MAS3/GST3 Übung 6

Auszuarbeiten bis 18. bzw. 20. 11. 2025

1. Gegeben sei folgende gemeinsame Verteilung der beiden ZV X und Y (mit den Werten von X entlang den Spalten, und den Werten von Y entlang den Zeilen):

$$\begin{array}{cc|ccc} & & & X & \\ & f_{X,Y} & 2 & 3 & 5 \\ \hline & 0 & \frac{6}{36} & \frac{8}{36} & \frac{1}{36} \\ Y & 2 & \frac{8}{36} & \frac{4}{36} & \frac{2}{36} \\ & 4 & \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{4}{36} \end{array}$$

   Berechnen Sie

   (a) die Randverteilungen von X und Y;

   (b) die bedingte Verteilung $P(X \mid Y = 2)$, also $P(X = k \mid Y = 2)$ für $k = 2, 3, 5$;

   (c) ob X und Y unabhängig sind oder nicht.

2. Eine faire Münze wird dreimal geworfen. Die ZV X und Y geben dabei an, wie oft KOPF unter den ersten zwei (X) bzw. allen drei (Y) Würfen aufgetreten ist.

   Geben Sie die Tabelle der gemeinsamen Verteilung von X und Y an, und berechnen Sie die Randverteilungen. Sind X und Y unabhängig?

3. Wie Aufgabe 2, aber für folgende Situation: Ein fairer Würfel wird zweimal geworfen. Die ZV X und Y geben an, wie oft eine 1 oder 2 gewürfelt wurde, und zwar beim ersten Würfeln (X) bzw. bei beiden Würfen (Y).

4. In einem Behälter mit Batterien befinden sich drei neue, vier gebrauchte, sowie fünf leere Batterien. Man greift in den Behälter, und nimmt unter einmal Ziehen zwei Batterien heraus. Die ZV X gebe die Anzahl der dabei gezogenen neuen, die ZV Y die Anzahl der dabei gezogenen gebrauchten Batterien an.

   (a) Begründen Sie, warum die Formel für die gemeinsame Verteilung von X und Y folgendermaßen lautet:

$$f_{X,Y}(k, j) = \frac{\binom{3}{k}\binom{4}{j}\binom{5}{2-k-j}}{\binom{12}{2}}$$

   (b) Geben Sie die Tabelle der gemeinsamen Verteilung von X und Y an.

   (c) Rechnen Sie über diese Tabelle nach, dass X und Y nicht unabhängig sind.

5. Gegeben sei folgende gemeinsame Verteilung der beiden *unabhängigen*(!) ZV X und Y:

	$f_{X,Y}$	X: 0	3	5
	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	
Y	1	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	
	2	$\frac{8}{36}$		$\frac{4}{36}$

Vervollständigen Sie obige Tabelle so, dass X und Y unabhängig sind.

6. Beweisen Sie: Wenn für alle Werte von k und j gilt, dass $P(X = k \,|\, Y = j) = P(X = k)$ ist (das Wissen um den Wert von Y also keinen Einfluss auf die Verteilung von X hat), dann gilt sowohl

   (a) $P(X = k, Y = j) = P(X = k)P(Y = j)$, als auch

   (b) $P(Y = j \,|\, X = k) = P(Y = j)$.