MAA2/MAN2 Übung 5

Auszuarbeiten bis 8./9. 4. 2025

1. Rechnen Sie nach, ob der Vektor w in der linearen Hülle $L(\{v\})$ des Vektors v liegt, für die beiden Vektoren

   (a) $w = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

   (b) $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix}$

   (c) $w = 2x^2 + 2$, $v = x^2 + 1$

   (d) $w = 2x^2 + 2$, $v = x^2 + 2$

   Hinweis: Ein Vektor w liegt in der linearen Hülle $L(\{v\}) := \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ eines Vektors v, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt, für das $w = \lambda v$ gilt. Wenn v und w Tupel sind, dann führt diese *eine* Gleichung für Tupel zu einem System von Gleichungen für reelle Zahlen (wie in der Vorlesung gezeigt: jeder Eintrag im Tupel liefert eine Gleichung). Diese Überlegung führt bei den Punkten (a) und (b) zu Gleichungssystemen mit 2 bzw. 4 Zeilen.

   Überlegen Sie für die Punkte (c) und (d), wie Sie die Gleichung $w = \lambda v$ für zwei Polynome v und w in ein Gleichungssystem umwandeln können. Sie müssen dazu die Frage beantworten, wie Gleichheit auf Polynomen definiert ist.

2. Ähnlich zu Aufgabe 1: Rechnen Sie nach, dass der Vektor w in der linearen Hülle $L(\{v_1, v_2\})$ der beiden Vektoren v_1 und v_2 liegt, für die drei Vektoren

   (a) $w = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

   (b) $w = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

   Hinweis zu (b): So kann man nachrechnen, dass ein beliebiger Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ in der linearen Hülle zweier Vektoren liegt; somit gilt für diese Vektoren v_1 und v_2, dass $\mathbb{R}^2 = L(\{v_1, v_2\})$ ist.

3. Keine der folgenden Mengen ist ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^2$. Begründen Sie, warum das so ist. Geben Sie also für jede dieser Mengen konkrete Elemente (also Vektoren) an, die – mit einem Skalar multipliziert, oder zueinandert addiert – dann nicht mehr in dieser Menge liegen. Damit ist dann eine Bedingung eines Untervektorräums verletzt.

   (a) $\left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

   (b) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 2x + 4y = 6 \right\}$

   (c) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \cdot y \leq 0 \right\}$

4. Geben Sie für jeden der vier Vektoren v in Aufgabe 1 jeweils zwei Vektoren an, die

   (a) *schon* in der linearen Hülle $L(\{v\})$ dieses Vektors liegen, bzw.

   (b) *nicht* in der linearen Hülle $L(\{v\})$ dieses Vektors liegen.