MAA2/MAN2 Übung 4

Auszuarbeiten bis 1./2. 4. 2025

1. Berechnen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^3 = [27, \pi]$. Machen Sie auch eine Skizze, in der Sie die Lösungen einzeichnen.

2. Berechnen Sie den Quotienten und Rest bei Division des Polynoms P durch das Polynom Q, für

   (a) $P = 3x^6 + 2x^5 + 2x^4 - x + 2$ und $Q = x^4 + x^2 + 2x$

   (b) $P = [3]_7 x^3 + [2]_7 x + [1]_7$ und $Q = [5]_7 x + [4]_7$.

3. Gegeben sei die Polynomfunktion $P(x) = x^5 - 4x^4 - 2x^3 + 14x^2 - 3x + 18$. Durch Einsetzen können Sie feststellen, dass $\alpha = 3$ und $\alpha = i$ Nullstellen von $P(x)$ sind. Berechnen Sie die anderen Nullstellen von $P(x)$.

   Hinweis: Wenn $\alpha = a + ib$ eine komplexe Nullstelle einer *reellen* Polynomfunktion $P(x)$ ist (wie in diesem Beispiel der Fall), dann ist auch die zu α *konjugiert komplexe Zahl* $\overline{\alpha} := a - ib$ eine Nullstelle von $P(x)$. Für quadratische Polynome mit reellen Koeffizienten kann man diese Tatsache an der Struktur der Lösungsformel ablesen (siehe etwa die Mitschrift vom 18.3.); diese Tatsache gilt auch allgemein für reelle Polynomfunktionen beliebigen Grades. Dies wird etwa in Aufgaben 4 bis 6 bewiesen.

   Mit dieser Tatsache kennen Sie somit eine weitere Nullstelle von $P(x)$. Weiters können Sie zuerst alle Faktoren $(x - \alpha_i)$ für Nullstellen α_i multiplizieren, und damit diese Aufgabe mit nur *einer* Polynomdivision lösen.

4. Wie in Aufgabe 3 verwenden wir die Notation $\overline{z} := a - ib$ für die zu $z = a + ib$ konjugiert komplexe Zahl.

   Rechnen Sie folgende einfache Aussagen über Rechenoperationen für konjugiert komplexe Zahlen nach, indem Sie $z_1 = a_1 + ib_1$ und $z_2 = a_2 + ib_2$ schreiben:

   (a) $\overline{z_1} + \overline{z_2} = \overline{z_1 + z_2}$

   (b) $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_1 \cdot z_2}$

5. Wie Aufgabe 4, für die Aussagen

   (a) $a \in \mathbb{R} \Rightarrow \overline{a} = a$

   (b) $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \overline{z}^n = \overline{z^n}$

   Bei Punkt (b) ist es sinnvoll, $z = [r, \varphi]$ in Polarkoordinaten zu schreiben, und sich zu überlegen, was die konjugiert komplexe Zahl $\overline{z}$ in Polarkoordinaten ist.

6. Vervollständigen Sie folgenden Beweis der Tatsache, dass komplexe Nullstellen reeller Polynomfunktionen immer paarweise auftreten: Wenn ξ eine komplexe Nullstelle ist, dann ist auch die $\overline{\xi}$ eine Nullstelle. Zur leichteren Unterscheidung zwischen den

Koeffizienten a_k und den Nullstellen verwende ich hier ξ und nicht α als Bezeichnung der Nullstelle.

$$\begin{aligned}
&\textit{wir wissen} && a_n\xi^n + a_{n-1}\xi^{n-1} + \cdots + a_1\xi + a_0 = 0 \\
&\textit{wir wissen} && \forall_{1\leq k\leq n} a_k \in \mathbb{R} \\
&\textit{zu zeigen} && a_n\overline{\xi}^n + a_{n-1}\overline{\xi}^{n-1} + \cdots + a_1\overline{\xi} + a_0 = 0 \\
&\textit{wir wissen} && a_n\overline{\xi}^n + a_{n-1}\overline{\xi}^{n-1} + \cdots + a_1\overline{\xi} + a_0 =
\end{aligned}$$

[weiter mit den Ergebnissen von Aufgaben 4 und 5]

$$a_n\overline{\xi^n} + a_{n-1}\overline{\xi^{n-1}} + \cdots + a_1\overline{\xi} + a_0 = 0 \quad |5b$$

$$= \overline{a_n\xi^n} + \overline{a_{n-1}\xi^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1\xi} + \overline{a_0} = 0 \quad |5a+4b$$

