МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«МИРЭА – Российский технологический университет»

РТУ МИРЭА

Институт информационных технологий (ИИТ)
Кафедра прикладной математики (ПМ)

ОТЧЕТ ПО ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЕ

по дисциплине «Прикладные задачи нелинейной динамики»

Практическое занятие №1

Студент группы *ИМБО-02-22 Лищенко Тимофей Викторович*
(подпись)

Преподаватель *к.т.н., Сидоров С.М.*
(подпись)

Отчет представлен «___»________2024г.

Москва 2024 г.

Тема: Компьютерное моделирование гармонического и ангармонического осцилляторов с трением и в его отсутствие.

Условия задач:

1. Исследовать на устойчивость, асимптотическую устойчивость по Ляпунову.
2. Проведите качественный анализ динамики:
    - гармонического осциллятора в отсутствие трения;
    - гармонического осциллятора с трением;
    - ангармонического осциллятора в отсутствие трения;
    - ангармонического осциллятора с трением.
        1. Определите аналитически особые точки.
        2. Выполните анализ устойчивости по Ляпунову. Определите характер особых точек и поведение траекторий системы в их окрестности.
        3. Для консервативных осцилляторов аналитически определите первый интеграл – интеграл энергии. Постройте 3D - поверхности энергии и фазовые портреты анализируемых динамических систем. Определите на фазовой плоскости направление движения, отвечающее возрастанию времени.
        4. Для консервативных осцилляторов определите потенциальную функцию системы. Проанализируйте взаимосвязь особенностей фазового портрета системы и локальных экстремумов потенциальной функции.
        5. Получите приближенные решения дифференциальных систем, принципиально различающиеся по характеру движения и отвечающие различным начальным условиям. Проанализируйте их поведение.

6. Постройте графики динамики x(t), dx(t)/dt и соответствующие им контуры на фазовой плоскости.
7. Сделайте содержательные выводы.

Ход решения:

Задача №1

Рисунки 1-7.

Практическая работа №1

1.

а) $\dot{x} + x = 1$, $x(0) = 1$

$$\frac{dx}{dt} = 1 - x$$

$$\frac{dx}{1-x} = dt$$

$$-\ln(1-x) = t + c$$

$$1 - x = -\frac{1}{c \cdot e^t}$$

$$x = \frac{1}{c \cdot e^t} + 1$$

$$x_0(t) = 1 + \frac{c}{e^0}$$

$$x_0(t) = 1$$

$$x(0) = 1$$

$$1 + \frac{c}{e^0} = 1 \Rightarrow c = 0$$

$$|x(t) - x_0| = \left|1 + \frac{c}{e^t} - 1\right| \to 0$$

асимптотически устойчиво

$$\begin{cases} |x(t)-x_0(t)| = \left|1+\frac{c}{e^{t}}-1\right| < \varepsilon \\ |x(0)-x_0(0)| = |1+c-1| < \delta \end{cases}$$

б) $\dot{x} - 2x = t, \quad x\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

$\dot{x} = t + 2x$

$u = t + 2x \qquad x = \frac{u-t}{2}$

$\dot{u} = 1 + 2\dot{x} \qquad \dot{x} = \frac{\dot{u}-1}{2}$

$\frac{\dot{u}-1}{2} = u$

$\dot{u} - 1 = 2u$

$\dot{u} = 2u + 1$

$\int \frac{du}{2u+1} = \int dt \Rightarrow \frac{1}{2}\ln|2u+1| = t + c$

$\ln|2u+1| = 2t + c$

$2u+1 = C \cdot e^{2t}$

$2(t+2x)+1 = Ce^{2t}$

$2t + 4x + 1 = Ce^{2t}$

$X = \frac{ce^{2t} - 1 - 2t}{4}$

$x(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

$$\frac{Ce^{1} - 1 - 1}{4} = \frac{1}{2}.$$

$Ce - 2 = 2.$

$C = \frac{4}{e}$

$$x_0(t) = \frac{\frac{4}{e} \cdot e^{2t} - 1 - 2t}{4} =$$

$$= \frac{4e^{2t-1} - 1 - 2t}{4}$$

$$|x(t) - x_0(t)| = \left| \frac{Ce^{2t} - 1 - 2t}{4} - \right.$$

$$\left. - \frac{4e^{2t-1} - 1 - 2t}{4} \right| = \infty \neq 0$$

=> не асимпт.

$$\begin{cases} \left|x(\frac{1}{2}) - x_0(\frac{1}{2})\right| = \left|\frac{Ce - 4}{4}\right| < \delta \\ |x(t) - x_0(t)| < \varepsilon \end{cases}$$

не устойчив.

