



# Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey

INGENIERÍA EN CIENCIA DE DATOS Y MATEMÁTICAS

## OPTIMIZACIÓN DE PORTAFOLIOS A TRAVÉS DE CONTROL OPTIMO.

*Hugo Eduardo*

Autor:  
Alan Uriel Merlan Esquivel  
David Peñaloza Pérez

Noviembre 2024

# 1 Introducción

En el ámbito financiero, la gestión óptima de portafolios es un desafío fundamental para los inversionistas que buscan maximizar sus beneficios esperados mientras minimizan los riesgos asociados a las fluctuaciones del mercado. Por lo que este problema se vuelve más complejo cuando se introducen costos de transacción, ya que estos influyen directamente en las decisiones de ajustar o mantener la composición del portafolio. El control óptimo por impulsos surge como una herramienta poderosa para abordar esta problemática, permitiendo modelar y optimizar decisiones de intervención en momentos específicos, maximizando la utilidad acumulada del portafolio.

Este trabajo se enfoca en resolver un problema de control de portafolios que combina activos riesgosos y sin riesgo, modelados mediante ecuaciones diferenciales estocásticas. Utilizando herramientas como las Inecuaciones Variacionales Cuasi-Parabólicas (QVI), definiendo un marco matemático que identifica las regiones de intervención y no intervención, considerando costos fijos y proporcionales asociados a las transacciones. A través de una implementación numérica basada computacionalmente, se simula la evolución del portafolio bajo diferentes escenarios, evaluando el impacto de parámetros como la volatilidad del activo riesgoso y los costos de transacción. El objetivo principal de este estudio es demostrar la eficacia del control por impulsos en la optimización de portafolios, validando los resultados mediante análisis teóricos y numéricos. Este enfoque no solo permite decisiones de intervención más precisas, sino que también aporta una perspectiva innovadora en la gestión financiera, con aplicaciones potenciales en mercados reales donde las condiciones son dinámicas e inciertas.

## 2 Marco Teórico.

### 2.1 Tipos de activos.

En el mundo financiero, los activos se dividen principalmente en dos categorías: activos sin riesgo y activos riesgosos. Los **activos sin riesgo**, como los bonos del gobierno, ofrecen rendimientos estables y predecibles, generalmente con baja volatilidad. Por otro lado, los **activos riesgosos**, como las acciones, presentan fluctuaciones de precio debido a factores de mercado, lo que implica una mayor incertidumbre pero también la posibilidad de obtener mayores retornos. Este contraste crea un dilema para los inversionistas que buscan maximizar su utilidad o satisfacción esperada: deben equilibrar el retorno potencial con el riesgo asociado a los activos que eligen.

Un portafolio es una combinación de activos que posee un inversionista, el cual puede incluir tanto activos sin riesgo como activos riesgosos en distintas proporciones. La composición del portafolio refleja las preferencias del inversionista en términos de riesgo y retorno esperado. Las acciones, al ser activos riesgosos, ofrecen la oportunidad de captar mayores rendimientos en comparación con los activos sin riesgo; sin embargo, su naturaleza volátil también incrementa el riesgo de pérdidas. Para un inversionista racional, la elección de invertir en acciones y otros activos riesgosos responde a su deseo de maximizar la utilidad esperada, adaptando su portafolio para obtener el mayor retorno posible dentro de su tolerancia al riesgo.

### 2.2 Ecuaciones Diferenciales Estocásticas (EDEs)

Para modelar el comportamiento de los precios de los activos en un contexto de incertidumbre, utilizamos herramientas matemáticas avanzadas como las **ecuaciones diferenciales estocásticas**

(EDEs). Estas ecuaciones permiten describir la evolución de los precios a lo largo del tiempo de manera continua y aleatoria, capturando la naturaleza impredecible del mercado. Una EDE típica se compone de una parte determinista, que representa el crecimiento o tendencia esperada de los precios, y una parte estocástica, que refleja la aleatoriedad y los factores inesperados que afectan los precios.

