MAA2/MAN2 Übung 13

Auszuarbeiten bis 11./17. 6. 2025

1. Wir definieren auf dem Vektorraum aller Polynomfunktionen vom Grad maximal 2 folgendes Skalarprodukt:

$$P(x) \cdot Q(x) := P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1).$$

   (a) Rechnen Sie nach, dass bezüglich dieses Skalarprodukts die beiden Polynomfunktionen x und x^2 senkrecht aufeinander stehen.

   (b) Berechnen Sie $\|x + 1\|$.

   (c) Berechnen Sie $\mathrm{proj}_w(v)$ für $v = x^2 - 1$ und $w = x + 3$.

2. Berechnen Sie mit dem Gram-Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahren eine Menge von orthogonalen Vektoren, die denselben Vektorraum aufspannt wie die drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Beachten Sie, dass Sie die erhaltenen Vektoren beliebig lang machen können, ohne dass die Eigenschaft der Orthogonalität verloren geht. Das bedeutet, dass Sie speziell durch Multiplizieren mit einem geeigneten Skalar alle Brüche in diesen Vektoren eliminieren können.

3. Gegeben sei der Untervektorraum U, der in $\mathbb{R}^4$ von den drei Vektoren $(1, 0, 1, 1)$, $(1, 1, -1, 0)$, sowie $(1, -1, 0, -1)$ aufgespannt wird (beachten Sie, dass diese drei Vektoren paarweise orthogonal sind). Berechnen Sie denjenigen Punkt in U, der dem Punkt $p = (-4, 2, 0, 1)$ am nächsten liegt.

4. Gegeben seien folgende drei Vektoren:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Rechnen Sie nach, dass diese Vektoren eine Orthonormalbasis bilden.

   (b) Berechnen Sie die Koordinaten des Vektors $(2, 1, 3)$ bezüglich dieser Basis. Verwenden Sie dazu die Tatsache, dass die Basis eine Orthonormalbasis ist (dann gilt nämlich Satz 6.4 im Skriptum).

z.Z. $\cos(\alpha) = 0$ $\Downarrow$

1) a) $P(x) = x$
$Q(x) = x^2$

$$0 = \frac{P(x) \times Q(x)}{\|P(x)\| \cdot \|Q(x)\|} = \frac{-1+0+1}{\underbrace{\sqrt{1+1} \cdot \sqrt{1-1}}_{y \in \mathbb{R} \mid y \neq 0}} = \frac{0}{y} = 0$$

b) $P(x) = x + 1$
$P(x)^2 = 0 + 1 + 4 = 5$

$$\|P(x)\| = \sqrt{P(x)^2} = \sqrt{5}$$

c) $\text{proj}_w(v)$ für $v = x^2 - 1$ und $w = x + 3$.

$$\frac{v \cdot w}{w^2} \times w = \frac{0 + (-3) + 0}{4 + 9 + 16} \times w = \frac{-3}{29} \times w = \frac{-3x}{29} + \frac{-9}{29}$$

2) $b_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad v_1 = b_1$

$b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad v_2 = b_2 - \text{proj}_{v_1}(b_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$

$b_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\text{proj}_{v_1}(b_2) = \frac{-2+0+0-1}{4+1+1} \cdot b_1 = \frac{-1}{2} \cdot b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$v_3 = b_3 - \text{proj}_{v_1}(b_3) - \text{proj}_{v_2}(b_3)$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{10}{13} \\ 5/26 \\ 15/26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{23}{13} \\ 8/26 \\ -28/26 \end{pmatrix}$$

$$\text{proj}_{v_1}(b_3) = \frac{-4+1}{6} \cdot v_1 = \text{proj}_{v_1}(b_2)$$

$$\text{proj}_{v_2}(b_3) = \frac{-2 + (-\frac{1}{2})}{4 + \frac{1}{4} + \frac{9}{4}} \cdot v_2 = \frac{-\frac{5}{2}}{\frac{26}{4}} \cdot v_2 = \frac{-\cancel{20}^{5}}{\cancel{52}^{13}} \cdot v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{10}{13} \\ \frac{5}{26} \\ \frac{15}{26} \end{pmatrix}$$

