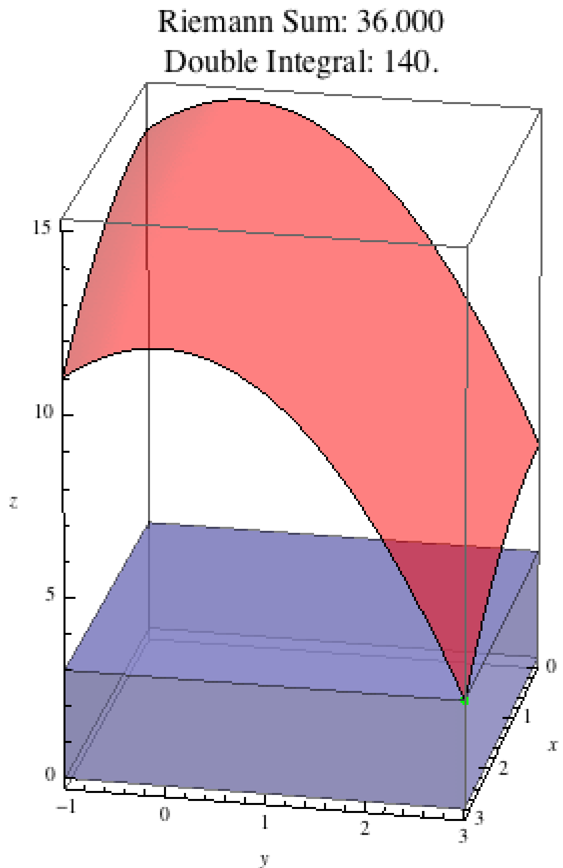
Monte Carlo

Ulam / von Neumann

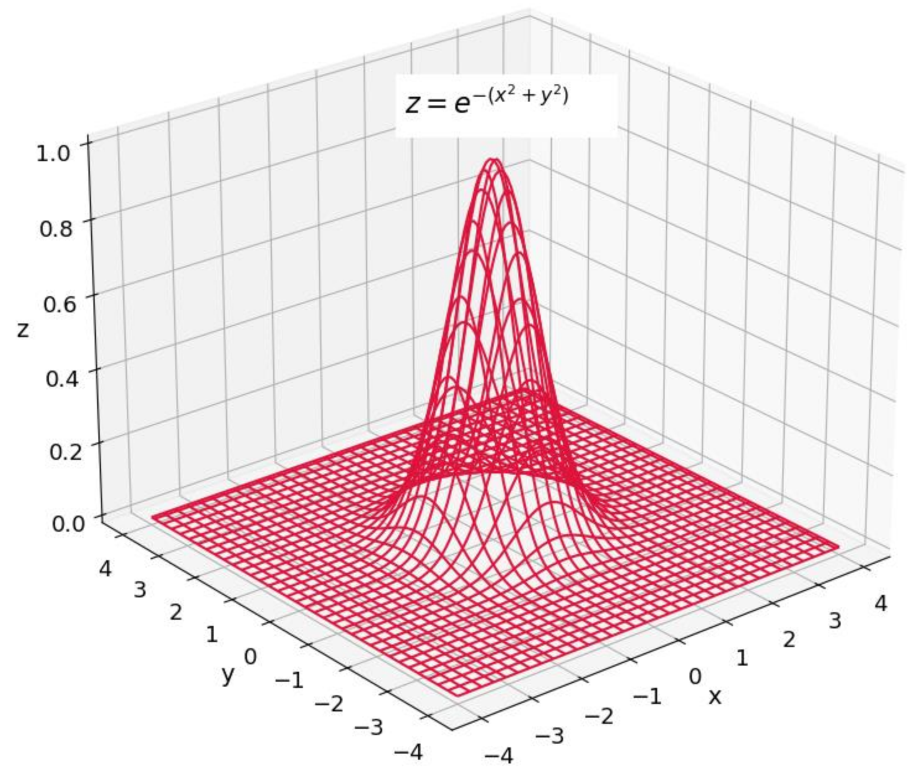
Javier Amezcua
MA2008B

Cuando las integrales se complican

Podemos generalizar la integrales numéricas a 2 o más dimensiones.
Nuestros elementos fundamentales ya no son rectángulos, sino prismas.

