MAA2/MAN2 Übung 12

Auszuarbeiten bis 3./4. 6. 2025

1. Beweisen Sie (durch Einsetzen in die Definition) oder widerlegen Sie (durch Angabe eines Gegenbeispiels) jede der folgenden Aussagen über Skalarprodukte. Dabei sei u, v und w Vektoren, λ und μ Skalare, und v^2 definiert als $v^2 := v \cdot v$.

   (a) $v \cdot w = w \cdot v$

   (b) $\sqrt{v^2} = v$

   (c) $\|v\|^2 = v^2$

2. Wie Aufgabe 1, für die Aussagen

   (a) $u \cdot v = u \cdot w \Rightarrow v = w$

   (b) $(\lambda v) \cdot (\mu w) = \lambda\mu(v \cdot w)$

   (c) $\|\lambda w\| = |\lambda|\|w\|$

3. Gegeben seien die beiden Vektoren $v = (-2, 4, 2, 0)$ und $w = (1, 1, -3, -2)$. Berechnen Sie:

$$v \cdot w, \quad \|v\|, \quad \|v - w\|, \quad \text{Winkel zwischen } v \text{ und } w.$$

4. Berechnen Sie den Winkel zwischen der Diagonalen $(1, 1, \ldots, 1)$ und dem ersten Vektor $(1, 0, \ldots, 0)$ der Standardbasis in zwei, drei und n Dimensionen. Argumentieren Sie, dass dieser Winkel umso größer wird, je größer n ist.

5. Rechnen Sie für beliebig aber fixe Vektoren v und w nach, dass der Punkt $\mathrm{proj}_w(v)$ derjenige Punkt von w ist, der von v den geringsten Abstand hat.

   Gehen Sie dabei so vor: Schreiben Sie für beliebiges λ den Abstand von λw und v an, nehmen diesen zum Quadrat (damit die Wurzel wegfällt; man kann sich überlegen, dass das die Lage des Minimums nicht verändert), und bestimmen Sie ein Minimum für den dann erhaltenen Ausdruck (bei dem nur λ als Variable vorkommt, v und w sind ja fix).

   Zur Bestimmung des Minimums müssen Sie diese Funktion von λ ableiten, und die Ableitung Null setzen. So ein Vorgehen haben wir weder in der Vorlesung noch in den Übungen durchbesprochen, den meisten von Ihnen ist es aber vermutlich als Zentralmatura-Stoff noch in Erinnerung.

1) a) $~~\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15\\-12\end{pmatrix}~~$ $= ✓$

$~~\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15\\-12\end{pmatrix}~~$

$v=\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$

$w=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$

$v\times w=(5\cdot 3)+(6\cdot(-2))=3$ $= ✓$

$w\times v=(3\cdot 5)+(-2\cdot 6)=3$

b) $v=\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix}$ $\sqrt{v^2}=\sqrt{16+49}=\sqrt{65}\approx 8$ $\neq$ ✗

$v=\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix}\neq\sqrt{65}$

c) $v=\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$ $v^2=5^2+(-3)^2=34$ $= ✓$

$\|v\|^2=\sqrt{34}^2=34$

2) a) $v=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ $u=\begin{pmatrix}7\\-2\end{pmatrix}$ $u\times v=4\cdot 7+3\cdot(-2)=22 \Rightarrow w_1\cdot 7-w_2\cdot 2=22 \Rightarrow$ ∞ viele Lösungen

$\Rightarrow v\neq w$, da v ✗

kein ∞ Lösungsraum

b) $v=\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$ $w=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ $\lambda=5$ $\mu=-3$

$\begin{pmatrix}20\\-5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}6\\-9\end{pmatrix}=120+45=165$ $= ✓$

$-15\cdot(-8-3)=-15\cdot(-11)=165$

c) $\lambda=-7$ $w=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$

$\left\|\begin{pmatrix}-21\\14\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{21^2+14^2}\cong 25{,}24$ $= ✓$

$7\cdot\left\|\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}\right\|=7\cdot\sqrt{9+4}\cong 7\cdot 3{,}61\cong 25{,}24$

3) $v=\begin{pmatrix}-2\\4\\2\\0\end{pmatrix}$ $w=\begin{pmatrix}1\\1\\-3\\-2\end{pmatrix}$

$v\times w=-2+4-6=\underline{\underline{-4}}$

$\|v\|=\sqrt{2^2+4^2+2^2}=\underline{\underline{\sqrt{24}}}$ $\|w\|=\sqrt{1+1+9+4}=\underline{\underline{\sqrt{15}}}$

$\|v-w\|=\left\|\begin{pmatrix}-3\\3\\5\\2\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{9+9+25+4}=\underline{\underline{\sqrt{47}}}$

$\alpha=\cos^{-1}\left(\frac{v\times w}{\|v\|\cdot\|w\|}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{-4}{\sqrt{24}\cdot\sqrt{15}}\right)\cong 1{,}78=\underline{\underline{102{,}17^\circ}}$

4) $\alpha_2=\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{2}}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\underline{\underline{45^\circ}}$

erster V. diagonal V.

$\alpha_3=\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cong\underline{\underline{54{,}74^\circ}}$

$\Rightarrow$ $\alpha(n)=\cos^{-1}(\sqrt{n}^{-1})$

n … Anzahl Dim.

Da 1/sqrt(n) immer kleiner wird (Richtung 0 annähert), umso mehr sich n gegen Unendlich erhöht + der Eigenschaft von acos(...) den hö-chsten Wert bei 0 zu haben, wächst a(n) mit n

5) $v = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mathrm{proj}_w(v) = \frac{50+8}{100+4} \cdot w \cong \begin{pmatrix} 5{,}58 \\ 1{,}12 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = \frac{29}{52} \approx 0{,}558$

$f(\lambda) = d(\lambda \cdot w, v)^2 = (\lambda \cdot w - v)^2 = (\lambda \cdot w_1 - v_1)^2 + (\lambda \cdot w_2 - v_2)^2 = \lambda^2 w_1^2 - 2\lambda w_1 v_1 + v_1^2 + \lambda^2 w_2^2 - 2\lambda w_2 v_2 + v_2^2$

$\underset{\text{einsetzen}}{=} 100\lambda^2 - 100\lambda + 25 + 4\lambda^2 - 16\lambda + 16 = 104\lambda^2 - 116\lambda + 41$

f … Abstand^2 zw. $\lambda \cdot w$ & v

$f'(\lambda) = 208\lambda - 116 \qquad f'(\lambda) = 0 = 208\lambda - 116 \quad | +116$

minima

$116 = 208\lambda \quad | : 208$

$\lambda = \frac{116}{208} = \frac{58}{104} = \frac{29}{52}$