LGI1/MAG1 Übung 2

Auszuarbeiten bis 21. 10. 2025

1. Rechnen Sie mit den Transformationsregeln aus Satz 2.2 im Skriptum die Gleichwertigkeit der folgenden Aussagen nach. Formen Sie also die linke in die rechte Seite um; hier sind bereits viele nicht benötigte Klammern weggelassen worden:

   (a) $\neg(A \wedge \neg B) \vee (B \wedge (A \vee C)) \equiv \neg A \vee B$

   (b) $(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) \wedge (A \vee C) \equiv A$

2. Vereinfachen Sie so weit wie möglich, wiederum unter Verwendung der Transformationsregeln aus Satz 2.2 im Skriptum.

   (a) $\neg(x \vee y) \vee ((x \wedge y) \vee x)$

   (b) $((\neg x \wedge y) \vee x) \wedge ((x \wedge y) \vee x)$

3. Versuchen Sie, die über die folgenden Wahrheitstabellen definierten Funktionen der atomaren Aussagen A, B und C durch die Junktoren $\neg$, $\wedge$ und $\vee$ auszudrücken:

A	B	$f_1(A,B)$
f	f	f
f	w	w
w	f	f
w	w	f

A	B	C	$f_2(A,B,C)$
f	f	f	f
f	f	w	w
f	w	f	f
f	w	w	w
w	f	f	f
w	f	w	f
w	w	f	w
w	w	w	f

   Hinweis: Diese Aufgabenstellung wurde nicht in der Vorlesung durchbesprochen. Es geht um das kreative Ausprobieren von Ideen.

4. Versuchen Sie einen ternären Junktor ‘`IF` $\square$ `THEN` $\square$ `ELSE` $\square$’ – also einen Junktor mit drei (!) Argumenten, hier durch $\square$ ausgedrückt – zu definieren. Dieser soll so funktionieren: Falls in der Aussage `IF` c `THEN` x `ELSE` y die Variable c wahr ist, hat die ganze Aussage den gleichen Wahrheitswert wie x. Falls c falsch ist, hat die gesamte Aussage den gleichen Wert wie y. So gelten etwa `IF w THEN f ELSE w` $\equiv$ `f` und `IF f THEN f ELSE w` $\equiv$ `w`.

   Definieren Sie diesen Junktor, indem Sie seine Wertetabelle aufstellen.

5. Eine *dreiwertige Logik* besitzt drei mögliche Wahrheitswerte. In einer solchen dreiwertigen Logik sei der dritte Wahrheitswert (neben `w` und `f`) “unbekannt” `u`. Die Interpretation von `u` sei so, dass dieser Wert `w` oder `f` sein kann, man aber nicht weiß, welcher.

   Aus dieser Interpretation heraus ergeben sich folgende Wahrheitstabellen für die Junktoren “$\neg$”, “ $\wedge$ ” und “ $\vee$ ”:

x	$(\neg x)$
w	f
u	u
f	w

x	y	$(x \wedge y)$	$(x \vee y)$
f	f	f	f
f	u	f	u
f	w	f	w
u	f	f	u
u	u	u	u
u	w	u	w
w	f	f	w
w	u	u	w
w	w	w	w

Es ist etwa ($\mathtt{f} \wedge \mathtt{u}$) gleich f, da sowohl ($\mathtt{f} \wedge \mathtt{f}$) und ($\mathtt{f} \wedge \mathtt{w}$) zu f evaluieren. Andererseits ist ($\mathtt{u} \wedge \mathtt{w}$) gleich u, da ($\mathtt{w} \wedge \mathtt{w}$) gleich w, aber ($\mathtt{f} \wedge \mathtt{w}$) gleich f ist.

Konstruieren Sie mit dieser Interpretation von u die Wertetabelle für $(x \Rightarrow y)$. In der "normalen" Aussagenlogik ist $(x \Rightarrow y)$ gleichwertig mit $(\neg x \vee y)$; gilt dies auch in der hier definierten dreiwertigen Logik?

1a) $\neg(A\land\neg B)\lor(B\land(A\lor C)) \equiv \underbrace{\neg(A\land\neg B)}_{\neg A \lor B}\lor((B\land A)\lor(B\land C)) \equiv \neg A\lor \underbrace{B\lor\underbrace{(B\land A)}_{B}\lor(B\land C)}_{B}$

$\neg A \lor B \lor (B\land A)\lor(B\land C)$

$\equiv \neg A \lor B$

b) $(A\lor B)\land(A\lor\neg B)\land(A\lor C) \equiv A\lor(B\land\neg B\land C) \equiv A\lor(f\land C) \equiv A\lor f \equiv A$

Distr. Kompl. Invar. Neutr.

2a) $\underbrace{\neg(x\lor y)}_{\neg x\land\neg y}\lor\underbrace{((x\land y)\lor x)}_{x} \equiv (\neg x\land\neg y)\lor x \equiv \underbrace{(x\lor\neg x)}_{w}\land(x\lor\neg y) \equiv x\lor\neg y$

b) $\underbrace{((\neg x\land y)\lor x)}_{(x\lor\neg x)\land(x\lor y)}\land\underbrace{((x\land y)\lor x)}_{x} \equiv (\underbrace{(x\lor\neg x)}_{w}\land(x\lor y))\land x \equiv (x\lor y)\land x \equiv x$

3a) $f_1(A,B) = \neg A\land B$ ← Wahrheitstabelle

b) $f_2(A,B,C) = f_1(A,C)\lor(A\land B\land\neg C) = (\neg A\land C)\lor(A\land B\land\neg C)$

$\equiv \underbrace{(\neg A\lor A)}_{w}\land\underbrace{(\neg A\lor B)\land(\neg A\lor\neg C)}_{\neg A\land(B\lor\neg C)}\ \neg(A\land C)\land\underbrace{(C\lor A)\land(C\lor B)}_{C\land(A\lor B)}\land\underbrace{(C\lor\neg C)}_{w}$

$\equiv (\neg A\lor(B\land\neg C))\land(C\lor(A\land B))$

4) $f(c,x,y) = (c\land x)\lor(\neg c\land y)$

5)

x	y	$x\Rightarrow y$	$\neg x\lor y$
f	f	w	w
f	u	w	w
f	w	w	w
u	f	u	u
u	u	u	u
u	w	w	w
w	f	f	f
w	u	u	u
w	w	w	w

$\Rightarrow (x\Rightarrow y)\equiv(\neg x\lor y)$