

LGI1/MAG1 Übung 4

Auszuarbeiten bis 4. 11. 2025

1. Wie Aufgabe 3 auf Übungszettel 3, für die folgenden Aussagen, auch wieder über dem Universum der ganzen Zahlen. Dabei sei $|$ die zweistellige Prädikatenkonstante “teilt ohne Rest” (bzw. “ist ganzzahliges Vielfaches von”), die in der Vorlesung definiert wurde.

(a) $\exists x \forall y \ x | y$

(b) $\forall x \exists y \ x | y$

(c) $\exists x \forall y \ y | x$

(d) $\forall x \exists y \ y | x$

2. Definieren Sie die folgenden Prädikate für natürliche Zahlen (Sie dürfen also annehmen, dass das Universum die natürlichen Zahlen sind). Alle dabei vorkommenden Prädikatenkonstanten (wie *prim*) bzw. Funktionskonstanten (wie die Summe $+$ oder das Quadrat 2) können Sie als gegeben voraussetzen.

(a) $P(x)$ ist genau dann wahr, wenn x keine Primzahl ist, sich aber als Produkt zweier verschiedener Primzahlen schreiben lässt.

(b) $Q(x)$ ist genau dann wahr, wenn x eine Primzahl ist, die sich als Summe von zwei aufeinanderfolgenden Primzahlen darstellen lässt (also zwei Primzahlen mit Abstand 2)

(c) $P(x, y)$ ist genau dann wahr, wenn x und y zwei verschiedene Primzahlen sind, deren Produkt plus 1 eine Quadratzahl ist.

3. Drücken Sie folgende Sätze über Zahlen in der Prädikatenlogik aus. Es ist nicht notwendig zu argumentieren, welche von ihnen wahr, und welche von ihnen falsch sind. Sie dürfen dazu die einstelligen Prädikate *prim* und *gerade* als gegeben voraussetzen. Das Universum seien die natürlichen Zahlen.

(a) “Es gibt zwei verschiedene gerade Zahlen, deren Differenz eine Primzahl ist.”

(b) “Es gibt keine Zahl, die gleichzeitig prim und gerade und größer als 2 ist.”

(c) “Für jede Primzahl gibt es eine andere Primzahl, die größer ist.”

(d) “Es existiert eine Zahl, die kleiner ist als jede gerade Zahl.”

4. Finden Sie den bzw. die Fehler in folgender Formalisierung des deutschen Satzes “es gibt zwei Primzahlen, deren Differenz 2 ist”:

(a) $\exists x \exists y \text{ prim}(x) - \text{prim}(y) = 2$

(b) $\exists x \exists y \text{ prim}(x - y = 2)$

(c) $\exists x \exists y \text{ prim}(x - y) = 2$

5. Schreiben Sie folgende Quantoraussagen, die in der abkürzenden Schreibweise aus Definition 2.13 im Buch gegeben sind, in der ursprünglichen (langen) Form, also mit Implikationen und Konjunktionen.

(a) $\forall_{1 \leq x < 40} \text{prim}(x^2 + x + 41)$

(b) $\forall_{p \geq 2} \exists_{n \geq 2} \text{prim}(p) \wedge p \leq n$

6. Negieren Sie das Ergebnis von Aufgabe 5 (b), und ziehen Sie dabei unter Verwendung von Satz 2.4 im Buch die Negation so weit wie möglich nach innen (also über alle Quantoren hinweg). Beachten Sie, dass Sie eine Negation auch in eine Implikation hineinziehen können, wenn Sie die Implikation zuerst in eine Disjunktion verwandeln (siehe dazu Satz 2.1 im Buch).

$$1a) \exists x \forall y x|y$$

A.: Es gibt ein x, das alle Zahlen y ohne Rest teilt

x = 1, kann alle Zahlen ohne Rest teilen

$$b) \forall x \exists y x|y$$

A.: Für jede Zahl gibt eine andere Zahl y, die ein vielfaches ist

y = 2 times x

$$c) \exists x \forall y y|x$$

A.: Es existiert eine Zahl, die das vielfache von allen anderen Zahlen ist

Es gibt keine Zahl, die größer ist als alle anderen im natürlichen Zahlenbereich (unendlich)

$$d) \forall x \exists y y|x$$

A.: Für jede Zahl gibt es irgendeine Zahl, die ohne Rest teilt

y = 1

$$2a) P(x) : \Leftrightarrow \neg \text{prim}(x) \wedge \exists_{i,j} i \cdot j = x \wedge \text{prim}(i) \wedge \text{prim}(j) \wedge i \neq j$$

$$b) Q(x) : \Leftrightarrow \text{prim}(x) \wedge \exists_y \text{prim}(y) \wedge \text{prim}(y+2) \wedge 2y+2=x$$

$$c) P(x,y) : \Leftrightarrow \text{prim}(x) \wedge \text{prim}(y) \wedge x \neq y \wedge \exists_s s^2 = x \cdot y + 1$$

$$3a) \exists_{x,y} x < y \wedge \text{prim}(y-x) \wedge \text{gerade}(x) \wedge \text{gerade}(y)$$

$$b) \neg \exists_x \text{prim}(x) \wedge \text{gerade}(x) \wedge x > 2$$

$$c) \forall_{\text{prim}(x)} \exists_y y > x \wedge \text{prim}(y)$$

$$d) \exists_x \forall_{\text{gerade}(y)} x < y$$

$$4) a) \text{ synt. } \times$$

FK(PK, PK)

$$b) \text{ PK(PK2)}$$

synt. \times

$$c) \text{ PK(FK2) - PK - OK}$$

synt. \times

$$5) a) \forall_{1 \leq x < 40} \text{prim}(x^2 + x + 41)$$

$$\forall_x (1 \leq x \wedge x < 40) \Rightarrow \text{prim}(x^2 + x + 41)$$

$$b) \forall_{p \geq 2} \exists_{n \geq 2} \text{prim}(p) \wedge p \leq n$$

$$\forall_p p \geq 2 \Rightarrow \exists_n n \geq 2 \wedge p \leq n \wedge \text{prim}(p)$$

$$6) \neg \forall_p p \geq 2 \Rightarrow \exists_n n \geq 2 \wedge p \leq n \wedge \text{prim}(p)$$

$$\exists_p \neg (p \geq 2) \vee (\exists_n n \geq 2 \wedge p \leq n \wedge \text{prim}(p))$$

$$\exists_p p \geq 2 \wedge \neg \exists_n n \geq 2 \wedge p \leq n \wedge \text{prim}(p)$$

$$\Leftrightarrow \forall_n \neg (n \geq 2 \wedge p \leq n \wedge \text{prim}(p))$$

$$\neg (n \geq 2) \vee p > n \vee \neg \text{prim}(p)$$

$$\exists_{p \geq 2} \forall_{n \geq 2} p > n \vee \neg \text{prim}(p)$$