MAA2/MAN2 Übung 7

Auszuarbeiten bis 29./30. 4. 2025

1. Welche der folgenden Funktionen sind linear, welche nicht? Geben Sie weiters für alle Funktionen Vektorräume V und W (z.B. $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$) an, die Definitions- bzw. Bildbereiche dieser Funktionen sein könnten.

   (a) $f(x, y, z) = (x + 2y - z, 2x + 3)$

   (b) $f(x) = (x, -3x, 0)$

   (c) $f(x, y, z) = x + y - 2xz$

   (d) $f(x) = (\sin(x), x^2)$

2. [**Bis auf die Zahlen identisch zu Aufgabe 2(b) auf Übungszettel 5**] Rechnen Sie nach, dass ein beliebiger Vektor $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (und damit *jeder* Vektor in $\mathbb{R}^2$!) in der linearen Hülle der beiden Vektoren $(-2, 1)$ und $(1, 0)$ liegt. Damit bilden diese beiden Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^2$, weil sie ja auch linear unabhängig sind. Geben Sie weiters die Koordinaten dieses beliebigen Vektors (x, y) bezüglich der Basis $\big((-2, 1), (1, 0)\big)$ an.

3. Verwenden Sie das Ergebnis von Aufgabe 2, um die Termdarstellung $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \\ a_{31}x + a_{32}y \end{pmatrix}$ der linearen Funktion f zu bestimmen, die durch

$$f\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   gegeben ist.

4. Beweisen Sie formal, wie im ersten Semester durchbesprochen: Der Kern $\operatorname{kern}(f)$ einer linearen Abbildung $f : V \to W$ ist ein Untervektorraum von V.

5. Gegeben sei eine Menge $M = \{v_1, \dots, v_n\}$ von linear unabhängigen Vektoren. Begründen Sie, welche der folgende Aussagen stimmen und welche nicht (rein verbal, ohne Beweise):

   (a) Es gibt eine echte Teilmenge A von M (d.h. $A \neq M$), die linear unabhängig ist.

   (b) Jede Teilmenge von M ist linear unabhängig.

   (c) Es gibt eine Übermenge A von M (also eine Menge $A \neq M$ mit $M \subseteq A$), die linear unabhängig ist.

   (d) Jede Übermenge von M ist linear unabhängig.

6. Wie Aufgabe 5, aber für linear abhängige Vektoren. Gegeben sei also eine Menge $M = \{v_1, \ldots, v_n\}$ von linear abhängigen Vektoren. Begründen Sie, welche der folgende Aussagen stimmen und welche nicht (rein verbal, ohne Beweise):

   (a) Es gibt eine echte Teilmenge von M, die linear abhängig ist.

   (b) Jede Teilmenge von M ist linear abhängig.

   (c) Es gibt eine Übermenge von M, die linear abhängig ist.

   (d) Jede Übermenge von M ist linear abhängig.