## 2.3 Proceso Browniano y Estocasticidad

En nuestro modelo simplificado, asumimos que el precio del activo riesgoso sigue un **proceso browniano**, también conocido como movimiento browniano. Este proceso es un caso especial de EDE que describe una trayectoria continua y aleatoria, caracterizada por una incertidumbre constante, donde las variaciones de precio son impredecibles y siguen una distribución normal. Además, el proceso browniano tiene la propiedad de martingala, lo que implica que no hay una tendencia inherente a largo plazo en las variaciones aleatorias, permitiendo modelar fluctuaciones alrededor de un valor promedio.

Utilizando un proceso browniano, el precio del activo riesgoso se describe por una ecuación diferencial del tipo:

$$dP(t) = \mu P(t) dt + \sigma P(t) dW(t) \quad (1)$$

donde  $P(t)$  es el precio del activo riesgoso en el tiempo  $t$ ,  $\mu$  representa la tasa de crecimiento esperado,  $\sigma$  es la volatilidad del activo, y  $dW(t)$  representa un cambio infinitesimal en un proceso de Wiener (o browniano), capturando la aleatoriedad.

## 2.4 Control de impulso

El control de impulso es una forma de controlar a través de impulsos, stopping times y controles estocásticos un sistema dinámico. En este caso, se hablan de EDE's continuas con borde no reflectivo. Es decir el modelo tomará la forma general:

$$dy(t) = g(y(t), v(t), t)dt + \sigma(y(t), t)dw(t)$$

Donde  $g(y(t), v(t), t)$  es mi *drift process* (describe la parte determinista),  $\sigma(y(t), v(t), t)$  es mi *diffusion process* (describe las variaciones aleatorias) y  $v(t)$  es mi variable de control; es decir, aquella con lo que cambio mis inputs para obtener un output deseado.

Además, nuestro estado  $y(t)$  sufre de saltos(impulsos) bajo ciertas condiciones o en ciertos tiempos( conocidos como *stopping times*), por lo que es necesario tenerlos presente al modelarlo. Normalmente, se busca controlar la intensidad de los saltos, el momento de los mismos y la cantidad. Pero en este problema, solo se busca optimizar los primeros dos.

De forma general, la evolución del sistema se puede ver cómo:

$$\begin{aligned} dy &= g(y(t), t)dt + \sigma(y(t), t)dw(t), \theta_i \leq t \leq \theta_{i+1} \\ y(\theta_i) &= y(\theta_i - 0) + \xi_i \\ y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

Donde  $\theta$  son los stopping times y  $\xi$  es la intensidad del salto.

Para poder resolver este problema de forma optima, normalmente se usa un funcional  $J$  que se encarga de evaluar el acumulado de nuestras decisiones a lo largo del tiempo. De esta forma, se busca maximizar o minimizar el valor de  $J$  dependiendo del problema.

De forma general, un funcional  $J$  para control de impulso se ve la siguiente forma:

$$J = E\left[\int_0^T e^{-\alpha t} f(y(t), t) dt + \sum_i c(\xi_i) e^{-\alpha \theta_i}\right]$$

Donde  $c(\xi_i)$  representa el costo de hacer el impulso  $i$ .

También, es necesario resolver de qué va a depender nuestro control. Lo habitual es que sea dependiente de estados y controles previos, si solo dependen del estado actual se le llama control de Markov. Una vez determinado eso, es necesario saber cuándo se quiere que el estado se comporte diferente, es decir en qué momentos se requiere un impulso. Para esto se define un **continuation set** y un **action set**. Donde uno indica cuando el estado se desarrolla libremente y el otro indica momentos donde es necesaria la intervención respectivamente.