в) $\dot{x} = 4x - xt^2$, $x(0)=0$

$\dot{x} = x(4-t^2)$

$\frac{dx}{dt} = x(4-t^2)$

$\int \frac{dx}{x} = \int (4-t^2)\, dt$

$\ln|x| = 4t - \frac{t^3}{3} + C$

$x = C \cdot e^{4t + \frac{t^3}{3}}$ $x(0)=0$

$Ce^0 = 0 \Rightarrow C=0$ $x_0(t)=0$

$\left|Ce^{4t-\frac{t^3}{3}} - 0\right| = \infty \neq 0$

не асимпт.

$$\begin{cases} |x(0) - x_0(0)| = |e-0| < \delta \\ |x(t) - x_0(t)| = C\left|e^{4t-\frac{t^3}{3}}\right| < \varepsilon \end{cases}$$

не устойчив

c) $2t\dot{x} = x - x^3 \quad x(1)=0$

$$\frac{2t\,dx}{dt} = \frac{x-x^3}{1}$$

$$\frac{dx}{x-x^3} = \frac{dt}{2t}$$

$$\int \frac{dx}{x(1-x)(1+x)} = \int \frac{dt}{2t}$$

$$\ln|x| + \frac{\ln|1-x|}{2} + \frac{\ln|1+x|}{2} = \frac{\ln(2t)}{2} + C$$

$$\ln(x^2) + \ln|1-x| + \ln(1+x) = \ln(2t) + C$$

$$\frac{x^2}{1-x^2} = Ce^{2t}$$

$$1-x^2 = \frac{1}{1-Ce^{2t}}$$

$$x = \sqrt{1 - 1/1-Ce^{2t}}$$

$x_0(0)=0 \quad c=0 \quad x_0(t)=0$

$x(t)-x_0(t)\neq 0$

$\left|1-\frac{1}{1-ce^{2t}}-1-\frac{1}{1-2c}\right|<\varepsilon$

$\left|1-\frac{1}{1-2c}\right|<\delta$

не устойчив.

д) $\begin{cases}\dot{x}=y\\ y=2\dot{y}+3x\end{cases}$ $x(0)=y(0)=0$

$\dot{x}=2\ddot{x}+3x$

$2\ddot{x}-\dot{x}+3x=0$

$2\lambda^2-\lambda+3=0$

$\lambda_{1,2}=\underbrace{\frac{1}{4}}_{\alpha}\pm i\underbrace{\frac{\sqrt{23}}{4}}_{\beta}$

$$x = C_{11} e^{\frac{1}{4}t} \cos\left(\frac{\sqrt{23}}{4}t\right) + C_{12} e^{\frac{1}{4}t} \sin\left(\frac{\sqrt{23}}{4}t\right)$$

$$y = C_{11} e^{1/4 t} \cdot \frac{1}{4} \cos\left(\frac{\sqrt{23}}{4}t\right) - C_{11} e^{1/4 t} \frac{\sqrt{23}}{4} \sin\left(\frac{\sqrt{23}}{4}t\right)$$

$$+ C_{12} e^{1/4 t} \frac{1}{4} \sin\left(\frac{\sqrt{23}}{4}t\right) + C_{12} e^{1/4} \cos\left(\frac{\sqrt{23}}{4}t\right) \frac{\sqrt{23}}{4} =$$

$$= C_{11} e^{1/4 t} \left(\frac{1}{4} \cos\left(\frac{\sqrt{23}}{4}t\right) - \frac{\sqrt{23}}{4} \sin\left(\frac{\sqrt{23}}{4t}\right)\right) +$$

$$+ C_{12} e^{1/4} \left(\frac{1}{4} \sin\left(\frac{\sqrt{23}}{4}t\right) + \frac{\sqrt{23}}{4} \cos\left(\frac{\sqrt{23}}{4}t\right)\right)$$

$$C_{11} \cdot \overset{1}{\cos}(0) + C_{12} \overset{0}{\sin}(0) = C_{11} = 0$$

$$C_{11} \cdot 1 \left(\frac{1}{4} \cos(0) - \frac{\sqrt{23}}{4} \sin(0)\right) +$$

$$+ C_{12} 1 \left(\frac{1}{4} \sin(0) - \frac{\sqrt{23}}{4} \cos(0)\right) =$$

$$\begin{cases} = \frac{1}{4} C_{11} - \frac{\sqrt{23}}{4} C_{12} = 0 \\ C_{11} = 0 \end{cases} \Rightarrow C_{12} = 0.$$

Устойчиво ст. нев.

