MAA2/MAN2 Übung 5

Auszuarbeiten bis 8./9. 4. 2025

1. Rechnen Sie nach, ob der Vektor w in der linearen Hülle $L(\{v\})$ des Vektors v liegt, für die beiden Vektoren

   (a) $w = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

   (b) $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix}$

   (c) $w = 2x^2 + 2$, $v = x^2 + 1$

   (d) $w = 2x^2 + 2$, $v = x^2 + 2$

   Hinweis: Ein Vektor w liegt in der linearen Hülle $L(\{v\}) := \{\lambda v \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\}$ eines Vektors v, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt, für das $w = \lambda v$ gilt. Wenn v und w Tupel sind, dann führt diese *eine* Gleichung für Tupel zu einem System von Gleichungen für reelle Zahlen (wie in der Vorlesung gezeigt: jeder Eintrag im Tupel liefert eine Gleichung). Diese Überlegung führt bei den Punkten (a) und (b) zu Gleichungssystemen mit 2 bzw. 4 Zeilen.

   Überlegen Sie für die Punkte (c) und (d), wie Sie die Gleichung $w = \lambda v$ für zwei Polynome v und w in ein Gleichungssystem umwandeln können. Sie müssen dazu die Frage beantworten, wie Gleichheit auf Polynomen definiert ist.

2. Ähnlich zu Aufgabe 1: Rechnen Sie nach, dass der Vektor w in der linearen Hülle $L(\{v_1, v_2\})$ der beiden Vektoren v_1 und v_2 liegt, für die drei Vektoren

   (a) $w = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

   (b) $w = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

   Hinweis zu (b): So kann man nachrechnen, dass ein beliebiger Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ in der linearen Hülle zweier Vektoren liegt; somit gilt für diese Vektoren v_1 und v_2, dass $\mathbb{R}^2 = L(\{v_1, v_2\})$ ist.

3. Keine der folgenden Mengen ist ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^2$. Begründen Sie, warum das so ist. Geben Sie also für jede dieser Mengen konkrete Elemente (also Vektoren) an, die – mit einem Skalar multipliziert, oder zueinandert addiert – dann nicht mehr in dieser Menge liegen. Damit ist dann eine Bedingung eines Untervektorräums verletzt.

   (a) $\left\{\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$

   (b) $\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 2x + 4y = 6\right\}$

   (c) $\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \cdot y \leq 0\right\}$

4. Geben Sie für jeden der vier Vektoren v in Aufgabe 1 jeweils zwei Vektoren an, die

   (a) *schon* in der linearen Hülle $L(\{v\})$ dieses Vektors liegen, bzw.

   (b) *nicht* in der linearen Hülle $L(\{v\})$ dieses Vektors liegen.

4a) $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \end{pmatrix}$	$v = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 12 \\ -18 \end{pmatrix}$	$v = x^2+1$ $\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}, -3x^2-3$	$v = x^2+2$ $\frac{x^2}{2}+1, -3x^2-6$
b) $\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$27x^2-5, -2x^2+10$	$27x^2-5, -2x^2+10$

1a) $w = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$3 = 0\lambda$ ↯

$4 = \lambda$

b) $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix}$

$1 = -3\lambda$

$0 = 0\lambda$

$2 = -6\lambda \Rightarrow \underline{\underline{\lambda = -3}}$ ✓

$-3 = 9\lambda$

c) $w = 2x^2 + 2, v = x^2 + 1$

$2x^2 = \lambda x^2$

$2 = \lambda 1$

$\Rightarrow \underline{\underline{\lambda = 2}}$ ✓

d) $w = 2x^2 + 2, v = x^2 + 2$

$2x^2 = \lambda x^2 \Rightarrow \lambda = 2$ ↯

$2 = \lambda 2 \Rightarrow \lambda = 1$

2a) $w = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

$-3 = L_2 3 \Rightarrow L_2 = -1$ ✓

$2 = L_1$

$\underline{\underline{-2 = L_1 \cdot 2 + L_2 \cdot 2 \Rightarrow -4 + 2 = -2}}$

b) $w = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$x = -2L_1 \qquad L_1 \in \mathbb{R}$

$y = 4L_1 + L_2 \qquad L_2 \in \mathbb{R}$

3a) $\left\{\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R}\right\} = u$

$\underline{\underline{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}}} \Rightarrow 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ↯

$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \notin u$

b) $\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 2x + 4y = 6\right\} = u$

$\underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 \\ 0,5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1,5 \end{pmatrix}$ ↯

$\Rightarrow 2 \cdot 3 + 4 \cdot 1,5 = 12 \neq 6$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 1,5 \end{pmatrix} \notin u$

c) $\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \cdot y \leq 0\right\} = u$

$\underline{\underline{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ ↯

$\Rightarrow 1 \cdot 4 = 4 > 0$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \notin u$