Para poder resolver lo planteado anteriormente es común declarar una serie de inecuaciones quasi-variacionales. Estas pueden ser de varios tipos. Aquí se define un operador diferencial de segundo orden  $\mathbf{L}$  y un operador no lineal  $\mathbf{M}$  creciente, el cual tiene que cumplir varias propiedades. De esa forma, se puede definir:

$$\begin{cases} \mathbf{L}u - f \leq 0 \\ u - \mathbf{M}u \leq 0 \\ (\mathbf{L}u - f)(u - \mathbf{M}u) = 0 \end{cases}$$

## 2.5 Inecuaciones Variacionales Cuasi-Parabólicas (QVI)

Las **Inecuaciones Variacionales Cuasi-Parabólicas (QVI)** son herramientas matemáticas utilizadas en problemas de control óptimo para decidir cuándo intervenir en un portafolio de inversión con costos de transacción. En el contexto de portafolios, estas inecuaciones permiten modelar situaciones en las que un inversionista puede ajustar su portafolio solo en momentos específicos, optimizando sus decisiones en función de los beneficios esperados y los costos asociados.

En el control de portafolios, la QVI establece dos regiones clave: la **región de no intervención** y la **región de intervención**. En la región de no intervención, el inversionista deja que el portafolio evolucione sin cambios, permitiendo que los activos sigan su dinámica de mercado sin incurrir en costos adicionales. En la región de intervención, por otro lado, se justifica un ajuste en el portafolio, pues los beneficios de intervenir superan los costos de transacción, maximizando así la utilidad esperada.

Una QVI típica en este contexto incluye una desigualdad temporal que asegura el valor del portafolio en la región de no intervención, un operador diferencial que modela la aleatoriedad de los precios y una condición de frontera que define el límite entre intervenir o no. Este enfoque permite al inversionista maximizar su utilidad total, reduciendo intervenciones innecesarias y aprovechando las oportunidades de mercado de manera óptima.

## 3 Desarrollo

### 3.1 Planteamiento

El problema de control de portafolio optimo plantea cómo un inversionista debe distribuir su riqueza entre dos tipos de activos, uno sin riesgo y otro riesgoso, a lo largo de un periodo de

tiempo. El activo sin riesgo es determinista, mientras el activo riesgoso está sujeto a una variable aleatoria dentro del mercado. Para modelarlos se planteará el sistema de precios.

En este contexto, utilizamos las variables  $p$  y  $s$  para representar la distribución de la riqueza en el portafolio:

- $P$ : Representa el **precio del activo**.
- $s$ : Representa la **propiedad porcentual**

La ecuación diferencial para el precio del activo sin riesgo es:

$$dP_0(t) = \mu_0 P_0(t) dt \quad (2)$$

donde:

- $P_0(t)$ : Precio del **activo sin riesgo** en el tiempo  $t$ .
- $\mu_0$ : **Tasa de crecimiento de precio** del activo sin riesgo, que representa el retorno fijo (como el de un bono gubernamental).
- $dt$ : Cambio infinitesimal en el tiempo.

La ecuación diferencial para el precio del activo riesgoso es:

$$dP_1(t) = \mu_1 P_1(t) dt + \sigma P_1(t) dZ(t) \quad (3)$$

donde:

- $P_1(t)$ : precio del **activo riesgoso** en el tiempo  $t$ .
- $\mu_1$ : **Tasa de crecimiento del activo con riesgo**.
- $\sigma$ : **Volatilidad** del activo riesgoso, que mide la incertidumbre o variabilidad en el precio.
- $dZ(t)$ : Incremento en el **proceso de Wiener** o **movimiento Browniano**, que introduce variabilidad aleatoria en el modelo.

En este caso, queremos optimizar nuestra utilidad por lo que se modeló de la siguiente forma:

$$X = sP_0 + (1 - s)P_1 \quad (4)$$

Al derivarla, se obtiene que en el instante  $t$ :

$$dX_t = (\mu_0 s_t + (1 - s_t)\mu_1)X_t dt + (s_t - 1)\sigma X_t dZ(t) \quad (5)$$

Se denomina

$$\begin{aligned} a(\cdot, t) &= (\mu_0 s_t + (1 - s_t)\mu_1)X_t \\ b(\cdot, t) &= (s_t - 1)\sigma X_t \end{aligned}$$

