

MAA2/MAN2 Übung 8

Auszuarbeiten bis 6./7.5.2025

1. Von einer linearen Funktion $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ kennen Sie folgende Informationen:

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die Matrix dieser linearen Funktion an, und berechnen Sie $f \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

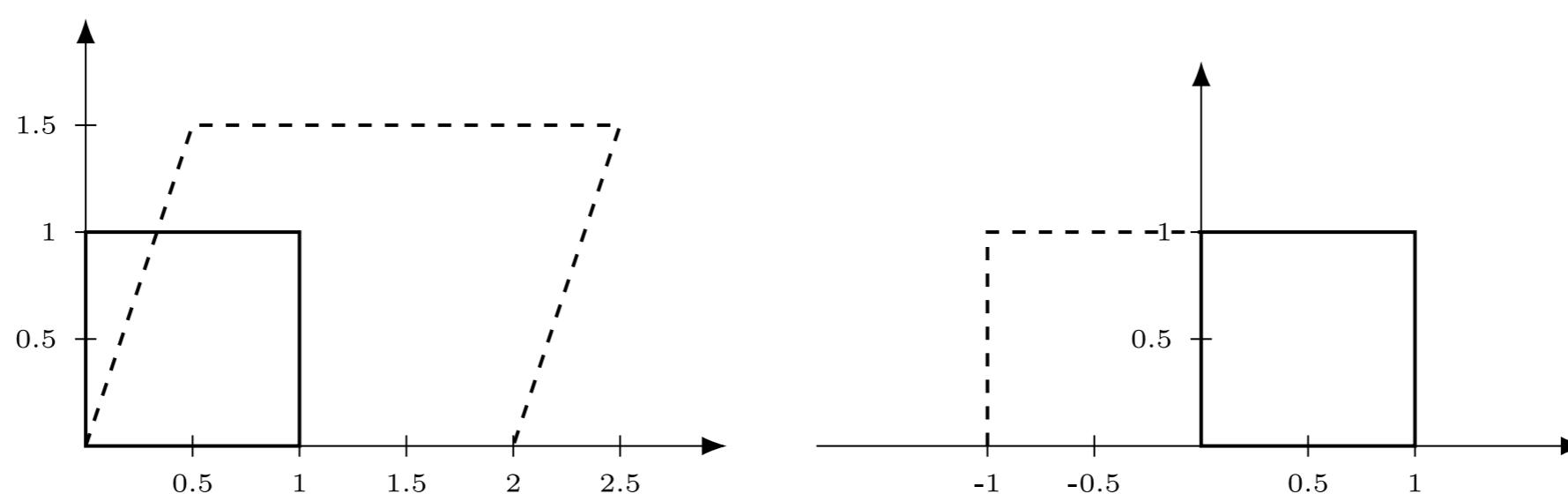
2. Gegeben seien die beiden linearen Funktionen

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + 2z \\ -2x + 3z \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ -2x - y \\ -x + y \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die Matrizen für f und g bezüglich der Standardbasen an (nennen wir diese A und B). Berechnen Sie $f(g(x))$, und lesen Sie daraus die Matrix dieser Hintereinanderausführung ab.

Vergleichen Sie diese Matrix mit dem Produkt $A \cdot B$.

3. Geben Sie für jede der unten gezeigten Graphiken die Matrizendarstellung der linearen Funktion an, die aus dem Einheitsquadrat die gestrichelte Figur erzeugt.



Hinweis: Die Spalten der gesuchten Matrix werden von den Vektoren gebildet, auf die die Vektoren der Standardbasis abgebildet werden.

Berechnen Sie für beide lineare Funktionen, wohin der Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ abgebildet wird.

4. Berechnen Sie den Rang der folgenden drei Matrizen, indem Sie sie auf obere Dreiecksform bringen, und dort den Rang als die Anzahl der Nicht-Null-Zeilen ablesen.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & 2 \\ -5 & 3 & 8 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

5. Gegeben seien die beiden linearen Funktionen $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ mit Matrix A und $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit Matrix B :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ -5 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Der Rang von A ist 3, der Rang von B ist 2 (das müssen Sie nicht nachrechnen). Argumentieren Sie (nicht formal beweisen), dass dann weder f noch g surjektiv sein können.

6. Beweisen Sie, dass sich die lineare Hülle einer Menge von Vektoren nicht ändert, wenn man einen Vektor (z.B. den letzten) durch die Summe aus diesem Vektor und einem der anderen Vektoren ersetzt:

$$L(\{v_1, \dots, v_n\}) = L(\{v_1, \dots, v_n + \lambda v_k\}).$$

Wie Sie wissen, gilt für zwei Mengen A und B , dass $A = B$ ist genau dann, wenn $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$ gilt. Um die Aufgabe zu vereinfachen, reicht es, wenn Sie nur einen Teil dieser Konjunktion beweisen, etwa

$$L(\{v_1, \dots, v_n\}) \subseteq L(\{v_1, \dots, v_n + \lambda v_k\}).$$

$$1) \quad m = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad f(x) = m \cdot x$$

$$f \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2+0+0 \\ 0+7+0+2 \\ 9-1+0+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$2) \quad m_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad m_g = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} f \begin{pmatrix} x+2y \\ -2x-y \\ -x+1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x+2y-2x-y-2x+2y \\ -2x-4y-3x+3y \\ -3x+3y \\ -5x-y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

? =

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 2 & -7 & +2 \\ -2 & -3 & & -4 & +3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$3) \quad F_1 = \begin{pmatrix} 0,5 & 2 \\ 1,5 & 0 \end{pmatrix} \quad F_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_1 \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1,5 \end{pmatrix}$$

↳ 3?

seems
wrong

$$F_2 \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

4)

$$A \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -0,5 & 1,5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2,5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2,5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2,5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{h = 3 = rg}}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & 2 \\ -5 & 3 & 8 \end{pmatrix}; \quad \begin{matrix} +3 \\ +5 \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 11 \\ 0 & 13 & 17 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{13}{5}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 11 \\ 0 & 0 & 17 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 11 \\ 0 & 0 & 17 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{R1} \leftrightarrow \text{R2}} \underline{\underline{rg = 3}}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{1} \leftrightarrow \text{2}} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{rg = 2}}$$

5)

A.: Nachdem von beiden Matrizen kein groß dimensionierter Vektorraum aufgespannt wird, der alle Vektoren der Dimension 4 bzw. 3 halten könnte, können auch nicht alle \mathbb{R}^4 bzw. \mathbb{R}^3 Vektoren im Zielbereich angesteuert werden.

6)

$$w \in L(\{v_1, \dots, v_n\}) \Rightarrow w = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

$$v_n = (v_n + \lambda v_k) - \lambda v_k$$

$$\Rightarrow \alpha_n v_n = \alpha_n (v_n + \lambda v_k) - \alpha_n \lambda v_k$$

$$\Rightarrow w = \alpha_1 v_1 + \dots + (\alpha_k - \alpha_n \lambda) v_k + \dots + \alpha_n v_n$$

$$\cdot (v_n + \lambda v_k) \in L(\{v_1, \dots, v_n + \lambda v_k\})$$

Bleibt linearer Faktor element_of R