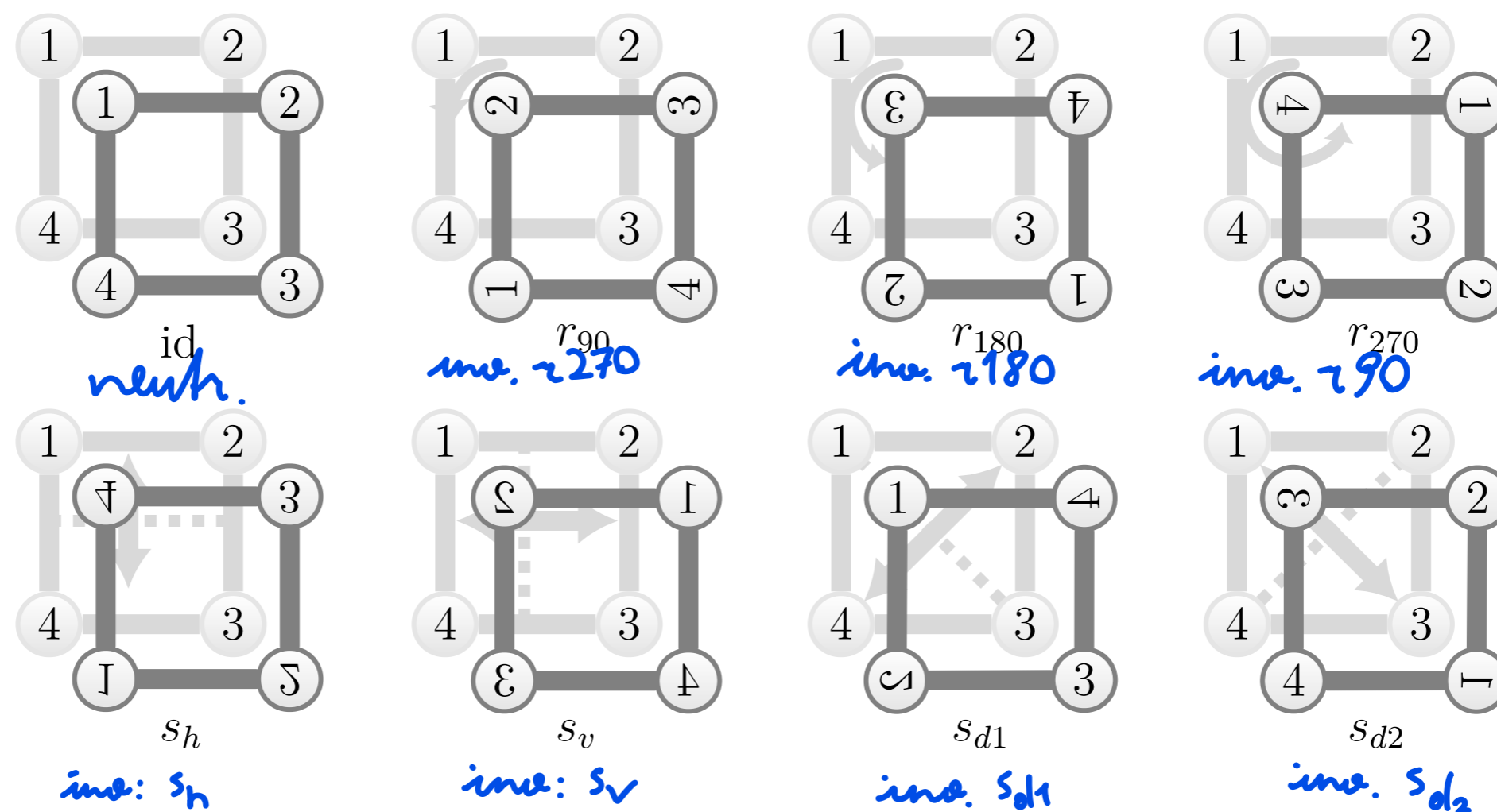


## MAA2/MAN2 Übung 2

Ausarbeiten bis 18./19. 3. 2025

- Die *Symmetriegruppe* eines geometrischen Objekts ist die Gruppe all jener Rotationen und Spiegelungen, die das Objekt wieder auf sich selbst abbilden. Die Verknüpfung in dieser Gruppe ist die Hintereinanderausführung.

