MAA2/MAN2 Übung 9

Auszuarbeiten bis 13./14. 5. 2025

1. Argumentieren Sie, warum der Rang einer Matrix in oberer Dreiecksform die Anzahl der Nicht-Null-Zeilen dieser Matrix ist.

2. Berechnen Sie die Determinante der folgenden beiden Matrizen durch Bringen auf obere Dreiecksform:
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix}.$$
Lesen Sie aus der oberen Dreiecksform dieser Matrizen auch ihren Rang ab.

3. Berechnen Sie den Rang und die Determinante der Matrizen A, deren Einträge a_{ij} wie folgt definiert sind:

   (a) $a_{ij} := (-1)^{i+j}$ (b) $a_{ij} := i \cdot j$

4. Beweisen Sie den ersten Teil von Satz 5.12 im Skriptum:
$$\det(a_{-1}, \ldots, a_{-i} + \lambda a_{-j}, \ldots, a_{-}n) = \det(a_{-1}, \ldots, a_{-i}, \ldots, a_{-n}),$$
also die Aussage "die Determinante einer Matrix ändert sich nicht, wenn man zu einer Spalte das Vielfache einer anderen Spalte dazuzählt".

   Sie benötigen dazu nur die Bedingungen aus Definition 5.15 im Skriptum (im PDF zur aktuellen Vorlesung für 2×2 Matrizen auf S. 1 oben rechts bzw. unten links als "vier Anforderungen" bezeichnet, und mit i) bis iv) durchnumeriert).

5. Berechnen Sie die Determinante der folgenden beiden Matrizen mit dem Satz von Sarrus:
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix}.$$

6. Verwenden Sie nochmals die Bedingungen an Determinanten aus Definition 5.15, um Satz 5.13 aus dem Skriptum zu beweisen: Für eine Matrix in oberer Dreiecksform gilt
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$
Verwenden Sie speziell die Bedingung, dass Sie aus aus jeder Spalte einer Matrix einen Faktor λ herausheben können.

1) A.: Der Rang = maximal aufspannbarer Vektorraum (Dimension), da die unteren x Spalten = 0 => untere x Vektorwerte = 0 (egal Quellmenge) => Wir haben einen geraden Schnitt durch den Vektorraum, heißt diese Dimension existiert nicht im Vektorraum (2D Fläche in 3D Raum, egal Orientierung, jeder Punkt auf 2D Fläche durch 2D Koordinaten bestimmbar)

2) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; $\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = 10$

-3

$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix}$. $\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} -3 \\ -4 \\ \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 12 & -6 \end{pmatrix} -4 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \det(B) = 6$

3) (a) $a_{ij} := (-1)^{i+j}$ $\quad (-1)^0 \cdot (-1)^2 \cdot (-1)^4 \cdot \ldots = 1 \cdot 1 \cdot 1 \Rightarrow 1 \quad \det(A) = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang} = 2$$

(b) $a_{ij} := i \cdot j$ $\quad \det(A) = 1 + 4 + 9 + 16 \ldots = \infty$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix} \quad \text{Rang} = 1$$

4) z.z.: $\det(a_{-1}, \ldots, a_{-i} + \lambda a_{-j}, \ldots, a_{-}n) = \det(a_{-1}, \ldots, a_{-i}, \ldots, a_{-n})$,

$\hookrightarrow = \det(a_{-1}, \ldots, a_{-i}, a_{-j}, a_{-n}) + \lambda \det(a_{-1}, \ldots, a_{-j}, a_{-j}, a_n) = {=}n{=} + \lambda 0 = {=}/{=}$

$=$ $\Rightarrow \det(a_{-1}, \ldots, a_{-j}, a_{-j}, a_{-n}) = 0$

5) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\quad \det(A) = -1 \cdot -4 + 1 \cdot -3 + 2 \cdot + 3 \cdot 1 - (-1 \cdot 1 \cdot 1) - (0 \cdot 3) - (2 \cdot 4 \cdot -3) = 4 - 3 + 6 + 1 - 24 = -16$

$- + - + - +$

$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix}$. $\quad \det(B)$: $3 \cdot -1 \cdot -2 + -1 \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot 1 \cdot 8 = 18$

$-(3 \cdot 1 \cdot 8 + -1 \cdot 1 \cdot -2 + 2 \cdot -1 \cdot 4) = -18$

0

$6)\quad \det(a_{-1}, \dots, a_{-n}) = \underbrace{\prod_{j=1}^{n} a_{jj}} \cdot \det\underbrace{(a_{-1}/a_{11}, \dots, a_{-n}/a_{nn})}_{1}$

$= \det(A)$

$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn} \cdot 1$

$\det\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \underbrace{x \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{0}$

$+ \frac{1}{yz} \det\begin{pmatrix} y & 0 & y \\ 0 & z & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \underbrace{\frac{1}{yz} \det\begin{pmatrix} y & y & y \\ 0 & z & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{0}$

$= \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{22}} & \cdots & \frac{a_{1n}}{a_{nn}} \\ 0 & 1 & \cdots & \frac{a_{2n}}{a_{nn}} \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{a_{n-1,n}}{a_{nn}} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

$\det(B)$

$= \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= 1$