MAA2/MAN2 Übung 3

Auszuarbeiten bis 25./26. 3. 2025

$-1{,}5+2{,}6i$

1. Wandeln Sie die angegebenen komplexen Zahlen in die jeweils andere Koordinatendarstellung um:

   (a) $\left[3, \frac{2\pi}{3}\right]$ (gegeben in Polarkoordinaten) in kartesische Koordinaten $\to 3\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 3\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

   (b) $-3+4i$ (gegeben in kartesischen Koordinaten) in Polarkoordinaten

2. Lösen Sie folgende beiden Gleichungen für komplexe Zahlen z in Polarkoordinaten:

   (a) $\left[2, \frac{\pi}{3}\right]^4 \cdot z = \left[4, \frac{\pi}{6}\right]^2$

   (b) $z \cdot \left[3, \frac{\pi}{8}\right]^3 = \left[6, \frac{5\pi}{8}\right]^2$

3. Berechnen Sie alle komplexen Lösungen der folgenden Gleichungen, indem Sie die angegebenen Wurzeln ziehen (Angaben in Polarkoordinaten). Machen Sie auch eine Skizze, in der Sie die Lösungen einzeichnen:

   (a) $z^3 = [1, 0]$

   (b) $z^5 = [1, 0]$

4. Beweisen Sie für komplexe Zahlen z_1 und z_2:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|,$$

   wobei der Betrag $|z|$ einer komplexen Zahl $z = a + ib$ definiert ist als

$$|a + ib| := \sqrt{a^2 + b^2},$$

   also gleich dem Radius dieser Zahl in Polarkoordinaten ist.

5. Um die Rechenregel für die Multiplikation zweier komplexer Zahlen in Polarkoordinaten zu beweisen, wandeln wir zwei komplexe Zahlen $[r_1, \varphi_1]$ und $[r_2, \varphi_2]$ zuerst in kartesische Koordinaten um und erhalten (wegen $a = r\cos(\varphi)$ und $b = r\sin(\varphi)$ in kartesischen Koordinaten $a + ib$):

$$[r_1, \varphi_1] = r_1\cos(\varphi_1) + ir_1\sin(\varphi_1) \quad \text{sowie} \quad [r_2, \varphi_2] = r_2\cos(\varphi_2) + ir_2\sin(\varphi_2).$$

   Multiplizieren Sie die beiden Zahlen in dieser letzten Darstellung, berechnen Sie also

$$\Big(r_1\cos(\varphi_1) + ir_1\sin(\varphi_1)\Big) \cdot \Big(r_2\cos(\varphi_2) + ir_2\sin(\varphi_2)\Big)$$

   und vereinfachen Sie das Ergebnis unter Verwendung der hier aufgeführten trigonometrischen Identitäten (die werden wir später nie mehr brauchen):

$$\sin(\theta + \varphi) = \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi$$
$$\cos(\theta + \varphi) = \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi$$
$$\tan(\theta + \varphi) = \frac{\tan(\theta) + \tan(\varphi)}{1 - \tan\theta\tan\varphi}$$

$$\sin(\theta - \varphi) = \sin\theta\cos\varphi - \cos\theta\sin\varphi$$
$$\cos(\theta - \varphi) = \cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi$$
$$\tan(\theta - \varphi) = \frac{\tan(\theta) - \tan(\varphi)}{1 + \tan\theta\tan\varphi}$$

$$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$$
$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$
$$\tan(2\theta) = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$$

$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}$$
$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}{2}$$
$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\sin(\beta + \alpha) - \sin(\beta - \alpha)}{2}$$

1b) $\left[\sqrt{3^2+4^2}, \arctan\left(\frac{4}{-3}\right)\right] = \underline{\underline{[5, 306.87°]}}$

2) (a) $\left[2,\frac{\pi}{3}\right]^4 \cdot z = \left[4,\frac{\pi}{6}\right]^2 \quad \Big| : \left[2,\frac{\pi}{3}\right]^4$

$z = \left[16,\frac{\pi}{3}\right] / \left[16,\frac{4\pi}{3}\right]$

$= \left[1,-\frac{3\pi}{3}\right] = \underline{\underline{[1,\pi]}}$

(b) $z\cdot\left[3,\frac{\pi}{8}\right]^3 = \left[6,\frac{5\pi}{8}\right]^2 \quad \Big| \div \left[3,\frac{\pi}{8}\right]^3$