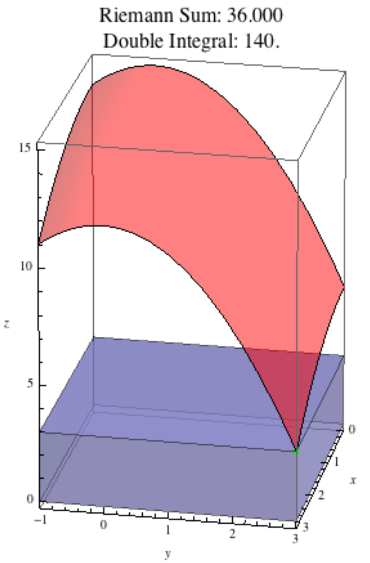


Fuente: U. of Michigan



Cuando las integrales se complican

Empiezan a haber complicaciones al momento de plantear las integrales.



Fuente: U. of Michigan

a) Puede que los límites de integración sean funciones y no valores fijos.

b) El número de puntos a evaluar crece geométricamente.

$$N_{\text{total}} = N_1 \times N_2 \times \cdots \times N_D \approx \tilde{N}^D = e^{D ln(\tilde{N})}$$

El problema puede volverse muy difícil
(maldición de la dimensionalidad)

El método Monte Carlo

Utilizamos métodos de probabilidad para resolver ecuaciones en N dimensiones. Empecemos en **1D**.

Si tenemos una integral de la forma: $$I(a,b) = \int_a^b g(x)f(x)dx$$

El método Monte Carlo

Utilizamos métodos de probabilidad para resolver ecuaciones en N dimensiones. Empecemos en **1D**.

Si tenemos una integral de la forma: $I(a,b) = \int_a^b g(x) f(x) dx$

Si podemos interpretar $f(x)$ como una pdf, entonces la integral

$$I(a,b) = E_f[g(x)]$$

es un valor esperado. Esto se aproximar por su estimador muestral.

$$\hat{I}(a,b) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} x_n$$

Si la muestra viene de la distribución *f(x)*.

El método Monte Carlo

Nota: en general encontraremos las integrales de esta forma.

$$I(a,b) = \int_a^b g(x)dx$$

El método Monte Carlo

Nota: en general encontraremos las integrales de esta forma.

