклад. В работе [160] автором предложен и программно реализован метод продолжения по нелинейности, проведены численные эксперименты. В работе [161] автором реализован метод Ньютона и проведены численные эксперименты. Работа [162] полностью выполнена лично автором, предложены и программно реализованы различные корректоры в методе продолжения, проведены численные эксперименты. Работа [163] полностью выполнена лично автором, предложен и программно реализован новый предиктор в методе продолжения, выполнены численные эксперименты. Работа [164]

полностью выполнена лично автором: программно реализована схема для пороупругости и проведены численные эксперименты на высокопроизводительной вычислительной системе.

По теме диссертации опубликовано 5 работ [160—164], из них 5 работ [160—164] индексируются в международных базах данных Scopus или Web of Science и входят в перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание учёной степени кандидата наук. Зарегистрирована (в составе группы разработчиков) 1 программа для ЭВМ (свидетельство о государственной регистрации №2020611976 «Программа для трёхмерного геофильтрационного и геомиграционного моделирования (GeRa/V2)»).

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, 4 глав и заключения. Полный объём диссертации составляет 102 страницы, включая 29 рисунков и 19 таблиц. Список литературы содержит 164 наименования.

Благодарности. Автор выражает признательность научному руководителю И.В. Капырину за всестороннюю поддержку, Ю.В. Василевскому за ценные замечания и советы в выборе направления работ, К.М. Терехову за ценные замечания и рекомендации, а также всем коллегам из ИВМ РАН и ИБРАЭ РАН. Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 20-31-90126.

Глава 1. Математическое описание течения жидкости в деформируемой пористой среде

Модели, рассматриваемые в данной работе, основываются на уравнениях в частных производных. Целью первой главы является выбор уравнений, описывающих фильтрацию жидкости в деформируемой пористой среде в условиях переменной насыщенности, а также начальных и граничных условий.

1.1 Общие понятия о пористых средах

Под пористой средой понимается область пространства, заполненная частицами твердого тела, между которыми находятся пустоты. Пустоты называются порами, а часть пористой среды, состоящая из твердых частиц – скелетом. Задачи, рассматриваемые в данной работе, имеют преимущественно гидрогеологические приложения, поэтому поры считаются заполненными водой или воздухом, при этом наличие воздуха учитывается с помощью упрощенной модели. Путем несложных модификаций рассматриваемые модели могут быть применены и для других жидкостей.

Для описания пористых материалов в данной работе используется подход на основе понятия сплошной среды. При таком подходе детали границ между скелетом и порами, а также между водой и воздухом опускаются. Если для среды представляется возможным ввести репрезентативный элементарный объем, по которому можно осреднять величины, то характеристики пористой среды можно задавать в каждой точке среды [1]. Далее величины, характеризующие скелет, обозначаются индексом « s » (от «solid»), а величины, характеризующие воду – индексом « w » (от «water»).

Основополагающей характеристикой пористой среды является *пористость* ϕ , определяемая как отношение объема пор к общему объему среды. Заполненность пор водой описывается *насыщенностью водой (насыщенностью)* S , которая определяется как отношение объема, занятого водой, к общему объему пор. С насыщенностью связано понятие *объемного влагосодержания* θ , определяемого как отношение объема, занятого водой, к общему

объему среды. Насыщенность и влагосодержание связаны выражением

$$\theta = \varphi \cdot S. \quad (1.1)$$

Отметим, что рассмотренные выше величины S и φ вводились для воды. Для воздуха же насыщенность пор однозначно определяется величиной $1 - S$, а объемное содержание в пористой среде – величиной $\varphi \cdot (1 - S)$.

1.2 Подход Ричардса для описания фильтрации воды и воздуха

Полноценное описание фильтрации воды и воздуха в пористых средах требует использования модели фильтрации с учетом жидкой и газовой фазы. В то же время на практике часто можно обойтись более простыми моделями, так или иначе упрощающими учет движения воздуха. В данной работе используется подход Ричардса [62]. В этом подходе уравнение движения воздуха опускаются, поскольку воздух является существенно менее вязким и плотным по сравнению с водой, и в целом считается значительно более подвижным. Учет наличия воздуха производится через вводимые далее коэффициенты и зависимости, связанные с неполной насыщенностью пор водой. Давление воздуха считается постоянным и равным атмосферному, которое, в свою очередь, принимается за точку отсчета и считается нулевым. Удобство подхода Ричардса также состоит в том, что случай напорной фильтрации, при котором в порах находится только вода, может быть описан заданием $S \equiv 1$ без изменения числа основных переменных.

1.3 Закон Дарси, напор, относительная проницаемость

Одним из определяющих течение подземных вод законом является закон Дарси [63]. Широко распространенной формулировкой закона Дарси является следующая:

$$\mathbf{q} = -\frac{1}{\mu_w} \mathbb{K}_{intr} \nabla (P + \rho_w g z), \quad (1.2)$$

где \mathbf{q} – вектор скорости фильтрационного потока, μ_w – динамическая вязкость воды, $\mathbb{K}_{intr} = \mathbb{K}_{intr}^T > 0$ – тензор собственной проницаемости среды, квадратная матрица размера 3; P – давление воды, ρ_w – плотность воды, g – ускорение свободного падения, z – вертикальная координата.

В данной работе закон Дарси рассматривается в другой формулировке, характерной для гидрогеологических задач [1]:

$$\mathbf{q} = -\mathbb{K}\nabla h, \quad (1.3)$$

где $\mathbb{K} = \frac{\rho_w g}{\mu_w} \mathbb{K}_{intr}$ – тензор фильтрации, $h = \frac{P}{\rho_w g} + z$ – напор воды. Такая формулировка удобна, когда $\rho_w = const$ и $\mu_w = const$, то есть вода является несжимаемой и не меняет свою вязкость.

В случае присутствия и воды, и воздуха закон Дарси необходимо модифицировать. Для этого вводится *относительная проницаемость* K_r для воды, которая является функцией насыщенности S , и закон Дарси принимает следующий вид:

$$\mathbf{q} = -K_r(S)\mathbb{K}\nabla h. \quad (1.4)$$

1.4 Замыкающие соотношения для влагосодержания, напора и относительной проницаемости

Напор h можно представить в виде

$$h = \frac{P}{\rho_w g} + z = \psi + z, \quad (1.5)$$

где введенная величина $\psi = \frac{P}{\rho_w g}$ называется *высотой всасывания*.

Для полного построения модели течения подземных вод в условиях переменной насыщенности необходимо определить функцию относительной проницаемости $K_r(S)$, а также связать между собой напор (или высоту всасывания или давление) воды с влагосодержанием (или насыщенностью). Отметим, что из замыкающих соотношений, связывающих θ и h можно получить соотношения, связывающие S и ψ , используя выражения (1.1) и (1.5). То же самое справедливо и для других комбинаций этих переменных. Отсюда также вытекает, что

относительную проницаемость можно задавать как в виде $K_r(S)$, так и в виде $K_r(\theta)$ или даже $K_r(h)$.

В данной работе рассматриваются два набора замыкающих соотношений.

1.4.1 Модель Ван Генухтена – Муалема

В этой модели влагосодержание (следовательно, и насыщенность) зависит от высоты всасывания ψ . Считается, что влагосодержание лежит в пределах $\theta_r < \theta < \theta_s$, где θ_r – остаточное влагосодержание, не извлекаемое гравитацией, а θ_s – максимальное влагосодержание, которое может и не совпадать с пористостью φ .

Зависимость влагосодержания от высоты всасывания предложена Ван Генухтеном [64] и имеет следующий вид:

$$\theta(\psi) = \begin{cases} \theta_r + \frac{\theta_s - \theta_r}{(1 + |\alpha_{vg}\psi|^n)^m} & \text{при } \psi < 0, \\ \theta_s & \text{при } \psi \geq 0, \end{cases} \quad (1.6)$$

где α_{vg} , $n, m = 1 - 1/n$ – параметры модели, характеризующие размер пор.

Зависимость относительной проницаемости от влагосодержания предложена Муалемом [65] и имеет следующий вид:

$$K_r(\theta) = \sqrt{S_e} \left(1 - \left(1 - S_e^{1/m} \right)^m \right)^2, \quad (1.7)$$

где $S_e = (\theta - \theta_r) / (\theta_s - \theta_r)$ – эффективная насыщенность.

Модель Ван Генухтена – Муалема широко используется для описания течения подземных вод в зоне аэрации, особенно в случаях, где важны капиллярные эффекты, такие, как образование капиллярных барьеров [66], которые она хорошо воспроизводит [67]. К недостаткам модели относятся необходимость задания параметров α_{vg} и n для всех сред, присутствующих в области (хотя приближенные значения часто можно найти в литературе), а также сильная нелинейность функций, создающая проблемы при численном моделировании.

1.4.2 Модель фильтрации в напорно-безнапорном режиме

Так называемая модель фильтрации в напорно-безнапорном режиме¹, сформулированная И.В. Капыриным в работе [161] для конечнообъемных дискретизаций, относится к классу моделей, ориентированных на последующее численное решение с использованием сеток и использует геометрические величины конкретных ячеек. Подобным подходом является псевдоненасыщенная модель с выделением свободной поверхности (см. параграф 9.5.4 в работе [68]). Модель безнапорной фильтрации никак не использует понятие высоты всасывания. Зависимости в модели построены с учетом того, что численное решение проводится методом конечных объемов, располагающим напоры и влагосодержания в ячейках. Тем не менее, модель подходит и для других дискретизаций с таким расположением неизвестных.

Зависимость влагосодержания от напора воды имеет следующий кусочно-линейный вид:

$$\theta(h) = \begin{cases} \varphi & \text{при } h > h_{\max}, \\ \varphi \frac{h-h_{\min}}{h_{\max}-h_{\min}} & \text{при } h_r < h < h_{\max}, \\ \varphi (\alpha_\varphi - \alpha_\theta (h_r - h)) & \text{при } h < h_r, \end{cases} \quad (1.8)$$

где h_{\max} , h_{\min} – максимальная и минимальная вертикальные координаты точек ячейки, а h_r – такое значение напора, что влагосодержание, определяемое вторым линейным участком в (1.8), достигает величины $\alpha_\varphi \varphi$, т.е. $h_r = h_{\min} + \alpha_\varphi (h_{\max} - h_{\min})$.

Таким образом, в модели необходимо задать два параметра α_φ и α_θ , которые должны быть достаточно малыми, чтобы не допустить отрицательных значений влагосодержания при малых значениях напора, но при этом обеспечить линейный рост влагосодержания с ростом напора на большом участке значений.

Относительная проницаемость предполагается равной насыщенности:

$$K_r(S) = S = S(\theta) = \frac{\theta}{\varphi}. \quad (1.9)$$

¹Берет свое название от безнапорных водоносных горизонтов, в которых верхняя граница вод является свободной поверхностью и на которой напор воды не превышает вертикальную координату

В отличие от модели Ван Генухтена – Муалема, модель безнапорной фильтрации неспособна воспроизводить капиллярные эффекты [61]. Она также применима лишь для дискретизаций, располагающих напор, насыщенность и влагосодержание в центрах ячеек сетки. Тем не менее, модель применима в случаях, когда капиллярные эффекты не столь важны (например, для объектов, чьи размеры существенно превышают характерный размер зоны капиллярных эффектов), и требует лишь два параметра вне зависимости от числа материалов в области.

1.5 Вывод уравнения Ричардса

В случае несжимаемой воды сохранение ее массы в пористой среде описывается следующим уравнением [1]:

$$\frac{\partial(\varphi S)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q} = Q, \quad (1.10)$$

где Q – интенсивность источников/стоков. Производную по времени можно раскрыть следующим образом:

$$\frac{\partial(\varphi S)}{\partial t} = \varphi \frac{\partial S}{\partial t} + S \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (1.11)$$

Второй член в последнем выражении связан с деформацией скелета. При выводе стандартного уравнения Ричардса деталями этой деформации пренебрегается. Для производной пористости по времени используется следующее приближение:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \approx s_{stor} \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (1.12)$$

где s_{stor} – коэффициент упругой емкости. Проделав описанные выкладки и совместив уравнение сохранения массы воды с законом Дарси (1.4), можно получить уравнение Ричардса:

$$\varphi \frac{\partial S}{\partial t} + S \cdot s_{stor} \frac{\partial h}{\partial t} - \nabla \cdot (K_r(S) \mathbb{K} \nabla h) = Q. \quad (1.13)$$

Это уравнение описывает течение воды в пористой среде в случае частичной заполненности пор водой при предположении постоянного давления

воздуха. Твердый скелет считается деформируемым, что учитывается через изменение пористости, но без полноценного учета напряженно-деформированного состояния (уравнение фильтрации с учетом этого эффекта выводится в разделе 1.8).

Рассматривается также стационарное уравнение Ричардса:

$$-\nabla \cdot (K_r(S)\mathbb{K}\nabla h) = Q. \quad (1.14)$$

Задачи для стационарного уравнения Ричардса ставятся, например, при прогнозировании переноса примесей по подземным водам на большой срок. Если шаг по времени в задаче переноса достаточно велик, то изменениями фильтрационных потоков в течение года можно пренебречь и считать фильтрацию стационарной, осреднив по году граничные условия и источники.

1.6 Напряженно-деформированное состояние скелета

В некоторых случаях изменения формы твердого скелета и возникающие при этом напряжения представляет интерес, и тогда наряду с течением подземных вод в модель добавляются уравнения, описывающие напряженно-деформированное состояние твердого скелета. Рассмотрим для начала твердый скелет без учета занимающей поры воды.

Для описания изменения формы скелета используется *вектор перемещений* \mathbf{u} , который описывает отклонение точки от начальной конфигурации. Изменение формы скелета, характеризующееся перемещениями \mathbf{u} , приводит к *деформации*, описывающейся *тензором деформаций*, квадратной матрицей размера 3:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \frac{\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T}{2}. \quad (1.15)$$

Деформация приводит к возникновению в твердом скелете *напряжений*, описываемых зависящим от тензора деформаций *тензором напряжений*:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}). \quad (1.16)$$

1.7 Закон Гука

В общем случае зависимость (1.16) может иметь достаточно сложный вид. В данной работе рассматривается лишь случай упругих деформаций, для которого справедлив так называемый обобщенный закон Гука. В случае сжимаемого материала закон принимает следующий вид:

$$\sigma = \mathbb{C} : \varepsilon, \quad (1.17)$$

где \mathbb{C} – тензор упругости 4-го порядка. Для удобства представления часто используется нотация Фойгта, где тензоры напряжений и деформаций вследствие их симметричности представляются в виде векторов размера 6, а тензор упругости – в виде симметричной матрицы размера 6:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ & & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ & & & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ & & & & c_{55} & c_{56} \\ & \dots & & & & c_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix}. \quad (1.18)$$

Тензор упругости изотропного материала имеет вид

$$\mathbb{C} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu \\ \nu & 1-\nu & \nu \\ \nu & \nu & 1-\nu \\ & & & 2(1-2\nu) \\ & & & & 2(1-2\nu) \\ & & & & & 2(1-2\nu) \end{bmatrix}, \quad (1.19)$$

где E – модуль Юнга, а ν – коэффициент Пуассона. Таким образом, для изотропного материала тензор упругости полностью определяется двумя величинами.

1.8 Вывод уравнений пороупругости

Рассмотрим теперь случай, когда напряженно-деформированное состояние среды существенно. В этом случае добавляются уравнения, явно описывающие это состояние, а также меняется вид уравнения, описывающего фильтрацию воды.

1.8.1 Предположения и определения

Для описания реакции твердого скелета на заполняющие поры воду и воздух вводится еще ряд величин.

Объемный модуль упругости характеризует способность твердого скелета сопротивляться всестороннему сжатию и выражается следующим образом:

$$K_{dr} = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}. \quad (1.20)$$

Считается, что этот модуль упругости соответствует дренированному состоянию, то есть, в котором при сжатии вода может свободно вытекать из пор.

В присутствии воды и воздуха, заполняющих поры, выделяют так называемые *эффективные напряжения*, равные

$$\sigma_e = \sigma + \alpha P_{pore} \mathbb{I}, \quad (1.21)$$

где $P_{pore} = S \cdot P + (1 - S) \cdot 0$ – поровое давление, равное сумме давлений воды и воздуха (второе из которых считается равным нулю, см. раздел 1.2), умноженных на соответствующие насыщенности. Иными словами,

$$\sigma_e = \sigma + \alpha S P \mathbb{I}. \quad (1.22)$$

Закон Гука (1.17) при учете давления воды выполняется именно для эффективных напряжений σ_e .

Коэффициент α в выражении (1.22) называется *коэффициентом Био*, предложенным Био в [69] и тогда представленном в виде

$$\alpha = \frac{K}{H}, \quad (1.23)$$

где $1/H$ – коэффициент расширения пор.

В данной работе коэффициент Био α для каждого материала считается заданным.

1.8.2 Уравнение механического равновесия для скелета

Определяющим уравнением для процесса упругой деформации является уравнение механического равновесия

$$\nabla \cdot \sigma = \mathbf{f}, \quad (1.24)$$

где \mathbf{f} – вектор внешних сил. Использование стационарного уравнения (1.24) возможно в предположении, что скелет реагирует на изменения порового давления достаточно быстро.

Уравнение (1.24) можно представить в виде

$$-\operatorname{div} \left(\mathbb{C} : \frac{\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T}{2} - \alpha S P \mathbb{I} \right) = \mathbf{f}, \quad (1.25)$$

учитывающем выражение для эффективных напряжений (1.22) и закон Гука (1.17)

1.8.3 Модификация уравнения Ричардса

Отличие выводимого далее уравнения от уравнения Ричардса (1.13) заключается в учете изменения пористости (выражение (1.12)). Согласно работе Кусси [70], принимается

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \alpha \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) + s_{stor} \frac{\partial h}{\partial t}. \quad (1.26)$$

Таким образом, итоговое уравнение течения подземных вод принимает вид

$$\varphi \frac{\partial S}{\partial t} + S \cdot s_{stor} \frac{\partial h}{\partial t} + \alpha S \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) - \nabla \cdot (K_r(S) \mathbb{K} \nabla h) = Q. \quad (1.27)$$

Приведем также версию уравнения в случае полной насыщенности среды водой:

$$s_{stor} \frac{\partial h}{\partial t} + \alpha \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) - \nabla \cdot (\mathbb{K} \nabla h) = Q. \quad (1.28)$$

1.9 Границные и начальные условия

1.9.1 Границные условия для уравнений фильтрации

Введем следующие граничные условия:

- Условие Дирихле: заданный напор h ;
- Условие Неймана: заданный нормальный поток $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$.
- Условие просачивания, зависящее от решения: при $h < z$ задается нулевой поток; при превышении $h \geq z$ устанавливается ограничение $h = z$, где z – вертикальная координата.

1.9.2 Границные условия для уравнений упругости

Рассматриваются следующие граничные условия:

- Условие Дирихле: заданные перемещения \mathbf{u} ;
- Условие Неймана: заданная нагрузка $\mathbf{t} = \sigma \mathbf{n}$;
- Условие проскальзывания: нулевые нормальные перемещения $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$.

1.9.3 Начальные условия

Начальные условия полностью задаются распределением напора h . По этим значениям можно найти давление P и насыщенность S и использовать

их для нахождения перемещений и напряжений, решив задачу для уравнения (1.25).

Глава 2. Дискретизация уравнений

2.1 Расчетные сетки

Современные задачи, возникающие при гидрогеологическом моделировании, определяют специфику используемых расчетных сеток.

Во-первых, расчетная область, как правило, имеет неправильную форму вследствие выбора границ по рекам, границам водораздела, разделяющим геологические слои поверхностям. Построение структурированных расчетных сеток в таких случаях затруднительно, и предпочтение отдается неструктурным.

Во-вторых, расчетная область часто является «плоской»: размеры области в горизонтальной плоскости могут в десятки и сотни раз превышать размеры по вертикали. При этом характерно разбиение области на геологические слои, которые необходимо учитывать при построении сетки, и подобласть, соответствующая отдельному слою, является еще более «плоской». В таком случае использование тетраэдральных сеток, технологии построения которых хорошо развиты [71], затруднительно, поскольку при приемлемом шаге сетки в горизонтальной плоскости тетраэдры получаются уплощенными, что приводит к проблемам в численных схемах. Разумным является следующий подход: построение двумерной сетки в горизонтальном срезе области и последующее построение по ней призматической сетки (экструзия) [28].

В-третьих, в расчетной области часто присутствуют зоны, где размер шага сетки должен быть понижен. Сюда относятся скважины, источники загрязнений и другие участки с особенностями решения. Во избежание неоправданно большого роста числа ячеек следует применять адаптивные сетки, которые можно сгустить только там, где это необходимо.

В-четвертых, повышение детализации моделей гидрогеологических объектов может привести к включению в геологическую область инженерных конструкций, окружающих ПЗРО. При этом для инженерных конструкций оптимальными могут оказаться уже не призмы; сетки для этих объектов могут быть импортированы из внешних инженерных пакетов. Таким образом, итоговые сетки могут содержать в себе ячейки разных типов. Нетипичные ячейки

(пирамиды с многогранным основанием и другие) могут возникать и в местах выклинивания геологических слоев.

Подводя итог, можно сформулировать следующие ключевые свойства используемых расчетных сеток:

- Неструктурированность;
- Адаптивность;
- Наличие уплощенных ячеек;
- Наличие ячеек произвольной формы.

Эти свойства сеток представляют собой важный фактор при выборе методов дискретизации.

2.2 Дискретизация уравнения фильтрации

2.2.1 Дискретизация по времени

Из-за параболического характера уравнения Ричардса (1.13) использование явных схем по времени не практикуется в связи с жесткими ограничениями на размер шага по времени. Типичным является использование неявных схем низкого порядка аппроксимации [55], среди которых чаще всего применяется неявная схема Эйлера [72]. Встречается также использование неявных и полу-неявных схем более высокого порядка [73; 74].

Для уравнений пороупругости применение неявной схемы Эйлера также широко распространено [50; 53; 75]. Поэтому в данной работе для дискретизации по времени уравнения Ричардса (1.13), а также его аналога в составе уравнений пороупругости (1.27) применяется именно эта схема. Она имеет первый порядок аппроксимации и является абсолютно устойчивой, но приводит к необходимости решать системы уравнений относительно сеточных неизвестных на каждом шаге по времени. В общем случае эти системы являются нелинейными. Итерационные методы, применяемые для решения возникающих нелинейных систем, могут не сходиться при достаточно больших значениях шага по времени [55; 76]. В связи с этим, несмотря на абсолютную устойчивость схемы, могут возникать ограничения на размер шага по времени.

2.2.2 Дискретизация по пространству

Основной задачей при построении дискретизации уравнения фильтрации является выбор дискретизации оператора диффузионного типа $\nabla \cdot (\mathbb{K} \nabla h)$. Построение таких дискретизаций – одна из хорошо изученных тем в вычислительной математике, для которой предложено большое число подходов. Кратко осветим некоторые из них.

Одним из первых подходов к дискретизации уравнений диффузионного типа является метод конечных разностей (МКР) [36], предложенный для аппроксимации уравнения Лапласа на квадратных сетках в основополагающей работе 1928 года Куранта, Фридрихса и Леви [77]. Примеры использования конечноразностных схем для уравнения Ричардса можно найти в работах [72; 73; 78]. Главным недостатком МКР является тесная связь со структурированными сетками, что делает невозможным его применение на сетках, описанных в разделе 2.1.

Другим широко распространенным методом дискретизации является метод конечных элементов (МКЭ), основанный на вариационных методах решения задач математической физики, таких как метод Ритца [79], в сочетании с кусочными аппроксимациями решения на ячейках сетки, первыми среди которых были предложенные в 1943 году кусочно-линейные функции [80]. В настоящее время МКЭ является, возможно, самым развитым методом дискретизации широкого ряда задач математической физики [30; 33], обладает обширной теоретической базой, ясной алгоритмической формулировкой, возможностями построения схем произвольного порядка аппроксимации. Минусами метода являются локальная (на ячейках) неконсервативность и немонотонность в некоторых случаях [81]. МКЭ применяется для уравнения Ричардса во многих широко используемых в настоящее время программных комплексах для моделирования подземных процессов, среди которых OpenGeoSys [34], FEFLOW [68] и HYDRUS [82], а первые применения отмечаются еще в 1970-х годах [83]. Существует ряд методов дискретизации, родственных МКЭ, таких как методы смешанных и гибридных конечных элементов [84–86], которые могут обеспечить консервативность и некоторые другие положительные качества ценой дополнительной вычислительной сложности. Важным недостатком МКЭ является, при всей его универсальности, привязка к форме ячеек, что необходимо

для построения базисных функций. Для работы на произвольных многогранниках предложены подходы на основе функций специального вида [87; 88], однако они не нашли широкого применения ввиду высокой вычислительной сложности, присущей и другому подходу – разрывному методу Галёркина [89; 90]. Существенные проблемы МКЭ на сетках, описанных в разделе 2.1, являются главным фактором, вынуждающим отказаться от его использования.

