Tim Petko

MAA2/MAN2 Übung 1

Auszuarbeiten bis 11./12. 3. 2025

1. Geben Sie im Detail jeden Schritt an, den Sie beim Lösen der Gleichung

$$[3]_7^{-2} \cdot x \cdot [4]_7^3 = [5]_7^4 \,.$$

$[3]_7^2 \cdot [5]_7^4 \cdot [4]_7^{-3} = X$

$[2]_7 \cdot [2]_7 \cdot [1]_7 = [4]_7$

   durchführen, und welche der drei Eigenschaften *Assoziativität*, *Existenz eines neutralen Elements* und *Existenz inverser Elemente* einer Gruppe Sie in diesem Schritt benötigen.

2. Wir definieren folgende Operation (die *symmetrische Differenz*) auf Mengen:

$$A \bigtriangleup B := (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

   Rechnen Sie nach, dass für beliebige Menge M die algebraische Struktur $[\mathrm{Pot}(M), \bigtriangleup]$ eine kommutative Gruppe ist. Die Konstruktion über $\mathrm{Pot}(M)$ ist deswegen notwendig, weil wir an dieser Stelle nicht die "Menge aller Mengen" schreiben können, sondern eine wohldefinierte Menge benötigen. Wenn Sie sich leichter damit tun, können Sie auch $M = \{1, 2, 3\}$ verwenden.

   Hinweise: Sie können für die Beantwortung der Frage nach Kommutativität und Assoziativität Mengendiagramme (Venn-Diagramme) verwenden. Im Gegensatz zu den bisherigen ähnlichen Aufgaben können Sie hier allerdings das neutrale Element bzw. die inversen Elemente nicht ausrechnen, sondern müssen ausprobieren, welche Mengen dafür in Frage kommen könnten.

3. Überprüfen Sie, welche der Eigenschaften einer kommutativen Gruppe folgende Verknüpfungen auf den angegebenen Zahlenbereichen haben:

   (a) $a \circ b := a^b$ auf den ganzen Zahlen; ~~assoz~~ neutral = 1

   ~~komm~~ invers = 0

   (b) $a \circ b := a + b + ab$ auf den ganzen Zahlen.

   assoz ✓ komm? neutral = 0 ~~invers~~

   kürzen

4. Berechnen Sie durch Ausprobieren folgende Inversen von Restklassen, falls sie existieren. Gemeint sind hier die Inversen in $\mathbb{Z}_n$ bezüglich der Multiplikation. Beachten Sie, dass $[\mathbb{Z}_n \setminus \{[0]_n\}, \cdot]$ nicht immer eine Gruppe ist, und daher nicht immer Inverse existieren:

$$[3]_7^{-1}, \quad [8]_{12}^{-1}, \quad [8]_9^{-1}, \quad [7]_9^{-1}, \quad [7]_{11}^{-1} \,.$$

$[4]_7$ / ~~$[8]_9$~~ $[4]_9$ $[8]_{11}$

5. Lösen Sie folgende Gleichung für $x \in P_4$:

$$\cancel{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}^2} \circ x \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}^{-3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}^2 .$$

$$X = \cancel{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}^2} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}^3$$

$$\underline{\underline{X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}}$$ ✓