$$I(a,b) = \int_a^b g(x)dx$$

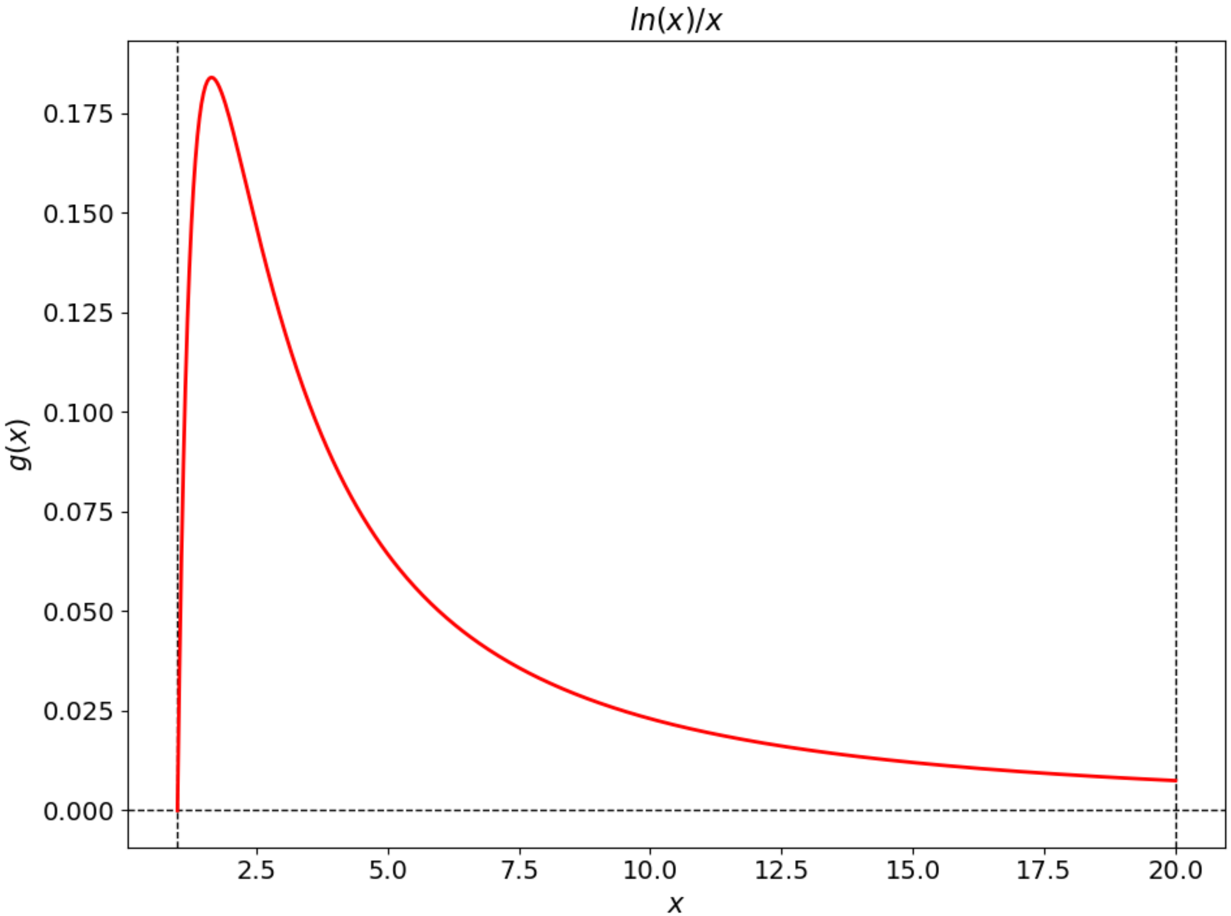
Puedes completar la integral usando al buen Nikita Nipone:

$$I(a,b) = (b-a)\int_a^b \frac{g(x)}{b-a}dx$$

Estamos usando una distribución auxiliar **U[a,b]**. Si logramos muestrear las *x* de esa distribución, ya la hicimos.