В данной работе используются два метода дискретизации операторов диффузионного типа – метод конечных объемов и метод опорных операторов. Одним из основных преимуществ этих методов является работа на широком классе ячеек. При этом метод конечных объемов является основным подходом, используемом в GeRa с самого начала разработки этого программного комплекса, а метод опорных операторов используется автором в исследовательских целях, его применение ограничивается стационарным уравнением Ричардса (1.14).

2.2.3 Метод конечных объемов

Метод конечных объемов (МКО) [37], также известный под названиями интегро-интерполяционный метод и метод баланса [36], а также метод контрольного объема, является методом дискретизации, хорошо подходящим для уравнений в частных производных, содержащих законы сохранения. В данной работе применяется МКО со степенями свободы, расположенными в ячейках. Этот метод обладает рядом важных преимуществ, среди которых

- локальная (на ячейках) консервативность по построению;
- отсутствие опоры на форму ячеек;
- относительная простота реализации.

Эти свойства определяют популярность МКО в задачах подземной гидродинамики. С помощью этого метода решаются гидрогеологические задачи [91–93], моделируются многофазные и геотермальные течения [94], а также процессы нефте- и газодобычи в коммерческих [45; 95; 96] и исследовательских [97–100] симуляторах.

Рассмотрим построение схемы МКО для уравнения Ричардса в составе уравнений пороупругости (1.27) (случаи уравнения Ричардса (1.13) и условий

полной насыщенности (1.28) являются частными и рассматриваются аналогично). Уравнение интегрируется по некоторой ячейке K :

$$\int_K \left[\varphi \frac{\partial S}{\partial t} + S \cdot s_{stor} \frac{\partial h}{\partial t} + S \alpha \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) + \nabla \cdot \mathbf{q} \right] d\Omega = \int_K Q d\Omega. \quad (2.1)$$

Далее считается, что свойства материалов являются кусочно-постоянными на ячейках, и каждой ячейке в соответствие ставится один неизвестный напор. Источники и стоки считаются также заданными на ячейках. Далее рассмотрим отдельные члены в проинтегрированном по ячейке уравнении (2.1).

С учетом использования неявной схемы Эйлера, первые два члена аппроксимируются следующим образом:

$$\int_K \left[\varphi \frac{\partial S}{\partial t} + S \cdot s_{stor} \frac{\partial h}{\partial t} \right] d\Omega \approx \left[\varphi_K \frac{S(h_K) - S(h_K^n)}{\Delta t} + S(h_K) \cdot s_{stor,K} \frac{h_K - h_K^n}{\Delta t} \right] \cdot |K|, \quad (2.2)$$

где $|K|$ – объем ячейки, верхний индекс n обозначает предыдущий временной слой, а индекс $n+1$ для значений с нового слоя опущен для краткости.

Член $\int_K S \alpha \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) d\Omega$ будет рассмотрен позднее, так как дискретизация уравнения упругости (1.25) и расположение сеточных неизвестных перемещений еще не определены.

Источниковый член аппроксимируется следующим образом:

$$\int_K Q d\Omega \approx Q_K \cdot |K|. \quad (2.3)$$

Осталось определить самую важную часть – аппроксимацию дивергенции потока. Для этого сначала применяется теорема Остроградского – Гаусса, чтобы преобразовать объемный интеграл к интегралу по поверхности ячейки, который затем раскладывается на сумму интегралов по граням:

$$\int_K (\nabla \cdot \mathbf{q}) d\Omega = \int_{\partial K} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) dS = \sum_{f \in \partial K} \int_f (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) dS \quad (2.4)$$

Интеграл от нормального потока по грани f аппроксимируется следующим образом, где $K_{r,f}$ – значение относительной проницаемости на грани:

$$\int_f (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) dS \approx K_{r,f} \int_f (-\mathbb{K} \nabla h \cdot \mathbf{n}) dS \approx K_{r,f} \cdot q_f. \quad (2.5)$$

Именно определение q_f является ключевым моментом в построении схемы МКО. Так, простейшая схема с линейной двухточечной аппроксимацией (англ. TPFA, two-point flux approximation) для внутренних граней считает

$$q_f = t_f (h_B - h_A), \quad (2.6)$$

где индексы A и B обозначают ячейки, разделяемые гранью f , а t_f – коэффициент проводимости, вычисляемый с использованием значений тензора фильтрации в ячейках, а также некоторых геометрических величин, приведенных на рисунке 2.1.

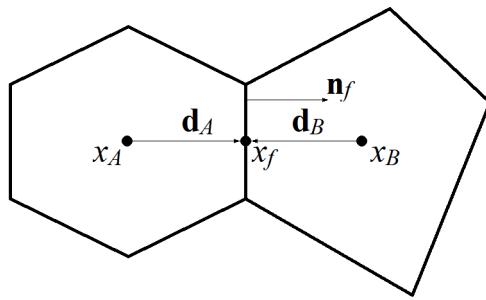


Рисунок 2.1 – Две ячейки и необходимые для построения аппроксимации потока величины

Для краткости опустив выкладки, приведем итоговое значение коэффициента проводимости:

$$t_f = |f| \frac{\frac{\mathbb{K}_A \mathbf{d}_A \cdot \mathbf{n}_f}{\|\mathbf{d}_A\|^2} \cdot \frac{\mathbb{K}_B \mathbf{d}_B \cdot \mathbf{n}_f}{\|\mathbf{d}_B\|^2}}{\frac{\mathbb{K}_A \mathbf{d}_A \cdot \mathbf{n}_f}{\|\mathbf{d}_A\|^2} - \frac{\mathbb{K}_B \mathbf{d}_B \cdot \mathbf{n}_f}{\|\mathbf{d}_B\|^2}}. \quad (2.7)$$

Вычисление коэффициента проводимости для граничных граней с условиями Дирихле проводится аналогичным образом.

Схема TPFA обладает рядом положительных качеств, среди которых простота реализации, минимальный размер шаблона и удовлетворение дискретному принципу максимума для уравнения диффузии, но имеет важнейший недостаток – отсутствие аппроксимации на сетках, не удовлетворяющих условию \mathbb{K} -ортогональности [101]. Таким образом, несмотря на широкое применение на практике, результаты, получаемые при использовании этой схемы, являются достоверными в достаточно сильно ограниченном числе случаев. Поиск альтернативных аппроксимаций потоков через грани является актуальной темой, которой посвящено значительное количество работ.

Одним из способов получения схем, работающих на более широком классе сеток, является расширение шаблона аппроксимации при сохранении ее линейности. Схемы такого класса называются схемами с линейной многоточечной аппроксимацией (англ. MPFA, multi-point flux approximation). В данной работе рассматриваются так называемые О-схема (MPFA-O) и L-схема (MPFA-L). О-схема была предложена в работе [102] для четырехугольников, а затем была расширена на трехмерный случай. Для аппроксимации потока через грань используются значения во всех ячейках, имеющих с гранью общие узлы. L-схема предложена в работе [103] и отличается более компактным шаблоном. Существуют оценки сходимости этих схем [104], в том числе для случая уравнения Ричардса [105]. Схемы класса MPFA немонотонны и приводят к нефизическим осцилляциям в решении в случае сильной анизотропии тензора фильтрации [106].

Другим направлением развития конечнообъемных схем является использование нелинейных аппроксимаций потока с коэффициентами, зависящими от решения. Впервые такая схема была предложена для треугольных сеток в работе [107], затем подобным образом расширена на трехмерный случай, см. например, работы [108; 109], в том числе для случая уравнения Ричардса [93]. В этих схемах аппроксимация потока является нелинейной, но сохраняется компактность шаблона за счет двухточечной аппроксимации потока. При этом наличие нелинейности увеличивает вычислительные затраты незначительно в случае нелинейности исходного уравнения, которым является уравнение Ричардса. Развитие схем с нелинейной аппроксимацией потока вылилось в создание схем с многоточечной аппроксимацией, обеспечивающей удовлетворение дискретному принципу максимума [110–112]. Примерами схем с нелинейной аппроксимацией потока являются схемы NTPFA-B и NMPFA-B из работы [113], имеющие двухточечный и многоточечный шаблоны, соответственно.

В данной работе используются следующие схемы МКО:

- TPFA;
- MPFA-O;
- MPFA-L;
- NTPFA-B;
- NMPFA-B.

Необходимо отметить, что применение схем, обеспечивающих монотонность или выполнение принципа максимума в рамках пороупругости может быть нецелесообразно, поскольку такие свойства в случае пороупругости не

обязательно выполняются. Тем не менее, в случае ненасыщенной пороупругости применение схемы с нелинейной двухточечной аппроксимацией потока может быть оправдано, поскольку при сохранении компактности шаблона можно обеспечить сходимость, при этом итоговая система уравнений в любом случае была бы нелинейной.

Наконец, необходимо определить значение относительной проницаемости $K_{r,f}$ для грани f в выражении (2.5). Используется два подхода:

- Центральная аппроксимация: K_r на грани берется полусуммой K_r в разграничиваемых ячейках;
- Противопотоковая аппроксимация: K_r на грани берется из ячейки, где значение напора выше.

Противопотоковая аппроксимация может создавать трудности при решении задач, так как структура образующейся системы нелинейных уравнений может изменяться. В то же время, центральная аппроксимация может приводить к нефизичным осцилляциям решения [114].

2.2.4 Метод опорных операторов

В данной работе помимо метода конечных объемов также рассматривается метод опорных операторов. Идеи этого метода были предложены еще в 1960-х гг. [115], а в 1980-х гг. в работах А.А. Самарского, В.Ф. Тишкина и А.П. Фаворского оформились в отдельный метод [116]; затем метод активно развивался за границей, где получил название mimetic finite difference method. Более подробный обзор истории развития метода приведен в [117]. Основная идея метода состоит в том, что в определяющих уравнениях в частных производных выделяются операторы, среди которых выбирается один, называемый опорным. После выбора пространств сеточных неизвестных строится аппроксимация опорного оператора, а аппроксимация остальных операторов строится так, чтобы в пространствах сеточных функций для операторов выполнялись те же соотношения, что и в непрерывном случае. Подробно теория метода опорных операторов изложена в книге [118]. В последнее время метод опорных операторов приобрел некоторую популярность в задачах подземной гидродинамики,

например, при решении уравнения Ричардса [119; 120] и моделировании многофазных течений [121; 122].

Вариант метода опорных операторов, рассматриваемый в данной работе, вводит неизвестные напоры в ячейках и дополнительно – потоки на гранях (одно число для каждой грани, обозначающее нормальный поток). Опишем вкратце построение метода. Вводятся пространства \mathcal{C}_h и \mathcal{F}_h сеточных функций, определенных в центрах ячеек и граней сетки соответственно. Напор будет аппроксимироваться в пространстве \mathcal{C}_h , а нормальный поток – в пространстве \mathcal{F}_h . Вводятся следующие сеточные операторы дивергенции и градиента (точнее говоря, не градиента, а оператора $K_r \mathbb{K} \nabla$, который далее при описании метода опорных операторов будет называться для краткости оператором градиента):

$$DIV : \mathcal{F}_h \rightarrow \mathcal{C}_h, \quad (2.8)$$

$$\widetilde{GRAD} : \mathcal{C}_h \rightarrow \mathcal{F}_h, \quad (2.9)$$

при этом оператор дивергенции является опорным, а оператор градиента – выводимым, что подчеркивается волной над его обозначением. Индекс « $_h$ » здесь обозначает принадлежность к сеточным пространствам. Построенные сеточные операторы должны удовлетворять следующему соотношению:

$$[DIV \mathbf{q}_h, p_h]_{\mathcal{C}_h} = -[\mathbf{q}_h, \widetilde{GRAD} p_h]_{\mathcal{F}_h} \quad \forall \mathbf{q}_h \in \mathcal{F}_h, p_h \in \mathcal{C}_h. \quad (2.10)$$

При практической реализации метода опорных операторов требуется определение локальных на ячейке K сеточных операторов дивергенции и градиента DIV_K и \widetilde{GRAD}_K . Для этого необходимо ввести локальные на ячейке пространства $\mathcal{C}_{h,K}$ и $\mathcal{F}_{h,K}$, которые включают в себя сеточные функции, определенные в центре ячейки и в центрах граней, соответственно, а также дополнительное пространство $\Lambda_{h,K}$ функций, определенных в центрах граней, которое используется для аппроксимации напора. Локальные сеточные операторы действуют в локальных пространствах:

$$DIV_K : \mathcal{F}_{h,K} \rightarrow \mathcal{C}_{h,K}, \quad (2.11)$$

$$\widetilde{GRAD}_K : \mathcal{C}_{h,K} \times \Lambda_{h,K} \rightarrow \mathcal{F}_{h,K}. \quad (2.12)$$

Локальный сеточный оператор дивергенции определяется выражением

$$DIV_K \mathbf{q}_K = \sum_{f \in \partial K} |f| \cdot \eta_{K,f} \cdot q_{K,f}, \quad (2.13)$$

где \mathbf{q}_K – вектор неизвестных нормальных потоков на гранях K , $q_{K,f}$ – элемент \mathbf{q}_K , соответствующий грани f , а $\eta_{K,f}$ равно 1 или -1 в зависимости от взаимной ориентации внешней нормали к поверхности K и фиксированной нормали грани f [118]. Такая аппроксимация дивергенции схожа с конечнообъемной и обеспечивает локальную консервативность схемы.

Для построения локального оператора градиента необходимо проделать достаточно громоздкие выкладки, приведенные, например, в работе [123]. Итоговое выражение имеет вид

$$\widetilde{GRAD}_K \begin{bmatrix} p_K \\ \lambda_K \end{bmatrix} = -P^{-1}M_K^{-1} \begin{bmatrix} \eta_{K,f_1} \cdot |f_1| \cdot (p_K - \lambda_{f_1}) \\ \eta_{K,f_2} \cdot |f_2| \cdot (p_K - \lambda_{f_2}) \\ \dots \\ \eta_{K,f_{n_f}} \cdot |f_{n_f}| \cdot (p_K - \lambda_{f_{n_f}}) \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

где n_f – число граней K , p_K – сеточное значение напора в центре ячейки K , а λ_K – вектор неизвестных напоров на гранях K , P – матрица аппроксимации относительных проницаемостей на гранях. Далее необходимо определить только матрицу $M_K \in \mathbb{R}^{n_f \times n_f}$. Она разбивается на сумму двух матриц $M_K = M_{K,1} + M_{K,2}$ следующего вида:

$$M_{K,1} = R_K(R_K^T N_K \mathbb{K}_K)^{-1} R_K^T, \quad (2.15)$$

$$M_{K,2} = \frac{\text{tr}(R_K(R_K^T N_K \mathbb{K}_K)^{-1} R_K^T)}{n_f} (I - N_K(N_K^T N_K)^{-1} N_K^T). \quad (2.16)$$

Эти выражения задействуют матрицы $N_K, R_K \in \mathbb{R}^{n_f \times 3}$, которые вычисляются с использованием геометрических характеристик ячейки K и ее граней.

Отдельным вопросом является аппроксимация относительной проницаемости. Некоторые подходы могут порождать некорректные решения для нестационарных задач [124], поэтому в данной работе используется противопотоковая аппроксимация, как это было сделано в работе [119].

Глобальные сеточные операторы затем собираются из локальных.

Итоговая схема метода опорных операторов использует по одной неизвестной на каждую ячейку и каждую грань. Таким образом, матрица системы имеет существенно больший размер по сравнению с матрицами, порождаемыми методом конечных объемов. Повышенная вычислительная сложность оправдывается следующими полезными свойствами:

- работоспособностью на широком классе ячеек, в том числе невыпуклых и вырожденных;

- вычислением потоков одновременно с напорами;
- легкостью включения граничных условий.

Минусом является немонотонность метода.

2.3 Дискретизация уравнения упругости

Перед выбором метода дискретизации был сформулирован ряд требований:

1. Работа на сетках, описанных в подразделе 2.1;
2. Работа с тензором упругости произвольного вида;
3. Опыт применения в мультифизических задачах: пороупругости или термоупругости;
4. Относительная вычислительная дешевизна.

Поясним эти требования. Возможность работы с произвольным тензором упругости позволяет рассматривать анизотропные материалы. Опыт применения в мультифизических задачах важен, так как желательно работать с методом, сразу убедившись в его пригодности для итоговой задачи пороупругости (или математически очень схожей задачи термоупругости). Идеально, если показана работоспособность метода в сочетании с МКО для фильтрационной задачи. Наконец, вычислительная дешевизна означает следующее: простейшая версия метода должна использовать минимально возможное число неизвестных, не вводя лишних величин. Иначе говоря, для метода желательно использовать только неизвестные перемещения и при этом вводить их на одном типе сеточных элементов (например, только в узлах или только в ячейках). При этом первый порядок аппроксимации для метода не является недопустимым.

Хотя исторически наиболее популярным и разработанным для задач упругости является метод конечных элементов [31], от его применения пришлось отказаться в силу использования сеток, описанных в подразделе 2.1. В качестве альтернативы были рассмотрены ряд следующих подходов: метод конечных объемов, метод опорных операторов и разрабатываемый в последнее время метод виртуальных элементов.

Выбор МКО продолжил бы традицию использования этого метода в GeRa. Несмотря на то, что в основном МКО применяется в задачах течения жид-

костей и является нехарактерным подходом для задач упругости, он все же развивается в этом направлении. Ранние работы по МКО для упругости относятся к концу 1980-х годов, когда И. Демирджичем был предложен МКО для моделирования упругой деформации однородного изотропного материала [125]. В последние годы МКО для задач упругости развивается норвежскими исследователями, которые строят схемы на основе многоточечной аппроксимации напряжений [46; 47], а также К.М. Тереховым в ИВМ РАН [126]. На основе таких схем строятся полностью конечнообъемные дискретизации для задач по-роупругости [48–50] и термопороупругости [47]. Среди достоинств описанных схем МКО для упругости можно выделить небольшое число сеточных неизвестных и второй порядок аппроксимации по пространству. Недостатками являются расположение перемещений в центрах ячеек, что требует дополнительной интерполяции для получения перемещений в узлах, а также (в случае пороупругости) неустойчивость решения при малых значениях шага по времени [48].

Метод опорных операторов хорошо зарекомендовал себя при дискретизации задач диффузионного типа как метод, работающий на сетках с самыми разнообразными ячейками, в т.ч. невыпуклыми и вырожденными. Это обусловило его включение в список рассматриваемых методов для задачи упругости. Однако изучение литературы показало, что для задач упругости метод опорных операторов разработан относительно слабо, существующие работы рассматривают либо частный случай изотропного материала [127; 128], включая рассмотрение случая пороупругости [129], либо вводят непозволительно много неизвестных: перемещения, напряжения и антисимметричные множители Лагранжа [130]. Такая неразработанность связана с переключением части исследователей метода опорных операторов на следующий метод.

Метод виртуальных элементов (МВЭ) развился [51] из метода опорных операторов в последнее десятилетие, был предложен изначально для двумерного уравнения Пуассона и сразу же расширен на случай упругих деформаций в двумерной [131] и трехмерной [52] постановках. Применение МВЭ не ограничивается линейной упругостью, распространяясь на случаи конечных [132; 133] и пластических [134; 135] деформаций. Возможно также построение схем высокого порядка [136; 137]. Одним из факторов, определяющих выбор МВЭ в данной работе, является существование схемы дискретизации для задачи пороупругости [53], использующей МВЭ для упругости и МКО для фильтрации.

Версия МВЭ [52], рассматриваемая в данной работе, имеет следующие характеристики. Используются только неизвестные перемещения, располагаемые в узлах сетки. Таким образом, метод похож на МКЭ с кусочно-линейными базисными функциями; алгоритмически эти варианты МВЭ и МКЭ схожи, сборку глобальной матрицы можно организовать путем перебора ячеек сетки и встраивания локальных матриц жесткости в глобальную, можно также применять процедуры постобработки решения, применяемые для МКЭ. Прилагательное *виртуальный* в названии МВЭ определяет основное отличие от МКЭ: точный вид базисных функций на ячейках неизвестен, при этом достаточно знать лишь некоторые свойства этих функций.

2.3.1 Обобщенная постановка для подзадачи упругости

Рассмотрим постановку задачи для подзадачи упругости (уравнение (1.25) с граничными условиями):

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} - \alpha S P \mathbb{I}) = \mathbf{f} & \text{в } \Omega \subset \mathbb{R}^3, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{на } \Gamma_{D_m}, \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}_N & \text{на } \Gamma_{N,m}. \end{cases} \quad (2.17)$$

Насыщенность S и давление воды P считаются заданными.

Дальнейшие действия проделываются согласно [53]. Вводятся пространства

$$V_0 = \{\mathbf{v} \in (W_2^1(\Omega) \equiv H^1(\Omega))^3 : \mathbf{v}|_{\Gamma_{D_m}} = \mathbf{0}\} \quad (2.18)$$

Затем записывается обобщенная постановка задачи путем умножения уравнения упругости на тестовую функцию $\mathbf{v} \in V_0$ и интегрирования по Ω :

$$\int_{\Omega} [\nabla \cdot (\mathbb{C} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \alpha S P \mathbb{I})] \cdot \mathbf{v} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\Omega \quad (2.19)$$

Применяя формулу интегрирования по частям и учитывая определение пространства V_0 , можно прийти к уравнению

$$\int_{\Omega} (\mathbb{C} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})) d\Omega = \int_{\Omega} \alpha S P \nabla \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Gamma_{N,m}} \mathbf{t}_N \cdot \mathbf{v} dS \quad (2.20)$$

в левой части которого можно выделить билинейную форму

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})) d\Omega, \quad (2.21)$$

а в правой – линейный (относительно \mathbf{v}) функционал

$$l(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \alpha S P \nabla \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Gamma_{N,m}} \mathbf{t}_N \cdot \mathbf{v} d\Gamma. \quad (2.22)$$

Далее можно сформулировать обобщенную постановку подзадачи упругости:

$$\text{Найти } \mathbf{u} \in V_0 : a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V_0. \quad (2.23)$$

2.3.2 Построение локальных аппроксимационных пространств

Переход к дискретизации осуществляется заменой \mathbf{u} и \mathbf{v} на дискретные аппроксимации \mathbf{u}_h и \mathbf{v}_h , лежащие в некотором пространстве $V_{h,0}$, определение которому будет дано позднее.

Построение дискретного пространства $V_{h,0}$ начинается с рассмотрения отдельной ячейки K и построения для нее локального пространства векторных функций $V_h^K \subset H^1(K)$. Это пространство обладает следующими свойствами:

- Любая функция из V_h^K однозначно определяется своими значениями в вершинах ячейки;
- V_h^K включает в себя многочлены первой степени;
- Для любой функции из V_h^K её след на любой грани f ячейки K зависит только от значений функции в вершинах грани f .

Поскольку пространство V_h^K должно содержать в себе вектор-функции, определяется сначала пространство $V_{h,scal}^K$, содержащее скалярные функции. Для этого на каждой грани f ячейки K определяется оператор проекции $\pi^{f,0} : \{v \in H^1(f) \cap C^0(\partial f)\} \rightarrow \mathbb{P}_1(f)$ следующим образом:

$$\pi^{f,0} v(\mathbf{x}) = \langle \nabla v \rangle (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_f) + \bar{v}_f, \quad (2.24)$$

где $\langle \nabla v \rangle = 1/|f| \int_f \nabla v dS$, а \bar{v}_f обозначает среднее арифметическое значений v в вершинах грани f ($\bar{\mathbf{x}}_f$ в таком случае означает центроид грани f).

Далее для каждой грани строится пространство $V_{h,scal}^f$, для которого $\pi^{f,0}$ является L_2 -проектором:

$$\begin{aligned} V_{h,scal}^f &= \{v_h \in H^1(f) : \forall e \in \partial f \quad v_h|_e \in \mathbb{P}_1(e); \quad v_h|_{\partial f} \in C^0(\partial f); \\ &\quad \Delta v_h|_f \in \mathbb{P}_1(f); \quad \int_f \pi^{f,0} v_h q dS = \int_f v_h q dS \quad \forall q \in \mathbb{P}_1(f)\}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Аппроксимационное пространство на ячейке строится затем из пространств для граней следующим образом:

$$V_{h,scal}^K = \{v_h \in H^1(K) : v_h|_f \in V_{h,scal}^f \quad \forall f \in \partial K; \quad \Delta v_h = 0 \text{ в } K\}. \quad (2.26)$$

Отметим некоторые свойства построенного пространства. В случае тетраэдральных ячеек оно сводится к пространству линейных функций. В общем случае добавляются также и другие функции, однако их явный вид не требуется, что и объясняет слово «виртуальный» в названии метода.

