

LGI1/MAG1 Übung 6

Auszuarbeiten bis 18.11.2025

1. Gegeben seien die Mengen $A = \{\{1, 2, 3\}, 4\}$, $B = \{1, \{2, 3\}, 3, 4\}$ und $C = \{1, 2, 3, 4\}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch?

(a) $\{2\} \in A$

(b) $\forall x \ x \in C \Rightarrow x \in A$

(c) $\exists_{x \in B} \exists_{y \in A} x \in y$

(d) $\exists_{x \in A} \exists_{y \in B} \exists z \ z \in x \wedge z \in y$

Hinweis: Wir kennen offiziell die Mengendarstellung der natürlichen Zahlen nicht. Daher ist für uns keine natürliche Zahl ein Element einer anderen natürlichen Zahl, also gelten etwa $2 \notin 3$, $1 \notin 3$ oder $1 \notin 2$.

2. Seien A , B und C wie in Aufgabe 1. Berechnen Sie:

(a) $\{x \mid x \in C \wedge \exists_{y \in B} x \in y\}$

(b) $\{x \mid x \in A \wedge 3 \in x\}$

(c) $\{x \mid x \in B \wedge x \in C \wedge \exists_{y \in A} x \in y\}$

3. Seien A , B und C wie in Aufgabe 1. Berechnen Sie folgende Mengen:

(a) $A \cup B$

(b) $B \cup C$

(c) $A \cap B$

(d) $A \cap C$

(e) $A \setminus B$

(f) $C \setminus B$

4. Die folgenden Mengen sind entweder über charakterisierende Eigenschaften definiert, oder über Terme und Eigenschaften. Begründen Sie, welche der unten angegebenen Element- bzw. Mengen-Beziehungen wahr, und welche falsch sind. Beachten Sie speziell die potentiellen Schwierigkeiten bei der Unterscheidung des Mengen-*für-die-gilt* Striches $\big|$ vom *teilt*-Strich \mid : Nur der erste horizontale Trennstrich in einer Menge ist der *für-die-gilt*-Strich; dieser ist hier außerdem zur besseren Unterscheidung etwas größer dargestellt als der *teilt*-Strich.

(a) $6 \in \{x \in \mathbb{N} \mid \exists_{y \in \mathbb{N}} y^2 = x\}$

(b) $\{10\} = \{k \in \mathbb{N} \mid 2 \mid k \wedge k \mid 20\}$

(c) $\{4, 5\} \subseteq \{k \in \mathbb{N} \mid k \mid 20\}$

(d) $\{7, 8, 9\} \subseteq \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$

(e) $\{4k \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$

(f) $\{k^2 \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq \{x \in \mathbb{N} \mid \exists_{y \in \mathbb{N}} y^2 = x\}$

5. Gegeben sei die Menge $E = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$. Finden Sie für die Mengen \emptyset , $\{\emptyset\}$ und $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ heraus, ob diese Elemente oder Teilmengen (oder beides) von E sind.
6. Definieren Sie die folgenden Mengen durch ihre charakterisierenden Eigenschaften, und nicht durch reine Aufzählung ihrer Elemente. Definieren Sie dazu zuerst die einstellige Prädikatenkonstante $istQuadratzahl(x)$, die genau dann wahr ist, wenn x eine Quadratzahl ist, also das Quadrat einer natürlichen Zahl. Die ersten Quadratzahlen sind somit 1, 4, 9, 16, 25, ...

- (a) Die Menge aller Quadratzahlen zwischen 20 und 120.
- (b) Die Menge aller geraden Zahlen, die sich als Summe von zwei Quadratzahlen schreiben lassen.
- (c) Die Menge aller Zahlen, deren Teiler (außer der Zahl selbst) alle kleiner als 10 sind.

