LGI1/MAG1 Übung 1

Auszuarbeiten bis 14. 10. 2025

1. Stellen Sie fest, welche der folgenden Zeichenketten wohlgeformte Aussagen sind, und welche nicht. Begründen Sie Ihre Antworten, für die wohlgeformten Aussagen etwa durch eine Syntaxanalyse, also Klammern von Teilaussagen wie in Beispiel 2.2 im Buch:

   (a) $((\neg A) \wedge (B \vee C))$

   (b) $((A \wedge \vee B))$

   (c) $(\neg(A \wedge B))$

   (d) $((A \Rightarrow B) \wedge B)$

2. Wie Aufgabe 1, für die Zeichenketten

   (a) $\neg A \vee B \vee C$

   (b) $(\neg(A \wedge (B \vee))$

   (c) $((A \vee B) \wedge (\neg C))$

   (d) $((\neg A) \vee (B \wedge (C \Rightarrow (\neg B))))$

3. Geben Sie die Wahrheitstabellen für folgende Aussagen an:

   (a) $((A \wedge B) \Rightarrow (A \vee B))$

   (b) $(A \vee (B \wedge C))$

   (c) $(((A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)) \wedge (A \vee C))$

4. Bilden Sie für jeden der folgenden deutschen Sätze syntaktisch und semantisch korrekte zusammengesetzte Aussagen, wobei Sie die dazu notwendigen atomaren Aussagen selbst festlegen:

   (a) “Die Ampel ist grün oder rot, aber nicht beides.”

   (b) “Wenn Lisa arbeitet, dann trinkt sie Tee, aber keinen Kaffee.”

   (c) “Klaus trinkt Bier nur im Gasthaus.”

5. Das *exklusive Oder* $\otimes$ und die *Äquivalenz* $\Leftrightarrow$ sind zwei weitere Junktoren, definiert über die folgenden Wertetabellen. Verifizieren Sie durch Vergleich der Wertetabellen, dass sich diese Junktoren durch die bereits bekannten Junktoren wie unten rechts gezeigt darstellen lassen.

x	y	$(x \otimes y)$
f	f	f
f	w	w
w	f	w
w	w	f

x	y	$(x \Leftrightarrow y)$
f	f	w
f	w	f
w	f	f
w	w	w

$$(x \otimes y) \;\equiv\; ((x \wedge (\neg y)) \vee (y \wedge (\neg x)))$$

$$(x \Leftrightarrow y) \;\equiv\; ((x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x))$$

6. In dieser Aufgabe untersuchen wir Wahrheitstabellen (wie groß sie werden können, und wieviele unterschiedliche Spalten es geben kann).

   (a) Wieviele Zeilen hat die Wahrheitstabelle einer Aussage, die aus n unterschiedlichen atomaren Aussagen zusammengesetzt ist? Bis jetzt haben wir Beispiele für $n = 2$ und $n = 3$ kennengelernt; finden Sie eine Formel, die die Anzahl der Zeilen in Abhängigkeit von n angibt.

   (b) Wieviele unterschiedliche Junktoren zwischen zwei Aussagen kann es theoretisch geben? Jeder solche Junktor ist eindeutig definiert durch seine Wertetabelle mit vier Zeilen; für die Junktoren $\wedge$, $\vee$ und $\Rightarrow$ sind dies die Definitionen 2.4 bis 2.6 im Buch. Es geht nicht darum, wieviele dieser Junktoren bekannt, sinnvoll oder sonst besonders erwähnenswert wären, sondern nur darum, wieviele es insgesamt geben kann.

1a) ✓ $(\neg A)$ neg. $(A \wedge B)$ konj. $(B \vee C)$ disj.

b) ✗ $((A \wedge \vee B))$?

c) ✓ $(\neg(A \wedge B))$ konj neg.

d) ✓ $((A \Rightarrow B) \wedge B)$ impl. konj.

2a) ✗ $\neg A \vee B \vee C$? keine Klammern

b) ✗ $(\neg(A \wedge (B \vee))$

c) ✓ $((A \vee B) \wedge (\neg C))$ disj. neg. konj.

d) ✓ $((\neg A) \vee (B \wedge (C \Rightarrow (\neg B))))$ neg. neg. impl. konj. disj.

3a)

A	B	$((A \wedge B) \Rightarrow (A \vee B))$
f	f	W
f	w	W
w	f	W
w	w	W

b)

A	B	C	$(A \vee (B \wedge C))$
f	f	f	f
f	f	w	f
f	w	f	f
f	w	w	w
w	f	f	w
w	f	w	w
w	w	f	w
w	w	w	w

c)

A	B	C	$(((A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)) \wedge (A \vee C))$
f	f	f	f
f	f	w	f
f	w	f	f
f	w	w	f
w	f	f	w
w	f	w	w
w	w	f	w
w	w	w	w

4a) $((G \lor R) \land (\neg (G \land R)))$

b) $((A \Rightarrow T) \land (A \Rightarrow (\neg K)))$

c) $\cancel{((G \land B) \lor (\neg (G \Rightarrow B)))}$ $B \Rightarrow G$

5a)

x	y	$((x \land (\neg y)) \lor (y \land (\neg x)))$
f	f	f
f	w	w
w	f	w
w	w	f

b)

x	y	$((x \Rightarrow y) \land (y \Rightarrow x))$
f	f	w
f	w	f
w	f	f
w	w	w

6a) 2^n

b) $2^4 = 16$