2.3.3 Глобальное аппроксимационное пространство и нахождение приближенного решения

Глобальное аппроксимационное пространство строится из отдельных ячейчных пространств:

$$V_{h,scal} = \{v_h \in H^1(\Omega) : v_h|_K \in V_{h,scal}^K \quad \forall K\}. \quad (2.27)$$

Каждая функция из этого пространства однозначно определяется своими значениями в узлах сетки. Можно выделить базисные функции $\{\varphi_i\}$, соответствующие узлам сетки и определяемые следующими свойствами:

$$\varphi_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij} \quad \forall \text{ узлов } i,j. \quad (2.28)$$

Глобальное векторное аппроксимационное пространство V_h строится из скалярного как

$$V_h = (V_{h,scal})^3, \quad (2.29)$$

а базисные векторные функции в нем получают дополнительный верхний индекс, обозначающий координату, и определяются из скалярных как

$$\varphi_i^k = \varphi_i \mathbf{e}_k, \quad k = x,y,z, \quad (2.30)$$

где \mathbf{e}_k – вектор длины 3, содержащий 1 на k -й позиции и 0 – на остальных.

Приближенное решение определяется как

$$\mathbf{v}_h(\mathbf{x}) = \sum_i \sum_{k=x,y,z} \mathbf{v}_h^k(\mathbf{x}_i) \varphi_i^k(\mathbf{x}) \quad (2.31)$$

Наконец, глобальное векторное аппроксимационное пространство $V_{h,0}$ определяется следующим образом:

$$V_{h,0} = \{\mathbf{v}_h \in V_h : \mathbf{v}_h(\mathbf{x}_i) = \mathbf{0}, \text{ если узел } i \text{ не является граничным}\}. \quad (2.32)$$

Нахождение коэффициентов в разложении приближенного решения \mathbf{u}_h вида (2.31) далее логично осуществить подстановкой \mathbf{u}_h в определение обобщенного решения (2.23) и поочередным выбором всех векторных базисных функций $\{\varphi_i^k\}$ в качестве \mathbf{v} . Однако, при этом возникает трудность с вычислением выражений вида $a(\varphi_i^k, \varphi_j^m)$ и $l(\varphi_i^k)$, поскольку в явном виде базисные функции не известны. Для преодоления этой проблемы проделываются следующие действия. Во-первых, можно записать следующее разложение билинейной формы:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_K a^K(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad (2.33)$$

где $a^K(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_K \mathbb{C}\varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{v}) d\Omega$ – локальная билинейная форма на ячейке. В методе виртуальных элементов она заменяется на некоторое приближение

$$a_h^K(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) \approx a^K(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h), \quad (2.34)$$

подходящее для функций из V_h . Из таких локальных форм собирается глобальная форма $a_h(\cdot, \cdot)$. В свою очередь, линейный функционал $l(\mathbf{v})$ также заменяется на некоторое приближение $l_h(\mathbf{v})$. После этого можно сформулировать аналог обобщенной постановки (2.23) для нахождения дискретного приближения \mathbf{u}_h :

$$\text{Найти } \mathbf{u}_h \in V_{h,0} : a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = l_h(\mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_{h,0}. \quad (2.35)$$

Теперь можно подставить \mathbf{u}_h в определение обобщенного решения (2.35) и поочередно выбирать все векторные базисные функции $\{\varphi_i^k\}$ в качестве \mathbf{v}_h , что приводит к линейной системе с квадратной матрицей размера $3N_{nodes,nD}$, где $N_{nodes,nD}$ – число узлов сетки, на которых не установлены граничные условия Дирихле.

Строгое определение $a_h^K(\cdot, \cdot)$, обоснование сходимости и детали практической реализации приведены в работах [52; 53]. Отметим, в частности, что несмотря на отсутствие явного вида базисных функций φ_i , можно вычислить интеграл $\int_K \nabla \varphi_i d\Omega$ и $\int_f \varphi_i dS$ для любых ячейки K и грани f .

Ключевым вопросом при практической реализации МВЭ является вычисление локальных матриц жесткости, из которых затем собирается глобальная. Опустив достаточно громоздкие выкладки, проведенные в работах [52; 53], рассмотрим непосредственное нахождение локальной (на ячейке K) матрицы жесткости $A_K \in \mathbb{R}^{3N_{nodes,K} \times 3N_{nodes,K}}$, определяемой следующим выражением:

$$A_K = |K| W_C C_K W_C^T + (I - N_R W_R^T - N_C W_C^T)^T S_K (I - N_R W_R^T - N_C W_C^T), \quad (2.36)$$

где $|K|$ – объем ячейки K , I – единичная матрица размера $3N_{nodes,K}$, C_K – представленный в нотации Фойгта тензор упругости в ячейке K . Матрицы $W_C, W_R, N_C, N_R \in \mathbb{R}^{3N_{nodes,K} \times 6}$ вычисляются по информации о геометрической форме ячейки, включая ее барицентр (центр масс), центроид (среднее арифметическое координат узлов), барицентры и центроиды граней, а также длины ребер. Детальные выражения для этих матриц приведены в работе [52]. Матрица S_K выбрана равной

$$S_K = \frac{|K| \operatorname{tr}(C_K)}{\operatorname{tr}(N_C^T N_C)} I, \quad (2.37)$$

также следуя работе [52].

2.4 Итоговая схема МКО – МВЭ

2.4.1 Дискретизация сопрягающих членов

При обобщенной постановке подзадачи упругости в линейный функционал (2.22) входит член $\int_\Omega \alpha S P \nabla \cdot \mathbf{v} d\Omega$. При переходе к построению сеточного решения возникает необходимость вычисления следующего выражения на отдельных ячейках:

$$\int_K \alpha S P \nabla \cdot \varphi_i^k d\Omega \approx \alpha S_K P_K \int_K \nabla \cdot \varphi_i^k d\Omega. \quad (2.38)$$

С учетом расположения неизвестных P и S в МКО и того факта, что $\varphi_i^k = \varphi_i \mathbf{e}_k$, получается

$$\alpha S_K P_K \int_K \nabla \cdot (\varphi_i \mathbf{e}_k) d\Omega = \alpha S_K P_K \left(\int_K \nabla \varphi_i d\Omega \right) \cdot \mathbf{e}_k, \quad (2.39)$$

при этом последний интеграл можно вычислить по геометрическим параметрам ячейки, что описывается при построении МВЭ [52; 53].

При интегрировании уравнения фильтрации в МКО (см. (2.1)) для члена, содержащего дивергенцию производной перемещений по времени, аппроксимация не была определена. Теперь можно ее ввести следующим образом:

$$\int_K S \alpha \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) d\Omega = \frac{1}{\Delta t} \alpha S_K \int_K \nabla \cdot (\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_h^n) d\Omega. \quad (2.40)$$

Поскольку $u_h|_K = \sum_{i \in \text{верш. } K} \varphi_i [u_i^x \ u_i^y \ u_i^z]^T$,

$$\int_K \nabla \cdot \mathbf{u}_h d\Omega = \sum_{i \in \text{верш. } K} \left(\int_K \nabla \varphi_i d\Omega \right) \cdot [u_i^x \ u_i^y \ u_i^z]^T, \quad (2.41)$$

где последний интеграл находится так же, как при вычислении (2.39). Аналогичные действия выполняются для слагаемого, содержащего \mathbf{u}_h^n .

2.4.2 Свойства схемы

В исходном виде, предложенном в работе [53], схема МКО–МВЭ была построена для случая полной насыщенности и использовала только двухточечную аппроксимацию потока в МКО (TPFA). Исследование сходимости численного решения выполнялась в специальной норме; в частности, справедлива оценка

$$err = \left(\| \mathbf{u}_h - \mathbf{u} \|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))}^2 + \| h - h_h \|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 \right)^{1/2} \leq C(\Delta x + \Delta t), \quad (2.42)$$

где Δx – диаметр сетки, C – некоторая наперед заданная константа. Эта оценка означает первый порядок сходимости по пространству и времени.

За счет использования схемы TPFA для аппроксимации потоков оценка (2.42) справедлива только для \mathbb{K} -ортогональных сеток. В данной работе экспериментально исследуется сходимость численного решения к аналитическому в случае не \mathbb{K} -ортогональных сеток и неполной насыщенности среды водой.

Одним из неисследованных вопросов является проблема неустойчивости при малом шаге по времени, возникающая при некоторых дискретизациях уравнений пороупругости [50; 138; 139]. Неустойчивость связана с невыполнением так называемого условия Ладыженской – Бабушки – Брецци [140], которое, например, не выполняется при использовании МКЭ с базисными функциями одного порядка для обеих подзадач. Известно, что при использовании МКО для подзадачи фильтрации и МКЭ с изопараметрическими C^0 -непрерывными базисными функциями проблема с неустойчивостью при малом шаге по времени не возникает [141]. Поскольку на сетках с ячейками простого вида (кубы, тетраэдры) такая дискретизация совпадает с рассматриваемой в данной работе, можно ожидать, что для схемы МКО-МВЭ проблема также отсутствует. Тем не менее, строгое доказательство этого предположения на данный момент не было представлено.

Глава 3. Методы решения систем уравнений, возникающих при дискретизации

Дискретизация приводит к системам уравнений относительно сеточных неизвестных. Решение этих систем представляет собой один из самых вычислительно сложных этапов численного решения задачи, поэтому разработка эффективных методов решения является практически значимой задачей.

3.1 Метод продолжения по нелинейности для стационарного уравнения Ричардса

3.1.1 О нелинейных системах, возникающих при дискретизации уравнения Ричардса

Системы уравнений, возникающие при дискретизации как стационарного (1.14), так и нестационарного (1.13) (в силу использования неявной схемы) уравнения Ричардса, являются нелинейными. Для простоты обозначений системы как в стационарном, так и в нестационарном случае представим в виде

$$F(X) = 0, \quad (3.1)$$

где X – вектор сеточных неизвестных. Для метода конечных объемов этот вектор содержит только значения напора во всех ячейках (так что можно считать $X \equiv h$, где h обозначает вектор сеточных значений напора), а для метода опорных операторов он также содержит значения потоков на всех гранях. Для метода конечных объемов можно также выписать более конкретный вид системы (3.1):

$$F(X) \equiv A(h)h - b(h) = 0, \quad (3.2)$$

где A – зависящая от решения матрица коэффициентов, а b – вектор правой части, содержащий вклад источников и граничных условий. Для получения такого вида уравнений в нестационарном случае используется преобразование производной влагосодержания по времени, предложенное в работе [72].

Как правило, систему нелинейных уравнений (3.1) решают итерационным методом. В этих методах ищется последовательность приближений к решению $\{X^k\}$, начинающаяся с заданного X^0 . При этом значение на новой итерации определяется через вектор поправки:

$$X^{k+1} = X^k + \Delta X. \quad (3.3)$$

Итерации останавливаются по достижении некоторых условий сходимости. В данной работе используются следующие условия:

$$\|F(X^k)\|_\infty < \varepsilon_{abs} \text{ или } \|F(X^k)\|_2 < \varepsilon_{rel} \cdot \|F(X^0)\|_2. \quad (3.4)$$

Если ни одно условие не выполнено за *maxit* итераций, то считается, что решатель не сошелся.

3.1.2 Метод Ньютона

Метод Ньютона является одним из самых распространенных методов общего назначения для решения систем нелинейных уравнений. Вектор поправки на итерации находится из решения следующей линейной системы:

$$J(X^k)\Delta X = -F(X^k), \quad (3.5)$$

где $J = [\partial F_i / \partial X_j]$ – матрица Якоби. Метод Ньютона обладает квадратичной сходимостью, но нуждается в хорошем начальном приближении X^0 [142]. Дополнительной сложностью является необходимость строить матрицу Якоби и вычислять при этом производные, что частично нивелируется современными технологиями автоматического дифференцирования [39]. Сложности с матрицей Якоби могут также заключаться в большем числе обусловленности по сравнению с матрицей A , а также в большей плотности в случае схем МКО с нелинейной двухточечной аппроксимацией потока.

3.1.3 Метод Пикара (простой итерации)

Этот метод подходит для случая МКО, когда порождаемые дискретизацией системы уравнений имеют вид (3.2). Поскольку эта система имеет вид линейной с зависящими от решения матрицей коэффициентов и правой частью, можно организовать итерационный метод, в котором напоры на итерации $k + 1$ находятся из решения линейной системы

$$A(h^k)h^{k+1} = b(h^k). \quad (3.6)$$

Вычитая $A(h^k)h^k$ из обеих частей этого уравнения, можно получить выражение для нахождения вектора поправки:

$$A(h^k)\Delta h = -F(h^k). \quad (3.7)$$

Таким образом, метод Пикара можно представить в виде, похожем на метод Ньютона (3.5), с той разницей, что вместо матрицы Якоби J используется матрица A . Сходимость метода Пикара является линейной [76] и зависит от сжимающих свойств оператора $A^{-1}b$. Из достоинств метода можно выделить отсутствие необходимости вычислять производные и меньшую чувствительность к начальному приближению. Необходимо отметить, что схемы МКО с нелинейной аппроксимацией потока опираются на метод Пикара при доказательстве таких свойств решения, как монотонность и удовлетворение дискретному принципу максимума [108; 109; 143].

3.1.4 Комбинированный решатель

В этом методе первые несколько итераций совершаются методом Пикара, а последующие – методом Ньютона. Предполагается, что начальные итерации помогут улучшить начальное приближение и избежать проблем метода Ньютона в случае плохого начального приближения [76]. В данной работе число начальных итераций методом Пикара составляет 5.

3.1.5 Линейный поиск

Часто вектор поправки ΔX является слишком большим и приводит к удалению от решения или резкому росту $\|F\|_2$. В таком случае можно применить релаксацию [76]: умножить на некоторое число $0 < \omega \leq 1$, так называемый *параметр релаксации*. При этом недостаточно выбирать такое ω чтобы $\|F\|_2$ понижалась, поскольку в этом случае могут возникать осцилляции вблизи решения [144]. Более разумный выбор ω диктует так называемое правило Армихо [145]. Алгоритм линейного поиска на основе правила Армихо представлен в алгоритме 1.

$\omega = 1;$

до тех пор, пока $\omega > \omega_{min}$ выполнять

если $\|F(X^k + \omega \Delta X)\|_2 < (1 - \alpha \omega) \cdot \|F(X^k)\|_2$ тогда

$X^{k+1} = X^k + \omega \Delta X;$

завершить итерацию;

иначе

$\omega = \gamma \cdot \omega;$

конец

конец

если $\omega < \omega_{min}$ тогда

линейный поиск не сработал;

конец

Алгоритм 1: Линейный поиск на основе правила Армихо

В этом алгоритме $\alpha = 10^{-4}$ (согласно [144]) – параметр, определяющий достаточное понижение $\|F\|_2$, $\gamma = 0.25$ – множитель для дробления параметра релаксации, а ω_{min} – минимальный параметр релаксации (исходя из того, что допускается 7 итераций дробления, $\omega_{min} \approx 6 \cdot 10^{-5}$).

Линейный поиск нецелесообразно применять на каждой итерации нелинейного решателя, поскольку на первых итерациях $\|F\|_2$ может умеренно расти, но при этом решатель все равно сходится. В таком случае на первых итерациях имеет смысл отключить линейный поиск. В то же время, на первых итерациях $\|F\|_2$ может расти чересчур сильно, но линейный поиск на тех же самых итерациях может не срабатывать. В таком случае для этих начальных итераций

возможно применение не линейного поиска, а релаксации с фиксированным малым ω .

В данной работе первые 5 итераций выполняются либо без какой-либо релаксации и линейного поиска, либо с релаксацией с фиксированным ω .

3.1.6 Трудности и альтернативные подходы

Проблемы со сходимостью итерационных решателей являются одними из основных при численном решении задач для уравнения Ричардса. В стационарном и нестационарном случаях существуют различные пути их преодоления [54; 55].

Нестационарный случай является в некотором смысле более простым. Дело в том, что в этом случае значительного улучшения сходимости можно добиться изменением размера шага по времени Δt . При уменьшении Δt начальное приближение для нелинейных решателей, берущееся с предыдущего временно-го слоя, становится более хорошим приближением к значениям на новом слое. Кроме того, понижение Δt улучшает сжимающие свойства дискретного оператора, необходимые для сходимости метода Пикара. Наконец, уменьшение Δt приводит к увеличению модуля значений, стоящих в матрицах A и J на диагонали (содержащих множитель $1/\Delta t$), что может улучшить работу линейных решателей. В связи с наличием такого инструмента влияния на сходимость, как изменение размера шага по времени, линейный поиск в нестационарном случае не применяется. Необходимо отметить, что во многих случаях, особенно при сильной неоднородности расчетной области, наличии нескольких зон полной насыщенности, сухих начальных условиях и при комбинациях параметров материалов, приводящих к образованию капиллярных барьеров [66], Δt может принимать непозволительно малые значения. Так, автору известен случай, когда на модели небольшого масштаба (около 10000 ячеек) шаг по времени составлял 0.001 суток при сроке моделирования около 30000 суток.

Стационарный случай на первый взгляд выглядит менее вычислительно сложным, поскольку шаги по времени и многократное решение систем нелинейных уравнений отсутствуют. Однако применение итерационных методов напрямую к системе (3.1) в стационарном случае часто приводит к неудаче даже

при применении линейного поиска. Особенно это актуально для метода Ньютона, который нуждается в хорошем начальном приближении, подобрать которое в случае сильно неоднородной области со сложной структурой течения, особенно при наличии материалов с различными зависимостями (1.6), (1.7), крайне сложно. Отсутствие члена с множителем $1/\Delta t$ на диагонали матриц негативно сказывается на сходимости метода Пикара, а также на работе линейных решателей. Поэтому обычно для стационарных задач используются более сложные подходы. Новым подходом, предлагаемым в данной работе, является так называемый *метод продолжения по нелинейности*. Перед описанием этого метода необходимо осветить альтернативный подход – метод установления (ранее этот метод являлся основным используемым в программном комплексе GeRa).

3.1.7 Метод установления

В методе установления нестационарное уравнение Ричардса (1.13) решается до тех пор, пока процесс фильтрации не станет стационарным. На каждом шаге по времени полученные решения подставляются в стационарное уравнение и проверяется сходимость, задаваемая условиями (3.4). При этом сходимость нелинейных решателей на шагах по времени контролируется аналогичными параметрами $\varepsilon_{abs,unstat}$ и $\varepsilon_{rel,unstat}$.

Минусы метода установления связаны с необходимостью решать большое число нелинейных систем из-за наличия шагов по времени и всеми проблемами, которые при этом возникают и были описаны выше. Время установления заранее неизвестно, хотя может быть оценено расчетом на грубой сетке. Для уменьшения вычислительных затрат в рассматриваемой в данной работе реализации метода установления допускается не только дробление, но и увеличение в 1,5 раза размера шага по времени Δt в случае, если на шаге по времени нелинейный решатель сошелся менее, чем за 15 итераций.

3.1.8 Метод продолжения по нелинейности – общие идеи

Метод продолжения по параметру является хорошо известным подходом к решению нелинейных задач [146; 147], в том числе, краевых задач для уравнений в частных производных [148; 149]. В методах такого типа исходное уравнение параметризуется, и решение задачи находится с помощью решения последовательности подзадач с меняющимся параметром. Предлагаемый в данной работе метод в тексте обозначается также как «метод продолжения по нелинейности», чтобы подчеркнуть способ параметризации. В предлагаемом методе в стационарном уравнении Ричардса (1.14) параметризуется функция относительной проницаемости $K_r(S)$, являющаяся основным источником нелинейности. Вместо $K_r(S)$ вводится зависящая дополнительно от *параметра продолжения* q функция $\mathcal{K}(S, q)$ – *функция продолжения*, обладающая следующими свойствами:

$$\mathcal{K}(S, 0) \equiv 1; \quad \mathcal{K}(S, 1) \equiv K_r(S). \quad (3.8)$$

Выбор функции \mathcal{K} можно осуществить по-разному, в данной работе рассматриваются два варианта: степенная функция

$$\mathcal{K}_{pow}(S, q) = K_r^q(S) \quad (3.9)$$

и линейная функция

$$\mathcal{K}_{lin}(S, q) = 1 + q \cdot (K_r(S) - 1). \quad (3.10)$$

Забегая вперед, можно сказать, что более универсальным вариантом является степенная функция \mathcal{K}_{pow} . Дело в том, что в некоторых задачах, использующих замыкающие соотношения Ван Генуктена – Муалема (1.6), (1.7) материалы, которые в насыщенном состоянии хорошо проводят воду (например, гравий), могут в условиях слабой насыщенности оказаться менее проницаемыми, чем обычно слабее проводящие воду материалы (например, песок). Если для таких задач использовать линейную функцию \mathcal{K}_{lin} , это соотношение проницаемостей может быть утеряно при некоторых значениях q , даже очень близких к 1. В таком случае наблюдается повышение q практически до 1 без достижения сходимости. Тем не менее, линейная функция \mathcal{K}_{lin} может успешно применяться

на многих задачах, особенно использующих модель безнапорной фильтрации (1.8), (1.9).

Стационарное уравнение Ричардса (1.14) затем заменяется на уравнение

$$-\nabla \cdot (\mathcal{K}(S, q)\mathbb{K}\nabla h) = Q. \quad (3.11)$$

Свойства (3.8) функции продолжения говорят о том, что при $q = 1$ уравнение (3.11) представляет собой исходное уравнение (1.14), а при $q = 0$ оно является линейным уравнением (описывающим фильтрацию в тех же условиях, но при полной насыщенности водой). Решение линейной задачи ищется относительно легко: в случае схем МКО с линейной аппроксимацией потока, а также в случае метода опорных операторов требуется решить одну линейную систему; в случае же МКО с нелинейной аппроксимацией потока система все равно имеет меньшую «степень нелинейности», и можно ожидать хорошей сходимости нелинейных решателей.

После решения линейной задачи с $q = 0$ можно переходить к нелинейным задачам, постепенно повышая q до 1 и для каждой следующей подзадачи подавая в качестве начального приближения методу Ньютона решение предыдущей. В таком виде метод продолжения был сформулирован автором в работе [160]. Дальнейшие исследования, опубликованные в работах [162] и [163], показали, что кроме метода Ньютона можно использовать и другие решатели, и, что более важно – что метод продолжения можно представить в виде процедуры предиктор–корректор [147] (см. алгоритм 2).

$q = 0;$

$x = \text{const};$

Найти $x: F(x, 0) = 0$ итерационным решателем;

$\Delta q_{last} = 1;$

до тех пор, пока $q < 1$ выполнять

$\Delta q = \min(1 - q, 2 \cdot \Delta q_{last});$

до тех пор, пока $\Delta q > 10^{-4}$ выполнять

1. Шаг предиктора:

установить начальное приближение к $x_{q+\Delta q};$

2. Шаг корректора:

Найти $x_{q+\Delta q}: F(x_{q+\Delta q}, q + \Delta q) = 0$ итерационным решателем;

если итерационный решатель сошелся тогда

$x = x_{q+\Delta q};$

$q = q + \Delta q;$

$\Delta q_{last} = \Delta q;$

завершить шаг;

иначе

$\Delta q = \Delta q / 2;$

конец

конец

если Δq не найден тогда

метод продолжения не сработал;

завершение;

конец

конец

Алгоритм 2: Метод продолжения по нелинейности в терминах предиктор–корректор

Таким образом, применение итерационного решателя (методов Ньютона, Пикара или комбинированного) является корректором, а предиктором является

ся установка начального приближения. Использование сложных предикторов может быть ключом к эффективной работе метода продолжения.

3.1.9 Предикторы в методе продолжения

В оригинальной форме, представленной автором в работе [160], метод продолжения использовал тривиальный предиктор, который можно назвать *предиктором нулевого порядка*. Пусть параметр продолжения доведен до значения $q = q^*$. В предикторе нулевого порядка начальным приближением для решения новой подзадачи с $q^* + \Delta q$ является решение последней задачи с q^* :

$$X_{q^*+\Delta q}^0 = X_{q^*}. \quad (3.12)$$

Может быть использован более сложный подход – так называемый *предиктор первого порядка*. Этот предиктор вычисляет специальный вектор $\frac{\partial X}{\partial q}$, описывающий чувствительность решения X к параметру продолжения q . После решения задачи с $q = q^*$ этот вектор вычисляется из решением линейной системы

$$J(X_{q^*}, q^*) \frac{\partial X}{\partial q} = -\frac{\partial F}{\partial q}(X_{q^*}, q^*) \approx -\frac{F(X_{q^*}, q^* + \delta) - F(X_{q^*}, q^*)}{\delta}, \quad (3.13)$$

где $J(X_{q^*}, q^*)$ – матрица Якоби, соответствующая последнему полученному решению (с $q = q^*$), а вектор правой части представляет собой конечноразностную аппроксимацию $\frac{\partial F}{\partial q}$. Значение δ часто выбирается примерно равным квадратному корню из машинной точности [150], поэтому в данной работе используется значение $\delta = 10^{-7}$.

