

LGI1/MAG1 Übung 6

Auszuarbeiten bis 18.11.2025

1. Gegeben seien die Mengen $A = \{\{1, 2, 3\}, 4\}$, $B = \{1, \{2, 3\}, 3, 4\}$ und $C = \{1, 2, 3, 4\}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch?

- | | |
|---|--|
| (a) $\{2\} \in A$ | (b) $\forall x x \in C \Rightarrow x \in A$ |
| (c) $\exists_{x \in B} \exists_{y \in A} x \in y$ | (d) $\exists_{x \in A} \exists_{y \in B} \exists z z \in x \wedge z \in y$ |

Hinweis: Wir kennen offiziell die Mengendarstellung der natürlichen Zahlen nicht. Daher ist für uns keine natürliche Zahl ein Element einer anderen natürlichen Zahl, also gelten etwa $2 \notin 3$, $1 \notin 3$ oder $1 \notin 2$.

2. Seien A , B und C wie in Aufgabe 1. Berechnen Sie:

- | | |
|--|---|
| (a) $\{x \mid x \in C \wedge \exists_{y \in B} x \in y\}$ | (b) $\{x \mid x \in A \wedge 3 \in x\}$ |
| (c) $\{x \mid x \in B \wedge x \in C \wedge \exists_{y \in A} x \in y\}$ | |

3. Seien A , B und C wie in Aufgabe 1. Berechnen Sie folgende Mengen:

- | | | | |
|---------------------|---------------------|----------------|----------------|
| (a) $A \cup B$ | (b) $B \cup C$ | (c) $A \cap B$ | (d) $A \cap C$ |
| (e) $A \setminus B$ | (f) $C \setminus B$ | | |

4. Die folgenden Mengen sind entweder über charakterisierende Eigenschaften definiert, oder über Terme und Eigenschaften. Begründen Sie, welche der unten angegebenen Element- bzw. Mengen-Beziehungen wahr, und welche falsch sind. Beachten Sie speziell die potentiellen Schwierigkeiten bei der Unterscheidung des Mengen-*für-die-gilt* Striches $|$ vom *teilt*-Strich $|$: Nur der erste horizontale Trennstrich in einer Menge ist der *für-die-gilt*-Strich; dieser ist hier außerdem zur besseren Unterscheidung etwas größer dargestellt als der *teilt*-Strich.

- | | |
|---|--|
| (a) $6 \in \{x \in \mathbb{N} \mid \exists_{y \in \mathbb{N}} y^2 = x\}$ | (b) $\{10\} = \{k \in \mathbb{N} \mid 2 k \wedge k 20\}$ |
| (c) $\{4, 5\} \subseteq \{k \in \mathbb{N} \mid k 20\}$ | (d) $\{7, 8, 9\} \subseteq \{2k+1 \mid k \in \mathbb{N}\}$ |
| (e) $\{4k \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$ | (f) $\{k^2 \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq \{x \in \mathbb{N} \mid \exists_{y \in \mathbb{N}} y^2 = x\}$ |

5. Gegeben sei die Menge $E = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$. Finden Sie für die Mengen \emptyset , $\{\emptyset\}$ und $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ heraus, ob diese Elemente oder Teilmengen (oder beides) von E sind.
6. Definieren Sie die folgenden Mengen durch ihre charakterisierenden Eigenschaften, und nicht durch reine Aufzählung ihrer Elemente. Definieren Sie dazu zuerst die einstellige Prädikatenkonstante *istQuadratzahl*(x), die genau dann wahr ist, wenn x eine Quadratzahl ist, also das Quadrat einer natürlichen Zahl. Die ersten Quadratzahlen sind somit 1, 4, 9, 16, 25, ...

