MAA2/MAN2 Übung 10

Auszuarbeiten bis 20./21. 5. 2025

1. Berechnen Sie die Determinante folgender Matrix durch Entwickeln, bis Sie bei Matrizen der Größe 3×3 angelangt sind. Diese Determinanten können Sie mit dem Satz von Sarrus berechnen.
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

2. Verwenden Sie Satz 5.15 über das Entwickeln (rekursive Berechnen) von Determinanten, um Satz 5.13 aus dem Skriptum anders als für Aufgabe 6 auf Übungszettel 9 zu beweisen: Für eine Matrix in oberer Dreiecksform gilt
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}\,.$$

3. Beweisen Sie den zweiten Teil von Satz 5.12 im Skriptum:
$$\det(a_{-1}, \dots, a_{-i}, \dots, a_{-j}, \dots, a_{-n}) = -\det(a_{-1}, \dots, a_{-j}, \dots, a_{-i}, \dots, a_{-n})\,,$$
also die Aussage "das Vorzeichen der Determinante ändert sich, wenn man zwei Spalten vertauscht". Die Vorgehensweise ist dabei sehr ähnlich zu der, die im Beweis in Aufgabe 4 auf Übungszettel 9 verwendet wurde.

4. Lösen Sie folgendes lineare Gleichungssystem für $x \in \mathbb{R}^3$ mit dem Gauß'schen Eliminationsverfahren:
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

5. Wie Aufgabe 4, für das lineare Gleichungssystem
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 6 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

6. Wie Aufgabe 4, für das lineare Gleichungssystem
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$