3.2 Методы решения систем уравнений, возникающих при дискретизации уравнений пороупругости

При дискретизации уравнений пороупругости на каждом шаге по времени возникает система сеточных уравнений, которую необходимо решать. Систему

можно представить в виде

$$F(X) = \begin{bmatrix} F_f(X) \\ F_m(X) \end{bmatrix} = 0, \quad (3.14)$$

где F_f и F_m соответствуют дискретизациям уравнений фильтрации и механики, соответственно, а вектор неизвестных имеет вид

$$X = \begin{bmatrix} h \\ \mathbf{u} \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

Здесь h и \mathbf{u} обозначают сеточные значения напора и перемещений на новом временном слое. Дополнительные индексы не вводятся во избежание излишней громоздкости изложения.

В общем случае система (3.14) является нелинейной, но допускает представление в виде линейной системы с матрицей, чьи коэффициенты зависят от решения. Если при дискретизации уравнения фильтрации в МКО умножить уравнение (2.1) на Δt , линейная система принимает следующий вид (внедиагональные блоки являются кососимметричными):

$$\begin{bmatrix} A_f(h) & A_{fm}(h) \\ -A_{fm}^T(h) & A_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_f \\ b_m \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

Матрица этой системы имеет блочный вид, пример портрета такой матрицы, полученной на кубической сетке из 64 ячеек, представлен на рисунке 3.1. Диагональные блоки A_f и A_m соответствуют дискретизациям уравнения фильтрации с помощью МКО и уравнения упругости с помощью МВЭ, соответственно. Внедиагональные блоки соответствуют дискретизациями сопрягающих членов с помощью МВЭ и являются кососопряженными [53]. Векторы b_f и b_m в правой части системы содержат вклад источников и стоков, внешних сил, граничных условий и величин с предыдущего временного слоя.

Система (3.14) может быть линейной, если рассматривается случай полностью насыщенной среды и схема МКО с линейной аппроксимацией потока. В таком случае блоки A_f и A_{fm} не зависят от h .

Рассмотренная система является примером систем, возникающих при дискретизации мультифизических задач с использованием полностью неявной схемы по времени. На ее примере можно изучать подходы к решению систем, сочетающих дискретизации для двух групп процессов, например, в задачах термоупругости. Можно выделить следующие подходы:

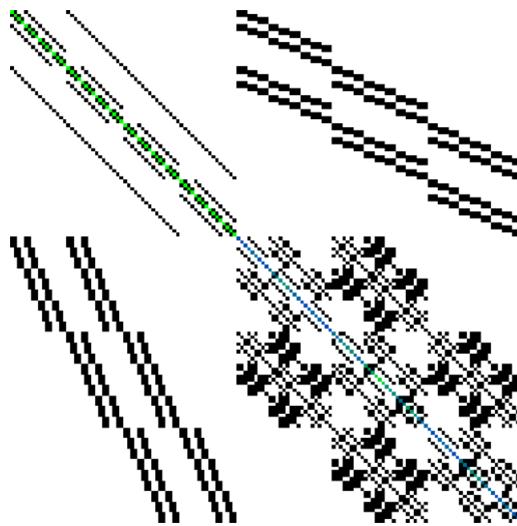


Рисунок 3.1 — Портрет матрицы, возникающей в результате дискретизации уравнений пороупругости на кубической сетке из 64 ячеек

1. *Монолитный подход*: система решается в исходном виде путем применения нелинейного решателя (сходящегося за одну итерацию в случае линейности системы)
2. *Итерационное расщепление*: поочередное решение подзадач фильтрации и упругости отдельно до достижения сходимости.

Основным плюсом монолитного подхода является его безусловная устойчивость. Минусами являются необходимость работы с матрицами большого размера и сложной структуры (системы с седловой точкой [151]). Эти проблемы усиливаются с добавлением новых процессов в систему, что наблюдается при увеличении сложности моделей ТГМХ-процессов. Типично применение итерационных методов на подпространствах Крылова, существует тенденция использования специальных преобуславливателей, учитывающих блочную структуру матрицы системы [152; 153]. Кроме того, применение монолитного подхода требует построения дискретизаций обеих подзадач в рамках одного и того же программного комплекса.

Методы, разделяющие исходную задачу на подзадачи, удобны по нескольким причинам. Во-первых, эти методы ослабляют требования по памяти за счет работы с системами уравнений меньшего размера. Во-вторых, они могут использовать специализированные решатели или даже отдельные программные комплексы [25; 154] для решения подзадач. В частности, для пороупругости подзадача упругости всегда остается линейной и требует лишь одного решения линейной системы, матрица которой не меняется, что дополнительно позволяет ограничиться однократным нахождением преобуславливателя. Методы

итерационного расщепления отличаются выбором подзадачи, которая решается первой, и дополнительными ограничениями, налагаемыми на подзадачи при их разделении. Среди таких методов выделяют следующие [44]:

1. Дренированное расщепление (drained split);
2. Недренированное расщепление (undrained split);
3. Расщепление с фиксированными деформациями (fixed-strain split);
4. Расщепление с фиксированными напряжениями (fixed-stress split).

Минусами таких подходов являются наличие дополнительного итерационного цикла на шаге по времени, возможная зависимость числа его итераций от параметров задачи, а также условная устойчивость дренированного расщепления и расщепления с фиксированными деформациями [141; 155]. В то же время, методы недренированного расщепления и расщепления с фиксированными напряжениями являются абсолютно устойчивыми, но метод с фиксированными напряжениями сходится за конечное число итераций даже в случае рассмотрения несжимаемого скелета [155]. В данной работе рассматриваются метод расщепления с фиксированными деформациями. На каждом шаге по времени первой решается подзадача фильтрации, алгоритм работы представлен в алгоритме 3.

С предыдущего временного слоя имеем h^n, \mathbf{u}^n ;

Положим $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^n$;

счетчик_итераций = 0;

до тех пор, пока счетчик_итераций < maxit;

выполнять

 Найти h^* : $F_f(h^*, \mathbf{u}^*) = 0$ методом Ньютона, зафиксировав
 перемещения \mathbf{u} (значит, и деформации $\boldsymbol{\varepsilon}$);

 Найти \mathbf{u}^* : $F_m(\mathbf{u}^*, h^*) = 0$, решив линейную систему;
 счетчик_итераций = счетчик_итераций + 1;

конец

если условие сходимости (3.22) выполнено для обеих подзадач **тогда**

 | записываем $h = h^*, \mathbf{u} = \mathbf{u}^*$

конец

Алгоритм 3: Работа метода итерационного расщепления с фиксированными деформациями

В случае полностью насыщенной среды, то есть, когда система (3.16) является линейной, работу метода расщепления с фиксированными деформациями можно проиллюстрировать следующим образом. На $(i + 1)$ -й итерации фильт-

трационная подзадача имеет вид

$$A_f h^{i+1} = b_f - A_{fm} \mathbf{u}^i, \quad (3.17)$$

а подзадача упругости выглядит как

$$A_m \mathbf{u}^{i+1} = b_m + A_{fm}^T h^{i+1}. \quad (3.18)$$

Такие действия на итерации можно считать применением блочного метода Гаусса–Зейделя к системе (3.16):

$$\begin{bmatrix} A_f & 0 \\ -A_{fm}^T & A_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h^{i+1} \\ \mathbf{u}^{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_f \\ b_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & A_{fm} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h^i \\ \mathbf{u}^i \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

Доказывается, что такой итерационный процесс сходится при выполнении следующего условия:

$$A_f \geq A_{fm} A_m^{-1} A_{fm}^T, \quad (3.20)$$

которое путем дальнейшего анализа сводится к условию

$$s_{stor} \geq \frac{\alpha^2}{K_{dr} \rho_w g}. \quad (3.21)$$

Таким образом, метод расщепления с фиксированными деформациями условно устойчив, устойчивость определяется соотношением физических параметров материалов.

Условие остановки имеет вид

$$\|F_*(X)\|_2 < \varepsilon_{abs} \text{ или } \|F_*(X)\|_2 < \varepsilon_{rel} \|F_*(X^0)\|_2, \quad (3.22)$$

где $* = f, m$, а X^0 – значения, полученные на первой итерации цикла расщепления.

Глава 4. Численные эксперименты

Описанные в данной работе методы программно реализованы на языке C++. Методы решения уравнения Ричардса, за исключением случая метода опорных операторов, доступны пользователям в программном комплексе GeRa. Остальные методы реализованы в отдельном коде, который будет затем встроен в программный комплекс GeRa.

В качестве основы кода использовалась программная платформа INMOST [39; 156], разрабатываемая в ИВМ РАН им. Г.И.Марчука. Эта платформа предоставляет средства работы с неструктуризованными сетками, модуль автоматического дифференцирования для построения матриц Якоби, а также линейные решатели. Все этапы работы могут с незначительными затратами на модификацию кода быть параллелизованы с помощью технологии MPI.

4.1 Первичное тестирование метода продолжения, сравнение эффективности с методом установления

Первая серия тестов была проведена с целью сравнить время работы методов установления и продолжения для решения стационарных задач фильтрации вблизи земной поверхности, а также проверить работоспособность метода продолжения на реалистичных задачах высокой сложности. Рассматривались три задачи: модельная задача о дамбе, две задачи о существующих в реальности объектах, называемых дальше объектами А и Б, а также задача о Кучинском полигоне твердых бытовых отходов.

В модельной задаче о дамбе, приведенной в книге [157] и используемой в качестве верификационного теста GeRa, рассматривается фильтрация через тело дамбы. Задача двумерная, дамба является квадратной областью со стороной 10 м, состоящей из материала с коэффициентом фильтрации $K = 0,864$ м/сут. На левой границе области установлен напор $h = 10$ м, на правой границе установлен напор $h = 2$ м до уровня $z = 2$ м, выше этой отметки стоит условие просачивания. Верхняя и нижняя границы являются непроницаемыми. Задача рассматривалась как квазидвумерная: в нее добавлено третье измерение, чтобы

задачу можно было решить трехмерным кодом, но при этом вдоль добавленного измерения присутствовал лишь один слой ячеек.

Объект А – область площадью около 64 км^2 , состоящая из 3 геологических слоев, 7 различных материалов, содержащая реки и озера. Все материалы анизотропны, имеют тензор фильтрации вида $\mathbb{K} = \text{diag}\{K, K, 0.1K\}$, при этом K меняется от 0,011 до 4,76 м/сут.

Объект Б – область площадью около 100 км^2 , состоящая из 4 геологических слоев, 4 различных материалов, содержащая реки и озера. Все материалы анизотропны, имеют тензор фильтрации вида $\mathbb{K} = \text{diag}\{K, K, 0.1K\}$, при этом K меняется от 0,14 до 16 м/сут.

4.1.1 Сравнение методов установления и продолжения на задаче о дамбе

Расчеты проводились на сетках из 1600 ячеек (шаг 0.25 м) и 10000 ячеек (шаг 0.1 м). Для дискретизации использовалась схема TPFA в сочетании с противопотоковой аппроксимацией относительной проницаемости K_r . В качестве итерационного нелинейного решателя использовался метод Ньютона с линейным поиском. В качестве линейного решателя использовался стабилизованный метод бисопряженных градиентов (Bi-CGSTAB [158]) из пакета PETSc. Были установлены следующие критерии сходимости (3.4): $\varepsilon_{rel} = \varepsilon_{abs} = 10^{-5}$, $maxit = 25$. Время расчета, число шагов (шагов по времени для метода установления и шагов продолжения), а также общее число итераций метода Ньютона приведены в таблицах 1 и 2. На обеих сетках метод продолжения решил задачу за 1 шаг (то есть, после решения линейной задачи сразу решил исходную), а также совершил существенно меньше итераций метода Ньютона, за счет чего оказался значительно быстрее метода установления.

	T_{comp} , с	# шагов	# итераций м. Ньютона
М. установления	2.65	8	49
М. продолжения	0.85	1	8

Таблица 1 — Сравнение методов установления и продолжения на задаче о дамбе, сетка из 1600 ячеек

	T_{comp} , с	# шагов	# итераций м. Ньютона
М. установления	18.9	8	63
М. продолжения	6.2	1	13

Таблица 2 — Сравнение методов установления и продолжения на задаче о дамбе, сетка из 10000 ячеек

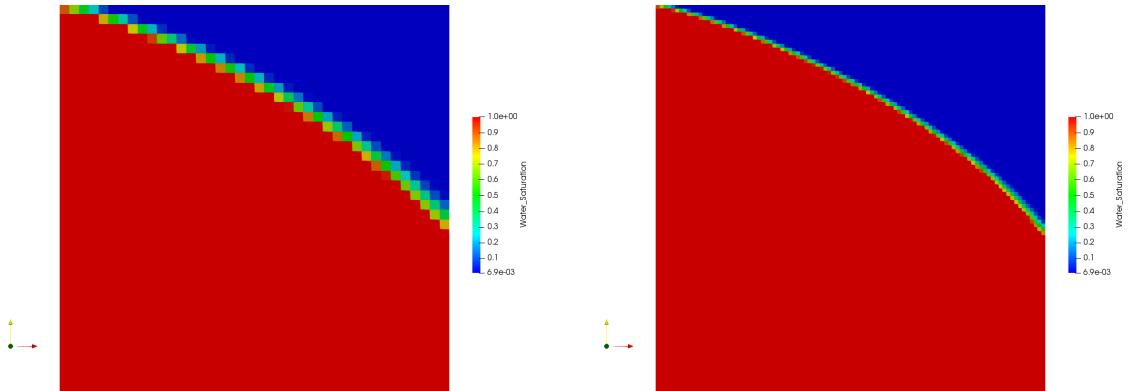


Рисунок 4.1 — Профили насыщенности в задаче о дамбе. Слева – сетка из 1600 ячеек, справа – сетка из 10000 ячеек

4.1.2 Сравнение методов установления и продолжения на задаче для объекта А

Расчеты проводились на треугольнопризматической сетке из 171450 ячеек. Были установлены следующие критерии сходимости (3.4): $\varepsilon_{rel} = 10^{-5}$, $\varepsilon_{abs} = 10^{-6}$, $maxit = 25$.

Для сравнения методов установления использовалась дискретизация схемой TPFA, а для метода продолжения были проведены дополнительные расчеты для схемы MPFA-О для демонстрации того факта, что даже в этом случае метод продолжения оказывается быстрее, чем метод установления со

	T_{comp} , с	# успешных (неудач.) шагов	# итераций м. Н.
М. установления, TPFA	868.4	65(10)	377
М. продолжения, TPFA	124.4	1(0)	10
М. продолжения, MPFA	444.3	1(0)	13

Таблица 3 — Сравнение методов установления и продолжения на задаче для объекта А на сетке из 171450 ячеек

схемой TPFA. Во всех случаях использовалась центральная аппроксимация относительной проницаемости K_r .

Время расчета, число шагов (шагов по времени для метода установления и шагов продолжения), а также общее число итераций метода Ньютона приведены в таблице 3.

4.1.3 Эффект линейного поиска и сравнение функций \mathcal{K}_{lin} и \mathcal{K}_{pow}

Линейный поиск – мощный инструмент улучшения сходимости метода Ньютона. Как видно из таблиц 1, 2 и 3, при его использовании на тех задачах метод продолжения сходится за 1 шаг. Понятно, что в таком случае нет разницы между использованием \mathcal{K}_{lin} и \mathcal{K}_{pow} . Чтобы наблюдать разницу, нужно отключить линейный поиск или рассмотреть более сложные задачи.

С этой целью для объекта А был проведен ряд расчетов на той же сетке из 171450 ячеек, но без линейного поиска в методе Ньютона и со сниженным максимальным числом итераций $maxit = 15$. Время расчетов, число шагов и общее число итераций в методе Ньютона представлены в таблице 4. Пример эффекта линейного поиска на работу метода Ньютона представлен на рисунке 4.2: применение линейного поиска потребовалось всего на одной итерации, но кардинальным образом повлияло на итоговую сходимость. В случае схемы TPFA заметных различий во времени расчета между функциями \mathcal{K}_{lin} и \mathcal{K}_{pow} не наблюдалось, в то время как для схемы MPFA-О линейная функция \mathcal{K}_{lin} приводит к лишнему неудачному шагу и общему увеличению времени расчета.

Чтобы далее изучить разницу между функциями \mathcal{K}_{lin} и \mathcal{K}_{pow} , были проведены расчеты для объекта на сетке из 12 миллионов ячеек с использованием

	T_{comp} , с	# успешных (неудач.) шагов	# итераций м. Ньютона
\mathcal{K}_{pow} , TPFA	325.8	2(1)	32
\mathcal{K}_{pow} , MPFA-O	1069.3	2(1)	32
\mathcal{K}_{lin} , TPFA	347.5	2(1)	34
\mathcal{K}_{lin} , MPFA-O	1445.1	3(2)	51

Таблица 4 — Сравнение функций продолжения \mathcal{K}_{lin} и \mathcal{K}_{pow} , объект А, сетка из 171450 ячеек, метод Ньютона без линейного поиска

	T_{comp} , с	# успешных (неудач.) шагов	# итераций м. Ньютона
\mathcal{K}_{lin}	8776	3(2)	55
\mathcal{K}_{pow}	8374	2(1)	30

Таблица 5 — Результаты параллельных вычислений для объекта А на сетке из 12 миллионов ячеек, схема MPFA-O

схемы MPFA-O. Расчеты проводились в параллельном режиме с использованием 140 ядер кластера ИВМ РАН. Результаты приведены в таблице 5, распределения напора и насыщенности представлены на рисунке 4.3. Пример сходимости метода Ньютона с линейным поиском представлен на рисунке 4.4. В случае такой мелкой сетки методу продолжения требовалось более 1 шага даже с линейным поиском. При этом степенная функция \mathcal{K}_{pow} потребовала меньше шагов.

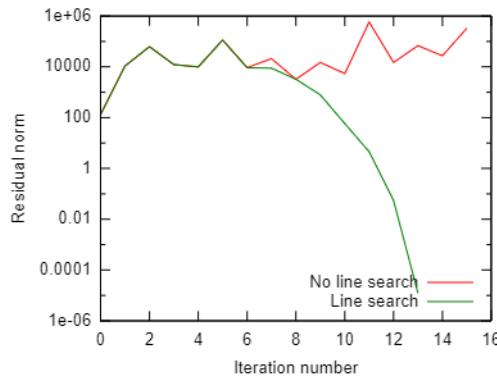


Рисунок 4.2 — Эффект линейного поиска в задаче об объекте А. Применение линейного поиска ($\omega = 0.25$) на 7-й итерации затем приводит к быстрой сходимости, в то время как без линейного поиска метод не сходится

Задача для объекта оказалась более сложной. Даже с применением линейного поиска в методе Ньютона метод продолжения совершил несколько шагов

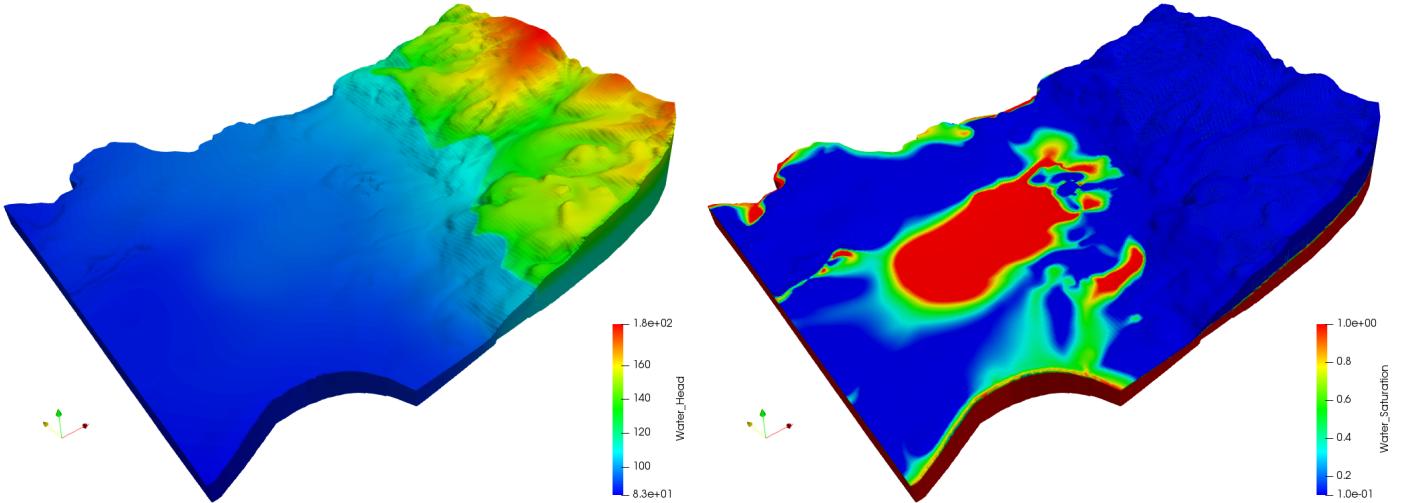


Рисунок 4.3 – Распределения напора и насыщенности на объекте А, полученные на сетке из 12 миллионов ячеек с применением схемы MPFA-O

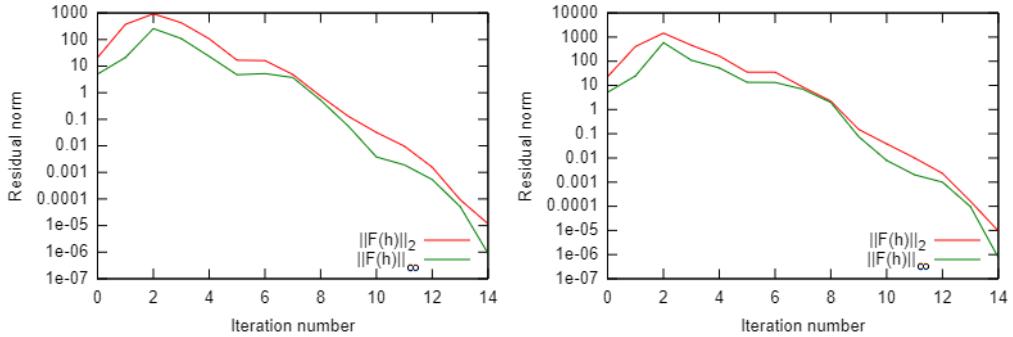


Рисунок 4.4 – Пример сходимости метода Ньютона с линейным поиском. Слева – линейная функция продолжения \mathcal{K}_{lin} , q увеличивается с 0,75 до 1. Справа – степенная функция продолжения \mathcal{K}_{pow} , q увеличивается с 0,5 до 1. Результаты для объекта А на сетке из 12 миллионов ячеек с применением схемы MPFA-O

даже на относительно грубых сетках. Расчеты проводились на треугольноприматической сетке из 56820 ячеек, использовались центральная аппроксимация относительной проницаемости K_r и следующие условия сходимости (3.4): $\varepsilon_{rel} = 10^{-6}$, $\varepsilon_{abs} = 10^{-6}$, $maxit = 25$. Время расчетов, число шагов и число итераций метода Ньютона приведены в таблице 6. При использовании схемы TPFA разница во времени для функций \mathcal{K}_{lin} и \mathcal{K}_{pow} несущественна, хотя степенная функция привела к вдвое большему числу шагов. В случае схемы MPFA-O линейная функция привела к более быстрому расчету за счет меньшего числа шагов и итераций метода Ньютона.