$v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad v_3 \cdot 26 = \begin{pmatrix} 26 \\ -46 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} / 2 = \begin{pmatrix} 13 \\ -23 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

$v_2 \cdot 2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

3)

3. Gegeben sei der Untervektorraum U, der in $\mathbb{R}^4$ von den drei Vektoren $(1, 0, 1, 1)$, $(1, 1, -1, 0)$, sowie $(1, -1, 0, -1)$ aufgespannt wird (beachten Sie, dass diese drei Vektoren paarweise orthogonal sind). Berechnen Sie denjenigen Punkt in U, der dem Punkt $p = (-4, 2, 0, 1)$ am nächsten liegt.

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{proj}_{b_1}(p) = \frac{-4+1}{3} \cdot b_1 = -1 \cdot b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{proj}_{b_2}(p) = \frac{-4+2}{3} \cdot b_2 = -\frac{2}{3} \cdot b_2 = \begin{pmatrix} -2/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{proj}_{b_3}(p) = \frac{-4-2-1}{3} \cdot b_3 = \frac{-7}{3} \cdot b_3 = \begin{pmatrix} -7/3 \\ 7/3 \\ 0 \\ 7/3 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{proj}_U(p) = \mathrm{proj}_{b_1}(p) + \mathrm{proj}_{b_2}(p) + \mathrm{proj}_{b_3}(p)$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7/3 \\ 7/3 \\ 0 \\ 7/3 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} -\frac{12}{3} \\ 5/3 \\ -1/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -12 \\ 5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} / 3$$

4. Gegeben seien folgende drei Vektoren:

$$\underset{b_1}{\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}}, \quad \underset{b_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}}, \quad \underset{b_3}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}.$$

(a) Rechnen Sie nach, dass diese Vektoren eine Orthonormalbasis bilden.

(b) Berechnen Sie die Koordinaten des Vektors $(2, 1, 3)$ bezüglich dieser Basis. Verwenden Sie dazu die Tatsache, dass die Basis eine Orthonormalbasis ist (dann gilt nämlich Satz 6.4 im Skriptum).

Definition 6.6 (Orthonormalbasen)
Eine Basis $\{b_1, \dots, b_n\}$ eines Vektorraums V mit den Eigenschaften

(1) $\underset{1 \le i \ne j \le n}{\forall} b_i \perp b_j$

(2) $\underset{1 \le i \le n}{\forall} \|b_i\| = 1$

nennt man *Orthonormalbasis (ONB)* von V.

Satz 6.4 Sei B eine Matrix, deren Spalten $b_1, \dots, b_n$ eine Orthonormalbasis bilden. Dann ist die i-te Koordinate λ_i eines Vektors v bezüglich dieser Basis gegeben durch

$$\lambda_i = b_i \cdot v,$$

für den Koordinatenvektor λ gilt somit $\lambda = B^T v$.

a) (1) z. z. $b_i \cdot b_j = 0$ ✓

$$b_1 \cdot b_2 = 0 + \left(-\frac{12}{25}\right) + \frac{12}{25} = 0$$

$$b_2 \cdot b_3 = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$b_1 \cdot b_3 = 0 + 0 + 0 = 0$$

(2) z. z. $\|b_i\| = 1$ ✓

$$\|b_1\| = \sqrt{0 + \frac{16}{25} + \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25}} = 1$$

$$\|b_2\| = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = \sqrt{25/25} = 1$$

$$\|b_3\| = \sqrt{1 + 0 + 0} = 1$$

b) $$\begin{pmatrix} b_1 \cdot v \\ b_2 \cdot v \\ b_3 \cdot v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + 4/5 + 9/5 \\ 0 + (-3/5) + 12/5 \\ 2 + 0 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13/5 \\ 9/5 \\ 2 \end{pmatrix}$$