MAA2/MAN2 Übung 12

Auszuarbeiten bis 3./4. 6. 2025

1. Beweisen Sie (durch Einsetzen in die Definition) oder widerlegen Sie (durch Angabe eines Gegenbeispiels) jede der folgenden Aussagen über Skalarprodukte. Dabei sei u, v und w Vektoren, λ und μ Skalare, und v^2 definiert als $v^2 := v \cdot v$.
   (a) $v \cdot w = w \cdot v$
   (b) $\sqrt{v^2} = v$
   (c) $\|v\|^2 = v^2$
2. Wie Aufgabe 1, für die Aussagen
   (a) $u \cdot v = u \cdot w \Rightarrow v = w$
   (b) $(\lambda v) \cdot (\mu w) = \lambda\mu(v \cdot w)$
   (c) $\|\lambda w\| = |\lambda| \|w\|$
3. Gegeben seien die beiden Vektoren $v = (-2, 4, 2, 0)$ und $w = (1, 1, -3, -2)$. Berechnen Sie:
   $$v \cdot w, \quad \|v\|, \quad \|v - w\|, \quad \text{Winkel zwischen } v \text{ und } w.$$
4. Berechnen Sie den Winkel zwischen der Diagonalen $(1, 1, \ldots, 1)$ und dem ersten Vektor $(1, 0, \ldots, 0)$ der Standardbasis in zwei, drei und n Dimensionen. Argumentieren Sie, dass dieser Winkel umso größer wird, je größer n ist.
5. Rechnen Sie für beliebig aber fixe Vektoren v und w nach, dass der Punkt $\text{proj}_w(v)$ derjenige Punkt von w ist, der von v den geringsten Abstand hat.

   Gehen Sie dabei so vor: Schreiben Sie für beliebiges λ den Abstand von λw und v an, nehmen diesen zum Quadrat (damit die Wurzel wegfällt; man kann sich überlegen, dass das die Lage des Minimums nicht verändert), und bestimmen Sie ein Minimum für den dann erhaltenen Ausdruck (bei dem nur λ als Variable vorkommt, v und w sind ja fix).

   Zur Bestimmung des Minimums müssen Sie diese Funktion von λ ableiten, und die Ableitung Null setzen. So ein Vorgehen haben wir weder in der Vorlesung noch in den Übungen durchbesprochen, den meisten von Ihnen ist es aber vermutlich als Zentralmatura-Stoff noch in Erinnerung.