	T_{comp} , с	# успешных (неудач.) шагов	# итераций м. Ньютона
\mathcal{K}_{pow} , TPFA	171.1	10(9)	133
\mathcal{K}_{pow} , MPFA-O	732.3	7(8)	117
\mathcal{K}_{lin} , TPFA	163.9	5(4)	104
\mathcal{K}_{lin} , MPFA-O	393.6	5(4)	61

Таблица 6 — Сравнение функций продолжения \mathcal{K}_{lin} и \mathcal{K}_{pow} на задаче для объекта Б на сетке из 56820 ячеек при применении линейного поиска в методе Ньютона

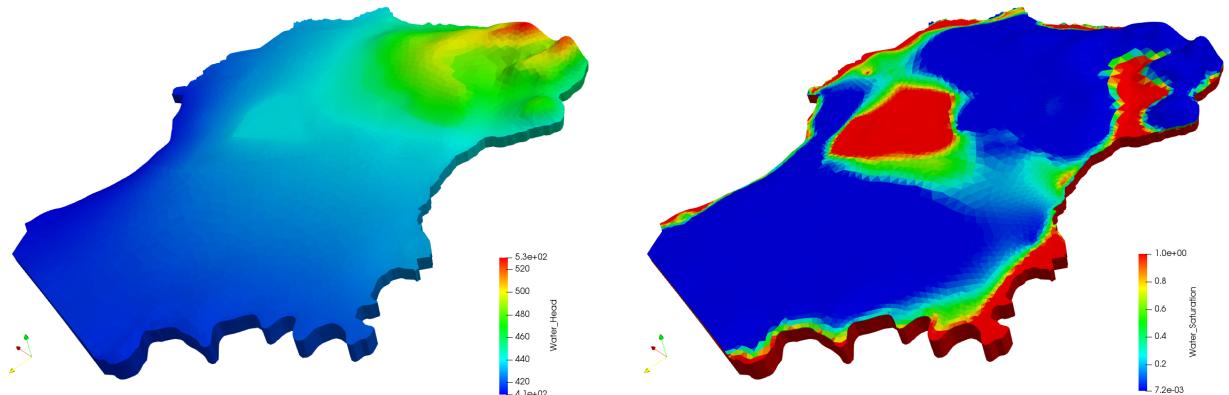


Рисунок 4.5 — Распределения напора и насыщенности, полученные для объекта Б на сетке из 56820 ячеек с использованием схемы MPFA-O

4.1.4 Случай замыкающих соотношений Ван Генухтена – Муалема для объекта А

Дополнительные расчеты были проведены для объекта А в случае использования более нелинейных замыкающих соотношений Ван Генухтена – Муалема. Целью расчетов была демонстрацию способности метода продолжения справляться с задачами с более сильной нелинейностью. Параметры модели θ_r , θ_s , α и n были частично взяты из данных измерений на объекте и частично – из литературы. Дополнительно для всех материалов был установлен $n > 2$, чтобы избежать негладкости K_r . Тем не менее, даже в этом случае задача является достаточно тяжелой.

Расчеты проводились на ряде треугольнопризматических сеток. Далее приводятся результаты для сетки, содержащей около 1,2 миллиона ячеек, полу-

	T_{comp} , с	# успешны (неудач.) шагов	# итераций м. Ньютона
\mathcal{K}_{pow} , TPFA	400.0	3(2)	148
\mathcal{K}_{lin} , TPFA	259.5	3(2)	87

Таблица 7 — Работа метода продолжения на задаче для объекта А на сетке из 1,2 миллиона ячеек в случае замыкающих соотношений Ван Генухтена – Муалема

ченные в параллельном режиме с использованием 96 ядер кластера ИВМ РАН. Были заданы следующие условия сходимости (3.4): $\epsilon_{rel} = 10^{-5}$, $\epsilon_{abs} = 10^{-6}$.

Рассчитанные распределения напора и насыщенности приведены на рисунке 4.6. Хотя картина напора отличается несильно, распределение насыщенности демонстрирует сильные отличия за счет большей сложности модели Ван Генухтена – Муалема. Результаты работы метода продолжения приведены в таблице 7. Для степенной и линейной функций продолжения число шагов в методе продолжения совпало, а вот число итераций метода Ньютона оказалось существенно ниже в случае линейной функции. Вышеперечисленное относится к схеме TPFA, поскольку с использованием схемы MPFA-О задачу решить не удалось вообще.

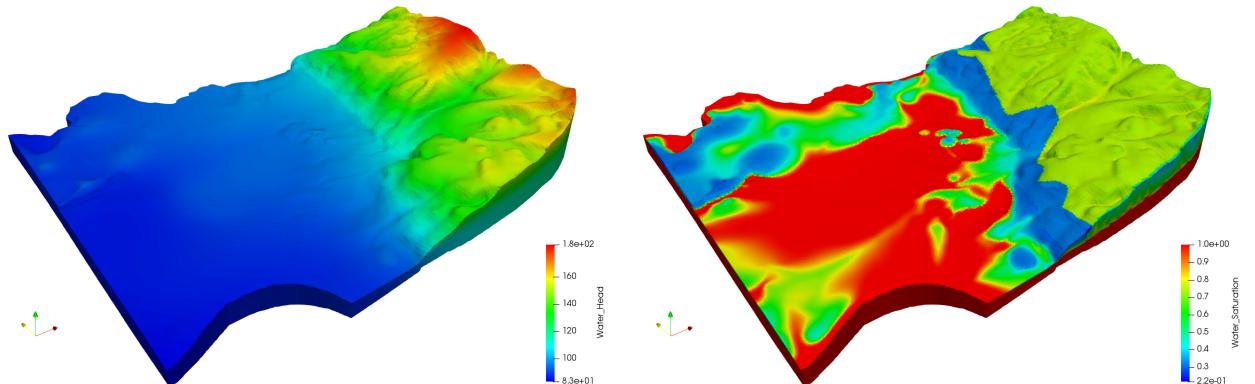


Рисунок 4.6 — Распределения напора и насыщенности, полученные для объекта А на сетке из 1,2 миллиона ячеек с использованием схемы TPFA для случая замыкающих соотношений Ван Генухтена – Муалема

	T_{comp} , с
Метод установления, TPFA	3126
Метод продолжения, TPFA	33,1
Метод продолжения, MPFA-O	46,2

Таблица 8 — Сравнение методов установления и продолжения на задаче о Кучинском полигоне твердых бытовых отходов

4.1.5 Задача о Кучинском полигоне твердых бытовых отходов

В этой задаче моделируется стационарная фильтрация подземных вод в условиях переменной насыщенности на территории Кучинского полигона твердых бытовых отходов. Задача имеет следующие особенности: 7 геологических слоев (присутствует выклинивание слоя), 8 материалов, присутствие анизотропного тензора фильтрации \mathbb{K} с соотношением компонент до 1:50 и разбросом значений от $2 \cdot 10^{-6}$ до 5 м/сут, наличие рек. Дополнительную сложность вносит использование соотношений Ван Генухтена – Муалема.

Сравнение времени расчета для методов продолжения и установления приведено в таблице 8. Использование метода продолжения позволяет снизить время расчета в 94 раза, а также дает возможность использовать схему MPFA-O (в методе установления расчет с этой схемой не удалось завершить из-за проблем со сходимостью нелинейных решателей). Рассчитанные распределения напора и насыщенности приведены на рисунке 4.7.

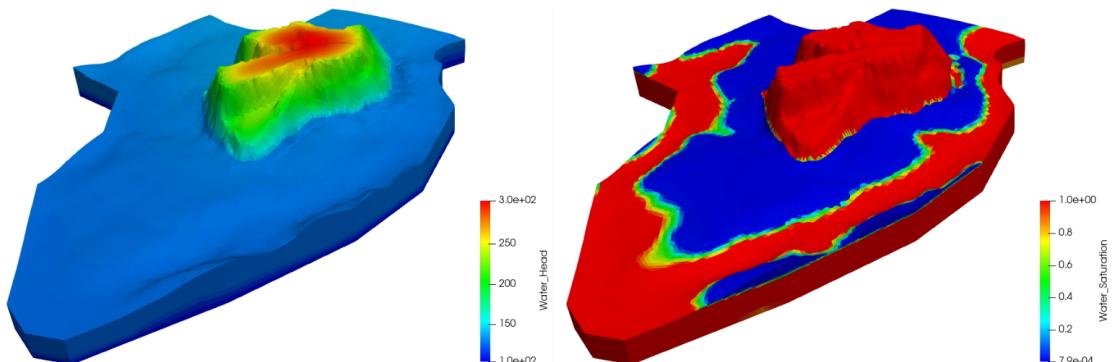


Рисунок 4.7 — Распределения напора и насыщенности, полученные для Кучинского полигона твердых бытовых отходов

4.1.6 Выводы по серии экспериментов

По результатам проведенных численных экспериментов можно сделать следующие выводы:

1. Метод продолжения оказался очень полезным методом при решении практических задач стационарной фильтрации в условиях переменной насыщенности. Он способен решать задачи при использовании кусочно-линейных и нелинейных замыкающих соотношений и разных схем дискретизации. Метод продолжения может снижать время расчета задач на 2 порядка по сравнению с методом установления;
2. Используя более сложную схему дискретизации MPFA-O, метод продолжения может решить задачу быстрее, чем метод установления в случае более простой схемы дискретизации TPFA;
3. Линейный поиск является полезным инструментом, способным кардинально влиять на сходимость метода Ньютона.

4.2 Исследование эффективности различных корректоров в методе продолжения

Потенциал метода продолжения, представимого в виде процедуры предиктор–корректор, предположительно лежит в использовании различных предикторов. Перед исследованием предикторов было решено сравнить между собой возможные корректоры, которыми являются итерационные нелинейные решатели, чтобы в дальнейшем использовать наиболее эффективный.

Численные эксперименты проводились для двух задач. Первая задача похожа на задачу о дамбе из раздела 4.1 с отличием в том, что тензор фильтрации становится анизотропным и полным за счет поворота на угол $\Pi/6$. Также граничное условие просачивания заменено на условие непротекания. Во второй задаче рассматривается объект А из раздела 4.1 без учета рек и озер.

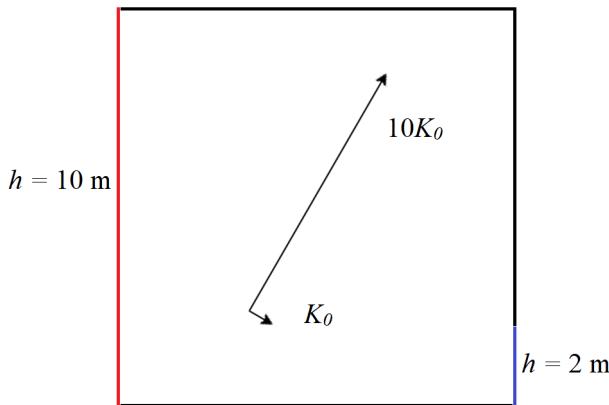


Рисунок 4.8 — Измененная задача о дамбе: область, граничные условия и тензор фильтрации

4.2.1 Модель безнапорной фильтрации: модифицированная задача о дамбе

Первая серия численных экспериментов была проведена на кубических сетках, которые из-за повернутости тензора фильтрации перестали быть \mathbb{K} -ортогональными. Тем не менее, область структурно проста и однородна, так что можно было ожидать сходимости метода продолжения за 1 шаг. В связи с этим, для корректоров проверялась их способность обеспечить такую сходимость. Расчеты проводились на сетках из 400 и 6400 кубических ячеек. Поскольку результаты концептуально похожи, далее они приводятся только для случая 6400 ячеек. Были установлены следующие параметры сходимости (3.4): $\varepsilon_{rel} = 10^{-5}$, $\varepsilon_{abs} = 10^{-6}$, $maxit = 50$.

Сравнение сходимости методов Пикара и Ньютона, а также комбинированного решателя приведено на рисунке 4.9. Как и ожидалось, метод Пикара демонстрирует линейную сходимость; кроме того, в нем часто отказывал линейный поиск. Комбинированный решатель оказался более надежным по сравнению с методом Ньютона: он оказался единственным методом, позволившим решить задачу со схемой MPFA-O, а также оказался быстрее для схем TPFA и NMPFA-B. Причина заключается в том, что метод Ньютона в некоторых случаях начинает расходиться на первых итерациях, чего удается избежать в комбинированном решателе. При этом ни один корректор не позволил методу продолжения сойтись за 1 шаг при использовании схемы NTPFA-B.

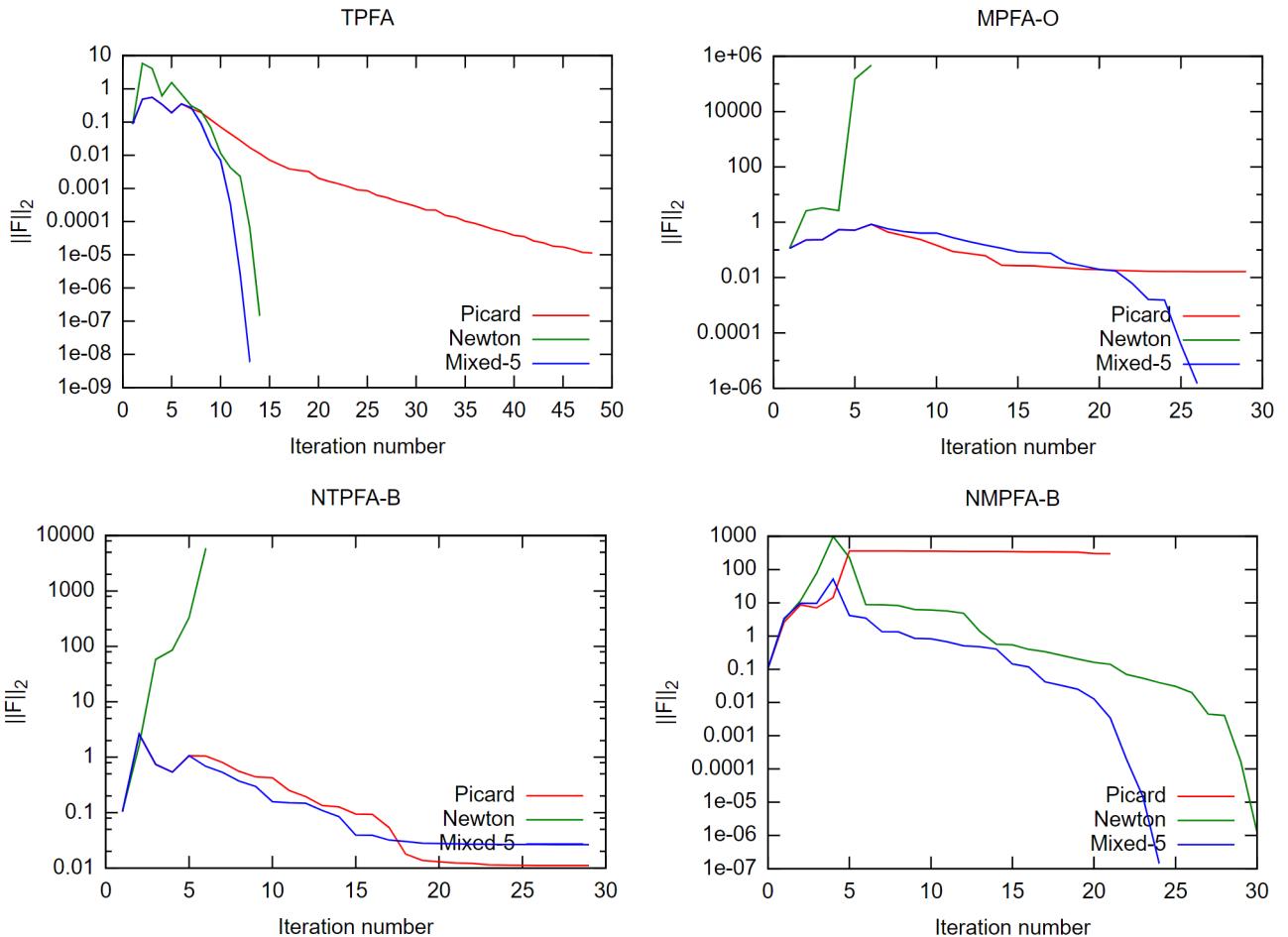


Рисунок 4.9 — Измененная задача о дамбе: сходимость корректоров – различных итерационных решателей

4.2.2 Модель безнапорной фильтрации: объект А

Серия расчетов была проведена и на задаче для объекта А. Целью по-прежнему являлась проверка способности корректоров обеспечить работу метода продолжения за 1 шаг. Результаты расчетов приведены для одной из гексаэдральных сеток, содержащей 13000 ячеек. Использовались следующие условия сходимости (3.4): $\varepsilon_{rel} = 10^{-5}$, $\varepsilon_{abs} = 10^{-6}$, $maxit = 100$. Сходимость различных корректоров показана на рисунке 4.10. Для схем МКО с линейной аппроксимацией потока все корректоры успешно справились с задачей, кроме метода Пикара в случае схемы ТРФА. Для схем МКО с нелинейной аппроксимацией потока ситуация следующая. Для схемы НТРФА-В метод Ньютона не сошелся, сильно повысив $\|F\|$ на первых итерациях. Комбинированный решатель и метод Пикара показали схожую высокую скорость сходимости. Для схемы НМРФА-В не сошелся ни один корректор. Это связано с резким ростом

$\|F\|$ на первых итерациях. Чтобы справиться с этой ситуацией, был испробован комбинированный решатель с фиксированным параметром релаксации ω на первых 5 итерациях. Результаты для разных ω приведены на рисунке 4.11 и показывают, что при достаточно малом ω решатель успешно справляется с задачей.

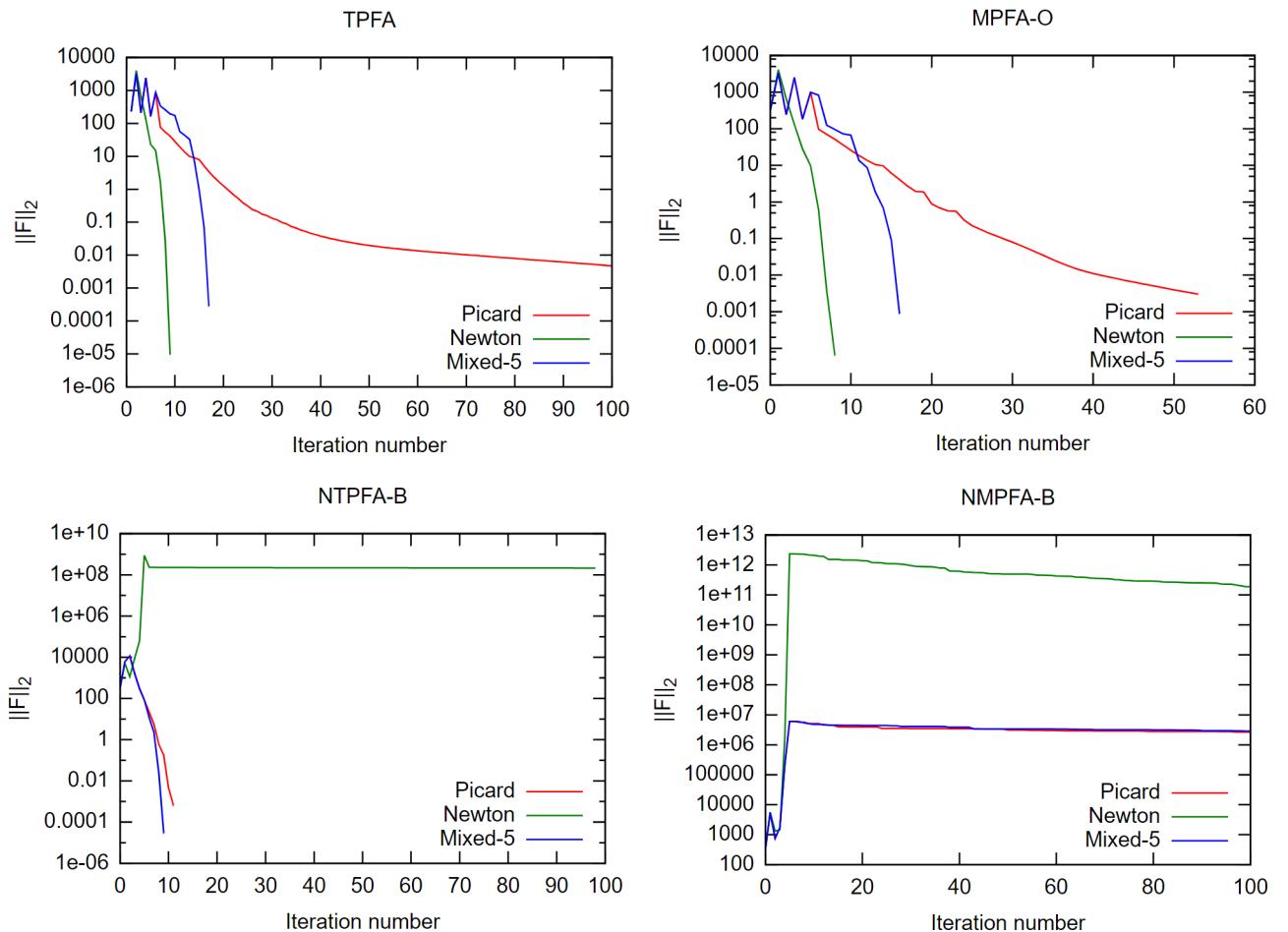


Рисунок 4.10 — Сходимость корректоров на задаче для объекта А на сетке из 13000 ячеек

4.2.3 Модель Ван Генухтена – Муалема: модифицированная задача о дамбе

Цель следующих экспериментов состояла в сравнении метода Ньютона и хорошо зарекомендовавшего себя комбинированного решателя в случае использования модели Ван Генухтена – Муалема. Известно, что относительная

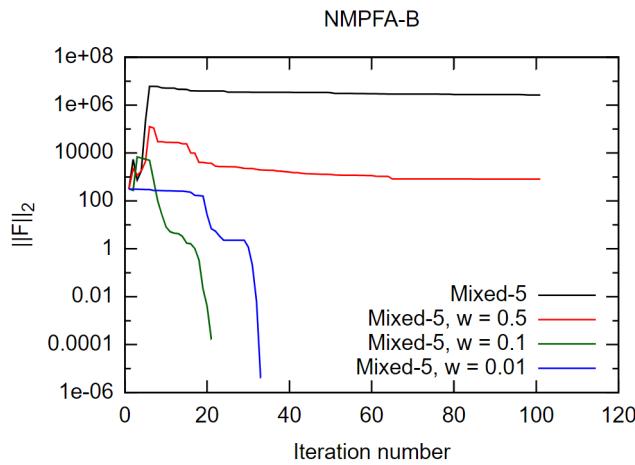


Рисунок 4.11 — Сходимость комбинированного решателя с фиксированным параметром релаксации ω на первых 5 итерациях на задаче для объекта А на сетке из 13000 ячеек

проницаемость K_r является негладкой для $n < 2$ [119], поэтому для дополнительной сложности задачи был задано значение $n = 1.2$. Такая нелинейность замыкающих соотношений, анизотропия тензора фильтрации и использования не \mathbb{K} -ортогональных сеток делает задачу достаточно сложной для решения и требует совершения нескольких шагов в методе продолжения. Были заданы следующие параметры сходимости (3.4): $\varepsilon_{rel} = 10^{-5}$, $\varepsilon_{abs} = 10^{-5}$, $maxit = 80$. Результаты расчетов на кубической сетке из 5500 ячеек приведены на рисунке 9, а результаты расчетов на треугольнопризматической сетке из 1800 ячеек – на рисунке 10.

Лучшая сходимость наблюдалась для схем TPFA и, что неожиданно, NMPFA-B, для этих схем метод продолжения часто срабатывал за 1 шаг даже при использовании метода Ньютона. При использовании схемы NTPFA-B сходимость отмечена не столь хорошая. Необходимо отметить, что в одном случае комбинированный решатель снизил число шагов продолжения, но увеличил общее число итераций и время расчета. Комбинированный решатель также часто приводил к общему неуспеху метода продолжения для линейной функции продолжения \mathcal{K}_{lin} при использовании схем TPFA и MPFA-O. Причиной этого является, видимо, негладкость K_r .