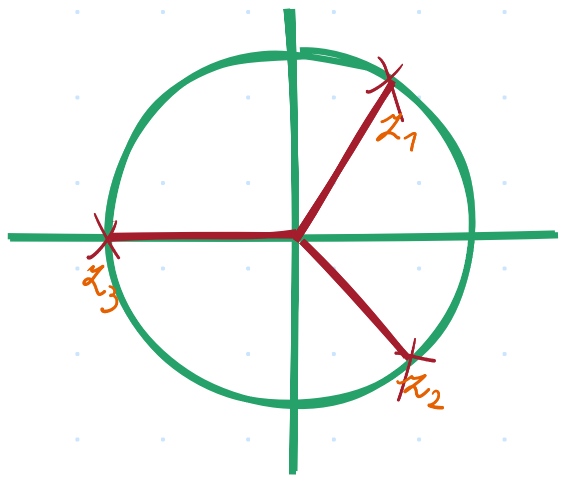
$$= \overline{a_n\xi^n + a_{n-1}\xi^{n-1} + \cdots + a_1\xi + a_0} = \overline{0} \quad |4a$$

$$= 0 = a_n\xi^n + a_{n-1}\xi^{n-1} + \cdots + a_1\xi + a_0 = 0$$

1) $z_1 = \left[\sqrt[3]{27}, \frac{\pi}{3}\right]$

$z_2 = \left[\sqrt[3]{27}, \frac{5\pi}{3}\right]$

$z_3 = [3, \pi]$



2) (a) $P = 3x^6 + 2x^5 + 2x^4 - x + 2$ und $Q = x^4 + x^2 + 2x$ $= 3x^2 + 2x - 1$

$-3x^6 \quad -3x^4 \quad -6x^2$

$2x^5 - x^4 - 6x^2 - x + 2$

$-2x^5 - x^4 - 2x^3 - 6x^2 - x + 2$

$-x^4 - 2x^3 - 6x^2 - x + 2$

$+x^4 \quad + x^2 + 2x$

$-2x^3 - 5x^2 + x + 2$

(b) $P = [3]_7x^3 + [2]_7x + [1]_7$ und $Q = [5]_7x + [4]_7$. $= [2]_7x^2 - [3]_7x + [0]_7$

$-[3]_7x^3$

$-[1]_7x^2$

$-[1]_7x^2 + [2]_7x + [1]_7$

$+[1]_7x^2 + [5]_7x$

$[0]_7x + [1]_7$

$-[0]_7x - [0]_7$

$[1]_7$

4) (a) $\overline{z_1} + \overline{z_2} = \overline{z_1 + z_2}$

$(a_1 - ib_1) + (a_2 - ib_2) = a_1 + a_2 - (ib_1 + ib_2) = a_1 + a_2 - ib_1 - ib_2$

(b) $\underbrace{\overline{z_1} \cdot \overline{z_2}}_{1} = \underbrace{\overline{z_1 \cdot z_2}}_{2}$

1: $(a_1 - ib_1) \cdot (a_2 - ib_2) = a_1a_2 - ib_2a_1 - ib_1a_2 - b_1b_2$ $=$

2: $\overline{(a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2)} = \overline{a_1a_2 - b_1b_2 + ib_2a_1 + ib_1a_2} = a_1a_2 - b_1b_2 - ib_2a_1 - ib_1a_2$

5) (a) $\underbrace{a}_{\Rightarrow +0i} \in \mathbb{R} \Rightarrow \overline{a} = a$ $\Big\}$ $a + 0i = \overline{a + 0i} = a - 0i$

(b) $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \overline{z}^n = \overline{z^n}$

1: $\overline{[r, \varphi]}^n = [r, -\varphi]^n = [r^n, -n\varphi]$

2: $\overline{[r, \varphi]^n} = \overline{[r^n, n\varphi]} = [r^n, -n\varphi]$ $=$

3) $a_1 = 3$

$a_2 = i$

$a_3 = -i$

Gesamtfaktoren: $(x-3)\underbrace{(x-i)(x+i)}_{x^2+1}$

$= x^3 + x - 3x^2 - 3 = \underline{\underline{x^3 - 3x^2 + x - 3}}$

$P(x) = x^5 - 4x^4 - 2x^3 + 14x^2 - 3x + 18. : x^3 - 3x^2 + x - 3 = \underline{\underline{x^2 - x - 6}}$

$$
\begin{array}{l}
-x^5 + 3x^4 - x^3 + 3x^2 \\
\hline
-x^4 - 3x^3 + 17x^2 - 3x + 18 \\
+x^4 - 3x^3 + x^2 - 3x \\
\hline
-6x^3 + 18x^2 - 6x + 18 \\
+6x^3 - 18x^2 + 6x - 18 \\
\hline
\underline{\underline{0}}
\end{array}
$$

$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6}$

$\underline{\underline{x_1}} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = \frac{6}{2} = \underline{\underline{3}}$

$\underline{\underline{x_2}} = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -\frac{4}{2} = \underline{\underline{-2}}$

pq-Formel