- (a) Die Menge aller Quadratzahlen zwischen 20 und 120.
- (b) Die Menge aller geraden Zahlen, die sich als Summe von zwei Quadratzahlen schreiben lassen.
- (c) Die Menge aller Zahlen, deren Teiler (außer der Zahl selbst) alle kleiner als 10 sind.

$$1a) \{2\} \in A \Leftrightarrow \cancel{f}$$

$$\begin{aligned} b) \forall x \ x \in C &\Rightarrow x \in A & x \leftarrow 2 \\ 2 \in C &\Rightarrow 2 \in A \\ \Leftrightarrow w &\Rightarrow f \\ \Leftrightarrow &\cancel{f} \end{aligned}$$

$$c) \exists_{x \in B} \exists_{y \in A} x \in y \quad x \leftarrow 3 \quad 3 \in \{1, 2, 3\} \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} d) \exists_{x \in A} \exists_{y \in B} \exists z z \in x \wedge z \in y & \quad x \leftarrow \{1, 2, 3\} \\ y \leftarrow \{2, 3\} & \\ z \leftarrow 3 & \\ 3 \in \{1, 2, 3\} \wedge 3 \in \{2, 3\} & \quad \checkmark \\ \Leftrightarrow w & \quad \wedge w \\ \Leftrightarrow & \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$2a) \{x \mid x \in C \wedge \exists_{y \in B} x \in y\}$$

$$\{1, 2, 3\} \cancel{\ni} \{2, 3\}$$

$$b) \{x \mid x \in A \wedge 3 \in x\} = \underline{\{1, 2, 3\}}$$

$$A = \{\{1, 2, 3\}, 4\} \quad \cancel{3 \in x}$$

$$c) \{x \mid x \in B \wedge x \in C \wedge \exists_{y \in A} x \in y\} = \{x \in \{1, 3, 4\} \mid \exists_{y \in A} x \in y\} = \underline{\{1, 3\}}$$

$$B = \{1, \{2, 3\}, 3, 4\}$$

$$C = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\{1, 3\} \cancel{\ni} \quad \cancel{3 \in y}$$

$$3) A = \{\{1, 2, 3\}, 4\}, B = \{1, \{2, 3\}, 3, 4\} \text{ und } C = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$a) A \cup B = \{1, \{1, 2, 3\}, \{2, 3\}, 3, 4\}$$

$$b) B \cup C = \{1, 2, \{2, 3\}, 3, 4\}$$

$$c) A \cap B = \{4\}$$

$$d) A \cap C = \{4\}$$

$$e) A \setminus B = \{\{1, 2, 3\}\}$$

$$f) C \setminus B = \{2\}$$

$$4) a) 6 \in \{x \in \mathbb{N} \mid \exists_{y \in \mathbb{N}} y^2 = x\} \quad \cancel{f} \quad 6 \text{ ist keine Quadratzahl-Zahl}$$

$$b) \{10\} = \{k \in \mathbb{N} \mid 2 \mid k \wedge k \mid 20\} \quad \cancel{f} \quad \{2, 4, 10\} \text{ ist der erlaubte Wert}$$

$$c) \{4, 5\} \subseteq \{k \in \mathbb{N} \mid k \mid 20\} \quad \checkmark \quad w \quad 4 \mid 20 \wedge 5 \mid 20 \Leftrightarrow w$$

$$d) \{7, 8, 9\} \subseteq \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\} \quad \cancel{f} \quad \cancel{\exists_{k \in \mathbb{N}} 2k + 1 = 8}$$

$$e) \{4k \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq \{2k \mid k \in \mathbb{N}\} \quad \checkmark \quad w \quad \text{Jede vierte Zahl ist autom. jede zweite Zahl}$$

$$f) \{k^2 \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq \{x \in \mathbb{N} \mid \exists_{y \in \mathbb{N}} y^2 = x\} \quad \checkmark \quad w \quad \text{Ist doch das gleiche, oder?}$$

$$5) E = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

\emptyset :	$\emptyset \in E$	✓ w	$\emptyset \subseteq E$	✓ w	\emptyset hat nix, was nest in E sei bau.
$\{\emptyset\}$:	$\{\emptyset\} \in E$	✓ w	$\{\emptyset\} \subseteq E$	✓ w	
$\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$:	$\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in E$	✓ w	$\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subseteq E$	✓ w	

$$6) \text{ ist Quadratzahl}(x) \Leftrightarrow \exists_{y \in \mathbb{N}} y^2 = x$$

$$a) \{x \mid \text{ist Quadratzahl}(x) \wedge 20 < x < 120\} \quad \{x^2 \mid x \in \mathbb{N} \wedge 20 < x^2 < 120\} \quad ???$$

$$b) \{x \mid \exists_{y,z} \text{ ist Quadratzahl}(y) \wedge \text{ist Quadratzahl}(z) \wedge y+z=x\}$$

$$c) \{x \mid \forall_y y|x \Rightarrow y=x \vee y<10\}$$