	Метод Ньютона			Комб. решатель		
	T_{comp} , с	Шаги	Итерации	T_{comp} , с	Шаги	Итерации
TPFA, $\mathcal{K}_{pow} = \mathcal{K}_{lin}$	5.6	1	22	13.4	1	53
MPFA-O, \mathcal{K}_{lin}	74.2	1	25	Неудача	15	1321
MPFA-O, \mathcal{K}_{pow}	74.2	1	25	3624.0	5	297
NTPFA-B, \mathcal{K}_{lin}	52.4	2	61	12.9	1	29
NTPFA-B, \mathcal{K}_{pow}	43.1	2	62	12.9	1	29
NMPFA-B, \mathcal{K}_{lin}	96.3	2	90	12.9	1	29
NMPFA-B, \mathcal{K}_{pow}	79.2	2	106	7.8	1	40

Таблица 9 — Сравнение корректоров на модифицированной задаче о дамбе при использовании модели Ван Генухтена – Муалема на кубической сетке из 5500 ячеек

	Метод Ньютона			Комб. решатель		
	T_{comp} , с	Шаги	Итерации	T_{comp} , с	Шаги	Итерации
TPFA, \mathcal{K}_{lin}	5.1	1	29	Неудача	55	2106
TPFA, \mathcal{K}_{pow}	5.1	1	29	52.1	9	341
MPFA-O, \mathcal{K}_{lin}	28.2	1	25	Неудача	12	857
MPFA-O, \mathcal{K}_{pow}	28.2	1	25	729.0	14	495
NTPFA-B, \mathcal{K}_{lin}	4.1	2	26	5.4	1	34
NTPFA-B, \mathcal{K}_{pow}	29.4	3	109	5.4	1	34
NMPFA-B, $\mathcal{K}_{pow} = \mathcal{K}_{lin}$	2.2	1	14	7.8	1	40

Таблица 10 — Сравнение корректоров на модифицированной задаче о дамбе при использовании модели Ван Генухтена – Муалема на треугольнопризматической сетке из 1900 ячеек

4.2.4 Выводы по серии экспериментов

По результатам численных экспериментов можно сделать следующие выводы:

1. Метод Пикара слабо пригоден в качестве самостоятельного корректора ввиду низкой скорости сходимости;
2. Для задач, использующих модель безнапорной фильтрации самым эффективным является комбинированный решатель с фиксированным параметром ω на первых 5 итерациях. Начальные итерации, которые этот решатель совершает методом Пикара в сочетании с релаксацией, достаточно хорошо улучшают начальное приближение и предотвращают резкий рост $\|F\|$. Комбинированный решатель может обеспечить сходимость метода продолжения за 1 шаг даже в случае сильно неоднородных и анизотропных областей;
3. При использовании нелинейных замыкающих соотношений Van Генухтена – Муалема использование комбинированного решателя нецелесообразно, поскольку его влияние сильно зависит от дискретизации задачи, а также может привести к увеличению общих вычислительных затрат даже при сокращении числа шагов продолжения. В этом случае лучше использовать метод Ньютона, требующий меньшего числа настроек, а снижать общее время расчета стоит путем использования специальных предикторов.

4.3 Исследование эффективности предиктора первого порядка в методе продолжения

Следующая серия экспериментов была проведена с целью исследования влияния предиктора первого порядка на работу метода продолжения. Ранее проводимые численные эксперименты использовали лишь предиктор нулевого порядка. Поскольку для модели безнапорной фильтрации в предыдущем разделе было установлено, что сходимости метода продолжения можно часто добиться за 1 шаг, исследования предиктора первого порядка проводились толь-

ко для модели Ван Генухтена – Муалема. В качестве корректора использовался метод Ньютона с линейным поиском.

В этом разделе также использовалась схема дискретизации методом опорных операторов, который для краткости обозначался как MFD (от mimetic finite difference).

4.3.1 Задача о капиллярном барьере

В этой задаче рассматривается инфильтрация в двуслойную область. Впервые она была представлена в работе [66], а затем использовалась для верификации различного программного обеспечения, такого как TOUGH2 [159], FEFLOW [68] и GeRa [67]. Задача двумерная, область имеет размеры около 100 м в длину и 6 м в высоту, состоит из двух наклонных (под углом 5%) слоев мощностью 0,5 м. Верхний слой состоит из песка, а нижний – из гравия. Параметры сред приведены в таблице 11. На нижней и правой границе задан нулевой напор $h = 0$ м, на верхней задан поток 0,0048 м/сут.

Важной особенностью задачи является сильный контраст в свойствах материалов. В насыщенном состоянии крупнозернистый гравий гораздо лучше проводит воду, чем мелкозернистый песок. Однако параметры замыкающих соотношений Ван Генухтена – Муалема для этих материалов таковы, что в сухих условиях гравий становится менее проницаемым, что приводит к так называемому эффекту капиллярного барьера, когда поступающий с верхней границы поток отклоняется вправо на границе раздела сред. С этим связано еще одно важнейшее обстоятельство: тот факт, что линейная функция продолжения \mathcal{K}_{lin} не сохраняет подобное соотношение проницаемостей для всех значений параметра продолжения q , что может приводить к тому, что решение с q , очень близким к 1 ($q = 0,999$ и пр.) будет сильно отличаться от итогового. Это обстоятельство ставит под сомнение возможность использование \mathcal{K}_{lin} в принципе с моделью Ван Генухтена – Муалема, а в расчетах далее использовалась только степенная функция продолжения \mathcal{K}_{pow} .

Расчеты проводились на гексаэдральной сетке из 3200 ячеек. Для метода Ньютона использовались следующие условия сходимости (3.4): $\varepsilon_{rel} = \varepsilon_{abs} = 10^{-5}$, $maxit = 25$. Использовалась противопотоковая аппроксимация

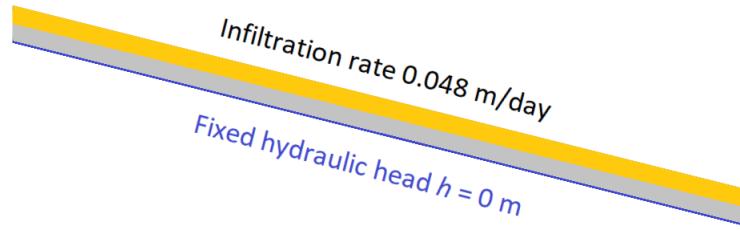


Рисунок 4.12 — Расчетная область и граничные условия в задаче о капиллярном барьере (растянуто в 5 раз по вертикали)

	K , м/сут	α , 1/м	n	θ_r	θ_s
Песок	18.144	3.9	5.74	0.154	0.39
Гравий	8640	490	2.19	0.011	0.42

Таблица 11 — Параметры сред в задаче о капиллярном барьере

относительной проницаемости K_r . Рассчитанные распределения напора и насыщенности, слабо различающиеся для различных дискретизаций, представлены на рисунке 4.13. Данные по сходимости для разных схем приведены в таблице 12. Для схем TPFA, MPFA-О и NTPFA-В выигрыш по времени при использовании предиктора первого порядка составил до 40%. Для схемы NMPFA-В предиктор первого порядка снизил как число шагов продолжения, так и общее число итераций, но время расчета не снизилось вследствие возросшего числа лишних вычислений, связанных с неудачами линейного поиска ????. Для схемы MFD предиктор первого порядка не дал преимуществ. Необходимо отметить, что решение схемой MFD оказалось самым быстрым, хотя эта схема порождает гораздо большие по размеру матрицы. Причиной быстрого расчета явилось малое общее число итераций.

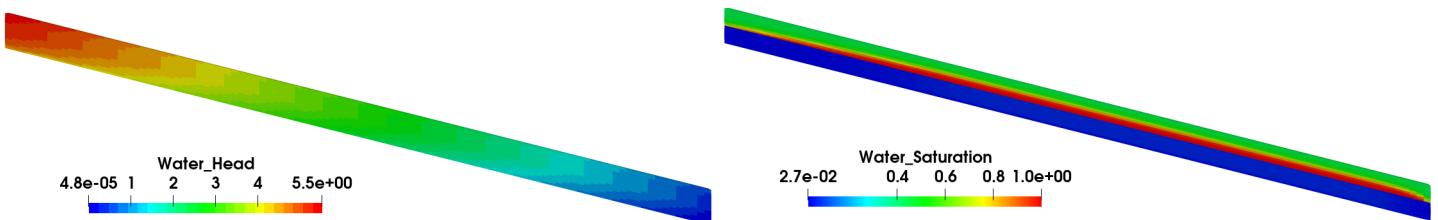


Рисунок 4.13 — Распределения напора и насыщенности в задаче о капиллярном барьере (растянуто в 5 раз по вертикали)

	T_{comp} , с	# успешных (неудач.) шагов	# итераций м. Ньютона
TPFA, 0	89.7	33 (35)	829
	1	27 (28)	463
MPFA-O, 0	375.0	31 (33)	667
	1	24 (25)	432
NTPFA-B, 0	48.7	35 (37)	409
	1	26 (27)	265
NMPFA-B, 0	63.0	32 (34)	493
	1	25 (27)	413
MFD, 0	35.8	13 (14)	117
	1	23 (24)	198

Таблица 12 — Сравнение предикторов нулевого и первого порядков на задаче о капиллярном барьере

4.3.2 Задача о хранилище радиоактивных отходов

В этой задаче рассматривается течение подземных вод в вертикальном срезе объекта – приповерхностного хранилища радиоактивных отходов. Расчетная область представлена на рисунке 4.14 и имеет размеры около 90 м в длину, 12 м в высоту и состоит из 16 изотропных материалов, чьи свойства приведены в таблице 13. На верхней границе задан поток 0,0001 м/сут, а на остальных границах задан напор $h = 0,5$ м.

Есть несколько причин сложности решения данной задачи:

- Коэффициент фильтрации K варьируется от 0,048 до 100 м/сут, на некоторых границах раздела скачок составляет до трех порядков;
- Относительная проницаемость K_r является негладкой для некоторых материалов;
- В области находится несколько зон полной насыщенности, а также сильно осущененные участки;
- Использование центральной аппроксимации K_r приводит к заметным осцилляциям насыщенности, поэтому следует использовать противопотоковую аппроксимацию;

	K , м/сут	α , 1/м	n	θ_r	θ_s
Глина	0.048	0.8	1.09	0.068	0.38
Почва	0.1	5.9	3	0.1	0.35
Гравий	100	6	3	0.04	0.3
Суглинок	0.2496	3.6	1.56	0.078	0.43
Песок	7.128	14.5	2.68	0.045	0.43
Хранилище	0.1	14.5	3	0.045	0.4

Таблица 13 — Параметры сред в задаче о приповерхностном хранилище радиоактивных отходов

В области была построена треугольнопризматическая сетка из 2800 ячеек. Для метода Ньютона были установлены следующие параметры сходимости (3.4): $\varepsilon_{abs} = \varepsilon_{rel} = 10^{-4}$, $maxit = 20$. Задача оказалась действительно трудной, решить ее удалось только при использовании схем TPFA и MFD. В остальных случаях метод продолжения не сумел подобрать Δq . Параметры решения представлены в таблице 14 и показывают, что предиктор первого порядка снизил время расчетов более, чем на 50% для схемы TPFA и почти на 40% для схемы MFD. В случае MFD общее число шагов продолжения повысилось, а общее число итераций — снизилось. Это можно объяснить тем, что метод Ньютона сходится быстрее, когда приближение от предиктора первого порядка хорошее, и расходится быстрее, когда это приближение плохое.

Рассчитанные распределения насыщенности представлены на рисунке 4.15. Как можно было ожидать, схема TPFA продемонстрировала некоторые численные артефакты, связанные с невыполнением условия \mathbb{K} -ортогональности сетки — «шахматную доску» для насыщенности (см. рисунок 4.16), в то время как схема MFD этого недостатка лишена.

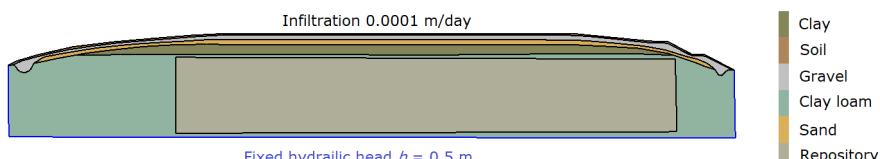


Рисунок 4.14 — Вертикальный срез приповерхностного хранилища радиоактивных отходов, граничные условия

	T_{comp} , с	# успешных (неудач.) шагов	# итераций м. Ньютона
TPFA, 0	47.2	17 (36)	383
	1	11 (23)	186
MFD, 0	335.5	18 (39)	510
	1	19 (41)	312

Таблица 14 — Сравнение предикторов нулевого и первого порядков в задаче о приповерхностном хранилище радиоактивных отходов

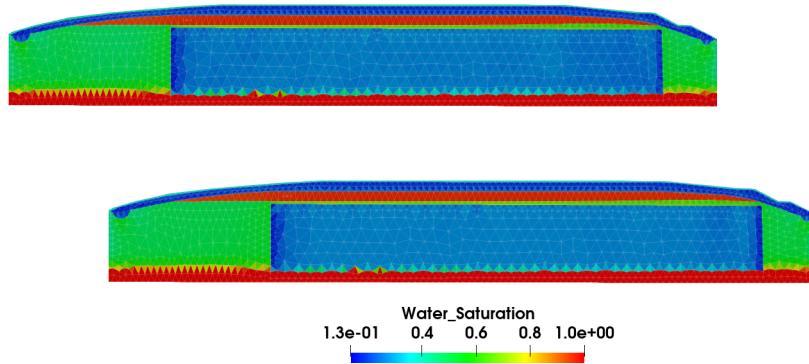


Рисунок 4.15 — Распределения насыщенности в задаче о приповерхностном хранилище радиоактивных отходов, полученные схемами TPFA (сверху) и MFD (внизу)

4.3.3 Выводы по серии экспериментов

По результатам проведенных численных экспериментов можно сделать следующие выводы:

1. В большинстве случаев предиктор первого порядка снижает время расчетов путем снижения числа шагов в методе продолжения, а также общего числа итераций метода Ньютона;
2. Для метода опорных операторов влияние предиктора первого порядка неоднозначно;
3. В некоторых случаях метод опорных операторов, против ожиданий, приводит к самому быстрому решению, что связано с лучшей работой нелинейных решателей на системах уравнений, порождаемых этим методом дискретизации.

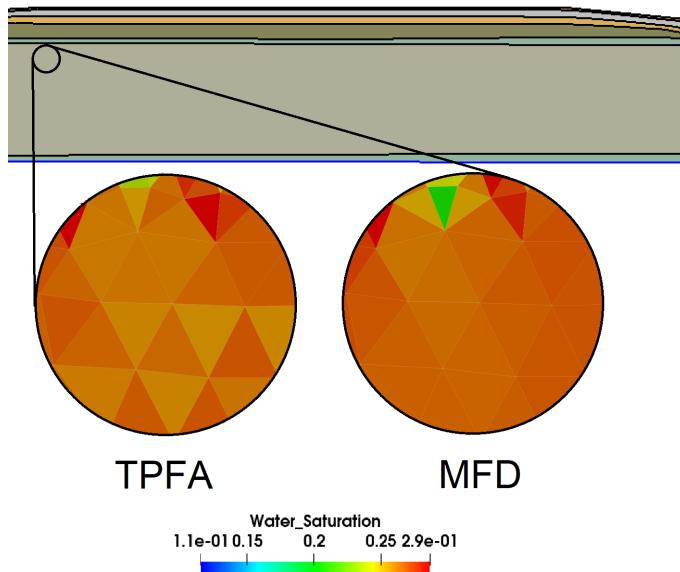


Рисунок 4.16 — «Шахматная доска» в картине насыщенности, полученной схемой TPFA

4.4 Исследование сходимости численного решения задач пороупругости на не \mathbb{K} -ортогональных сетках

В работе [53], где схема МКО–МВЭ для пороупругости была предложена впервые, использовалась схема аппроксимации потока TPFA. Замена этой схемы на усовершенствованные должна обеспечивать аппроксимацию на не \mathbb{K} -ортогональных сетках, что и выяснялось в результате численных экспериментов с использованием схем MPFA-O, MPFA-L.

Оценки производились по величине ошибки (2.42), для которой ожидается сходимость первого порядка как по шагу сетки, так и по шагу по времени. Расчеты проводились для аналитического решения

$$h = \frac{1}{2 \sin(1)} \sin((1-x)(1-y)(1-z)) + (1-x)^3(1-y)^2(1-z)(1+t^2),$$

$$u_x = ((x-0,5)^2 - y - z)(1+t^2), \quad (4.1)$$

$$u_y = ((y-0,5)^2 - x - z)(1+t^2),$$

$$u_z = ((z-0,5)^2 - y - x)(1+t^2)$$

в двух разных областях: первая представляет собой единичный куб, вторая является деформированным единичным кубом.

Далее приводятся результаты сходимости для двух типов сеток. Сетки первого типа являются дуальными к квазиравномерным треугольнопризмати-

ческим, сжатым в 2 раза в направлении x , и состоят из многограных призм. Сетки второго типа получаются деформацией кубических сеток и несмотря на свою простую структуру являются существенно не \mathbb{K} -ортогональными. Примеры сеток этих двух типов приведены на рисунке 4.17. Ошибки, вычисленные для расчета с $T = 10^{-7}$, приведены на рисунке 4.18. Применение схем MPFA-O и MPFA-L дает сходимость на обоих типах сеток. Схема TPFA демонстрирует порядок сходимости не выше первого на сетках из многограных призм, а на деформированных кубических сетках показывает отсутствие сходимости, что связано с существенными нарушениями \mathbb{K} -ортогональности на этих сетках. Таким образом, использование усовершенствованных по сравнению с TPFA схем оправдано и позволяет значительно улучшить сходимость численного решения.

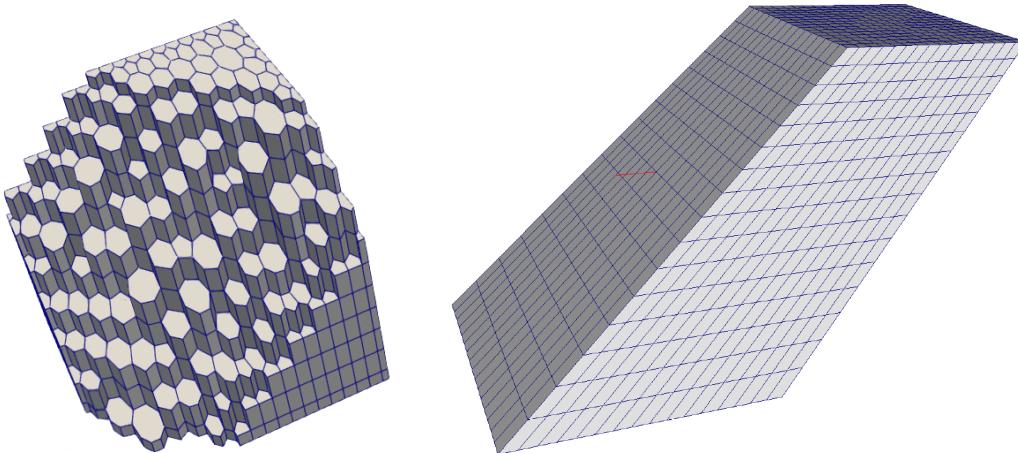


Рисунок 4.17 — Сетки, используемые для оценки сходимости: слева — разрез призматической сетки, справа — деформированная кубическая сетка

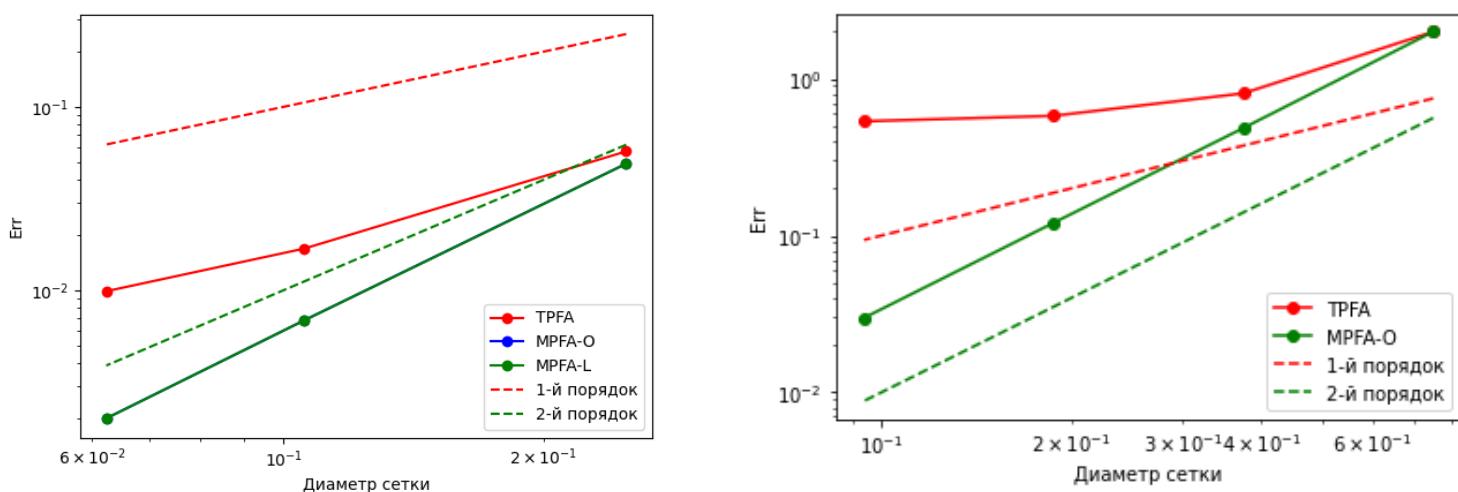


Рисунок 4.18 — Графики ошибки на сетках двух типов

4.5 Исследование эффективности монолитного подхода и метода итерационного расщепления для пороупругости при параллельных вычислениях

Целью следующей серии экспериментов являлось исследование работы методов решения систем уравнений пороупругости в параллельном режиме. Поскольку в настоящее время наблюдается тенденция к усложнению задач как с точки зрения добавления новых физических процессов в модели, так и с точки зрения повышения разрешения сеток, параллельные вычисления являются необходимостью при моделировании.

Была выдвинута гипотеза о том, что метод итерационного расщепления будет лучше масштабироваться при параллельных вычислениях. Такое предположение основано на том, что отдельные подзадачи имеют более простую структуру, и это будет отражаться на качестве распараллеливания решения линейных систем.

4.5.1 Задача о пласте с разломом

Эта задача является модельной и взята из книги [35]. В ней рассматривается кубическая область со стороной 900 м, состоящая из трех слоев и содержащая разлом (см. рисунок 4.19). Центральный слой мощностью 100 м является водоносным горизонтом, остальные два слоя состоят из слабопроницаемой осадочной породы. Область пересекает почти вертикальный разлом, который учитывается как включение отдельного пористого материала с повышенным коэффициентом фильтрации. Все среды изотропные, их тензор фильтрации определяется одним числом K . Параметры сред приведены в таблице 15.

На верхней границе задан напор $h = 305.81$ м. На левой границе водоносного горизонта установлен напор $h = 10193.7$ м. Все остальные границы являются непроницаемыми. Верхняя граница не закреплена ($\sigma \cdot \mathbf{n} = 0$), на всех остальных границах поставлено условие проскальзывания. Начальный напор задан равным $h = 305.81$ м.

Таблица 15 — Параметры сред в задаче о пласте с разломом

	K , м/с	s_{stor} , 1/м	E , МПа	ν
Водоносный горизонт	$1.5 \cdot 10^{-10}$	$8.20116 \cdot 10^{-7}$	14400	0.2
Осадочная порода	$2 \cdot 10^{-13}$	$8.46603 \cdot 10^{-7}$	29400	0.12
Разлом	$1.5 \cdot 10^{-9}$	$1.92276 \cdot 10^{-6}$	14400	0.2

Период моделирования составляет $4 \cdot 10^9$ с (около 127 лет), делается 4 шага по времени. В линейном решателе **Inner_MPTILUC** задана точность отброса 0,1.

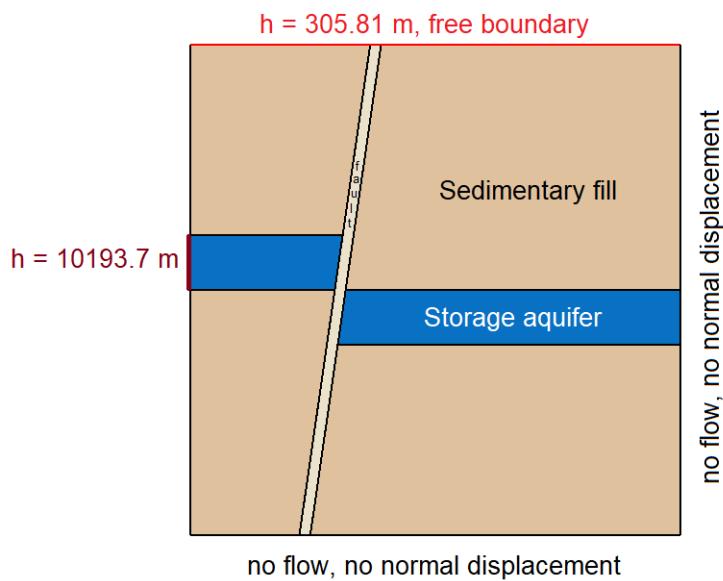


Рисунок 4.19 — Задача о пласте с разломом. Разрез в плоскости ХZ

Расчеты проводились на сетке из 672300 ячеек и 356356 узлов, на которой общее число неизвестных составило 1741368. Для расчетов использовалось до 100 ядер кластера ИВМ РАН.

