

# MAA2/MAN2 Übung 6

Auszuarbeiten bis 23./24. 4. 2025

1. Berechnen Sie, ob die Menge  $\{v_1, v_2, v_3\}$  linear unabhängig ist oder nicht, für die drei Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Verwenden Sie Ihre Antwort, um die Dimension des Vektorraums anzugeben, der von diesen drei Vektoren aufgespannt wird.

2. Wie Aufgabe 1, für die drei Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. Sei  $\mathbb{R}_2[x]$  die Menge aller reellen Polynome in  $x$  mit Grad maximal zwei.

- (a) Argumentieren Sie, dass Sie jedes Polynom in  $\mathbb{R}_2[x]$  als Linearkombination der drei Polynome  $x^2$ ,  $x$  und  $1$  darstellen können, und warum  $\mathbb{R}_2[x]$  daher ein dreidimensionaler Vektorraum ist.
- (b) Rechnen Sie nach, dass die Menge  $M = \{x^2 + 1, x + 1, x\} \subseteq \mathbb{R}_2[x]$  linear unabhängig ist. Begründen Sie, warum damit  $M$  eine Basis von  $\mathbb{R}_2[x]$  ist.
- (c) Berechnen Sie die Koordinaten des Polynoms  $3x^2 - x + 1$  bezüglich  $M$ .

4. Berechnen Sie die Koordinaten des Vektors  $w$  bezüglich der Basis  $(b_1, b_2)$  des  $\mathbb{R}^2$ , für die Vektoren

$$w = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5. Im Folgenden sei  $f$  eine lineare Funktion, von der Sie wissen, wohin ein oder zwei Vektor(en) abgebildet werden. Berechnen Sie aus dieser Information, wohin ein anderer Vektor abgebildet wird – dazu benötigen Sie nur die beiden Umformungsregeln für lineare Funktionen.

Bei manchen Beispielen ist es nicht möglich, den gesuchten Funktionswert zu bestimmen. Begründen Sie in diesen Fällen, warum es nicht möglich ist:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}\right) = & \text{(b)} \quad f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix}\right) = \\ \text{(c)} \quad f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = 3, \quad f\left(\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = & \text{(d)} \quad f(2) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f(2.5) = \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{(e)} & f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \\ & f\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \end{array} \qquad \text{(f)} \quad f\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$1) v_1 \in L(\{v_2\})?$$

$$\begin{cases} 3 = \lambda 2 \Rightarrow \lambda = 1,5 \\ -2 = \lambda 0 \\ 0 = \lambda 2 \Rightarrow \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{⚡}$$

$$v_3 \in L(\{v_2, v_1\})?$$

$$\begin{cases} 3 = \lambda 2 + \gamma 3 \Rightarrow \underline{3 = 2,5} \\ 7 = \lambda 0 + -2\gamma \Rightarrow \gamma = -0,5 \\ 4 = \lambda 2 + \gamma 0 \Rightarrow \lambda = 2 \end{cases} \text{⚡}$$

lin. unabhängig

Antwort: Der Vektorraum hat eine Dimension von 3

$$2) v_1 \in L(\{v_2\})?$$

$$\begin{cases} 3 = 2\lambda \\ -7 = 0\lambda \Rightarrow \underline{-7=0} \\ 0 = \\ 2 = \end{cases} \text{⚡}$$

$$v_3 \in L(\{v_2, v_1\})?$$

$$\begin{cases} -7 = 2\lambda + 3\gamma \Rightarrow -7=7 \\ -7 = -7\gamma \Rightarrow \gamma = 1 \\ 4 = 2\lambda \Rightarrow \lambda = 2 \\ 0 = 7\lambda + 2\gamma \Rightarrow 0=0 \end{cases} \checkmark$$

lin. abhängig

Antwort: Der Vektorraum hat eine Dimension von 2, da nur zwei linear unabhängige Vektoren gegeben wurden

o.

Antwort: Es kann kein Vektorraum mit diesen Vektoren aufgestellt werden in  $\mathbb{R}^4$ , daher hat er auch keine Dimension

$$3a) \begin{matrix} L_1 \dots \lambda \\ L_2 \dots \gamma \\ L_3 \dots \end{matrix}$$

$$\begin{cases} L_1 x^2 = L_1 x^2 + 0x + 0 \cdot 1 \\ L_2 x = 0x^2 + L_2 x + 0 \cdot 1 \\ L_3 \cdot 1 = 0x^2 + 0x + L_3 \cdot 1 \end{cases} \Rightarrow L_1 x^2 + L_2 x + L_3$$

Die Polynome sind keine linearen Hüllen von einander  
→ können auch als

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ dargestellt werden}$$

$$b) \begin{matrix} v_1 = x^2 + 1 \\ v_2 = x + 1 \\ v_3 = x \end{matrix}$$

$$v_1 \in L(\{v_2\})? \quad \begin{cases} x^2 = \lambda \cdot 0x^2 \\ 1 = \lambda \cdot 1 \end{cases} \text{⚡}$$

$$v_3 \in L(\{v_2, v_1\})?$$

$$\begin{cases} x = \lambda x \Rightarrow \lambda = 1 \\ 0 = \lambda \cdot 1 + \gamma \cdot 1 \Rightarrow \gamma = -1 \\ 0x^2 = \lambda \cdot 0x^2 + \gamma x^2 \Rightarrow \gamma = 0 \end{cases} \text{⚡}$$

lin. unabhängig

Antwort: Es können mit diesen drei Komponenten alle  $\mathbb{R}_2[x]$  gebildet werden  $L(\{v_1, v_2, v_3\}) = \mathbb{R}_2[x]$

Es sind erfüllt: lin. unabhängig  $\{v_1, v_2, v_3\}$

$$c) \text{ Koord. } \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 3x^2 - x + 1 &= \lambda_1(x^2 + 0x + 1) \\ &+ \lambda_2(0x^2 + x + 1) \\ &+ \lambda_3(0x^2 + x + 0) \\ &= \lambda_1 x^2 + (\lambda_2 + \lambda_3)x + \lambda_1 + \lambda_2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 3x^2 = \lambda_1 x^2 \Rightarrow \lambda_1 = 3 \\ -x = (\lambda_2 + \lambda_3)x \Rightarrow \lambda_3 = 1 \\ +1 = \lambda_1 + \lambda_2 \Rightarrow \lambda_2 = -2 \end{cases}$$

$$4) \quad w = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad w = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 = \begin{pmatrix} -2\lambda_2 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_2 = 2 \\ \lambda_1 = 2 \end{matrix}$$

Koordinaten:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$5) \quad (a) \quad f\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow f\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} = -2 f\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \\ = -2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix} =$$

Kann nicht gebildet werden, da durch lineare Umformung keine Verringerung von Vektordimensionen möglich ist

$$(c) \quad f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3, \quad f\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

Kann nicht gebildet werden, da durch lineare Umformung keine Verringerung von Vektordimensionen möglich ist

$$(d) \quad f(2) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f(2.5) = \begin{pmatrix} -2.5 \\ 0 \\ 2.5 \end{pmatrix} \\ \alpha \cdot 2 + b = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} b \in \mathbb{R} \\ \alpha \in \mathbb{R}^3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \alpha_1 2 + b \\ \alpha_2 2 + b \\ \alpha_3 2 + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{Annahme: } b = 0 \\ \alpha = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

$$(e) \quad f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \\ f\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = 1 f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + -3 f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$(f) \quad f\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

Kann nicht gebildet werden, da  $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \notin \mathcal{L}\left(\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right\}\right)$