Se conoce que  $\mu_0, \mu_1$  y  $\sigma$  son positivas, pues el precio no puede ser negativo. Esto nos permite definir a nuestro operador diferencial de segundo orden como:

$$\mathbf{L}u \equiv u_t + \mu_0 p_0 u_{p_0} + \mu_1 p_1 u_{p_1} + 0.5\sigma^2 p_1^2 u_{p_1 p_1} \quad (6)$$

donde:

- $u_t$ : Derivada parcial de  $u$  con respecto al tiempo  $t$ .
- $u_{P_0}$ : Derivada parcial de  $u$  con respecto al precio del activo sin riesgo  $P_0$ .
- $u_{P_1}$ : Derivada parcial de  $u$  con respecto al precio del activo riesgoso  $P_1$ .
- $u_{P_1 P_1}$ : Segunda derivada parcial de  $u$  con respecto a  $P_1$ .

En cambio, nuestro operador de intervención  $M$  se define como:

$$\mathbf{M}u(\mathbf{p}, \mathbf{s}, t) = \sup_{s' \in (0,1)} \{U(\Gamma(\mathbf{p}, \mathbf{s}, \mathbf{s}'), r) - c\} \quad (7)$$

Donde  $\Gamma((P_0, P_1, s, s'), t) = (s + s')P_0 + (1 - s - s')P_1$  es la función de impulso y  $c$  es un costo fijo de transacción. En cuanto a la función de utilidad  $U(x)$  se definió como:

$$U(X) = \frac{1}{\gamma} X^\gamma \quad (8)$$

Esto con la intención de distribuir el porcentaje de inversión  $s$  de forma más equitativa. Finalmente, las inecaciones quasi-varacionales para este caso serían:

$$\mathbf{L}u \leq 0, \quad (9)$$

$$u \geq \mathbf{M}u, \quad (10)$$

$$(\mathbf{L}u)(u - \mathbf{M}u) = 0 \quad (11)$$

- $u$ : Es una solución a las QVI's.
- $\mathbf{L}u \leq 0$ : Indica que la utilidad esperada no aumenta sin intervención.
- $u \geq \mathbf{M}u$ : Asegura que la utilidad sin intervenir es al menos igual a la utilidad tras una transacción, considerando los costos.
- $(\mathbf{L}u)(u - \mathbf{M}u) = 0$ : Define que el inversionista solo intervendrá cuando hacerlo maximice su utilidad.

Usando nuestro operador no lineal  $\mathbf{M}$ , se puede determinar cuando nos conviene realizar un impulso y cuando no. En este caso:

$$\mathbf{C} = \{u > \mathbf{M}u\}$$

$$\mathbf{A} = \{\mathbf{C}^c\}$$

En resumen, no se actúa cuando mi solución  $u$  es mayor que el óptimo que tendría por hacer un impulso. En el caso contrario, se actúa.

Para finalizar, en este caso mi funcional se define de forma general:

$$J(\mathbf{p}, \mathbf{s}, t, v) = E_{\mathbf{p}, \mathbf{s}, t} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} U(X_k, \theta_k) I_{(\theta_k < T)} + u(X_T, T) \right]$$

Por como se define mi solución, resulta que está es igual al funcional.

Donde:

- $I$ : Función indicadora la cual vale 1 si  $\theta_k < T$  y 0 si no.
- $J(p, s, t, v)$ : Es el valor funcional que representa la utilidad esperada total del inversionista, evaluada en las condiciones iniciales de precio  $p$ , riqueza en el activo sin riesgo  $s$ , tiempo  $t$  y estado  $v$ .
- $\mathbb{E}_{p,s,t}$ : Denota el valor esperado, condicionado a los valores iniciales de  $p$ ,  $s$  y  $t$ .
- $\sum_{k=1}^{\infty} U(X_k)I_{\{\theta_k < T\}}$ : Es una suma que recorre todos los impulsos o intervenciones en el portafolio. Para cada impulso  $k$  en el tiempo  $\theta_k$ , se calcula la utilidad  $U$  del costo de transacción  $C(p, \theta_k)$ , siempre y cuando el impulso ocurra antes del tiempo final  $T$ .
- $u(X_T)$ : Representa la utilidad esperada en el tiempo final  $T$ , dado el estado  $s'$  después de la última transacción, reflejando el valor residual del portafolio al final del horizonte temporal.