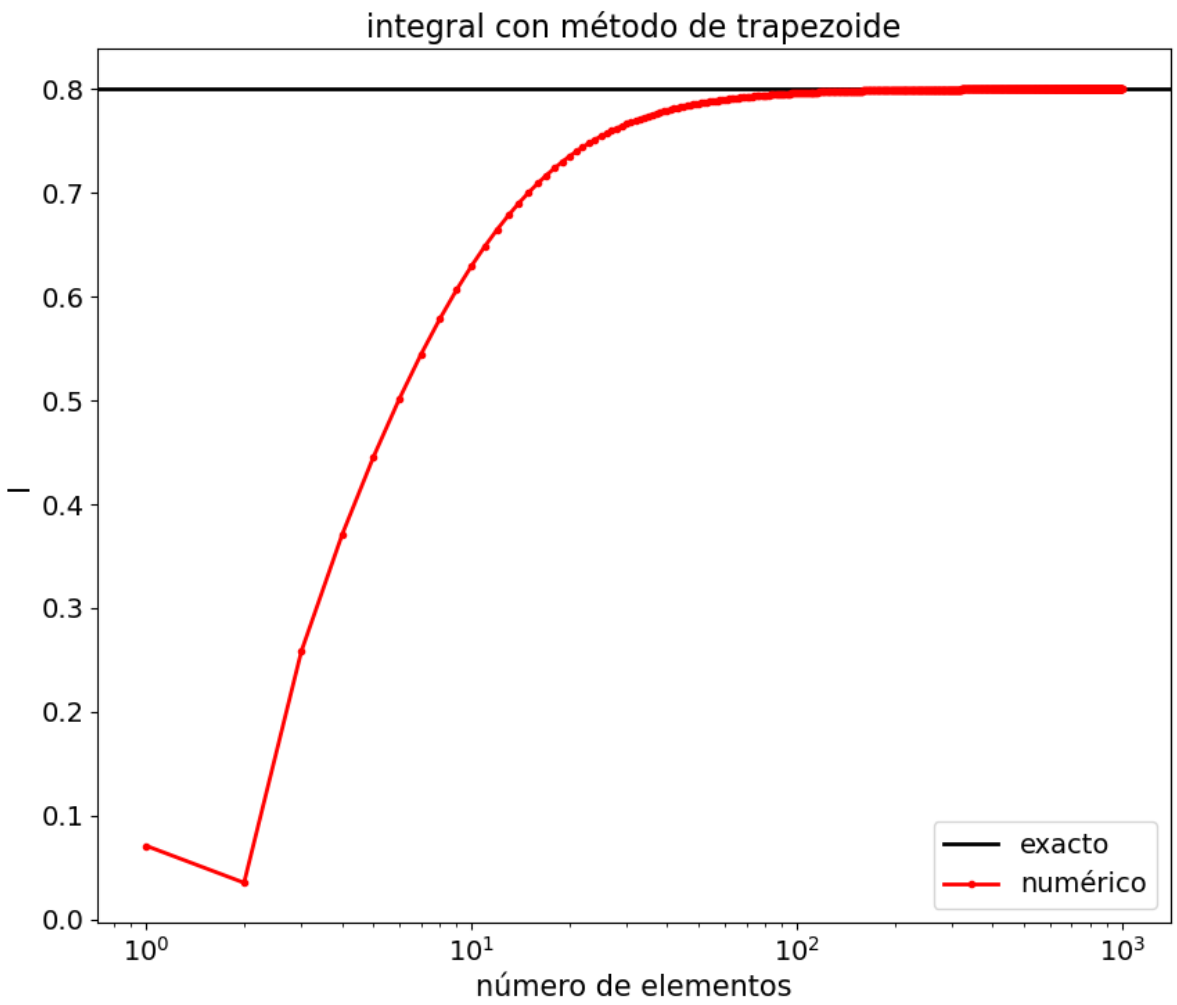
Ejemplo

Ejemplo $$I = \int_1^{20} \frac{ln(x)}{x^2} dx$$