$$1a) \{2\} \in A \Leftrightarrow f$$

$$b) \forall x \ x \in C \Rightarrow x \in A$$

$$2 \in C \Rightarrow 2 \in A$$

$$\Leftrightarrow w \Rightarrow f$$

$$\Leftrightarrow \underline{f}$$

$$x \leftarrow 2$$

$$c) \exists_{x \in B} \exists_{y \in A} x \in y$$

$$x \leftarrow 3$$

$$y \leftarrow \{1, 2, 3\}$$

$$3 \in \{1, 2, 3\} \quad \checkmark$$

$$d) \exists_{x \in A} \exists_{y \in B} \exists z \ z \in x \wedge z \in y$$

$$x \leftarrow \{1, 2, 3\}$$

$$y \leftarrow \{2, 3\}$$

$$z \leftarrow 3$$

$$3 \in \{1, 2, 3\} \wedge 3 \in \{2, 3\} \quad \checkmark$$

$$\Leftrightarrow w$$

$$\Leftrightarrow w$$

$$2a) \{x \mid x \in C \wedge \exists_{y \in B} x \in y\}$$

$$\{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow \underline{\{2, 3\}}$$

$$\neg \exists_{y \in B} x \in y$$

$$b) \{x \mid x \in A \wedge 3 \in x\} = \{\{1, 2, 3\}\}$$

$$A = \{\{1, 2, 3\}, 4\} \quad \neg 3 \in x$$

$$c) \{x \mid x \in B \wedge x \in C \wedge \exists_{y \in A} x \in y\} = \{x \in \{1, 3, 4\} \mid \exists_{y \in A} x \in y\} = \underline{\{1, 3\}}$$

$$B = \{1, \{2, 3\}, 3, 4\}$$

$$C = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\{1, 3, 4\} \quad \neg \exists_{y \in A} x \in y$$

$$3) A = \{\{1, 2, 3\}, 4\}, B = \{1, \{2, 3\}, 3, 4\} \text{ und } C = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$a) A \cup B = \{1, \{1, 2, 3\}, \{2, 3\}, 3, 4\}$$

$$b) B \cup C = \{1, 2, \{2, 3\}, 3, 4\}$$

$$c) A \cap B = \{4\}$$

$$d) A \cap C = \{4\}$$

$$e) A \setminus B = \{\{1, 2, 3\}\}$$

$$f) C \setminus B = \{2\}$$

$$4) a) 6 \in \{x \in \mathbb{N} \mid \exists_{y \in \mathbb{N}} y^2 = x\} \quad \text{Xf} \quad 6 \text{ ist keine Quadratzahl}$$

$$b) \{10\} = \{k \in \mathbb{N} \mid 2 \mid k \wedge k \mid 20\} \quad \text{Xf} \quad \{2, 4, 10\} \text{ ist der evaluierte Wert}$$

$$c) \{4, 5\} \subseteq \{k \in \mathbb{N} \mid k \mid 20\} \quad \checkmark w \quad 4 \mid 20 \wedge 5 \mid 20 \Leftrightarrow w$$

$$d) \{7, 8, 9\} \subseteq \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\} \quad \text{Xf} \quad \neg \exists_{k \in \mathbb{N}} 2k + 1 = 8$$

$$e) \{4k \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq \{2k \mid k \in \mathbb{N}\} \quad \checkmark w \quad \text{Jede vierte Zahl ist autom. jede zweite Zahl}$$

$$f) \{k^2 \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq \{x \in \mathbb{N} \mid \exists_{y \in \mathbb{N}} y^2 = x\} \quad \checkmark w \quad \text{Nach der Gleichung, oder!}$$

$$5) E = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

\emptyset :	$\emptyset \in E$	✓ w	$\emptyset \subseteq E$	✓ w	\emptyset hat nix, was nicht in E sei kann.
$\{\emptyset\}$:	$\{\emptyset\} \in E$	✓ w	$\{\emptyset\} \subseteq E$	✓ w	
$\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$:	$\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in E$	✓ w	$\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subseteq E$	✓ w	

$$6) \text{ ist Quadratzahl}(x) \Leftrightarrow \exists_{y \in \mathbb{N}} y^2 = x$$

$$a) \{x \mid \text{ist Quadratzahl}(x) \wedge 20 < x < 120\} \quad \{x^2 \mid x \in \mathbb{N} \wedge 20 < x^2 < 120\} \quad ???$$

$$b) \{x \mid 2 \mid x \wedge \exists_{y,z} \text{ist Quadratzahl}(y) \wedge \text{ist Quadratzahl}(z) \wedge y+z=x\}$$

$$c) \{x \mid \forall_y y \mid x \Rightarrow y=x \vee y < 10\}$$