Ademas, defino mi función valor  $V$  como:

$$V(t, x) = \sup_{(\theta, s)} \{J(t, x; \theta, s)\} \quad (12)$$

### 3.2 Implementación Numérica

La implementación numérica del problema de control de impulso fue diseñada para resolver de manera iterativa las inecuaciones variacionales cuasi-parabólicas (QVI) asociadas a la optimización del portafolio. Este proceso combinó formulaciones matemáticas con simulaciones computacionales que permitieron evaluar dinámicamente las decisiones de intervención en función de los parámetros y restricciones establecidos.

La configuración inicial estableció los parámetros fundamentales del modelo, tales como el horizonte temporal  $T$ , que delimita el período de evaluación del portafolio, y las tasas de crecimiento  $\mu_0$  y  $\mu_1$ , que describen la evolución esperada de los precios de los activos sin riesgo y con riesgo, respectivamente. También se incorporó la volatilidad  $\sigma$  como una medida de la incertidumbre del mercado. Los costos de transacción fueron considerados mediante una combinación de un componente fijo ( $c$ ).

Para garantizar la factibilidad computacional, el espacio continuo de estados y el horizonte temporal se discretizaron. Los precios de los activos ( $P_0, P_1$ ) se dividieron en  $N$  puntos equidistantes dentro de 1 año.

Para este caso, se usaron los resultados de [1] para adaptar las Q.V.I a un problema de programación dinámica. En este caso se sustituyen las Q.V.I por su versión en la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman:

$$\min\left\{-\frac{\delta V}{\delta t} - \sup\left\{\frac{1}{2}b(\cdot)^2 \frac{\delta^2 V}{\delta X^2} + a(\cdot) \frac{\delta V}{\delta X}\right\}, V - \mathbf{MV}\right\} = 0 \quad (13)$$

$$\min\{V(T, \cdot) - g, V(T, \cdot) - \mathbf{MV}\} = 0 \quad (14)$$

$$\mathbf{MV}(t, x) = \sup_{s \in (0,1)} \{V(t, \Gamma(t, x, s)) - c\} \quad (15)$$

Como en este caso mi tiempo es finito(pues solo se observa 1 año) y mi coeficiente  $b$  no depende de mi control  $s$ . La ecuación anterior se puede resolver por **impulso explícito**, cuya formula está en [1].

$$V_i^n - \frac{1}{2}(b_i^n)^2(D_2 V^n)_i \Delta T = \sup_{d_i \in \{0,1\}, s \in (0,1)} \{(1-d_i)(interp(V^{n-1}, x_i + a_i^n(s_i)\Delta t) + d_i(M_n V^{n-1})_i)\} \quad (16)$$

Que tiene la forma:

$$AV^n = y$$

Donde.

$$A = I + \frac{\Delta \tau}{2(\Delta x)^2} \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ -(b_1^n)^2 & 2(b_1^n)^2 & -(b_1^n)^2 & & & \\ 0 & -(b_2^n)^2 & 2(b_2^n)^2 & -(b_2^n)^2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -(b_{M-1}^n)^2 & 2(b_{M-1}^n)^2 & -(b_{M-1}^n)^2 \\ & & & & 0 \end{pmatrix},$$

Donde  $(M_n V^n)_i$  es la aproximación de  $\mathbf{MV}$  definida como:

$$(M_n V)_i = \sup_{s \in (0,1)} \{interp(U, \Gamma(n\Delta T, x_i, s_i)) - c\} \quad (18)$$

Es decir en cada paso de tiempo, se resuelve un sistema linear para la dimensión "espacial".

## 4 Resultados

Primero, se simularon el activo sin riesgo y el activo con riesgo.

