MAS3/GST3 Übung 4

Auszuarbeiten bis 4. bzw. 6. 11. 2025

1. Wir betrachten einen diagnostischen Test für eine Krankheit. Dieser Test habe Sensitivität 99% und Spezifizität 98%. Weiters sei die Prävalenz der Krankheit in der Bevölkerung 0.5%.

   Wenn bei einer Person ein Test positiv ist, wie wahrscheinlich ist es, dass diese Person wirklich erkrankt ist? Wenn der Test negativ ist, wie wahrscheinlich ist es, dass diese Person wirklich gesund ist?

   Lösen Sie diese Aufgabenstellung zweimal, und zwar

   (a) einmal über ein Baum-Diagramm, wie in der Vorlesung vom 23.10. gezeigt, und
   (b) einmal mit dem Satz von Bayes.

2. [Beispielquelle: ChatGPT] In einer Großstadt behauptet eine Fahrgemeinschaft, ihr Hund könne Staus für den nächsten Morgen vorhersagen: Wenn es am nächsten Morgen einen Stau geben wird, heult der Hund am Abend zuvor oft lang. Aus der Historie weiß man:

   - An 30% der Werktage gibt es morgens Stau.
   - In 90% der Stau-Fälle heult der Hund am Vorabend.
   - In 85% der staufreien Fälle heult der Hund am Vorabend nicht.

   Verwenden Sie den Satz von Bayes oder ein Baumdiagramm, um folgende Fragen zu beantworten:

   (a) Heult der Hund am Abend, wie wahrscheinlich ist am nächsten Morgen Stau?
   (b) Heult der Hund nicht, wie wahrscheinlich ist es dann, dass es am nächsten Morgen keinen Stau gibt?

3. Gegeben sei ein Ereignisraum $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_{10}\}$ mit unten angegebenen Wahrscheinlichkeiten $P(\{\omega\})$, sowie der ZV $Z : \Omega \to \mathbb{N}_0$:

ω	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8	ω_9	ω_{10}
$P(\{\omega\})$	0.1	0.14	0.19	0.07	0.08	0.01	0.11	0.14	0.09	0.07
$Z(\omega)$	1	4	7	4	1	5	2	2	4	5

   Die letzte Zeile gibt also an, auf welche Zahlen die ZV Z die jeweiligen Elementarereignisse abbildet. Wie in der Vorlesung illustriert, werden dadurch auch die Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse mit auf den Wertebereich der Zufallsvariablen abgebildet; so erhält man die Wahrscheinlichkeiten in diesem Wertebereich (in unserem Fall also die Zahlen 1, 2, 4, 5 und 7).

   Bestimmen Sie diese Wahrscheinlichkeiten, also die Wahrscheinlichkeitsfunktion f_Z der ZV Z, oder anders ausgedrückt, die Werte von $P(Z = k)$ bzw. $P(\{Z = k\})$ – alles verschiedene Notationen für dieselben Zahlen.

4. Ein Würfel werde zweimal geworfen. Geben Sie für jede der beiden folgenden ZV die Verteilung dieser ZV an:

   (a) Y gibt das Produkt der Augen an, die auf den beiden Würfeln zu sehen sind; es ist $Y(2,4) = 8$.

   (b) Z gibt die Anzahl der echten Teiler der Augensumme an (also wieviele Teiler ungleich eins und der Zahl selbst die Augensumme hat); es ist $Z(2,4) = 2$, da 2 und 3 die einzigen echten Teiler der Augensumme 6 sind.

5. Wie beim letzten Beispiel werde ein Würfel zweimal geworfen. Bestimmen Sie die Verteilung der Zufallsvariablen, die die Differenz (als Absolutbetrag) der geworfenen Augen der beiden Würfel angibt (also eine Werte 0 bis 5 annehmen kann).

6. Ein Würfel wird solange geworfen, bis zum ersten Mal ein Sechser auftritt. Die ZV X gebe an, beim wievielten Wurf dies passiert. Geben Sie die Verteilung von X über eine Formel an. Beachten Sie dazu besonders, was der Wertebereich von X in diesem Beispiel ist.

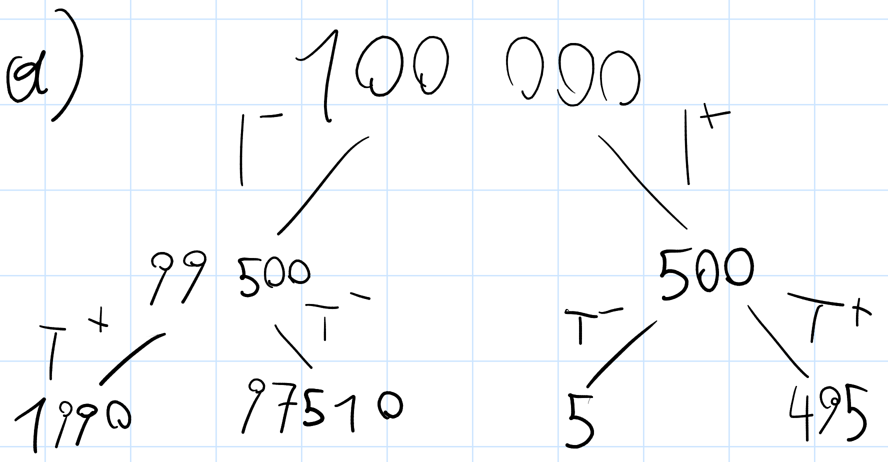
1) $P(T^+|I^+) = 99\%$ $\quad P(I^+) = 0{,}5\%$

