MAA2/MAN2 Übung 10

Auszuarbeiten bis 20./21. 5. 2025

1. Berechnen Sie die Determinante folgender Matrix durch Entwickeln, bis Sie bei Matrizen der Größe 3×3 angelangt sind. Diese Determinanten können Sie mit dem Satz von Sarrus berechnen.
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

2. Verwenden Sie Satz 5.15 über das Entwickeln (rekursive Berechnen) von Determinanten, um Satz 5.13 aus dem Skriptum anders als für Aufgabe 6 auf Übungszettel 9 zu beweisen: Für eine Matrix in oberer Dreiecksform gilt
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}\,.$$

3. Beweisen Sie den zweiten Teil von Satz 5.12 im Skriptum:
$$\det(a_{-1},\dots,a_{-i},\dots,a_{-j},\dots,a_{-n}) = -\det(a_{-1},\dots,a_{-j},\dots,a_{-i},\dots,a_{-n})\,,$$
also die Aussage "das Vorzeichen der Determinante ändert sich, wenn man zwei Spalten vertauscht". Die Vorgehensweise ist dabei sehr ähnlich zu der, die im Beweis in Aufgabe 4 auf Übungszettel 9 verwendet wurde.

4. Lösen Sie folgendes lineare Gleichungssystem für $x \in \mathbb{R}^3$ mit dem Gauß'schen Eliminationsverfahren:
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

5. Wie Aufgabe 4, für das lineare Gleichungssystem
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 6 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

6. Wie Aufgabe 4, für das lineare Gleichungssystem
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ $\rightsquigarrow (-1)\cdot 2 \cdot \begin{array}{cccc} + & - & + & - \\ \hline \end{array}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} \rightsquigarrow (-2)\cdot(2)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = (-4)\cdot((9+1)-(9+(4)))$

$= (-4)\cdot 5 = \underline{\underline{-20}}$

2) $\begin{array}{cccc} + & - & + & - \end{array}$

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$ $= (+1)\cdot a_{11}\cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot(+1)\cdot a_{22}\cdot \begin{vmatrix} a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} \cdot \begin{vmatrix} a_{44} & \dots \\ \vdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

$= \dots = \underline{\underline{a_{11}\cdot a_{22}\cdot \ldots \cdot a_{nn}}}$

3) z. Z.: $\det(a_{-1},\dots,a_{-i},\dots,a_{-j},\dots,a_{-n}) = -\det(a_{-1},\dots,a_{-j},\dots,a_{-i},\dots,a_{-n})$, $= \det(A) = -\det(A')$

$\cancel{\det(A) = \det(a_{-1},\dots,a_{-i}+(0\cdot a_{-j}),\dots,a_{-j}+(0\cdot a_{-i}),\dots,a_{-n})}$

$\cancel{= \det(A) + \det(a_{-1},\dots,0\cdot a_{-j},\dots,a_{-j},\dots,a_{-n}) + \det(a_{-1},\dots,a_{-i},\dots,0\cdot a_{-i},\dots,a_{-n})}$

$\cancel{= \det(A) + \det(\dots,0\cdot a_{-j},\dots,0\cdot a_{-i},\dots) + \det(\dots,0\cdot a_{-j},a_{-j},\dots) + \det(\dots,0\cdot a_{-j},0\cdot a_{-i},\dots)}$

$\cancel{+ \det(\dots,a_{-i},0\cdot a_{-i},\dots)}$

$\cancel{\det(-A) = \det(A) - 2\cdot\det(A)}$

$\det(a_{-1},\dots,a_{-i}+a_{-j},\dots,a_{-j}+a_{-i},\dots,a_{-n}) = 0$ da. w.w. $\det(\dots,v,\dots,v,\dots) = 0$

da. w.w.: $\det(v+w, u) = \det(v,u) + \det(w,u)$ $= \underbrace{\det(a_{-1},\dots,a_{-i},\dots,a_{-j},\dots,a_{-n})}_{\det(A)} + \underbrace{\det(\dots,a_{-j},\dots,a_{-i},\dots)}_{\det(A')}$

$+ \underbrace{\det(\dots,a_{-i},\dots,a_{-i},\dots)}_{0} + \underbrace{\det(\dots,a_{-j},\dots,a_{-j},\dots)}_{0}$

$= \det(A) + \det(A') = 0 \quad | -\det(A')$

$\Rightarrow \underline{\underline{\det(A) = -\det(A')}}$

4) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right)$ $\cdot(-1)$ $+\frac{1}{2}$ $\rightsquigarrow \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0{,}5 & 2 & 2{,}5 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \underline{\underline{x_3 = -1 \Rightarrow x_2 = 9 \Rightarrow x_1 = -2}}$

5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 6 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 6 & 6 \end{array}\right)$ $\cdot(-1)$ $\cdot(-3)$ $\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 8 & 7 \\ 0 & -1 & 8 & 7 \end{array}\right)$ $\cdot(-1)$ $\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$ unendliche Lösungen

6) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$ $\cdot\frac{1}{2}$ $\cdot(-\frac{1}{2})$ $\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0{,}5 & 1 & 2{,}5 \\ 0 & -0{,}5 & 1 & 3{,}5 \end{array}\right)$ $+1$ $\rightsquigarrow \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0{,}5 & 1 & 2{,}5 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right) \Rightarrow \underline{\underline{x_3 = 3;\ x_2 = -1;\ x_1 = 1}}$