

MAA2/MAN2 Übung 3

Auszuarbeiten bis 25./26. 3. 2025

1. Wandeln Sie die angegebenen komplexen Zahlen in die jeweils andere Koordinatendarstellung um:

(a) $\left[3, \frac{2\pi}{3}\right]$ (gegeben in Polarkoordinaten) in kartesische Koordinaten

(b) $-3 + 4i$ (gegeben in kartesischen Koordinaten) in Polarkoordinaten

2. Lösen Sie folgende beiden Gleichungen für komplexe Zahlen z in Polarkoordinaten:

(a) $\left[2, \frac{\pi}{3}\right]^4 \cdot z = \left[4, \frac{\pi}{6}\right]^2$

(b) $z \cdot \left[3, \frac{\pi}{8}\right]^3 = \left[6, \frac{5\pi}{8}\right]^2$

3. Berechnen Sie alle komplexen Lösungen der folgenden Gleichungen, indem Sie die angegebenen Wurzeln ziehen (Angaben in Polarkoordinaten). Machen Sie auch eine Skizze, in der Sie die Lösungen einzeichnen:

(a) $z^3 = [1, 0]$

(b) $z^5 = [1, 0]$

4. Beweisen Sie für komplexe Zahlen z_1 und z_2 :

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|,$$

wobei der Betrag $|z|$ einer komplexen Zahl $z = a + ib$ definiert ist als

$$|a + ib| := \sqrt{a^2 + b^2},$$

also gleich dem Radius dieser Zahl in Polarkoordinaten ist.

5. Um die Rechenregel für die Multiplikation zweier komplexer Zahlen in Polarkoordinaten zu beweisen, wandeln wir zwei komplexe Zahlen $[r_1, \varphi_1]$ und $[r_2, \varphi_2]$ zuerst in kartesische Koordinaten um und erhalten (wegen $a = r \cos(\varphi)$ und $b = r \sin(\varphi)$ in kartesischen Koordinaten $a + ib$):

$$[r_1, \varphi_1] = r_1 \cos(\varphi_1) + ir_1 \sin(\varphi_1) \quad \text{sowie} \quad [r_2, \varphi_2] = r_2 \cos(\varphi_2) + ir_2 \sin(\varphi_2).$$

Multiplizieren Sie die beiden Zahlen in dieser letzten Darstellung, berechnen Sie also

$$(r_1 \cos(\varphi_1) + ir_1 \sin(\varphi_1)) \cdot (r_2 \cos(\varphi_2) + ir_2 \sin(\varphi_2))$$

und vereinfachen Sie das Ergebnis unter Verwendung der hier aufgeführten trigonometrischen Identitäten (die werden wir später nie mehr brauchen):

$$\sin(\theta + \varphi) = \sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \sin \varphi$$

$$\cos(\theta + \varphi) = \cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi$$

$$\tan(\theta + \varphi) = \frac{\tan(\theta) + \tan(\varphi)}{1 - \tan \theta \tan \varphi}$$

$$\sin(\theta - \varphi) = \sin \theta \cos \varphi - \cos \theta \sin \varphi$$

$$\cos(\theta - \varphi) = \cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi$$

$$\tan(\theta - \varphi) = \frac{\tan(\theta) - \tan(\varphi)}{1 + \tan \theta \tan \varphi}$$

$$\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\tan(2\theta) = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

$$\sin(\alpha) \sin(\beta) = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}$$

$$\cos(\alpha) \cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}{2}$$

$$\sin(\alpha) \cos(\beta) = \frac{\sin(\beta + \alpha) - \sin(\beta - \alpha)}{2}$$