MAS3/GST3 Übung 3

Auszuarbeiten bis 28. bzw. 30. 10. 2025

1. Zwei Würfel werden je einmal geworfen. Wir definieren die folgenden vier Ereignisse:
   - A = "Augensumme ist gerade"
   - B = "Der erste Würfel zeigt eine gerade Zahl"
   - C = "Die Augensumme ist 7"
   - D = "Mindestens ein Würfel zeigt einen Sechser"

   Welche der folgenden Ereignisse sind unabhängig: A und B? A und C? B und D? C und D?

2. Es gibt drei Schatullen:
   - Schatulle 1 enthält zwei Goldmünzen
   - Schatulle 2 enthält zwei Silbermünzen
   - Schatulle 3 enthält eine Gold- und eine Silbermünze

   Eine Schatulle wird zufällig gewählt. Aus dieser Schatulle nimmt man zufällig eine der beiden Münzen heraus. Die so gezogene Münze ist eine Goldmünze.

   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass auch die andere Münze in derselben Box eine Goldmünze ist?

3. [Fortsetzung von Aufgabe 3] Wir variieren nun die Aufgabenstellung aus Aufgabe so, dass jede Schatulle beliebig viele Münzen enthält: Schatulle 1 nur Gold-, Schatulle 2 nur Silber-, und Schatulle 3 gleich viele Gold- wie Silbermünzen.

   (a) Wir entnehmen wiederum aus einer zufälligen Schatulle zufällig eine Münze. Es ist eine Goldmünze. Wie ändert sich Ihre Einschätzung (Wahrscheinlichkeit), dass diese Schatulle die Goldschatulle ist (also von "vor dem Ziehen der Münze" zu "nach dem Ziehen einer Goldmünze")?

   (b) Sie entnehmen derselben Schatulle nochmals zufällig eine Münze, und wieder ist es eine Goldmünze. Wie wahrscheinlich ist es nun, dass diese Schatulle die Goldschatulle ist?

   Hinweis: In Teil (a) hat sich die Wahrscheinlichkeit, dass die zufällig ausgewählte Schatulle die Goldschatulle ist, auf Basis der Information "Goldmünze gezogen" verändert (sie ist nicht mehr 1/3). Diese veränderte Wahrscheinlichkeit ist die Wahrscheinlichkeit, die durch die weitere Information "noch eine Goldmünze gezogen" nochmals verändert wird.

4. Wir betrachten ein regelmäßiges Straßennetz, das gitterartig angelegt ist. Von einem Startpunkt links unten (unser Koordinatenursprung (0,0)) sollen Sie zu einem Zielpunkt rechts oben navigieren, der sechs Blöcke nach rechts, und vier Blöcke nach oben entfernt ist, sich also bei Block-Koordinaten (6,4) befindet. Sie können nur nach rechts bzw. oben fahren. Wieviele verschiedene Wege gibt es vom Start zum Ziel?

5. Eine Analyse des Ertrags von Tomatenpflanzen ergibt, dass eine bestimmte Sorte in trockenen Jahren 70% süße Tomaten trägt, in normalen Jahren aber nur 50% süße Tomaten. Die Wahrscheinlichkeit eines trockenen Jahres liegt bei 40% (und damit die Wahrscheinlichkeit einen normalen Jahres bei 60%).

   (a) Was ist der Anteil süßer Tomaten in einem beliebigen Jahr?

   (b) Wir nehmen an, dass eine zufällig ausgewählte Tomate süß ist. Wie wahrscheinlich ist es, dass es sich um ein trockenes Jahr handelt?

6. Wir ziehen zweimal ohne Zurücklegen aus einer Urne mit vier roten und sieben schwarzen Kugeln. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite gezogene Kugeln rot ist.

7. In dieser Aufgabe betrachten wir eine Instanz des *Simpson-Paradoxons*, dass Analysen auf Untergruppen zu diametral unterschiedlichen Ergebnissen führen können, als wenn man die Untergruppen kombiniert.

   Als Beispiel dazu dienen etwa Daten zweier medizinischer Interventionen bei Gallensteinen[1], die getrennt nach *kleinen Gallensteinen* und *großen Gallensteinen* analysiert werden können:

   kleine Gallensteine:

	Ergebnis	
	Erfolg	kein Erfolg
Intervention A	81	6
Intervention B	234	36

   große Gallensteine:

	Ergebnis	
	Erfolg	kein Erfolg
Intervention A	192	71
Intervention B	55	25

   (a) Berechnen Sie für jede dieser beiden Tabellen die bedingten W.keiten $P(\text{Erfolg} \mid \text{Intervention } A)$ und $P(\text{Erfolg} \mid \text{Intervention } B)$. Welche der beiden Methoden hat eine höhere Erfolgsrate?

   (b) Kombinieren Sie dann die Zahlen in den Tabellen: Erstellen Sie somit *eine* Tabelle, mit der anschließend den Erfolg der beiden Methoden auf allen Gallensteinen berechnen können. Was fällt dabei auf?

[1] Original aus C.R. Charig, D.R. Webb, S.R. Payne und J.E. Wickham, “Comparison of treatment of renal calculi by open surgery, percutaneous nephrolithotomy, and extracorporeal shockwave lithotripsy”, *BMJ* 292 (6524): 879–882.