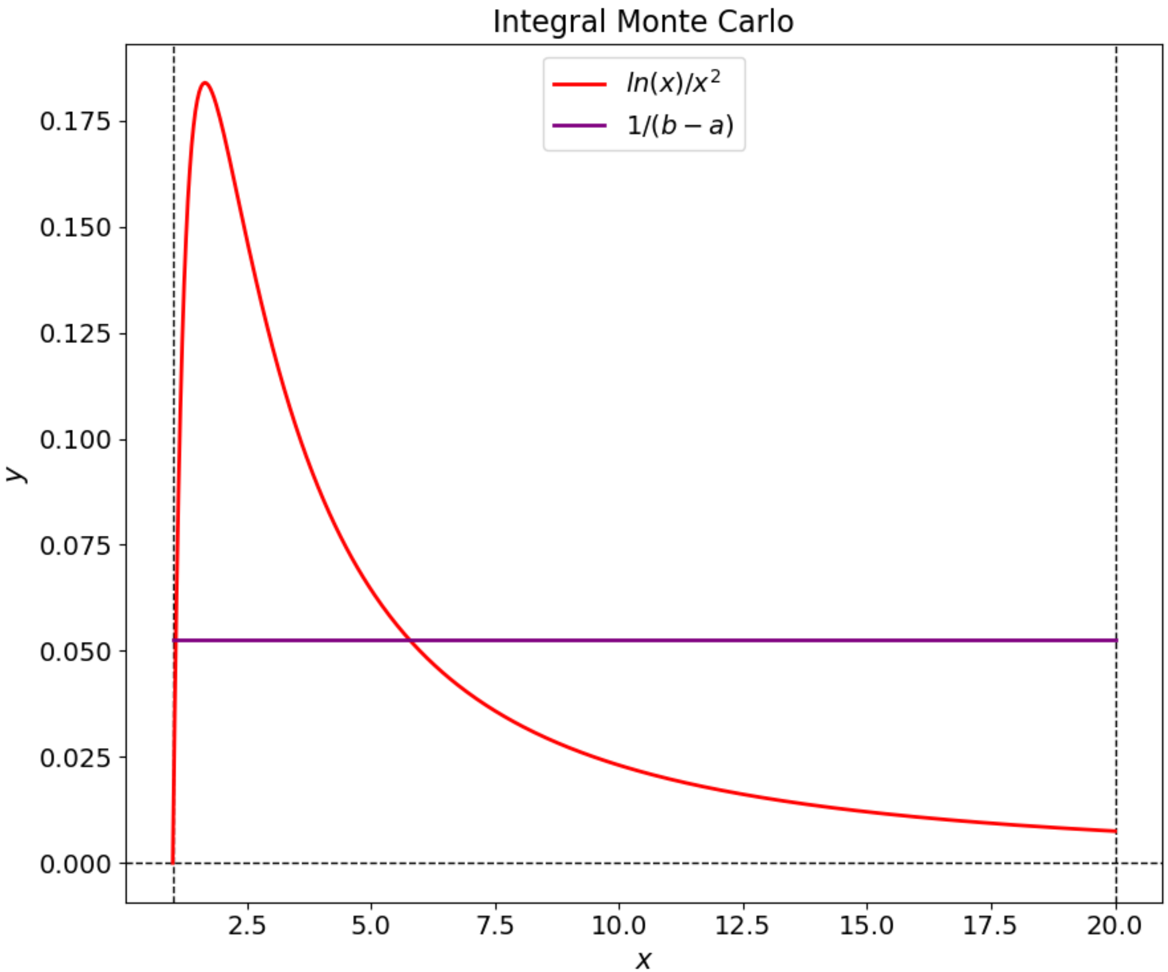
Ejemplo

Integramos $I = \int_1^{20} \frac{ln(x)}{x^2} dx$ con el método del trapezoide.