Задача №2

Гармонический осциллятор без трения

Уравнение движения:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

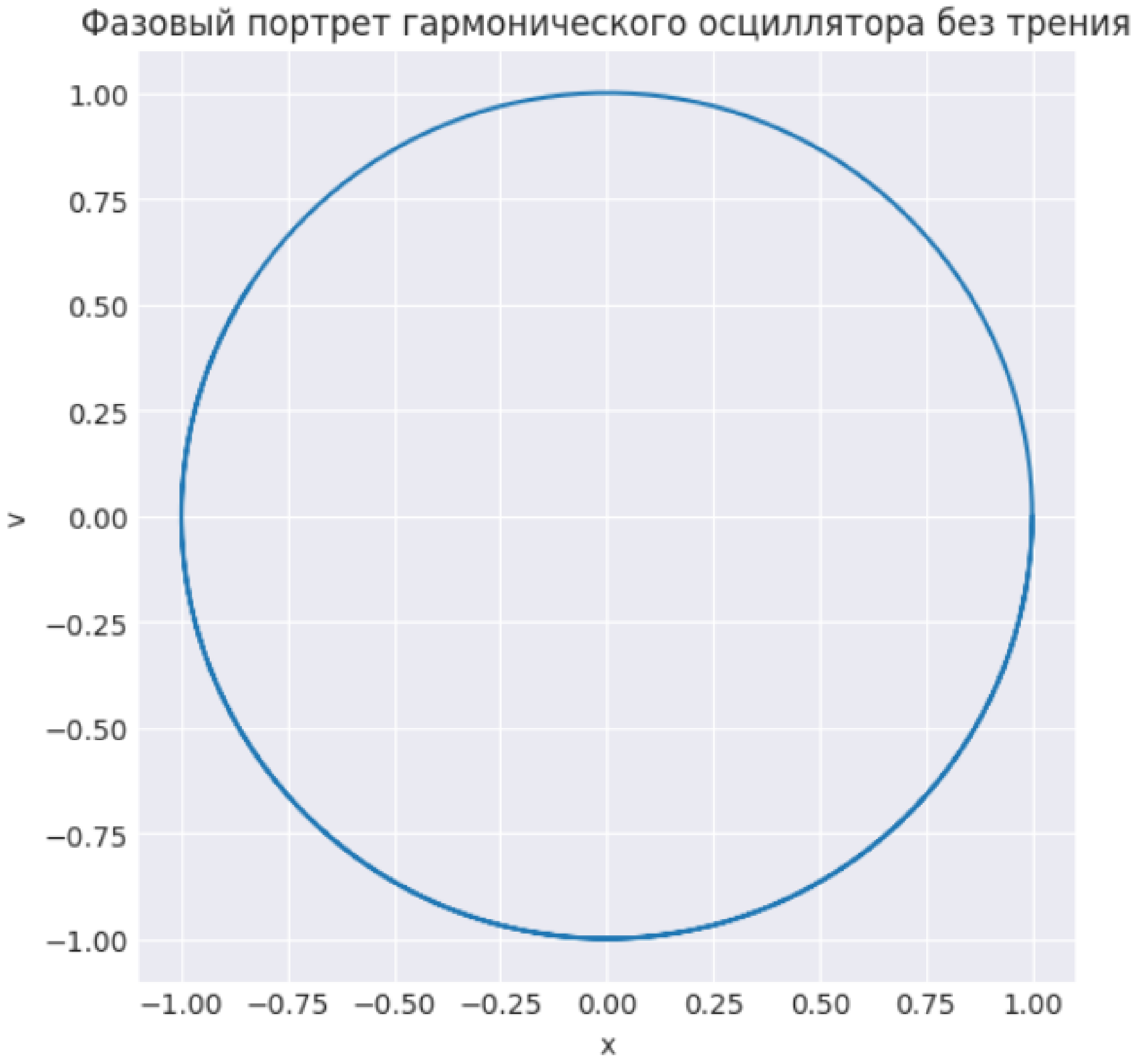
Здесь ω — угловая частота осциллятора.