$z = \left[36,\frac{5\pi}{4}\right] / \left[27,\frac{3\pi}{8}\right]$

$= \underline{\underline{\left[\frac{4}{3},\frac{7\pi}{8}\right]}}$

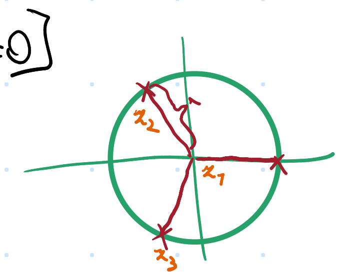
3) (a) $z^3 = [1,0]$

$z = \left[\sqrt[3]{1}, \frac{z_\varphi}{3} = 0\right]$

$z_1 = [1, 0]$

$z_2 = \left[1, \frac{2\pi}{3}\right]$

$z_3 = \left[1, \frac{4\pi}{3}\right]$



(b) $z^5 = [1,0]$

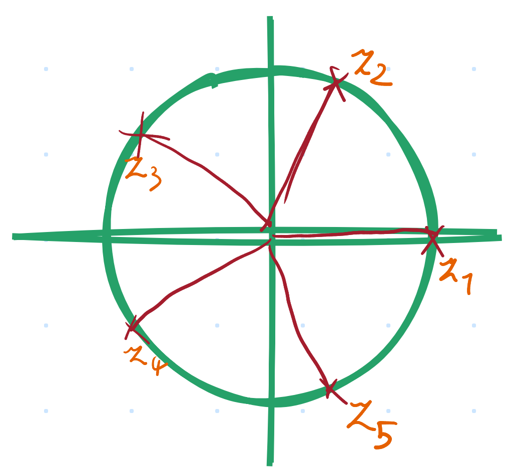
$z_1 = [1, 0]$

$z_2 = \left[1, \frac{2\pi}{5}\right]$

$z_3 = \left[1, \frac{4\pi}{5}\right]$

$z_4 = \left[1, \frac{6\pi}{5}\right]$

$z_5 = \left[1, \frac{8\pi}{5}\right]$



4) $|z| = z_r$:= Radius in Polar-Darstellung

$[r_1, \varphi_1]\cdot[r_2, \varphi_2] = [r_1\cdot r_2, \ldots]$

$|[\ldots]| \qquad |[\ldots]| \qquad |[\ldots\ldots]|$

5) $(r_1\cos(\varphi_1)+ir_1\sin(\varphi_1))\cdot(r_2\cos(\varphi_2)+ir_2\sin(\varphi_2))$

$= r_1(\cos(\varphi_1)+i\sin(\varphi_1))\cdot r_2\cdot(\cos(\varphi_2)+i\sin(\varphi_2))$

$= r_1r_2\cdot(\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2)+i\sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2)+i\sin(\varphi_2)\cos(\varphi_1)-\sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2))$

$= r_1r_2\cdot\Big(\underbrace{\frac{\cancel{\cos(\varphi_1-\varphi_2)}+\cos(\varphi_1+\varphi_2)}{2} - \frac{\cancel{\cos(\varphi_1-\varphi_2)}-\cos(\varphi_1+\varphi_2)}{2}}_{\frac{\cancel{2}\cos(\varphi_1+\varphi_2)}{\cancel{2}}} \ldots\Big)$

$= r_1r_2\cdot\Big(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\cdot\underbrace{(\sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2)+\sin(\varphi_2)\cos(\varphi_1))}\Big) = \underline{\underline{r_1r_2\cdot(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+\sin(\varphi_1+\varphi_2)i)}}$

$\cancel{\frac{\sin(\varphi_2+\varphi_1)-\sin(\varphi_2-\varphi_1)+\sin(\varphi_1+\varphi_2)-\sin(\varphi_1-\varphi_2)}{2} = \sin(\varphi_1+\varphi_2) + \frac{\sin(\varphi_2-\varphi_1)-\sin(\varphi_1-\varphi_2)}{2}}$

$\sin(\varphi_1+\varphi_2)$