Рассчитанные распределения напора, перемещений и нормы тензора напряжений представлены на рисунке 4.20. Напор возрастает в водоносном горизонте и разломе, создавая напряжения, которые поднимают верхнюю часть области.

Замеры времени расчета для монолитного подхода и метода итерационного расщепления с фиксированными деформациями представлены в таблицах 16 и 17. Общее ускорение представлено на рисунке 4.21, а ускорения для отдельных этапов решения представлены на рисунке 4.22. Распределение времени по этапам решения представлено на рисунке 4.23. Результаты показывают, что метод итерационного расщепления считает дольше, чем монолитный подход, из-за

Таблица 16 — Задача о пласте с разломом: расчеты на кластере монолитным подходом

N	T , с	T , с	T , с	T , с	#лин.ит
8	2103	184	130	1761	1673
16	1592	148	101	1318	1637
40	457	40.3	16	379	2298
80	295	23.2	8.7	250	2522
100	235	17.9	5.8	206	2639

большого (13–14) числа итераций расщепления на шаге по времени. При этом он масштабируется лучше, поскольку лучше распараллеливаются итерации линейного решателя, являющиеся самой затратной частью расчета. Сублинейное ускорение сборки систем объясняется неидеальным разбиением сетки, которое выполняется разбивателем сетки `Inner_RCM` из INMOST, основанном на обратном алгоритме Катхилла–Макки.

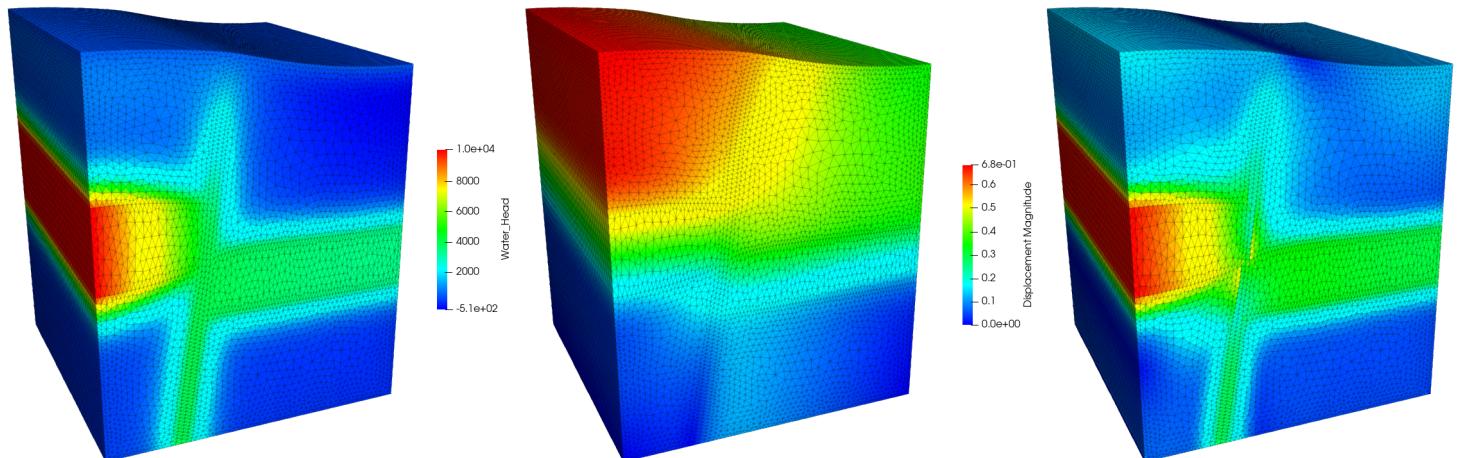


Рисунок 4.20 — Задача о пласте с разломом: напор, перемещения, напряжения в области с деформацией, увеличенной в 300 раз

4.5.2 Задача о глубинной закачке

В этой задаче рассматривается вырезанная в горизонтальной плоскости четырехугольная часть объекта, состоящего из 9 геологических слоев и 11

Таблица 17 — Задача о пласте с разломом: расчеты на кластере методом итерационного расщепления

N	$T, \text{ s}$	$T, \text{ s}$	$T, \text{ s}$	$T, \text{ s}$	#лин.ит
8	7684	2479	219.5	4961	15162
16	4390	1483	71.5	2817	18121
40	1733	601.2	21.1	1091	19575
80	896	305.6	8.6	558.8	21099
100	749	251.7	6.4	480.8	21395

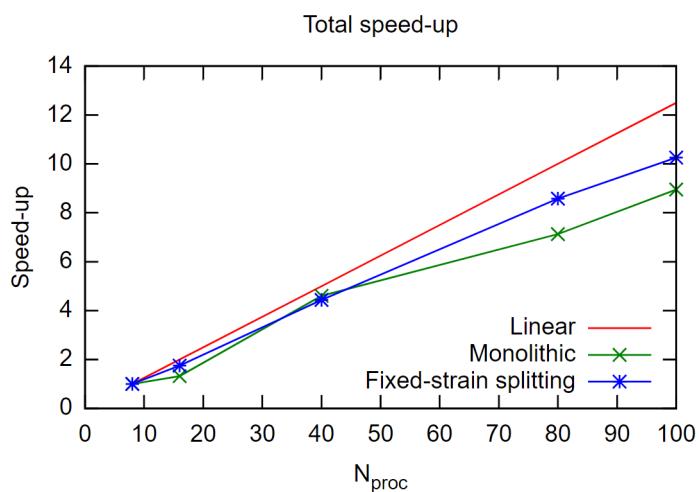


Рисунок 4.21 — Задача о пласте с разломом: общее ускорение

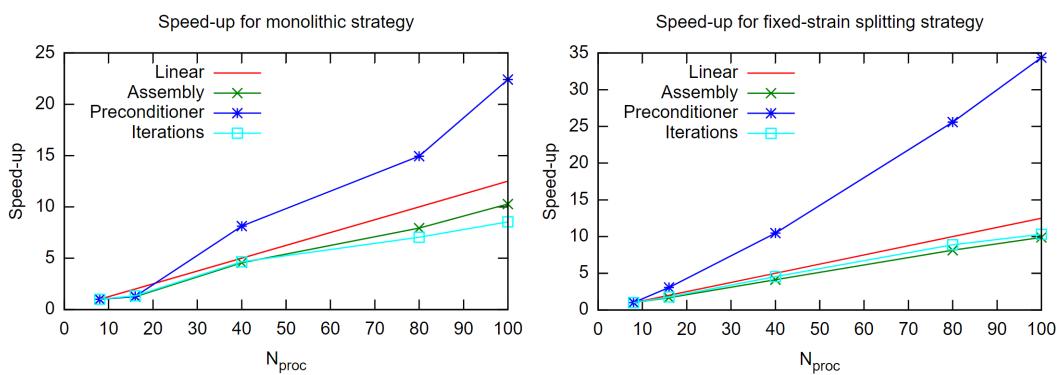


Рисунок 4.22 — Задача о пласте с разломом: ускорения этапов решения

различных материалов. Все материалы анизотропны, их тензор фильтрации является диагональной матрицей со значениями, варьирующимися от $1,2 \cdot 10^{-12}$ до $2 \cdot 10^{-5}$ м/с. Коэффициент упругой емкости меняется от 10^{-6} до 10^{-5} м⁻¹. Механические параметры сред неизвестны, и для всех материалов заданы постоянные значения $E = 10000$ МПа, $\nu = 0,2$. В одном из углов области задан напор $h = 1000$ м в восьмом слое, что имитирует закачку воды в этот слой.

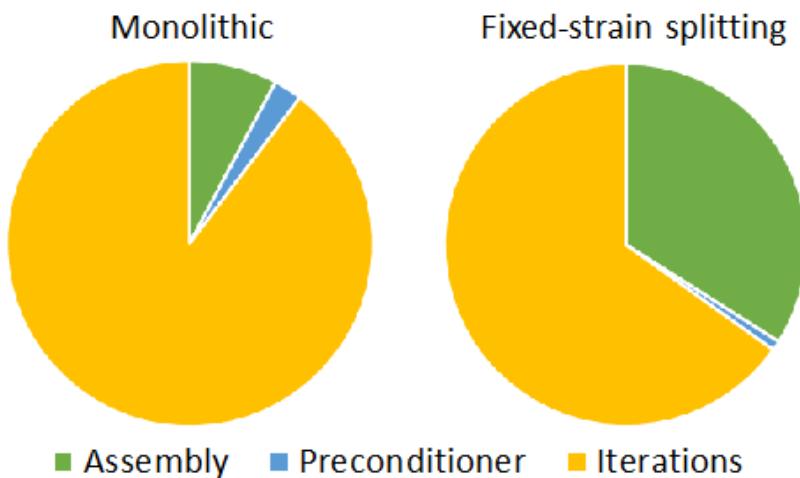


Рисунок 4.23 — Задача о пласте с разломом: распределения времени между различными этапами решения при использовании 100 ядер

Остальные границы непроницаемы. Нижняя граница зафиксирована ($\mathbf{u} = 0$), верхняя – свободна ($\sigma \cdot \mathbf{n} = 0$), на боковых границах установлены условия проскальзывания. Начальное условие – постоянный напор $h = 100$ м во всей области. Период моделирования составляет $2 \cdot 10^8$ с (около 6,3 лет).

Расчеты проводились на треугольнопризматической сетке из 2205400 ячеек и 1142714 узлов, общее число неизвестных составило 5461942. Расчеты проводились с использованием до 600 узлов кластера ИВМ РАН. Чтобы получить более сбалансированное разбиение сетки, использовался разбиватель ParMETIS. Рассчитанные распределения напора и перемещений представлены на рисунке 4.24. Замеры времени и числа итераций линейного решателя представлены в таблицах 18 и 19. Общее ускорение представлено на рисунке 4.25 и является сверхлинейным, при этом монолитный подход масштабируется чуть лучше. Чтобы разобраться в причинах такого явления, обратимся к ускорениям различных этапов, представленным на рисунке 4.26, а также к распределениям времени по этапам, приведенным на рисунке 4.27. Можно видеть, что причиной сверхлинейного ускорения является ускорение линейного решателя, а именно построения переобуславливателя. Дело в том, что решателе `Inner_MPTILUC` задана точность отброса по умолчанию, равная 10^{-5} . В этом случае приближенное треугольное разложение матрицы, выполняемое переобуславливателем, становится на данной задаче близким к точному, что и объясняет повышенное ускорение построения переобуславливателя. В то же время, сборка систем масштабируется вновь сублинейно. Поскольку сборка систем занимает большую

Таблица 18 — Задача о глубинной закачке: результаты расчетов на кластере монолитным подходом

N	$T, \text{ с}$	$T, \text{ с}$	$T, \text{ с}$	$T, \text{ с}$	#лин.ит
40	1490	52.0	688	731.5	470
120	490.5	19.5	58.0	406.7	680
200	247.5	11.5	51.1	180.5	742
280	157.8	9.4	16.2	129.5	779
360	141.0	7.0	24.6	107.1	902
440	100.6	6.1	10.1	82.4	821
520	84.7	5.2	6.3	71.6	840
600	81.9	4.7	5.7	69.9	993

долю времени в работе методе итерационного расщепления, этот метод демонстрирует меньшее общее ускорение.

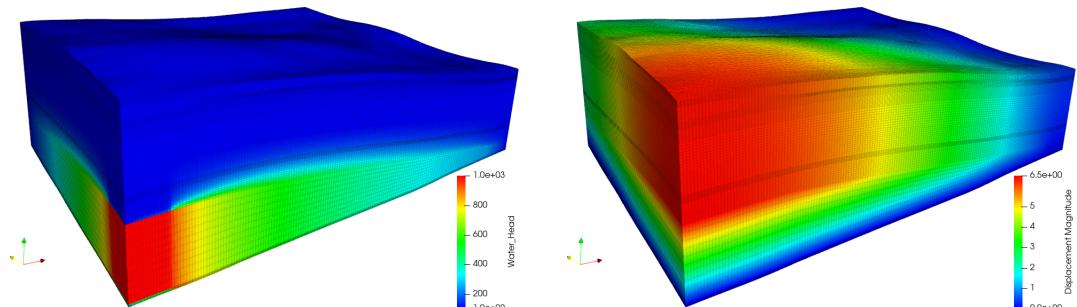


Рисунок 4.24 — Задача о глубинной закачке: распределения напора и перемещений в области с деформацией, увеличенной в 30 раз

4.5.3 Выводы по серии экспериментов

По результатам проведенных численных экспериментов можно сделать следующие выводы:

1. Метод итерационного расщепления с фиксированными деформациями, не всегда демонстрирует лучшую параллельную масштабируемость,

Таблица 19 — Задача о глубинной закачке: результаты расчетов методом итерационного расщепления

N	$T, \text{ s}$	$T, \text{ s}$	$T, \text{ s}$	$T, \text{ s}$	#лин.ит
40	1101	81.3	475.3	537.4	728
120	340.3	31.0	28.9	278.1	1079
200	177.4	16.8	32.0	125.0	1101
280	114.9	14.8	8.6	90.5	1175
360	100.7	10.5	15.2	73.2	1290
440	85.8	8.9	5.5	69.5	1408
520	69.5	7.7	3.5	57.1	1399
600	64.0	7.1	3.3	52.4	1503

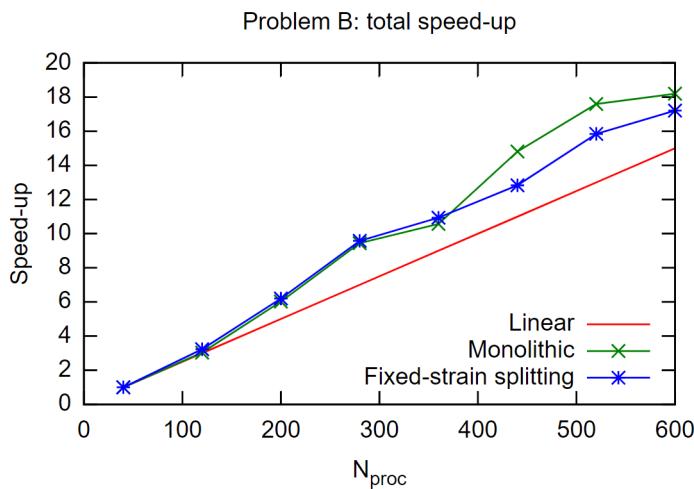


Рисунок 4.25 — Задача о глубинной закачке: общее ускорение

которая ожидалась в результате лучшей работы линейного решателя общего назначения на отдельных подзадачах;

2. Испробованный линейный решатель `Inner_MPILUC` показал свою работоспособность на линейных системах сложной структуры;
3. Общее время расчета при использовании метода итерационного расщепления может быть как больше, так и меньше времени расчета монолитным подходом, поскольку число итераций расщепления зависит от задачи.

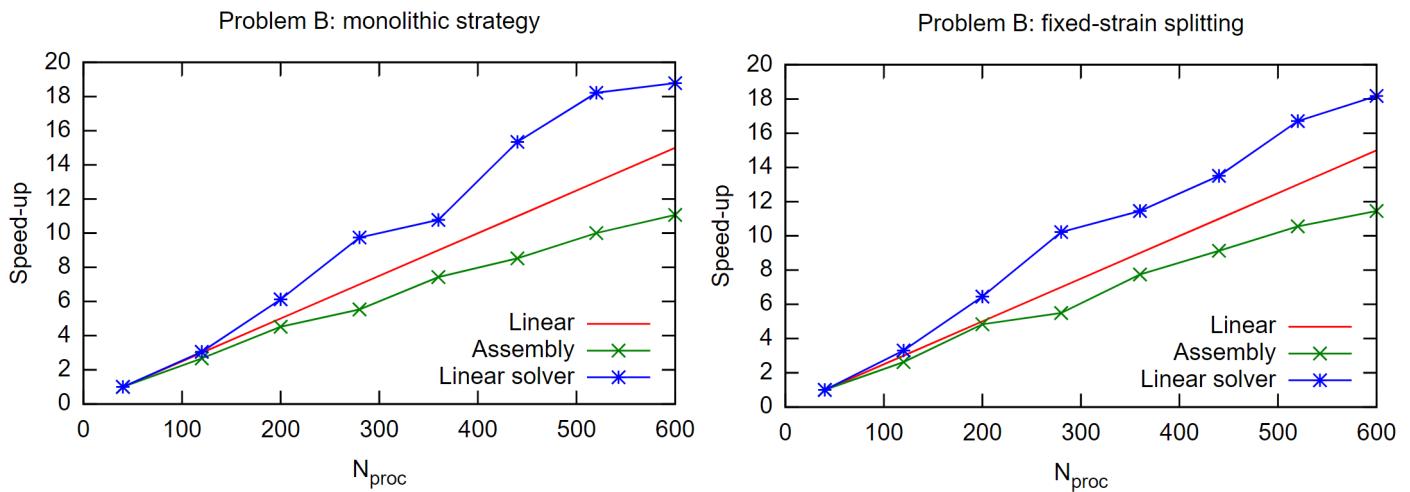
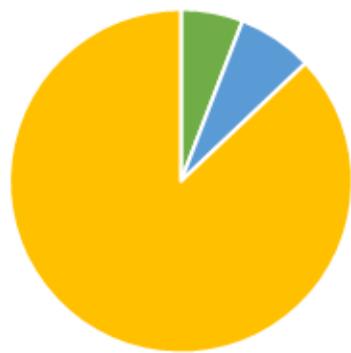
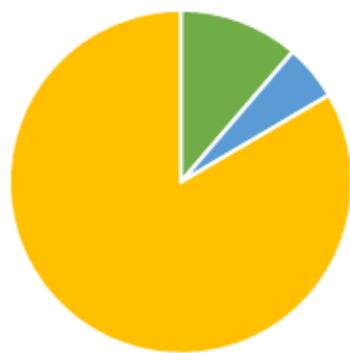


Рисунок 4.26 — Задача о глубинной закачке: ускорение этапов решения

Monolithic



Fixed-strain splitting



■ Assembly ■ Preconditioner ■ Iterations

Рисунок 4.27 — Задача о глубинной закачке: распределение времени между этапами решения при использовании 600 ядер

Заключение

Диссертационная работа посвящена разработке методов моделирования фильтрации подземных вод в упруго деформируемой пористой среде с учетом напряженно-деформированного состояния среды и без него. Результаты работы касаются развития методов дискретизации уравнений в частных производных и методов решения возникающих систем алгебраических уравнений. Для дискретизации уравнений пороупругости в случае переменной насыщенности среды построена схема на основе методов конечных объемов и виртуальных элементов, которая позволяет проводить расчеты на сетках, типичных для гидрогеологических задач. Построение такой схемы показывает, что метод виртуальных элементов может быть успешно встроен в качестве метода дискретизации в систему моделирования теплогидромеханических процессов, использующую метод конечных объемов.

Разработан метод продолжения по параметру для стационарного уравнения Ричардса со специальной параметризацией относительной проницаемости. Этот метод применен к системам уравнений, возникающих после дискретизации стационарного уравнения Ричардса методами конечных объемов и опорных операторов. Метод продолжения представлен в виде процедуры типа предиктор-корректор и исследованы различные предикторы и корректоры с точки зрения влияния на время решения задач. Для систем уравнений, возникающих при дискретизации задач пороупругости наряду с монолитным подходом применен метод итерационного расщепления с фиксированными деформациями, оба этих подхода исследованы на эффективность параллелизации. Все описанные методы реализованы в виде приспособленных для параллельных вычислений комплексов программ на основе платформы INMOST, метод продолжения также внедрен в программный комплекс GeRa и применен для решения ряда практических задач, в расчетах удалось получить сокращение времени расчета до 94 раз.

Список литературы

1. Bear J., Cheng A. H.-D. Modeling groundwater flow and contaminant transport. т. 23. — Springer, 2010.
2. Seawater intrusion in coastal aquifers: concepts, methods and practices. т. 14 / J. Bear [и др.]. — Springer Science & Business Media, 1999.
3. Aziz K. Petroleum reservoir simulation // Applied Science Publishers. — 1979. — т. 476.
4. Peaceman D. W. Fundamentals of numerical reservoir simulation. — Elsevier, 2000.
5. Bielinski A. Numerical simulation of CO₂ sequestration in geological formations. — 2007.
6. Xu T., Apps J. A., Pruess K. Numerical simulation of CO₂ disposal by mineral trapping in deep aquifers // Applied geochemistry. — 2004. — т. 19, № 6. — с. 917—936.
7. Проблемы ядерного наследия и пути их решения / А. А. Абрамов [и др.]. — 2015.
8. Стратегический мастер-план исследований в обоснование безопасности сооружения, эксплуатации и закрытия пункта глубинного захоронения радиоактивных отходов / А. Н. Дорофеев [и др.] // Радиоактивные отходы. — 2017. — № 1. — с. 34—43.
9. On modelling of density driven flow / P. Ackerer [и др.] // IAHS PUBLICATION. — 2000. — с. 377—384.
10. Григорьев Ф. В., Капырин И. В., Василевский Ю. В. Моделирование тепловой конвекции в пористых средах с учетом объемного тепловыделения в коде GeRa // Чебышевский сборник. — 2017. — т. 18, 3 (63). — с. 234—253.
11. Holzbecher E. O. Modeling density-driven flow in porous media: principles, numerics, software. — Springer Science & Business Media, 1998.
12. Mandel J. Consolidation des sols (étude mathématique) // Geotechnique. — 1953. — т. 3, № 7. — с. 287—299.

13. *Cryer C.* A comparison of the three-dimensional consolidation theories of Biot and Terzaghi // The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. — 1963. — т. 16, № 4. — с. 401—412.
14. *Jing L., Tsang C.-F., Stephansson O.* DECOVALEX – an international co-operative research project on mathematical models of coupled THM processes for safety analysis of radioactive waste repositories // International journal of rock mechanics and mining sciences & geomechanics abstracts. т. 32. — Elsevier. 1995. — с. 389—398.
15. The DECOVALEX III project: a summary of activities and lessons learned / C.-F. Tsang [и др.] // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. — 2005. — т. 42, № 5/6. — с. 593—610.
16. DECOVALEX Project: from 1992 to 2007 / C.-F. Tsang [и др.] // Environmental Geology. — 2009. — т. 57, № 6. — с. 1221—1237.
17. 25 years of DECOVALEX-Scientific advances and lessons learned from an international research collaboration in coupled subsurface processes / J. T. Birkholzer [и др.] // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. — 2019. — т. 122. — с. 103995.
18. A fully coupled thermal-hydrological-mechanical-chemical model for CO2 geological sequestration / R. Zhang [и др.] // Journal of Natural Gas Science and Engineering. — 2016. — т. 28. — с. 280—304.
19. The use of supercritical CO2 in deep geothermal reservoirs as a working fluid: Insights from coupled THMC modeling / Q. Gan [и др.] // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. — 2021. — т. 147. — с. 104872.
20. Assessment of CO2 storage capacity based on sparse data: Skade Formation / M. Elenius [и др.] // International Journal of Greenhouse Gas Control. — 2018. — т. 79. — с. 252—271.
21. Fully Coupled Thermal-Hydraulic-Mechanical Reservoir Simulation with Non-Isothermal Multiphase Compositional Modeling / S. Wang [и др.] // SPE Reservoir Simulation Conference. — OnePetro. 2017.
22. Coupled Basin and Hydro-Mechanical Modeling of Gas Chimney Formation: The SW Barents Sea / G. A. Peshkov [и др.] // Energies. — 2021. — т. 14, № 19. — с. 6345.

23. *Lu X., Wheeler M. F.* Three-way coupling of multiphase flow and poromechanics in porous media // Journal of Computational Physics. — 2020. — т. 401. — с. 109053.
24. The OGS-Eclipse code for simulation of coupled multiphase flow and geomechanical processes in the subsurface / K. Benisch [и др.] // Computational Geosciences. — 2020. — т. 24, № 3. — с. 1315—1331.
25. *Rutqvist J., Tsang C.-F.* TOUGH-FLAC: a numerical simulator for analysis of coupled thermal-hydrologic-mechanical processes in fractured and porous geological media under multi-phase flow conditions // Proceedings of the TOUGH Symposium. — Lawrence Berkeley Natl. Lab. Berkeley, CA. 2003. — с. 12—14.
26. Simulation of reactive transport in porous media: a benchmark for a COMSOL-PHREEQC-Interface / D. Müller [и др.] // Conference Proceedings of COMSOL Conference. Rotterdam, The Netherlands. www.comsol.com/paper/download/182397/maaller_abstract.pdf. — 2013.
27. *Григорьев Ф. В., Плёнкин А. В., Капырин И. В.* О необходимости учета конструкции пункта глубинного захоронения РАО при моделировании поступления радионуклидов в дальнюю зону // Радиоактивные отходы. — 2018. — № 3. — с. 95—101.
28. Методы построения адаптивных неструктурированных сеток для решения гидрогеологических задач / А. В. Плёнкин [и др.] // Вычислительные методы и программирование. — 2015. — т. 16, № 4. — с. 518—533.
29. *Марчук Г. И., Агошков В. И.* Введение в проекционно-сеточные методы: Учебное пособие. — Наука, 1981.
30. *Reddy J. N., Gartling D. K.* The finite element method in heat transfer and fluid dynamics. — CRC press, 2010.
31. *Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., Taylor R. L.* The finite element method: solid mechanics. т. 2. — Butterworth-heinemann, 2000.
32. *Reddy J. N.* Introduction to the finite element method. — McGraw-Hill Education, 2019.
33. *Zienkiewicz O. C., Taylor R. L.* The finite element method for solid and structural mechanics. — Elsevier, 2005.