1) $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ $\quad P(A) = P(\text{even}) \cdot P(\text{even}) + P(\text{odd}) \cdot P(\text{odd})$
$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$C = \{(6,1), (1,6), (5,2), (2,5), (4,3), (3,4)\}$

$P(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ $\quad P(D) = \frac{|D|}{36} = \frac{11}{36}$

$D = \{(6, 1|2|3|4|5), (1|2|3|4|5, 6), (6,6)\}$

$A \cap B = \{2,4,6\} \times \{2,4,6\} \Rightarrow |A \cap B| = 3 \times 3 = 9$ $\quad P(A \cap B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$
$= P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{4}$

$A \cap C = \{\}$ $\quad$ Summe $= 7 \wedge$ Summe $\%2 = 0$ ist f $\quad P(A \cap C) = 0$
$\neq P(A) \cdot P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$

$B \cap D = \{(6, 1|2|3|4|5), (2,6), (4,6), (6,6)\}$ $\quad P(D \cap B) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$
$\neq P(B) \cdot P(D) = \frac{1}{2} \cdot \frac{11}{36} = \frac{11}{72}$

$C \cap D = \{(6,1), (1,6)\}$ $\quad P(C \cap D) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$
$\neq P(C) \cdot P(D) = \frac{1}{6} \cdot \frac{11}{36} = \frac{11}{216}$

2) G … Goldmünze $\quad P(G) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$P(S_1) = \frac{1}{3}$ $\quad$ 3 Schatullen

$P(G \mid S_1) = \frac{2}{2} = 1$ $\quad P(S_1 \mid G) = \frac{P(G \mid S_1) \cdot P(S_1)}{P(G)}$
$= \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$

3) a) $P(S_1) = \frac{1}{3}$ $\quad$ vor ziehen
$P(S_1 \mid G) = \frac{2}{3}$ $\quad$ nach ziehen (siehe oben ↑)

b) $P(G_2 \mid G_1) = \frac{5}{6} = \underbrace{\frac{1}{2}}_{P(G \mid S_3 \cap G_1)} \cdot \underbrace{\frac{1}{3}}_{P(S_3 \mid G_1)} + \underbrace{\frac{2}{2}}_{P(G \mid S_1 \cap G_1)} \cdot \underbrace{\frac{2}{3}}_{P(S_1 \mid G_1)}$ $\quad P(G_1 \cap G_2) = P(G_1) \cdot P(G_2 \mid G_1)$
$= \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{12}$

$P(S_1 \mid G_1 \cap G_2) = \frac{P(G_1 \cap G_2 \mid S_1) \cdot P(S_1)}{P(G_1 \cap G_2)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{5}{12}} = \frac{12}{15} = 80\%$

$P(S_1 \cap G_1 \cap \ldots \cap G_n) = \frac{1}{3}$ $\quad \Leftarrow \underbrace{P(S_1)}_{\frac{1}{3}} \cdot \underbrace{P(G_1 \mid S_1)}_{1} \cdot \underbrace{P(G_2 \mid S_1 \cap G_1)}_{1} \cdot \underbrace{\ldots}_{1\ 1\ 1} = \frac{1}{3}$

4) $G = \{R\} \times 6 \cup \{O\} \times 4 \Rightarrow \frac{10!}{6! \cdot 4!} = \underline{210}$ Möglichkeiten

Permutation mit Wiederholung

5a) $P(T_S | J_T) = 70\%$ $P(T_S | J_N) = 50\%$

$P(J_T) = 40\%$ J_T, J_N "disjunkt" $\Rightarrow$ totale Wahl.

$P(J_N) = 60\%$

$$P(T_S) = P(T_S | J_N) \cdot P(J_N) + P(T_S | J_T) \cdot P(J_T)$$
$$= 0{,}5 \cdot 0{,}6 + 0{,}7 \cdot 0{,}4$$
$$= 0{,}3 + 0{,}28$$
$$= \underline{0{,}58} = 58\%$$

b) $P(J_T | T_S) = \frac{P(T_S | J_T) \cdot P(J_T)}{P(T_S)} = \frac{0{,}7 \cdot 0{,}4}{0{,}58} \approxeq 0{,}48275 \approx \underline{48{,}28\%}$

6) $P(R_1) = 4/11$ $P(S_1) = 7/11$

$P(R_2 | R_1) = 3/10$ $P(R_2 | S_1) = 4/10$ $\Rightarrow$ tot. Wahrsch.

$$P(R_2) = P(R_2 | S_1) \cdot P(S_1) + P(R_2 | R_1) \cdot P(R_1)$$
$$= 4/10 \cdot 7/11 + 3/10 \cdot 4/11$$
$$= \frac{28}{110} + \frac{12}{110}$$
$$= \underline{4/11}$$

7a) klein: $P(E | I_A) = \frac{81}{87} \approxeq \underline{93{,}1\%}$ groß: $P(E | I_A) = \frac{192}{263} \approxeq \underline{73\%}$

$P(E | I_B) = \frac{234}{270} \approxeq \underline{86{,}7\%}$ $P(E | I_B) = 55/80 \approxeq \underline{68{,}8\%}$

b)

	klein	groß
Intervention A	93,1%	73%
Intervention B	86,7%	68,8%

Alle:	Erfolg	¬Erfolg
Intervention A	273	77
Intervention B	289	61

$P(E | I_A) = \frac{273}{350} = \underline{78\%}$

$P(E | I_B) = \frac{289}{350} = \underline{82{,}6\%}$

Es fällt auf, dass obwohl einzeln betrachtet I_B weniger erfolgreich scheint, zusammengezählt I_B trotzdem eine höhere Erfolgsaussicht hat.