

# MAA2/MAN2 Übung 13

Auszuarbeiten bis 11./17. 6. 2025

1. Wir definieren auf dem Vektorraum aller Polynomfunktionen vom Grad maximal 2 folgendes Skalarprodukt:

$$P(x) \cdot Q(x) := P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1).$$

- (a) Rechnen Sie nach, dass bezüglich dieses Skalarprodukts die beiden Polynomfunktionen  $x$  und  $x^2$  senkrecht aufeinander stehen.
  - (b) Berechnen Sie  $\|x + 1\|$ .
  - (c) Berechnen Sie  $\text{proj}_w(v)$  für  $v = x^2 - 1$  und  $w = x + 3$ .
2. Berechnen Sie mit dem Gram-Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahren eine Menge von orthogonalen Vektoren, die denselben Vektorraum aufspannt wie die drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Beachten Sie, dass Sie die erhaltenen Vektoren beliebig lang machen können, ohne dass die Eigenschaft der Orthogonalität verloren geht. Das bedeutet, dass Sie speziell durch Multiplizieren mit einem geeigneten Skalar alle Brüche in diesen Vektoren eliminieren können.

3. Gegeben sei der Untervektorraum  $U$ , der in  $\mathbb{R}^4$  von den drei Vektoren  $(1, 0, 1, 1)$ ,  $(1, 1, -1, 0)$ , sowie  $(1, -1, 0, -1)$  aufgespannt wird (beachten Sie, dass diese drei Vektoren paarweise orthogonal sind). Berechnen Sie denjenigen Punkt in  $U$ , der dem Punkt  $p = (-4, 2, 0, 1)$  am nächsten liegt.
4. Gegeben seien folgende drei Vektoren:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Rechnen Sie nach, dass diese Vektoren eine Orthonormalbasis bilden.
- (b) Berechnen Sie die Koordinaten des Vektors  $(2, 1, 3)$  bezüglich dieser Basis. Verwenden Sie dazu die Tatsache, dass die Basis eine Orthonormalbasis ist (dann gilt nämlich Satz 6.4 im Skriptum).