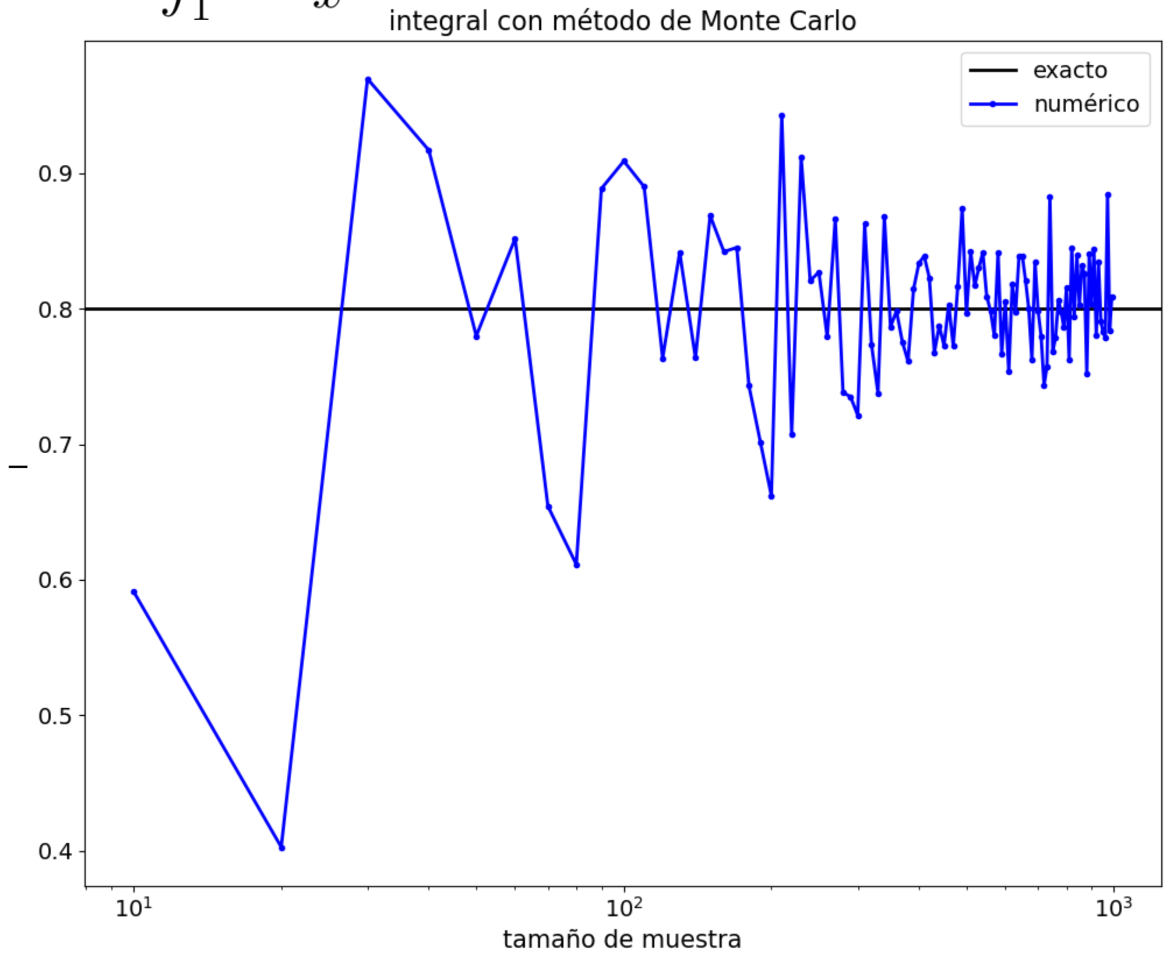
Ejemplo

Integramos $I = \int_1^{20} \frac{ln(x)}{x^2} dx$ con Monte Carlo.



