MAS3/GST3 Übung 5

Auszuarbeiten bis 11. bzw. 13. 11. 2025

1. Ein Expertenpool für die Zulassung eines Medizinprodukts umfasst 25 Personen; 16 sind für die Zulassung, 9 sind dagegen. Für die Entscheidungsfindung werden 7 Personen aus dem Expertenpool zufällig ausgewählt.

   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Ausschuss nicht einstimmig entscheidet?

2. Bei einem Waschvorgang einer Familie seien 20 Socken in der Waschmaschine. Bei diesem Waschvorgang verschwindet jeder Socke mit Wahrscheinlichkeit 2%. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass

   (a) bei einem Waschvorgang keine Socke verschwindet;

   (b) bei einem Waschvorgang maximal zwei Socken verschwinden.

3. Bei einem multiple-choice-Test stehen bei jeder Frage vier mögliche Antworten zur Auswahl. Jede beliebige Kombination der vier möglichen Antworten kann richtig sein (einschließlich keine oder alle); eine Frage ist nur dann richtig beantwortet, wenn die einzig richtige Kombination von Antwortmöglichkeiten angekreuzt wurde. Der Test umfasst sechs Fragen. Was ist die Wahrscheinlichkeit, durch Raten auf 50% oder mehr richtige beantwortete Fragen zu kommen?

4. Ein Fußballtrainer hat 18 Spieler, davon sind 7 hervorragende Elfmeterschützen. Er wählt für das Elfmeterschießen im Training 5 Spieler zufällig aus. Wie wahrscheinlich ist es, dass mindestens 3 der ausgewählten Spieler hervorragende Schützen sind?

5. Ein Camper wird im Durchschnitt 1.8 Mal pro Stunde von Mücken gestochen, wenn er am Lagerfeuer sitzt. Er verbringt einen typischen Abend (5 Stunden) am Lagerfeuer.

   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,

   (a) dass er höchstens 3 Mal gestochen wird?

   (b) dass er mehr als 10 Mal gestochen wird?

6. Auf einem Schachbrett (8×8 Felder) werden zufällig 100 Reiskörner ausgestreut; für jedes Reiskorn sei also jedes Feld als Ziel gleich wahrscheinlich. Die ZV X gebe an, wieviele Reiskörner auf einem zufällig ausgewählten Feld landen. Überzeugen Sie sich, dass X binomialverteilt ist (mit welchen Parametern?). Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(X = 0)$ und $P(X = 2)$ sowohl über die Binomialverteilung, als auch über die Approximation der Binomialverteilung durch die Poissonverteilung.

1) $N=25,\quad M=16,\quad n=7$ $\qquad P(Z=k)=\frac{\binom{16}{k}\binom{9}{7-k}}{\binom{25}{7}}$

$Z\sim \text{Hypergeom}(25,16,7)$

"Alle sind dagegen" $P(Z=0)=\frac{\binom{16}{0}\binom{9}{7}}{480700}=\frac{36}{480700}\approx \underline{0{,}0075\%}$

"Alle dafür" $P(Z=7)=\frac{\binom{16}{7}\binom{9}{0}}{480700}=\frac{11440}{480700}\approx \underline{2{,}38\%}$

"Einstimmig" $P_Z(\{0,7\})=P(Z=7)+P(Z=0)\approx \underline{2{,}39\%}$

2) $n=20,\quad p=0.02$

$Z\sim \text{Bin}(20,\,0.02)$

$P(Z=k)=\binom{20}{k}\,0.02^k\ 0.98^{20-k}$

a) $P_Z(\{0\})=1\cdot 1\cdot 0.98^{20}\approx \underline{66{,}761\%}$

b) $P_Z(\{0,1,2\})=66{,}761\%+27{,}249\%+5{,}283\%=\underline{99{,}293\%}$

$P_Z(\{1\})=20\cdot 0{,}02\cdot 0{,}98^{19}\approx \underline{27{,}249\%}$

$P_Z(\{2\})=190\cdot 0{,}02^2\cdot 0{,}98^{18}\approx \underline{5{,}283\%}$

3) $p=\underbrace{2^{-4}}_{\text{angebrannt}}=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16},\quad n=6$ $\qquad Z\sim \text{Bin}(6,\tfrac{1}{16})$

¬angebrannt

$P_Z(\{3,4,5,6\})=\binom{6}{3}\cdot\underbrace{\frac{1}{16^3}\cdot\frac{15^3}{16^3}}_{\frac{15^3}{16^6}}+\binom{6}{4}\cdot\frac{15^2}{16^6}+\binom{6}{5}\cdot\frac{15}{16^6}+\frac{1}{16^6}\approx \underline{0{,}423\%}$

4) $N=18,\quad M=7,\quad n=5$ $\qquad Z\sim \text{Hypergeom}(18,7,5)$

$P_Z(\{3,4,5\})=\frac{\binom{7}{3}\binom{11}{2}+\binom{7}{4}\binom{11}{1}+\binom{7}{5}}{8568}\approx \underline{27{,}2\%}$

5) $\lambda=1{,}8\cdot 5=9$ $\qquad Z\sim \text{Poisson}(\lambda=9)$

a) $P_Z(\{0,1,2,3\})\ \ldots$

$P(Z=0)=e^{-9}\,\frac{1}{1}=e^{-9}$

$P(Z=1)=e^{-9}\,\frac{9}{1}=9e^{-9}$

$P(Z=2)=e^{-9}\,\frac{81}{2}=40{,}5e^{-9}$

$P(Z=3)=e^{-9}\,\frac{9^3}{6}=121{,}5e^{-9}$

$\Rightarrow P_Z(\{0,1,2,3\})=(1+9+40{,}5+121{,}5)e^{-9}=172e^{-9}\approx \underline{2{,}12\%}$

b) $P_Z(\{x\in\mathbb{N}\mid x\le 10\})\approx \underline{70{,}6\%}\ \Rightarrow P_Z(\{x\in\mathbb{N}\mid x>10\})=P_Z(\overline{\{x\in\mathbb{N}\mid x\le 10\}})=1-70{,}6\%=\underline{29{,}4\%}$

6) $n=100,\quad p=\frac{1}{64}$ $\qquad X\sim \text{Bin}(100,\tfrac{1}{64})$ $\qquad \Rightarrow P(X=0)\approx \underline{20{,}704\%}$

$P(X=k)=\binom{100}{k}\left(\frac{1}{64}\right)^k\left(\frac{63}{64}\right)^{100-k}$ $\qquad P(X=2)\approx \underline{25{,}822\%}$

$\lambda=\frac{100}{64}$ $\qquad X\sim \text{Poisson}\left(\frac{100}{64}\right)$ $\qquad \Rightarrow P(X=0)\approx \underline{20{,}961\%}$

$P(X=k)=e^{-\frac{100}{64}}\,\frac{\left(\frac{100}{64}\right)^k}{k!}$ $\qquad P(X=2)\approx \underline{25{,}587\%}$