LGI1/MAG1 Übung 5

Auszuarbeiten bis 11. 11. 2025

1. Wir definieren auf dem Universum der natürrlichen Zahlen (also ohne Null) das zweistellige Prädikat *habenGemeinsamenTeiler (hgt)* als

$$\mathrm{hgt}(x, y) :\Leftrightarrow \exists\, n\ n \neq 1 \,\wedge\, n \,|\, x \,\wedge\, n \,|\, y\,.$$

   (a) Warum gilt $\mathrm{hgt}(2, 4)$?
   (b) Warum gilt $\mathrm{hgt}(2, 3)$ nicht?
   (c) Gilt $\exists\, x\ \mathrm{hgt}(x, x)$?
   (d) Gilt $\forall x\ \mathrm{hgt}(x, x)$?

2. [Fortsetzung von Aufgabe 1]

   (a) Gilt $\exists\, x\ \exists\, y\ \mathrm{hgt}(x, y)$?
   (b) Gilt $\forall x\ \forall y\ \mathrm{hgt}(x, y)$?
   (c) Gilt $\forall x\ \forall y\ \mathrm{hgt}(x, y) \Rightarrow \mathrm{hgt}(y, x)$?
   (d) Gilt $\forall x\ \exists\, y\ \mathrm{hgt}(x, y)$?
   (e) Gilt $\exists\, x\ \forall y\ \mathrm{hgt}(x, y)$?

3. Spezifizieren Sie das Problem, von zwei natürlichen Zahlen das *kleinste gemeinsame Vielfache* zu bestimmen. Für 5 und 6 ist das 30, für 8 und 12 ist es 24, und für 3 und 21 ist es 21.

   Beachten Sie dabei Folgendes:

   (a) Gehen Sie formal so vor, wie für Problemspezifikationen in der Vorlesung gezeigt wurde. Speziell geht es *nicht* darum, einen Algorithmus zu finden, mit dem das kleinste gemeinsame Vielfache zweier Zahlen berechnet werden kann.
   (b) Wir schreiben $n \,|\, m$ für zwei ganze Zahlen n und m, wenn die Zahl n die Zahl m ohne Rest teilt, oder (anders ausgedrückt) m ein ganzzahliges Vielfaches von n ist.

4. Berechnen Sie den Wert folgender Summen bzw. Produkte:

   (a) $\displaystyle\prod_{1 \leq j < 4}\ \sum_{j < k \leq j+2} k \cdot j$ (b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{4} \prod_{j=2}^{k} k + j$

5. Verwenden Sie Summen- bzw. Produktquantoren, um die folgenden beiden Funktionen zu definieren:

   (a) Die Fakultäts-Funktion !, die für gegebene natürliche Zahl n das Produkt aller Zahlen zwischen 1 und n berechnet. Somit sind etwa $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, und $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$. Überprüfen Sie bitte auch, ob Ihre Definition $0! = 1$ liefert (dies ist offiziell so definiert).

(b) Die Funktion *teilerSumme*, die von einer gegebenen natürlichen Zahl die Summe aller echten Teiler berechnet. Als *echter Teiler* einer Zahl n wird jeder Teiler von n bezeichnet, der ungleich n selbst ist.

6. Werten Sie folgende Maximum- bzw. Minimum-Ausdrücke über dem Universum der ganzen Zahlen aus:

   (a) $\max\limits_{3\leq k\leq 8} 4k-10$

   (b) $\max\limits_{3\leq k\leq 8} \big(4k-10 \leq 10\big)$

   (c) $\min\limits_{2\leq k\leq 7} (k-4)^2$

   (d) $\min\limits_{2\leq k\leq 7} \big((k-4)^2 \leq 4\big)$

1a) $\exists_{n\neq 1}\; n|2 \wedge n|4 \equiv \exists_{n\neq 1} (\exists_{z_1} n\cdot z_1 = 2) \wedge (\exists_{z_2} n\cdot z_2 = 4)$ ✓

$\left.\begin{array}{l} n \leftarrow 2 \\ z_1 \leftarrow 1 \\ z_2 \leftarrow 2 \end{array}\right\} \Rightarrow 2\cdot 1 = 2 \wedge 2\cdot 2 = 4$ ✓

b) z.z. $\neg \exists_{n\neq 1}\; n|2 \wedge n|3 \equiv \cancel{\forall_{n\neq 1} \neg(n|2) \vee \neg(n|3)}$

$\cancel{\equiv \forall_{n\neq 1} (\forall_{z_1} n\cdot z_1 \neq 2) \vee (\forall_{z_2} n\cdot z_2 \neq 3)}$

