MAA2/MAN2 Übung 7

Auszuarbeiten bis 29./30. 4. 2025

1. Welche der folgenden Funktionen sind linear, welche nicht? Geben Sie weiters für alle Funktionen Vektorräume V und W (z.B. $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$) an, die Definitions- bzw. Bildbereiche dieser Funktionen sein könnten.

   (a) $f(x, y, z) = (x + 2y - z, 2x + 3)$ ↯ $V = \mathbb{R}^3$ $W = \mathbb{R}^2$

   (b) $f(x) = (x, -3x, 0)$ ✓ $V = \mathbb{R}$ $W = \mathbb{R}^3$

   (c) $f(x, y, z) = x + y - 2xz$ ✓ $V = \mathbb{R}^3$ $W = \mathbb{R}$

   (d) $f(x) = (\sin(x), x^2)$ ↯ $V = \mathbb{R}$ $W = \mathbb{R}^2$

   $2\sin(x) \neq \sin(2x)$

2. [**Bis auf die Zahlen identisch zu Aufgabe 2(b) auf Übungszettel 5**] Rechnen Sie nach, dass ein beliebiger Vektor $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (und damit *jeder* Vektor in $\mathbb{R}^2$!) in der linearen Hülle der beiden Vektoren $(-2, 1)$ und $(1, 0)$ liegt. Damit bilden diese beiden Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^2$, weil sie ja auch linear unabhängig sind. Geben Sie weiters die Koordinaten dieses beliebigen Vektors (x, y) bezüglich der Basis $\big((-2, 1), (1, 0)\big)$ an.

3. Verwenden Sie das Ergebnis von Aufgabe 2, um die Termdarstellung $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \\ a_{31}x + a_{32}y \end{pmatrix}$ der linearen Funktion f zu bestimmen, die durch

$$f\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   gegeben ist.

4. Beweisen Sie formal, wie im ersten Semester durchbesprochen: Der Kern $\mathrm{kern}(f)$ einer linearen Abbildung $f : V \to W$ ist ein Untervektorraum von V.

5. Gegeben sei eine Menge $M = \{v_1, \ldots, v_n\}$ von linear unabhängigen Vektoren. Begründen Sie, welche der folgende Aussagen stimmen und welche nicht (rein verbal, ohne Beweise):

   (a) Es gibt eine echte Teilmenge A von M (d.h. $A \neq M$), die linear unabhängig ist.

   (b) Jede Teilmenge von M ist linear unabhängig.

   (c) Es gibt eine Übermenge A von M (also eine Menge $A \neq M$ mit $M \subseteq A$), die linear unabhängig ist.

   (d) Jede Übermenge von M ist linear unabhängig.

6. Wie Aufgabe 5, aber für linear abhängige Vektoren. Gegeben sei also eine Menge $M = \{v_1, \dots, v_n\}$ von linear abhängigen Vektoren. Begründen Sie, welche der folgende Aussagen stimmen und welche nicht (rein verbal, ohne Beweise):

   (a) Es gibt eine echte Teilmenge von M, die linear abhängig ist.

   (b) Jede Teilmenge von M ist linear abhängig.

   (c) Es gibt eine Übermenge von M, die linear abhängig ist.

   (d) Jede Übermenge von M ist linear abhängig.

2) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -2\lambda + 4 \\ \lambda \end{pmatrix}$

$\Rightarrow y = \lambda$

$\underline{x = -2y + 4}$

$\Rightarrow \underline{\begin{pmatrix} \lambda \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x+2y \end{pmatrix}}$

3) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + (x+2y) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y f\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + (x+2y) f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= y \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + (x+2y) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 3y + 0 \\ y - x - 2y \\ -2y + 2x + 4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0x + 3y \\ -1x - 1y \\ 2x + 2y \end{pmatrix}$

4) $\text{Kern}(f) = \{ v \in V \mid \underline{f(v) = 0} \}$

z.Z. $\text{Kern}(f) = \text{UVR v. } V$ $\Rightarrow$ Addition

$v, w \in \text{Kern}(f)$ Fakt $\Rightarrow f(v) = 0$

$v + w \in \text{Kern}(f)$ z.Z. $\quad f(w) = 0$

$\Rightarrow \underline{f(v+w) = 0 = f(v) + f(w) = 0 + 0 = 0}$

$\Rightarrow$ Skalar Multiplikation

Fakt: $\lambda \in \mathbb{R}, w \in \text{Kern}(f)$

z.Z. $\lambda w \in \text{Kern}(f) \Rightarrow f(\lambda w) = 0 = \underline{\lambda f(w) = \lambda 0 = 0}$

5) (a) Es gibt eine echte Teilmenge A von M (d.h. $A \neq M$), die linear unabhängig ist.

A: Ja, da alle Vektoren innerhalb von M linear unabhängig sind, muss auch jede echte Teilmenge linear unabhängig sein (lineare Unabhängigkeit kann nur durch hinzufügen von Elementen, nicht durch dessen Entfernung, zerstört werden)

(b) Jede Teilmenge von M ist linear unabhängig.

A: Ja... Begründung siehe oben

(c) Es gibt eine Übermenge A von M (also eine Menge $A \neq M$ mit $M \subseteq A$), die linear unabhängig ist.

A: Sofern die Dimensionen > n bzw. der Vektorraum nicht kleiner als R^(n+1) ist, gibt es so eine Übermenge. Ansonsten nicht.

(d) Jede Übermenge von M ist linear unabhängig.

A: Nein, da man lediglich 2v_n (e.g. {v_1, v_2, ... v_n, 2v_n} hinzufügen müsste und somit die lineare Unabhänigkeit zerstört.

6) (a) Es gibt eine echte Teilmenge von M, die linear abhängig ist.

A: Ja, sofern |M| >= 3

(b) Jede Teilmenge von M ist linear abhängig.

A: Nein, da durch das Entfernen von Elementen eine lineare Hülle entfernt werden könnte

(c) Es gibt eine Übermenge von M, die linear abhängig ist.

A: Jede Übermenge muss linear abhängig sein, da hinzufügen von Elementen in der Menge keine lineare Abhängigkeit aufheben kann (die linearen Hüllen bestehen ja weiterhin)

(d) Jede Übermenge von M ist linear abhängig.

A: Ja, siehe Antwort oben