# MAA2/MAN2 Übung 4

Auszuarbeiten bis 1./2. 4. 2025

1. Berechnen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^3 = [27, \pi]$. Machen Sie auch eine Skizze, in der Sie die Lösungen einzeichnen.

2. Berechnen Sie den Quotienten und Rest bei Division des Polynoms $P$ durch das Polynom $Q$, für

   (a) $P = 3x^6 + 2x^5 + 2x^4 - x + 2$ und $Q = x^4 + x^2 + 2x$

   (b) $P = [3]_7 x^3 + [2]_7 x + [1]_7$ und $Q = [5]_7 x + [4]_7$.

3. Gegeben sei die Polynomfunktion $P(x) = x^5 - 4x^4 - 2x^3 + 14x^2 - 3x + 18$. Durch Einsetzen können Sie feststellen, dass $\alpha = 3$ und $\alpha = i$ Nullstellen von $P(x)$ sind. Berechnen Sie die anderen Nullstellen von $P(x)$.

   Hinweis: Wenn $\alpha = a + ib$ eine komplexe Nullstelle einer *reellen* Polynomfunktion $P(x)$ ist (wie in diesem Beispiel der Fall), dann ist auch die zu $\alpha$ *konjugiert komplexe Zahl* $\overline{\alpha} := a - ib$ eine Nullstelle von $P(x)$. Für quadratische Polynome mit reellen Koeffizienten kann man diese Tatsache an der Struktur der Lösungsformel ablesen (siehe etwa die Mitschrift vom 18.3.); diese Tatsache gilt auch allgemein für reelle Polynomfunktionen beliebigen Grades. Dies wird etwa in Aufgaben 4 bis 6 bewiesen.

   Mit dieser Tatsache kennen Sie somit eine weitere Nullstelle von $P(x)$. Weiters können Sie zuerst alle Faktoren $(x - \alpha_i)$ für Nullstellen $\alpha_i$ multiplizieren, und damit diese Aufgabe mit nur *einer* Polynomdivision lösen.

4. Wie in Aufgabe 3 verwenden wir die Notation $\bar{z} := a - ib$ für die zu $z = a + ib$ konjugiert komplexe Zahl.

   Rechnen Sie folgende einfache Aussagen über Rechenoperationen für konjugiert komplexe Zahlen nach, indem Sie $z_1 = a_1 + ib_1$ und $z_2 = a_2 + ib_2$ schreiben:

   (a) $\overline{z_1} + \overline{z_2} = \overline{z_1 + z_2}$

   (b) $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_1 \cdot z_2}$

5. Wie Aufgabe 4, für die Aussagen

   (a) $a \in \mathbb{R} \Rightarrow \overline{a} = a$

   (b) $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \overline{z}^n = \overline{z^n}$

   Bei Punkt (b) ist es sinnvoll, $z = [r, \varphi]$ in Polarkoordinaten zu schreiben, und sich zu überlegen, was die konjugiert komplexe Zahl $\overline{z}$ in Polarkoordinaten ist.

6. Vervollständigen Sie folgenden Beweis der Tatsache, dass komplexe Nullstellen reeller Polynomfunktionen immer paarweise auftreten: Wenn $\xi$ eine komplexe Nullstelle ist, dann ist auch die $\overline{\xi}$ eine Nullstelle. Zur leichteren Unterscheidung zwischen den

Koeffizienten $a_k$ und den Nullstellen verwende ich hier $\xi$ und nicht $\alpha$ als Bezeichnung der Nullstelle.

$$\begin{aligned}
&\textit{wir wissen} && a_n\xi^n + a_{n-1}\xi^{n-1} + \cdots + a_1\xi + a_0 = 0 \\
&\textit{wir wissen} && \underset{1\le k\le n}{\forall} a_k \in \mathbb{R} \\
&\textit{zu zeigen} && a_n\overline{\xi}^n + a_{n-1}\overline{\xi}^{n-1} + \cdots + a_1\overline{\xi} + a_0 = 0 \\
&\textit{wir wissen} && a_n\overline{\xi}^n + a_{n-1}\overline{\xi}^{n-1} + \cdots + a_1\overline{\xi} + a_0 =
\end{aligned}$$

[weiter mit den Ergebnissen von Aufgaben 4 und 5]