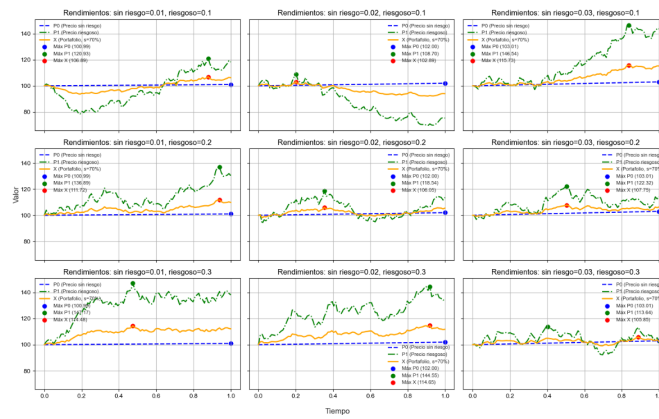


Figure 1: Simulación de precios y portafolio



El esquema iterativo garantizó que se evaluarán todas las posibles decisiones de intervención en cada instante del tiempo, considerando tanto los costos como los beneficios asociados. La solución numérica fue implementada en Python utilizando herramientas como **Numpy** y **Scipy** para manejar las operaciones matriciales y resolver los operadores diferenciales y no lineales. Además, **Matplotlib** se empleó para visualizar los resultados, generando gráficas que muestran la evolución del portafolio, los momentos de intervención ( $\theta_i$ ) y el efecto en la utilidad.

Ejemplo 1



Figure 2: Impacto de las intervenciones sobre la utilidad del portafolio

## Ejemplo 2

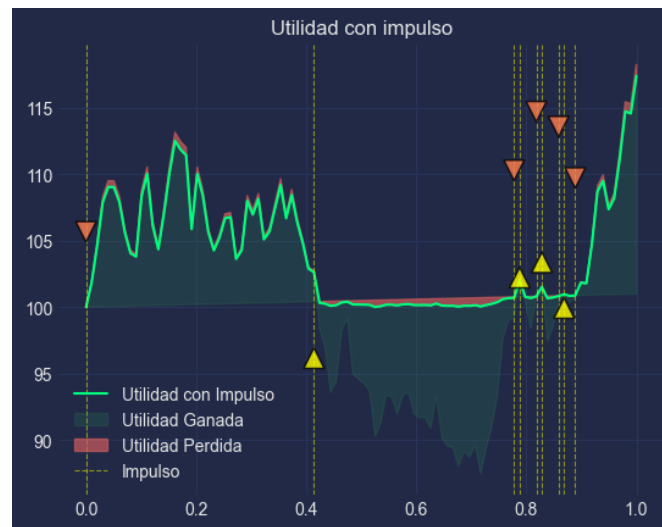


Figure 3: Impacto de las intervenciones sobre la utilidad del portafolio

Los resultados obtenidos a partir de la implementación del modelo de control por impulsos evidencian su efectividad para optimizar la utilidad acumulada del portafolio bajo condiciones de mercado dinámicas. En la Figura 1 se muestra la evolución de la utilidad del portafolio a lo largo del tiempo, resaltando los momentos de intervención marcados por los triángulos amarillos. La línea verde representa la utilidad acumulada con las intervenciones, mientras que las áreas sombreadas destacan los componentes de utilidad ganada (en rojo) y utilidad perdida (en verde oscuro). Estas intervenciones estratégicas permiten al modelo ajustar las proporciones del portafolio de manera eficiente, maximizando los beneficios netos mientras se minimizan los costos asociados a cada ajuste.

Finalmente, la integración de ambos activos en la estrategia del portafolio refuerza la robustez del modelo. Mientras que el activo sin riesgo proporciona una base estable para mitigar la exposición a la volatilidad, el activo riesgoso impulsa las decisiones de ajuste al generar oportunidades de mejora en la utilidad acumulada. Estos resultados validan la eficacia del enfoque implementado y destacan su potencial para ser utilizado en contextos de gestión de portafolios en mercados reales.