34. OpenGeoSys: an open-source initiative for numerical simulation of thermo-hydro-mechanical/chemical (THM/C) processes in porous media / O. Kolditz [и др.] // Environmental Earth Sciences. — 2012. — т. 67, № 2. — с. 589—599.
35. Thermo-hydro-mechanical chemical processes in fractured porous media: modelling and benchmarking. т. 25 / O. Kolditz [и др.]. — Springer, 2016.
36. Самарский А. А. Теория разностных схем. — "Наука,"Глав. ред. физико-математической лит-ры, 1989.
37. Eymard R., Gallouët T., Herbin R. Finite volume methods // Handbook of numerical analysis. — 2000. — т. 7. — с. 713—1018.
38. Versteeg H. K., Malalasekera W. An introduction to computational fluid dynamics: the finite volume method. — Pearson education, 2007.
39. Parallel finite volume computation on general meshes / Y. Vassilevski [и др.]. — Springer, 2020.
40. Kumar M., Duffy C. J., Salvage K. M. A second-order accurate, finite volume-based, integrated hydrologic modeling (FIHM) framework for simulation of surface and subsurface flow // Vadose Zone Journal. — 2009. — т. 8, № 4. — с. 873—890.
41. Osato K., Ujo S., White S. Prediction of formation equilibrium temperature while drilling based on drilling mud temperature: inverse problem using TOUGH2 and wellbore thermal model // Proceedings, Though Symposium. — 2003. — с. 12—14.
42. An efficient numerical simulator for geothermal simulation: A benchmark study / Y. Wang [и др.] // Applied Energy. — 2020. — т. 264. — с. 114693.
43. О моделировании сорбции стронция на породах в условиях высокой засоленности раствора нитратом натрия / К. Болдырев [и др.] // Радиохимия. — 2016. — т. 58, № 3. — с. 211—217.
44. Kim J. Sequential methods for coupled geomechanics and multiphase flow. — Stanford University, 2010.
45. Богачев К. Ю., Писковский Е. В., Пяцкий Г. Г. Об одном методе совместного решения задачи фильтрации и системы уравнений теории упругости // вычислительные методы и программирование. — 2017. — т. 18, № 3. — с. 221—226.

46. *Nordbotten J. M.* Finite volume hydromechanical simulation in porous media // Water Resources Research. — 2014. — т. 50, № 5. — с. 4379—4394.
47. *Nordbotten J. M., Keilegavlen E.* An introduction to multi-point flux (MPFA) and stress (MPSA) finite volume methods for thermo-poroelasticity // Polyhedral Methods in Geosciences. — Springer, 2021. — с. 119—158.
48. *Terekhov K. M.* Cell-centered finite-volume method for heterogeneous anisotropic poromechanics problem // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2020. — т. 365. — с. 112357.
49. *Terekhov K. M., Vassilevski Y. V.* Finite volume method for coupled subsurface flow problems, II: Poroelasticity // Journal of Computational Physics. — 2022. — т. 462. — с. 111225.
50. *Nordbotten J. M.* Stable cell-centered finite volume discretization for Biot equations // SIAM Journal on Numerical Analysis. — 2016. — т. 54, № 2. — с. 942—968.
51. Basic principles of virtual element methods / L. Beirão da Veiga [и др.] // Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. — 2013. — т. 23, № 01. — с. 199—214.
52. *Gain A. L., Talischi C., Paulino G. H.* On the virtual element method for three-dimensional linear elasticity problems on arbitrary polyhedral meshes // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2014. — т. 282. — с. 132—160.
53. A fully coupled scheme using virtual element method and finite volume for poroelasticity / J. Coulet [и др.] // Computational Geosciences. — 2020. — т. 24, № 2. — с. 381—403.
54. Efficient steady-state solution techniques for variably saturated groundwater flow / M. W. Farthing [и др.] // Advances in water resources. — 2003. — т. 26, № 8. — с. 833—849.
55. *Farthing M. W., Ogden F. L.* Numerical solution of Richards' equation: A review of advances and challenges // Soil Science Society of America Journal. — 2017. — т. 81, № 6. — с. 1257—1269.
56. Review of numerical solution of Richardson–Richards equation for variably saturated flow in soils / Y. Zha [и др.] // Wiley Interdisciplinary Reviews: Water. — 2019. — т. 6, № 5. — e1364.

57. General implicit coupling framework for multi-physics problems / R. Rin [и др.] // SPE Reservoir Simulation Conference. — OnePetro. 2017.
58. New frontiers in large scale reservoir simulation / A. H. Dogru [и др.] // SPE Reservoir Simulation Symposium. — OnePetro. 2011.
59. Resolving wave propagation in anisotropic poroelastic media using graphical processing units (GPUs) / Y. Alkhimenkov [и др.] // Journal of Geophysical Research: Solid Earth. — 2021. — т. 126, № 7. — e2020JB021175.
60. *Li L., Abushaikha A.* Joining the billion cell club: Modelling of giant oil and gas fields using advanced simulation methods // Fourth EAGE WIPIC Workshop. т. 2022. — EAGE Publications BV. 2022. — с. 1—3.
61. Hydrogeological modeling in radioactive waste disposal safety assessment using the GeRa code / I. Kapyrin [и др.] // Russian Supercomputing Days. — 2015. — с. 122—132.
62. *Richards L. A.* Capillary conduction of liquids through porous mediums // Physics. — 1931. — т. 1, № 5. — с. 318—333.
63. *Darcy H.* Les fontaines publiques de la ville de Dijon: Exposition et application des principes à suivre et des formules à employer dans les questions de distribution d'eau: Ouvrage terminé par un appendice relatif aux fournitures d'eau de plusieurs villes, au filtrage des eaux et à la fabrication des tuyaux de fonte, de plomb, de tôle et de bitume. т. 2. — V. Dalmont, 1856.
64. *Van Genuchten M. T.* A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils // Soil science society of America journal. — 1980. — т. 44, № 5. — с. 892—898.
65. *Mualem Y.* A new model for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated porous media // Water Resources Research. — 1976. — т. 12, № 3. — с. 513—522.
66. *Oldenburg C. M., Pruess K.* On numerical modeling of capillary barriers // Water Resources Research. — 1993. — т. 29, № 4. — с. 1045—1056.
67. Верификация моделей ненасыщенной фильтрации и переноса в зоне аэрации на примере расчетного кода GeRa / И. В. Капырин [и др.] // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Математическое моделирование физических процессов. — 2017. — № 1. — с. 60—75.

68. *Diersch H.-J. G.* FEFLOW: finite element modeling of flow, mass and heat transport in porous and fractured media. — Springer Science & Business Media, 2013.
69. *Biot M. A.* General theory of three-dimensional consolidation // Journal of applied physics. — 1941. — т. 12, № 2. — с. 155—164.
70. *Coussy O.* Poromechanics. — John Wiley & Sons, 2004.
71. Автоматизированные технологии построения неструктурированных расчетных сеток / Ю. Василевский [и др.] // М.: Физматлит. — 2016.
72. *Celia M. A., Bouloutas E. T., Zarba R. L.* A general mass-conservative numerical solution for the unsaturated flow equation // Water resources research. — 1990. — т. 26, № 7. — с. 1483—1496.
73. *Tocci M. D., Kelley C., Miller C. T.* Accurate and economical solution of the pressure-head form of Richards' equation by the method of lines // Advances in Water Resources. — 1997. — т. 20, № 1. — с. 1—14.
74. *Diersch H.-J., Perrochet P.* On the primary variable switching technique for simulating unsaturated-saturated flows // Advances in Water Resources. — 1999. — т. 23, № 3. — с. 271—301.
75. Hybrid mimetic finite-difference and virtual element formulation for coupled poromechanics / A. Borio [и др.] // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2021. — т. 383. — с. 113917.
76. *Paniconi C., Putti M.* A comparison of Picard and Newton iteration in the numerical solution of multidimensional variably saturated flow problems // Water Resources Research. — 1994. — т. 30, № 12. — с. 3357—3374.
77. *Courant R., Friedrichs K., Lewy H.* Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik // Mathematische annalen. — 1928. — т. 100, № 1. — с. 32—74.
78. *Jones J. E., Woodward C. S.* Newton-Krylov-multigrid solvers for large-scale, highly heterogeneous, variably saturated flow problems // Advances in water resources. — 2001. — т. 24, № 7. — с. 763—774.
79. *Ritz W.* Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik. — 1909.

80. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations / R. Courant [и др.] // Bulletin of the American Mathematical Society. — 1943. — т. 49, № 1. — с. 1—23.
81. Ciarlet P. G., Raviart P.-A. Maximum principle and uniform convergence for the finite element method // Computer methods in applied mechanics and engineering. — 1973. — т. 2, № 1. — с. 17—31.
82. Simunek, Jiri and Van Genuchten, Martinus Th and Sejna, Miroslav. Recent developments and applications of the HYDRUS computer software packages // Vadose Zone Journal. — 2016. — т. 15, № 7.
83. Neuman S. P. Saturated-unsaturated seepage by finite elements // Journal of the Hydraulics Division. — 1973. — т. 99, № 12. — с. 2233—2250.
84. Gatica G. N. A simple introduction to the mixed finite element method // Theory and Applications. Springer Briefs in Mathematics. Springer, London. — 2014.
85. Pop I. S., Radu F., Knabner P. Mixed finite elements for the Richards' equation: linearization procedure // Journal of computational and applied mathematics. — 2004. — т. 168, № 1/2. — с. 365—373.
86. Brezzi F., Fortin M. Mixed and hybrid finite element methods. т. 15. — Springer Science & Business Media, 2012.
87. Sukumar N., Malsch E. Recent advances in the construction of polygonal finite element interpolants // Archives of Computational Methods in Engineering. — 2006. — т. 13, № 1. — с. 129—163.
88. Polyhedral finite elements using harmonic basis functions / S. Martin [и др.] // Computer graphics forum. т. 27. — Wiley Online Library. 2008. — с. 1521—1529.
89. Cockburn B., Karniadakis G. E., Shu C.-W. Discontinuous Galerkin methods: theory, computation and applications. т. 11. — Springer Science & Business Media, 2012.
90. Li H., Farthing M. W., Miller C. Adaptive local discontinuous Galerkin approximation to Richards' equation // Advances in water resources. — 2007. — т. 30, № 9. — с. 1883—1901.

91. MODFLOW-USG version 1: An unstructured grid version of MODFLOW for simulating groundwater flow and tightly coupled processes using a control volume finite-difference formulation : тех. отч. / S. Panday [и др.] ; US Geological Survey. — 2013.
92. ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС "НИМФА": ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ / М. Л. Глинский [и др.] // Разведка и охрана недр. — 2013. — № 10. — с. 48—51.
93. *Misiats O., Lipnikov K.* Second-order accurate monotone finite volume scheme for Richards' equation // Journal of Computational Physics. — 2013. — т. 239. — с. 123—137.
94. *Pruess K.* TOUGH2-A general-purpose numerical simulator for multiphase fluid and heat flow. — 1991.
95. Performance Assessment of Hybrid Parallelism for Large-Scale Reservoir Simulation on Multi-and Many-core Architectures / A. AlOnazi [и др.] // 2018 IEEE High Performance extreme Computing Conference (HPEC). — IEEE. 2018. — с. 1—7.
96. *Pettersen Ø.* Basics of reservoir simulation with the eclipse reservoir simulator // Lecture Notes. University of Bergen, Norway. — 2006. — т. 114.
97. *Lie K.-A.* An introduction to reservoir simulation using MATLAB/GNU Octave: User guide for the MATLAB Reservoir Simulation Toolbox (MRST). — Cambridge University Press, 2019.
98. *AD-GPRS.* Automatic Differentiation General Purpose Research Simulator (AD-GPRS). — 2018.
99. *Gross H., Mazuyer A.* GEOSX: A Multiphysics, Multilevel Simulator Designed for Exascale Computing // SPE Reservoir Simulation Conference. — OnePetro. 2021.
100. *Khait M.* Delft advanced research terra simulator: general purpose reservoir simulator with operator-based linearization. — 2019.
101. *Aavatsmark I.* Interpretation of a two-point flux stencil for skew parallelogram grids // Computational geosciences. — 2007. — т. 11, № 3. — с. 199—206.

102. Discretization on unstructured grids for inhomogeneous, anisotropic media. Part I: Derivation of the methods / I. Aavatsmark [и др.] // SIAM Journal on Scientific Computing. — 1998. — т. 19, № 5. — с. 1700—1716.
103. A compact multipoint flux approximation method with improved robustness / I. Aavatsmark [и др.] // Numerical Methods for Partial Differential Equations: An International Journal. — 2008. — т. 24, № 5. — с. 1329—1360.
104. Agelas L., Masson R. Convergence of the finite volume MPFA O scheme for heterogeneous anisotropic diffusion problems on general meshes // Comptes Rendus Mathematique. — 2008. — т. 346, № 17/18. — с. 1007—1012.
105. Klausen R., Radu F., Eigestad G. Convergence of MPFA on triangulations and for Richards' equation // International journal for numerical methods in fluids. — 2008. — т. 58, № 12. — с. 1327—1351.
106. Nikitin K., Terekhov K., Vassilevski Y. A monotone nonlinear finite volume method for diffusion equations and multiphase flows. // Computational Geosciences. — 2014. — т. 18.
107. Le Potier C. Schéma volumes finis monotone pour des opérateurs de diffusion fortement anisotropes sur des maillages de triangles non structurés // Comptes Rendus Mathematique. — 2005. — т. 341, № 12. — с. 787—792.
108. Kapyrin I. A family of monotone methods for the numerical solution of three-dimensional diffusion problems on unstructured tetrahedral meshes // Doklady Mathematics. т. 76. — Nauka/Interperiodica. 2007. — с. 734—738.
109. Danilov A., Vassilevski Y. V. A monotone nonlinear finite volume method for diffusion equations on conformal polyhedral meshes. — 2009.
110. Nikitin K., Novikov K., Vassilevski Y. Nonlinear finite volume method with discrete maximum principle for the two-phase flow model // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2016. — т. 37, № 5. — с. 570—581.
111. Convergence of nonlinear finite volume schemes for heterogeneous anisotropic diffusion on general meshes / M. Schneider [и др.] // Journal of Computational Physics. — 2017. — т. 351. — с. 80—107.
112. Dahmen N., Droniou J., Rogier F. A cost-effective nonlinear extremum-preserving finite volume scheme for highly anisotropic diffusion on Cartesian grids, with application to radiation belt dynamics // Journal of Computational Physics. — 2022. — т. 463. — с. 111258.

113. *Terekhov K. M., Mallison B. T., Tchelepi H. A.* Cell-centered nonlinear finite-volume methods for the heterogeneous anisotropic diffusion problem // Journal of Computational Physics. — 2017. — т. 330. — с. 245—267.
114. *Forsyth P. A., Kropinski M.* Monotonicity considerations for saturated–unsaturated subsurface flow // SIAM Journal on Scientific Computing. — 1997. — т. 18, № 5. — с. 1328—1354.
115. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Однородные разностные схемы на неравномерных сетках // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1962. — т. 2, № 5. — с. 812—832.
116. Использование метода опорных операторов для построения разностных аналогов операций тензорного анализа / А. А. Самарский [и др.] // Дифференциальные уравнения. — 1982. — т. 18, № 7. — с. 1251—1256.
117. *Lipnikov K., Manzini G., Shashkov M.* Mimetic finite difference method // Journal of Computational Physics. — 2014. — т. 257. — с. 1163—1227.
118. *Veiga L. B. da, Lipnikov K., Manzini G.* The mimetic finite difference method for elliptic problems. т. 11. — Springer, 2014.
119. *Lipnikov K., Moulton D., Svyatskiy D.* New preconditioning strategy for Jacobian-free solvers for variably saturated flows with Richards' equation // Advances in water resources. — 2016. — т. 94. — с. 11—22.
120. Coupling surface flow and subsurface flow in complex soil structures using mimetic finite differences / Е. Т. Coon [и др.] // Advances in Water Resources. — 2020. — т. 144. — с. 103701.
121. Разностные схемы на основе метода опорных операторов для задач динамики флюидов в коллекторе, содержащем газогидраты / В. А. Гасилов [и др.] // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2015. — т. 55, № 8. — с. 1341—1355.
122. *Abushaikha A. S., Terekhov K. M.* A fully implicit mimetic finite difference scheme for general purpose subsurface reservoir simulation with full tensor permeability // Journal of Computational Physics. — 2020. — т. 406. — с. 109194.

123. *Lipnikov K., Manzini G.* Discretization of mixed formulations of elliptic problems on polyhedral meshes // Building Bridges: Connections and Challenges in Modern Approaches to Numerical Partial Differential Equations. — Springer, 2016. — c. 311—342.
124. The mimetic finite difference method for elliptic and parabolic problems with a staggered discretization of diffusion coefficient / K. Lipnikov [и др.] // Journal of Computational Physics. — 2016. — т. 305. — c. 111—126.
125. *Demirdzic I., Martinovic P., Ivankovic A.* Numerical simulation of thermal deformation in welded workpiece // Zavarivanje. — 1988. — т. 31, № 5. — c. 209—219.
126. *Terekhov K. M., Tchelepi H. A.* Cell-centered finite-volume method for elastic deformation of heterogeneous media with full-tensor properties // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2020. — т. 364. — c. 112331.
127. *Lipnikov K.* Numerical methods for the Biot model in poroelasticity. — University of Houston, 2002.
128. Разностные схемы метода опорных операторов для уравнений теории упругости / А. В. Колдoba [и др.] // Математическое моделирование. — 2012. — т. 24, № 12. — с. 86—96.
129. *Мясников B., Заславский M., Пергамент A.* Алгоритмы осреднения и метод опорных операторов в задачах пороупругости // Доклады Академии наук. т. 397. — Федеральное государственное бюджетное учреждение "Российская академия наук". 2004. — с. 622—626.
130. *Da Veiga L. B.* A mimetic discretization method for linear elasticity // ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis. — 2010. — т. 44, № 2. — с. 231—250.
131. *Da Veiga L. B., Brezzi F., Marini L. D.* Virtual elements for linear elasticity problems // SIAM Journal on Numerical Analysis. — 2013. — т. 51, № 2. — с. 794—812.
132. *Chi H., Da Veiga L. B., Paulino G.* Some basic formulations of the virtual element method (VEM) for finite deformations // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2017. — т. 318. — с. 148—192.

133. Efficient virtual element formulations for compressible and incompressible finite deformations / P. Wriggers [и др.] // Computational Mechanics. — 2017. — т. 60, № 2. — с. 253—268.
134. *Hudobivnik B., Aldakheel F., Wriggers P.* A low order 3D virtual element formulation for finite elasto-plastic deformations // Computational Mechanics. — 2019. — т. 63, № 2. — с. 253—269.
135. Modeling of Single-Slip Finite Strain Crystal Plasticity via the Virtual Element Method / C. Böhm [и др.] // PAMM. — 2021. — т. 20, № 1. — e202000205.
136. *Da Veiga L. B., Dassi F., Russo A.* High-order virtual element method on polyhedral meshes // Computers & Mathematics with Applications. — 2017. — т. 74, № 5. — с. 1110—1122.
137. *Dassi F., Vacca G.* Bricks for the mixed high-order virtual element method: projectors and differential operators // Applied Numerical Mathematics. — 2020. — т. 155. — с. 140—159.
138. Stability and monotonicity for some discretizations of the Biot's consolidation model / C. Rodrigo [и др.] // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2016. — т. 298. — с. 183—204.
139. A stabilized element-based finite volume method for poroelastic problems / H. T. Honorio [и др.] // Journal of Computational Physics. — 2018. — т. 364. — с. 49—72.
140. *Ladyzhenskaya O. A.* The mathematical theory of viscous incompressible flow // Gordon & Breach. — 1969.
141. *Kim J., Tchelepi H. A., Juanes R.* Stability and convergence of sequential methods for coupled flow and geomechanics: Drained and undrained splits // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2011. — т. 200, № 23/24. — с. 2094—2116.
142. *Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М.* Численные методы. — Бином. Лаб. знаний, 2008.
143. *Nikitin K., Vassilevski Y.* A monotone non-linear finite volume method for advection-diffusion equations and multiphase flows // ECMOR XIII-13th European Conference on the Mathematics of Oil Recovery. — EAGE Publications BV. 2012. — ср—307.

144. *Kelley C. T.* Iterative methods for linear and nonlinear equations. — SIAM, 1995.
145. *Armijo L.* Minimization of functions having Lipschitz continuous first partial derivatives // Pacific Journal of mathematics. — 1966. — т. 16, № 1. — с. 1—3.
146. *Давиденко Д.* Об одном новом методе численного решения систем нелинейных уравнений // Докл. АН СССР. т. 88. — 1953. — с. 601—602.
147. *Allgower E. L., Georg K.* Introduction to numerical continuation methods. — SIAM, 2003.
148. *Шаманский В. Е.* Методы численного решения краевых задач на ЕЦВМ. т. 1. — Изд-во Академии наук Украинской ССР, 1963.
149. *Шалашилин В., Кузнецов Е.* Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация // М.: Эдиториал УРСС. — 1999. — т. 224.
150. *Knoll D. A., Keyes D. E.* Jacobian-free Newton–Krylov methods: a survey of approaches and applications // Journal of Computational Physics. — 2004. — т. 193, № 2. — с. 357—397.
151. Anderson accelerated fixed-stress splitting schemes for consolidation of unsaturated porous media / J. W. Both [и др.] // Computers & Mathematics with Applications. — 2019. — т. 77, № 6. — с. 1479—1502.
152. *Haga J. B., Osnes H., Langtangen H. P.* A parallel block preconditioner for large-scale poroelasticity with highly heterogeneous material parameters // Computational Geosciences. — 2012. — т. 16, № 3. — с. 723—734.
153. *Frigo M., Castelletto N., Ferronato M.* Enhanced relaxed physical factorization preconditioner for coupled poromechanics // Computers & Mathematics with Applications. — 2022. — т. 106. — с. 27—39.
154. *Afanasyev A., Utkin I.* Modelling ground displacement and gravity changes with the MUFITS simulator // Advances in Geosciences. — 2020. — т. 54. — с. 89—98.
155. *Kim J., Tchelepi H. A., Juanes R.* Stability and convergence of sequential methods for coupled flow and geomechanics: Fixed-stress and fixed-strain splits // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2011. — т. 200, № 13—16. — с. 1591—1606.

156. INMOST, a toolkit for distributed mathematical modeling. — Accessed: 2021-04-14. <http://www.inmost.org/>.
157. Полубаринова-Кочина П. Теория движения грунтовых вод. — 1977.
158. Van der Vorst H. A. Bi-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of nonsymmetric linear systems // SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing. — 1992. — т. 13, № 2. — с. 631—644.
159. Webb S. W. Generalization of Ross' tilted capillary barrier diversion formula for different two-phase characteristic curves // Water Resources Research. — 1997. — т. 33, № 8. — с. 1855—1859.

Публикации автора по теме диссертации

160. Anuprienko D., Kapyrin I. Nonlinearity continuation method for steady-state groundwater flow modeling in variably saturated conditions // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2021. — Vol. 393. — P. 113502.
161. Anuprienko D., Kapyrin I. Modeling groundwater flow in unconfined conditions: numerical model and solvers' efficiency // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2018. — т. 39, № 7. — с. 867—873.
162. Anuprienko D. Comparison of nonlinear solvers within continuation method for steady-state variably saturated groundwater flow modelling // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. — 2021. — т. 36, № 4. — с. 183—195.
163. Anuprienko D. First-order continuation method for steady-state variably saturated groundwater flow modeling // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2022. — т. 43, № 4. — с. 924—934.
164. Anuprienko D. Parallel Efficiency of Monolithic and Fixed-strain Solution Strategies for Poroelasticity Problems // Supercomputing: 8th Russian Supercomputing Days. — 2022. — с. 225—236.