MAA2/MAN2 Übung 11

Auszuarbeiten bis 27./28. 5. 2025

1. Berechnen Sie alle Lösungen des folgenden linearen Gleichungssystems, das schon in oberer Dreiecksform vorliegt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Berechnen Sie den Kern der folgenden linearen Funktion:

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + 2x_2 + 2x_4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 \\ 3x_2 + 3x_3 + 5x_4 \end{pmatrix}.$$

3. Wir nehmen an, dass die Musterlösung eines linearen Gleichungssystems die Form $v_0 + \lambda v_1 + \mu v_2$ hat. Ein Student löst dieses Gleichungssystem, und erhält $w_0 + \alpha w_1 + \beta w_2$. Erklären Sie, wie er feststellen kann, ob seine Lösung (eine lineare Mannigfaltigkeit) die gleiche lineare Mannigfaltigkeit beschreibt wie die Musterlösung.

4. Sei $v_0 + \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$ die lineare Mannigfaltigkeit, die eine Lösung eines linearen Gleichungssystems ist. Erklären Sie (wie Sie wollen, mit oder ohne formalem Beweis), warum die Menge $\{v_1, \ldots, v_n\}$ linear unabhängig ist, wenn die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ über das Gaußsche Eliminationsverfahren bestimmt wurden.

5. Berechnen Sie die inverse Matrix zu folgender Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$