Por otro lado, el código es el siguiente:

[Descargar archivo en Google Drive.](#)

## 5 Análisis y Discusión

Aunque los resultados obtenidos son prometedores, el modelo presenta ciertas limitaciones. La suposición de una volatilidad constante ( $\sigma$ ) puede no ser completamente representativa de los mercados financieros reales, donde la volatilidad es frecuentemente estocástica. Además, el análisis se limita a un portafolio con un único activo riesgoso y uno sin riesgo, lo que restringe su aplicabilidad a escenarios más complejos con múltiples activos.

Otra limitación es la dependencia de los parámetros iniciales, como los costos de transacción y la volatilidad, los cuales pueden ser difíciles de estimar con precisión en un entorno real. En futuros trabajos, sería interesante explorar cómo modelos más sofisticados, como aquellos con volatilidad estocástica o activos correlacionados, podrían mejorar la precisión y aplicabilidad del enfoque.

## 6 Conclusión

En este trabajo se desarrolló e implementó un modelo de control por impulsos para la optimización de portafolios financieros, integrando un activo riesgoso y sin riesgo con un costo fijo de transacción. Los resultados obtenidos a partir de simulaciones numéricas confirmaron la efectividad del modelo para maximizar la utilidad adaptándose dinámicamente a distintas condiciones de mercado.

A pesar de sus fortalezas, el modelo presenta ciertas limitaciones. La asunción de una volatilidad constante y la restricción a un único activo riesgoso limitan su aplicabilidad en escenarios más complejos con múltiples activos o volatilidad estocástica. Estas limitaciones abren oportunidades para futuras investigaciones, como la extensión del modelo a portafolios multclasificados o la incorporación de volatilidades dependientes del tiempo. Además, sería interesante explorar la eficiencia computacional del modelo mediante métodos numéricos más avanzados.

En conclusión, este trabajo proporciona un marco sólido para la gestión dinámica de portafolios, destacando la importancia del control por impulsos como una herramienta eficaz para tomar decisiones estratégicas en entornos financieros complejos. Los resultados obtenidos refuerzan su

utilidad práctica y su potencial para ser adaptado a problemas más generales y realistas en el futuro.

## Referencias

- [1] Parsiad Azimzadeh. “Impulse Control in Finance: Numerical Methods and Viscosity Solutions”. In: (Dec. 2017). URL: <http://arxiv.org/abs/1712.01647>.
- [2] J. F. Eastman. *OPTIMAL IMPULSE CONTROL PORTFOLIOS*. 2016.
- [3] GBM. *¿Qué es un portafolio de inversión? Conoce sus tipos y los pasos para crearlo*. Sept. 2024. URL: <https://gbm.com/academy/que-es-un-portafolio-de-inversion-conoce-sus-tipos-y-pasos-para-crearlo/>.
- [4] D. Hernández-Hernández. “Movimiento Browniano y ecuaciones de Hamilton-Jacobi”. In: *Carta Informativa 42, SMM* (2004).
- [5] B. Øksendal. *Stochastic differential equations: an introduction with applications*. Springer-Verlag, 1992.
- [6] A. Piunovskiy et al. “Optimal impulse control of dynamical systems”. In: *SIAM Journal on Control and Optimization* 57.4 (2019), pp. 2720–2752. DOI: 10.1137/18M1212069.
- [7] H. R. Ramirez. *OPTIMAL DECISIONS IN ILLIQUID HEDGE FUNDS*. 2016. URL: [https://pure.manchester.ac.uk/ws/portalfiles/portal/60830758/FULL\\_TEXT.PDF](https://pure.manchester.ac.uk/ws/portalfiles/portal/60830758/FULL_TEXT.PDF).
- [8] B. de Saporta, F. Dufour, and Huilong Zhang. *Numerical methods of simulation and optimization of piecewise deterministic Markov processes: application to reliability*. ISTE, Ltd; John Wiley Sons, 2016.
- [9] UNAM. *Publicaciones*. URL: <http://lya.fciencias.unam.mx/lars/Publicaciones/rincon-do2006b.pdf>.
- [10] J. H. Van Schuppen. *Control and System Theory of Discrete-Time Stochastic Systems*. Springer Nature, 2021.