$P(T^-|I^-) = 98\%$ $\quad P(T^+) = 99\% \cdot 0{,}5\% + 2\% \cdot 99{,}5\% = 2{,}485\%$

b) $P(I^+|T^+) = \frac{P(T^+|I^+) \cdot P(I^+)}{P(T^+)} = \frac{99\% \cdot 0{,}5\%}{2{,}485\%} \approx 19{,}92\%$

$P(I^-|T^-) = \frac{98\% \cdot 99{,}5\%}{97{,}515\%} \approx 99{,}995\%$

c)



$P(I^+|T^+) = \frac{495}{495+1990} \approx 19{,}92\%$

$P(I^-|T^-) = \frac{97510}{97510+5} \approx 99{,}995\%$

2) $P(S) = 30\%$ $\quad$ a) $P(S|H) = \frac{P(H|S) \cdot P(S)}{P(H)} = \frac{90\% \cdot 30\%}{37{,}5\%} = 72\%$

$P(H|S) = 90\%$

$P(\bar{H}|\bar{S}) = 85\% \Rightarrow P(H|\bar{S}) = 15\%$

$P(H) = 90\% \cdot 30\% + 15\% \cdot 70\% = 37{,}5\%$

b) $P(\bar{S}|\bar{H}) = \frac{P(\bar{H}|\bar{S}) \cdot P(\bar{S})}{P(\bar{H})} = \frac{85\% \cdot 70\%}{62{,}5\%} = 95{,}2\%$

3)

ω	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8	ω_9	ω_{10}
$P(\{\omega\})$	0.1	0.14	0.19	0.07	0.08	0.01	0.11	0.14	0.09	0.07
$Z(\omega)$	1	4	7	4	1	5	2	2	4	5

$P(Z=1) = 0{,}1 + 0{,}08 = 18\%$

$P(Z=2) = 0{,}11 + 0{,}14 = 25\%$

$P(Z=4) = 0{,}14 + 0{,}07 + 0{,}09 = 30\%$

$P(Z=5) = 0{,}01 + 0{,}07 = 8\%$

$P(Z=7) = 0{,}19 = 19\%$

4a)

k	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	16	18	20	24	25	30	36
	1x1	1x2 2x1	1x3 3x1	1x4 2x2 4x1	1x5 5x1	1x6 2x3 3x2 6x1	2x4 4x2	3x3	2x5 5x2	2x6 3x4 4x3 6x2	3x5 5x3	4x4	3x6 6x3	4x5 5x4	4x6 6x4	5x5	5x6 6x5	6x6
$f_Y(k)$	1/36	2/36	2/36	3/36	2/36	4/36	2/36	1/36	2/36	4/36	2/36	1/36	2/36	2/36	2/36	1/36	2/36	1/36

b)

k		$f_Z(k)$
0	1+1, 1+2, 2+1, 1+4, 4+1, 1+6, 6+1, 2+3, 3+2, 2+5, 5+2, 3+4, 4+3, 5+6, 6+5	15/36
1	1+3, 3+1, 2+2, 2+6, 6+2, 3+5, 5+3, 3+6, 6+3, 4+4, 4+5, 5+4,	12/36
2	1+5, 5+1, 2+4, 4+2, 3+3, 4+6, 6+4, 5+5	8/36
3	6+6	1/36

5)

k		$f_Z(k)$
0	1-1, 2-2, 3-3, 4-4, 5-5, 6-6	$6/36$
1	1-2, 2-3, 3-4, 5-6, 6-5, 5-4, 4-5, 4-3, 3-2, 2-1	$10/36$
2	1-3, 2-4, 3-5, 4-6, 6-4, 5-3, 4-2, 3-1	$8/36$
3	1-4, 2-5, 3-6, 6-3, 5-2, 4-1	$6/36$
4	1-5, 2-6, 6-2, 5-1	$4/36$
5	1-6, 6-1	$2/36$

6)

$p = 1/6$ $\quad$ k... Anzahl Würfe bis 6

$$f_X(k) = \underbrace{(1-p)^{k-1}}_{\text{Ziehe k-1 Karten, die keine 6 sind}} \cdot \underbrace{p}_{\text{die k-te Karte ist 6}} = \frac{5^{k-1}}{6^{k-1}} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5^{k-1}}{6^k} \qquad X \in \mathbb{N}_0 \leftarrow \mathbb{N} \text{ ohne } 0$$

$$f_X(1) = \frac{1}{6} = \underbrace{\left(\frac{5}{6}\right)^0}_{1} \cdot \frac{1}{6}$$