

MAA2/MAN2 Übung 11

Auszuarbeiten bis 27./28. 5. 2025

1. Berechnen Sie alle Lösungen des folgenden linearen Gleichungssystems, das schon in oberer Dreiecksform vorliegt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Berechnen Sie den Kern der folgenden linearen Funktion:

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + 2x_2 + 2x_4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 \\ 3x_2 + 3x_3 + 5x_4 \end{pmatrix}.$$

3. Wir nehmen an, dass die Musterlösung eines linearen Gleichungssystems die Form $v_0 + \lambda v_1 + \mu v_2$ hat. Ein Student löst dieses Gleichungssystem, und erhält $w_0 + \alpha w_1 + \beta w_2$. Erklären Sie, wie er feststellen kann, ob seine Lösung (eine lineare Mannigfaltigkeit) die gleiche lineare Mannigfaltigkeit beschreibt wie die Musterlösung.
4. Sei $v_0 + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ die lineare Mannigfaltigkeit, die eine Lösung eines linearen Gleichungssystems ist. Erklären Sie (wie Sie wollen, mit oder ohne formalem Beweis), warum die Menge $\{v_1, \dots, v_n\}$ linear unabhängig ist, wenn die Vektoren v_1, \dots, v_n über das Gaußsche Eliminationsverfahren bestimmt wurden.
5. Berechnen Sie die inverse Matrix zu folgender Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$x_3 = \lambda_1; x_4 = \lambda_2; x_5 = \lambda_3$$

$$-x_2 + \lambda_1 - 2\lambda_2 + 4\lambda_3 = 3 \Rightarrow x_2 = -3 + \lambda_1 - 2\lambda_2 + 4\lambda_3$$

$$x_1 + 4 \cdot (-3 + \lambda_1 - 2\lambda_2 + 4\lambda_3) + 2\lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3 = -1 \Rightarrow x_1 = -1 + 12 - 4\lambda_1 + 8\lambda_2 - 16\lambda_3 - 2\lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3$$

$$= 11 - 6\lambda_1 + 9\lambda_2 - 19\lambda_3$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -19 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$2) \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 2 & | & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & | & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 5 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 & | & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 5 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 5 & | & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 5 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = \lambda_1; x_4 = \lambda_2$$

$$3x_2 + 3\lambda_1 + 5\lambda_2 = 0$$

$$\Rightarrow x_2 = -\lambda_1 - \frac{5}{3}\lambda_2$$

$$x_1 = -2\lambda_1 - \frac{10}{3}\lambda_2 + 2\lambda_2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -16/3 \\ -5/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \text{Basis}(f)$$

3) A.: wir können überprüfen ob beide $\{v_1, v_2\}$ den gleichen Vektorraum aufspannt wie $\{w_1, w_2\}$ (spannen die gleiche lineare Hülle auf). Zusätzlich müssen wir überprüfen, dass der Unterschied im Basispunkt Teil des aufgespannten Vektorraums ist (somit lässt sich problemlos von w_0 zu v_0 und umgekehrt bewegen, da wir ja schon wissen dass der Vektorraum in dem sich w_0 und v_0 im gleichen Vektorraum befinden (siehe oben)). Das geht mittels $w_0 - v_0 \in L(\{v_1, v_2\})$

4) A.: Weil die Vektoren immer $\neq 0$ Werte haben müssen, aber von unten nach oben stetig auf 0 (durch vorherige Auflösung) gesetzt wird, dadurch befinden sich die Vektoren nie auf der linearen Hülle da $R/R \neq 0$ sein kann

$$5) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & | & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & | & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + 3R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & | & -2 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 4 & -5 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \\ 4 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$