Die acht Elemente der Symmetriegruppe des Quadrats sind wie folgt (die transformierte Version ist jeweils über der ausgegrauten ursprünglichen Version zu sehen):



Die Namen der Transformationen ( $r$  für Rotationen,  $s$  für Spiegelungen) sind unter der Graphiken angegeben. Es gelten etwa  $r_{90} \circ s_{d1} = s_h$  und  $s_{d2} \circ r_{180} = s_{d1}$ .

Geben Sie an, welche der Transformationen das neutrale Element ist. Bestimmen Sie für jede der Transformationen das inverse Element. Ist diese Gruppe ~~kommutativ~~?

- Lösen Sie folgende Gleichungen, wobei  $x$  ein Element der Symmetriegruppe aus Aufgabe 1 ist:

(a)  $r_{270}^2 \circ s_{d2} \circ x \circ r_{90} = s_{d2}$

(b)  $s_h^{-3} \circ x \circ r_{180}^{51} = s_v^{-2}$

- [Fortsetzung von Aufgabe 2 am letzten Übungszettel] Gegeben sei eine beliebige Menge  $M$ , und  $\Delta$  sei die symmetrische Differenz zweier Mengen, wie am letzten Übungszettel definiert. Ist die algebraische Struktur  $[\text{Pot}(M), \Delta, \cap]$  ein kommutativer Ring mit Einselement? Dass  $[\text{Pot}(M), \Delta]$  eine kommutative Gruppe ist, wurde schon am letzten Zettel überprüft.

Beantworten Sie also folgende Fragen:

- Ist  $\cap$  auf  $\text{Pot}(M)$  assoziativ?
- Gibt es in  $\text{Pot}(M)$  ein neutrales Element bezüglich  $\cap$ ?
- Ist  $\cap$  distributiv über  $\Delta$ ?

Begründen Sie Ihre Überlegungen mit Mengendiagrammen (Venn-Diagrammen).

- Berechnen Sie für die komplexen Zahlen  $z_1 = 2 + 3i$  und  $z_2 = 2 - i$  die Werte  $z_1 + z_2$ ,  $z_1 - z_2$ ,  $z_1 \cdot z_2$  sowie  $z_1/z_2$ .

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= 2 + 3i + (2 - i) = 4 + 2i \\ z_1 - z_2 &= 2 + 3i - (2 - i) = 4i \\ z_1 \cdot z_2 &= (2 + 3i)(2 - i) = 4 - 2i + 6i + 3 = 7 + 4i \\ z_1/z_2 &= \frac{2 + 3i}{2 - i} = \frac{(2 + 3i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{4 + 2i - 3 + 6i}{4 + 1} = \frac{1 + 8i}{5} = \frac{1}{5} + \frac{8}{5}i \end{aligned}$$

$$20) (a) r_{270}^2 \circ s_{d2} \circ x \circ r_{90} = s_{d2} \quad | \circ r_{90}^{-1}$$

$$r_{180} \circ s_{d2} \circ x = s_{d2} \circ r_{270} \quad | (r_{180} \circ s_{d2})^{-1} \circ$$

$$x = \underbrace{(r_{180} \circ s_{d2})^{-1}}_{s_{d1} \circ s_h} \circ \underbrace{(s_{d2} \circ r_{270})}_{s_h} = \underline{\underline{r_{90}}}$$

Überprüfung:  $s_{d2} = (3, 2, 1, 4)$

$$r_{180} \circ s_{d2} = (1, 4, 3, 2)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\text{ans}}_x \circ r_{90} \circ r_{90} = \underline{(3, 2, 1, 4)}$$

} = ✓

$$(b) s_h^{-3} \circ x \circ r_{180}^{51} = s_v^{-2} \quad | \circ r_{180}^{-51} = r_{180}$$

$$s_h^{-3} \circ x = s_v^{-2} \circ r_{180} \quad | s_h^3 \circ$$

$$x = \underbrace{s_h^3}_{s_h} \circ \underbrace{(s_v^{-2} \circ r_{180})}_{\text{id}} = \underline{\underline{s_v}}$$

Überprüfung:  $s_v^{-2} = (1, 2, 3, 4)$

$$s_h^{-3} = (4, 3, 2, 1)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\text{ans}}_x \circ s_v = (3, 4, 1, 2)$$

$$\Rightarrow \text{ans} \circ r_{180} = \underline{(1, 2, 3, 4)}$$

} = ✓