$n \leftarrow 2 \quad \exists_{n\neq 1}\; 2|2$ ✓ $\wedge\; 2|3$ ✗

$n \leftarrow 3 \quad \exists_{n\neq 1}\; 3|2$ ✗ $\wedge\; 3|3$ ✓

andere Belegungen sind auszuschließen

c) $\exists_x \text{hgt}(x,x) \equiv \exists_x \exists_{n\neq 1} (\exists_{z_1} n\cdot z_1 = x) \wedge (\exists_{z_2} n\cdot z_2 = x)$

$\left.\begin{array}{l} x \leftarrow 4 \\ n \leftarrow 2 \\ z_1 \leftarrow 2 \\ z_2 \leftarrow 2 \end{array}\right\} \Rightarrow 2\cdot 2 = 4 \wedge 2\cdot 2 = 4$ ✓

d) $\forall_x \text{hgt}(x,x) \equiv \forall_x \exists_{n\neq 1} (\exists_{z_1} n\cdot z_1 = x) \wedge (\exists_{z_2} n\cdot z_2 = x)$

w.w. $(\exists_{z_1} n\cdot z_1 = x) \equiv (\exists_{z_2} n\cdot z_2 = x)$

w.w. $A \wedge A \equiv A$

$\forall_x \exists_{n\neq 1} \exists_z\; n\cdot z = x \qquad x \leftarrow 1$

$\exists_{n\neq 1} \exists_z\; n\cdot z = 1$ ✗

$\neg \exists_{n\neq 1} \exists_z\; n\cdot z = 1 \equiv \forall_{n\neq 1} \forall_z\; n\cdot z \neq 1$

2a) $\exists_{x,y} \text{hgt}(x,y) \qquad \begin{array}{l} x \leftarrow 2 \\ y \leftarrow 4 \end{array} \quad \text{hgt}(2,4)$ ✓ $\quad n \leftarrow 2$

b) Gilt $\forall x\, \forall y\, \text{hgt}(x,y)$? $\qquad \text{hgt}(2,3) \equiv \underline{\underline{f}}$ ✗

$x \leftarrow 2$

$y \leftarrow 3$

c) t $\forall x\, \forall y\, \text{hgt}(x,y) \Rightarrow \text{hgt}(y,x)$

$\underbrace{\exists_{n\neq 1} (\exists_{z_1} n\cdot z_1 = x) \wedge (\exists_{z_2} n\cdot z_2 = y)}_{\text{hgt}(x,y)} \equiv \underbrace{\exists_{n\neq 1} (\exists_{z_1} n\cdot z_1 = y) \wedge (\exists_{z_2} n\cdot z_2 = x)}_{\text{hgt}(y,x)}$

$\Rightarrow \text{hgt}(x,y) \equiv \text{hgt}(y,x)$

$\Rightarrow hgt(x,y) \Rightarrow hgt(y,x) \equiv w \qquad \forall_{x,y}\ w$ ✓

d) : $\forall x\, \exists y\, \mathrm{hgt}(x,y)$ $\quad \neg \exists_{n \neq 1} \exists_{z}\ n \cdot z = 1$ ✓ $\Rightarrow \exists_{n \neq 1} \exists_{z}\ n \cdot z = 1$ ✗ $\qquad x \leftarrow 1$

$\exists_y\, hgt(1,y) \equiv f$ ✗

e) $\exists x\, \forall y\, \mathrm{hgt}(x,y) \equiv \neg \forall_x \neg \forall_y\, hgt(x,y) \equiv f$ ✗ $\qquad x \leftarrow x^*$

$\neg(\exists_y \neg hgt(x^*,y)) \qquad y \leftarrow 1$

$\neg(\ \neg hgt(x^*,1))$

3) $\min_{z \in \mathbb{N}} x | z \wedge y | z$

4a) $\prod_{1 \leq j < 4} \sum_{j<k\leq j+2} k \cdot j \quad (2 \cdot 1 + 3 \cdot 1) \cdot (3 \cdot 2 + 4 \cdot 2) \cdot (4 \cdot 3 + 5 \cdot 3) = 5 \cdot 14 \cdot 27 = 1350 + 4 \cdot 135 = \underline{1890}$

b) $\sum_{k=2}^{4} \prod_{j=2}^{k} k+j \quad ((2+2)) + ((3+2) \cdot (3+3)) + ((4+2) \cdot (4+3) \cdot (4+4)) = 4 + 30 + 336 = \underline{370}$

5a) $F(x) := \prod_{i=1}^{x} i \qquad F(0) = \prod_{1 \leq i \leq 0} i = \prod_{f} i = \underline{1}$

b) $S(x) := \sum_{k | x \wedge k \neq x} k$

6a) $4 \cdot 8 - 10 = \underline{22}$ $\qquad$ b) $5 \leftarrow 4 \cdot 5 - 10 \leq 10$ ✓

c) 0 ✓ $\qquad$ d) $2 \leftarrow (2-4)^2 \leq 4 \equiv 4 \leq 4$ ✓