Markowitz : Optimisat° du PF.

PF Type : n actifs risqués : $x = \{ \text{Actifs} \}$

Soit un PF de rentabilité stochastique $\tilde{x}$, de n actifs risqués de part δ_i, et de rentabilité $\tilde{x}_i$.

$$W_0(1+\tilde{x}) = W_0 \delta_1 (1+\tilde{x}_1) + \dots + W_0 \delta_n (1+\tilde{x}_n) \quad \Big| \sum_{i=1}^{n} \delta_i \overset{!}{=} 1$$

$$1 + \tilde{x} = \sum_{i=1}^{n} \delta_i (1+\tilde{x}_i)$$

$$1 + \tilde{x} = \sum_{i=1}^{n} \delta_i + \sum_{i=1}^{n} \delta_i \tilde{x}_i$$

$$\Rightarrow \tilde{x} = \sum_{i=1}^{n} \delta_i \tilde{x}_i$$

Calcul de l'espérance du PF :

$$\mathbb{E}(\tilde{x}) = \mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^{n} \delta_i \tilde{x}_i\Big)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\tilde{x}_i) \cdot \delta_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \delta_i \cdot \mu_i = \delta^T \cdot \mu \qquad (\delta ; \mu) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$$

Calcul de la Variance :

$$Var(\tilde{x}) = Var\Big(\sum_{i=1}^{n} \delta_i \tilde{x}_i\Big)$$

$$= \mathbb{E}\big((\tilde{x} - \mathbb{E}(\tilde{x}))^2\big)$$

$$= \mathbb{E}\Big(\Big(\sum_{i=1}^{n} \delta_i \cdot \tilde{x}_i - \sum_{i=1}^{n} \delta_i \cdot \mu_i\Big)^2\Big)$$

$$= \mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^{n} \delta_i (\tilde{x}_i - \mu_i)^2\Big)$$

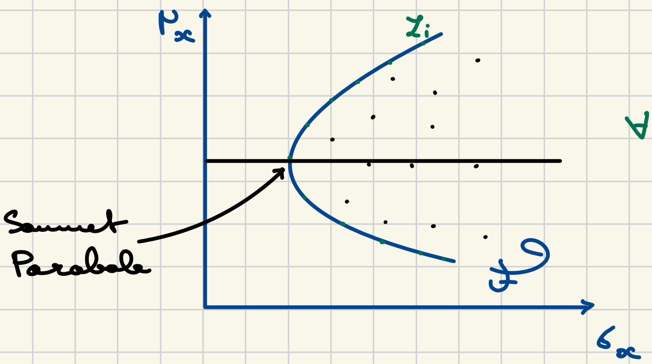
$$= \mathbb{E}\Big(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \sum_{j=1}^{n} \delta_i \delta_j (\tilde{x}_i - \mu_i)(\tilde{x}_j - \mu_j)\Big)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \delta_i \delta_j \mathbb{E}\big((\tilde{x}_i - \mu_i)(\tilde{x}_j - \mu_j)\big)$$

$$Var(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \delta_i \delta_j \, cov(\tilde{x}_i ; \tilde{x}_j)$$

On cherche δ / $\arg\max \mathbb{E}(\tilde{x})$ s.t $\begin{cases} \delta e_1 = 1 \\ Var(\tilde{x}) = \bar{\sigma}^2 \end{cases}$ $f(ISR_i)$

Schématisat° :



$\forall z_i \in \mathcal{F}$, avec $\begin{cases} \mathcal{F} : \text{frontière de moindre risque} \\ z_i : \text{Portefeuille de rentabilité } \hat{\mu}_{x_i} \text{ max, pour } \sigma \text{ donné.} \end{cases}$

On résout pour $\mu^* \in \mathbb{R}$: $\min\limits_{\{\delta\}} Var(\tilde{x})$ s.t. $\begin{cases} E(\tilde{x}) = \mu^T \delta = \mu^* \\ \delta^T I = 1 \end{cases}$

Matriciellement, la variance précédemment démontrée s'écrit : $Var(\tilde{x}) = \delta^T \Sigma \delta$

On résout dans $\mathbb{R}^n$: $\min \frac{1}{2} \delta^T \Sigma \delta$ s.t. $\begin{cases} \delta^T \mu = \bar{\mu} \\ \delta^T I = 1 \end{cases}$

$$\mathcal{L}(\delta ; \lambda ; \gamma) = \frac{1}{2} \delta^T \Sigma \delta - \lambda(\delta^T I - 1) - \gamma(\delta^T \mu - \bar{\mu})$$

CPO :

$$\nabla_\delta \mathcal{L} = \delta \Sigma - \lambda I - \gamma \mu \overset{!}{=} 0 \qquad \delta \in \mathcal{M}_{m \times 1}(\mathbb{R}^n)$$

$$\delta \Sigma = \lambda I + \gamma \mu$$

$$\Rightarrow \delta = \Sigma^{-1} [\lambda I + \gamma \mu] \quad \text{Avec} \begin{cases} I^T \delta = I \\ \mu^T \delta = \bar{\mu} \end{cases}$$

En injectant δ : $\begin{cases} I^T \Sigma^{-1} [\lambda I + \gamma \mu] = I \\ \mu^T \Sigma^{-1} [\lambda I + \gamma \mu] = \bar{\mu} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} I^T \Sigma^{-1} I \lambda + I^T \Sigma^{-1} \mu \gamma = I \\ \mu^T \Sigma^{-1} I \lambda + \mu^T \Sigma^{-1} \mu \gamma = \bar{\mu} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A \lambda + B \gamma = I \\ B \lambda + C \gamma = \bar{\mu} \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} A = I^T \Sigma^{-1} I \\ B = I^T \Sigma^{-1} \mu \\ C = \mu^T \Sigma^{-1} \mu \end{array} \right.$$

Soit le système : $\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ \bar{\mu} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \gamma \end{pmatrix} = \frac{1}{AC - B^2} \begin{pmatrix} C & -B \\ -B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ \bar{\mu} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{1}{AC-B^2} \left(CI - B\mu \right) = \dfrac{1}{AC-B^2} \left(C - \bar{\mu} B \right) \\ \gamma = \dfrac{1}{AC-B^2} \left(A\bar{\mu} - BI \right) = \dfrac{1}{AC-B^2} \left(A\bar{\mu} - B \right) \end{cases}$$

Et ainsi : $\delta = \Sigma^{-1} \left[\dfrac{1}{AC-B^2} \left(C - \bar{\mu} B \right) + \dfrac{\mu}{AC-B^2} \left(A\bar{\mu} - B \right) \right]$

$$\delta = \frac{\Sigma^{-1}}{D} \left[\left(C - \bar{\mu} B \right) + \mu \left(A\bar{\mu} - B \right) \right]$$