Ejemplo

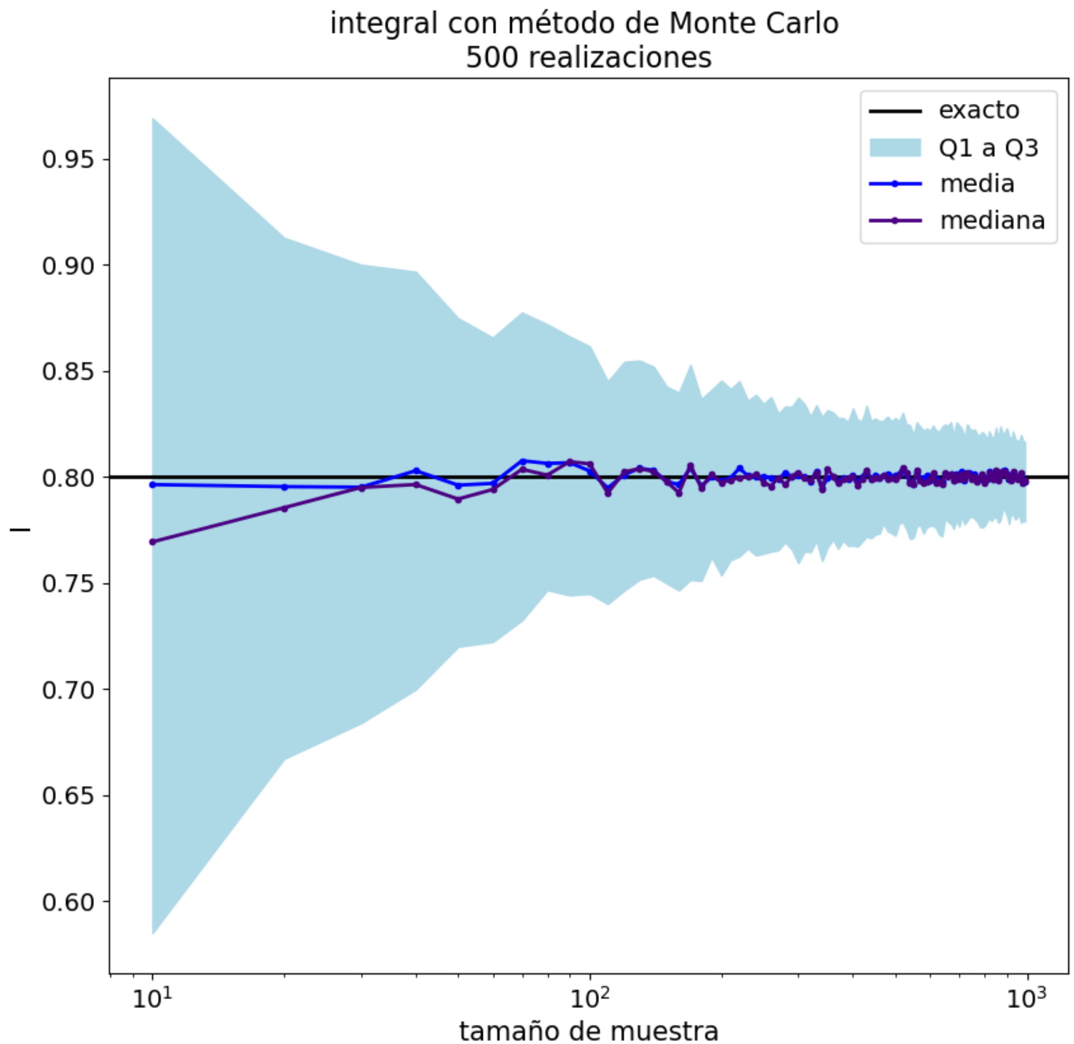
Integramos $I = \int_1^{20} \frac{ln(x)}{x^2} dx$ con Monte Carlo.



Pero este es sólo una realización.

Ejemplo

Si tomamos múltiples realizaciones y estimamos la media y std de los estimadores:



Monte Carlo con muestreo de importancia

Recordemos nuestra integral:

$$I(a,b) = \int_a^b g(x)dx$$

Habrá veces que la distribución uniforme no es la mejor opción:
a) Puede que el intervalo de integración sea impropio. ¡La uniforme tiene soporte compacto!

b) Puede que la uniforme no se parezca a lo que queremos integrar. El proceso va a ser ineficiente.

Monte Carlo con muestreo de importancia

Recordemos nuestra integral:

$$I(a,b) = \int_a^b g(x)dx$$

Habrá veces que la distribución uniforme no es la mejor opción:
a) Puede que el intervalo de integración sea impropio. ¡La uniforme tiene soporte compacto!

b) Puede que la uniforme no se parezca a lo que queremos integrar. El proceso va a ser ineficiente.

Podemos usar Nikita-Nipone de nuevo:

$$I(a,b) = \int_a^b g(x)dx = \int_a^b \frac{g(x)}{f(x)} f(x)dx = E_f\left[\frac{g(x)}{f(x)}\right]$$

Monte Carlo con muestreo de importancia

Tenemos:

$$I(a,b) = \int_a^b \frac{g(x)}{f(x)} f(x)dx = E_f\left[\frac{g(x)}{f(x)}\right]$$

Al cociente $\dfrac{g(x)}{f(x)}$ se le conoce como **derivada de Radon-Nikodym.**

Para ser válida, g(x) debe ser absolutamente continua con respecto a f(x).

$$g \ll f$$

$$f(A) = 0 \implies g(A) = 0, \quad \forall A \in \mathcal{X}$$

para todos los conjuntos *A* donde el denominador se hace cero.

Ejemplo

Tomemos la integral de :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{sin(x)}{x} dx = \pi$$

¿Cuál es nuestra propuesta de importancia?

Recuerda, debe ser una función
a) fácil de evaluar
b) que se puedan generar muestras