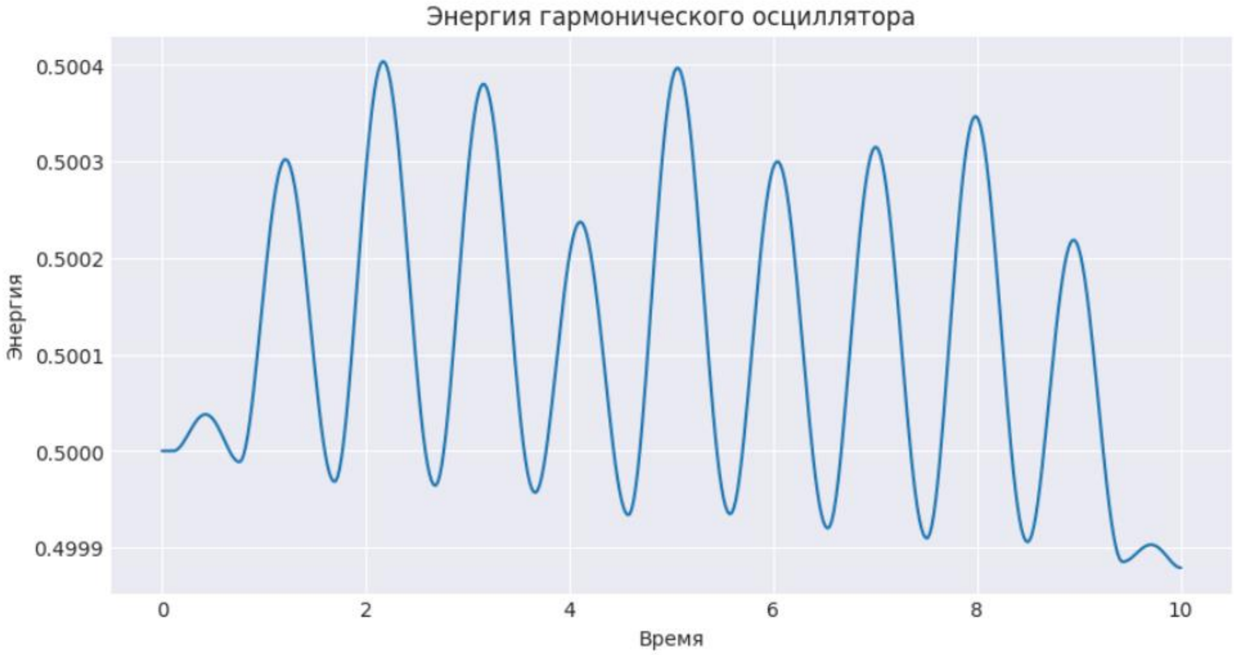
- **Особая точка**: x = 0, v = 0 - точка равновесия.
- **Устойчивость**: устойчивая, замкнутые траектории на фазовой плоскости.
- **Интеграл энергии**:

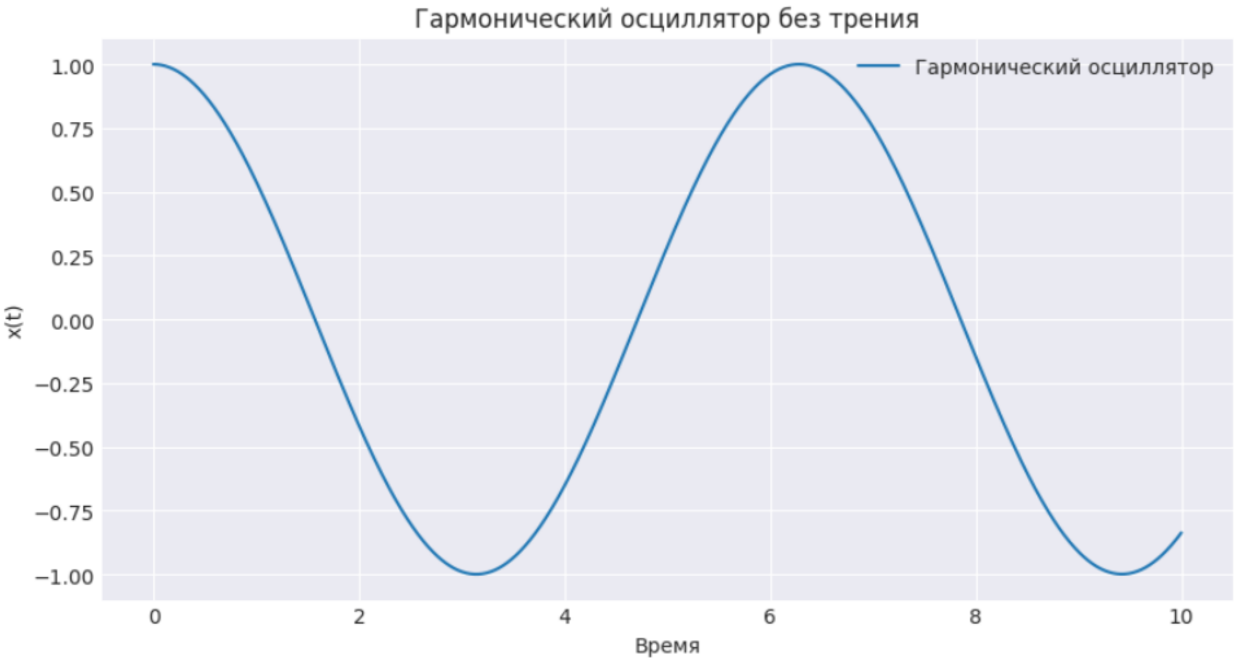
$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

- **Потенциальная функция**:

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2$$




Энергия гармонического осциллятора
Энергия
0.5004
0.5003
0.5002
0.5001
0.5000
0.4999
0
2
4
6
8
10
Время


Гармонический осциллятор без трения
Гармонический осциллятор
x(t)
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
−0.25
−0.50
−0.75
−1.00
0
2
4
6
8
10
Время

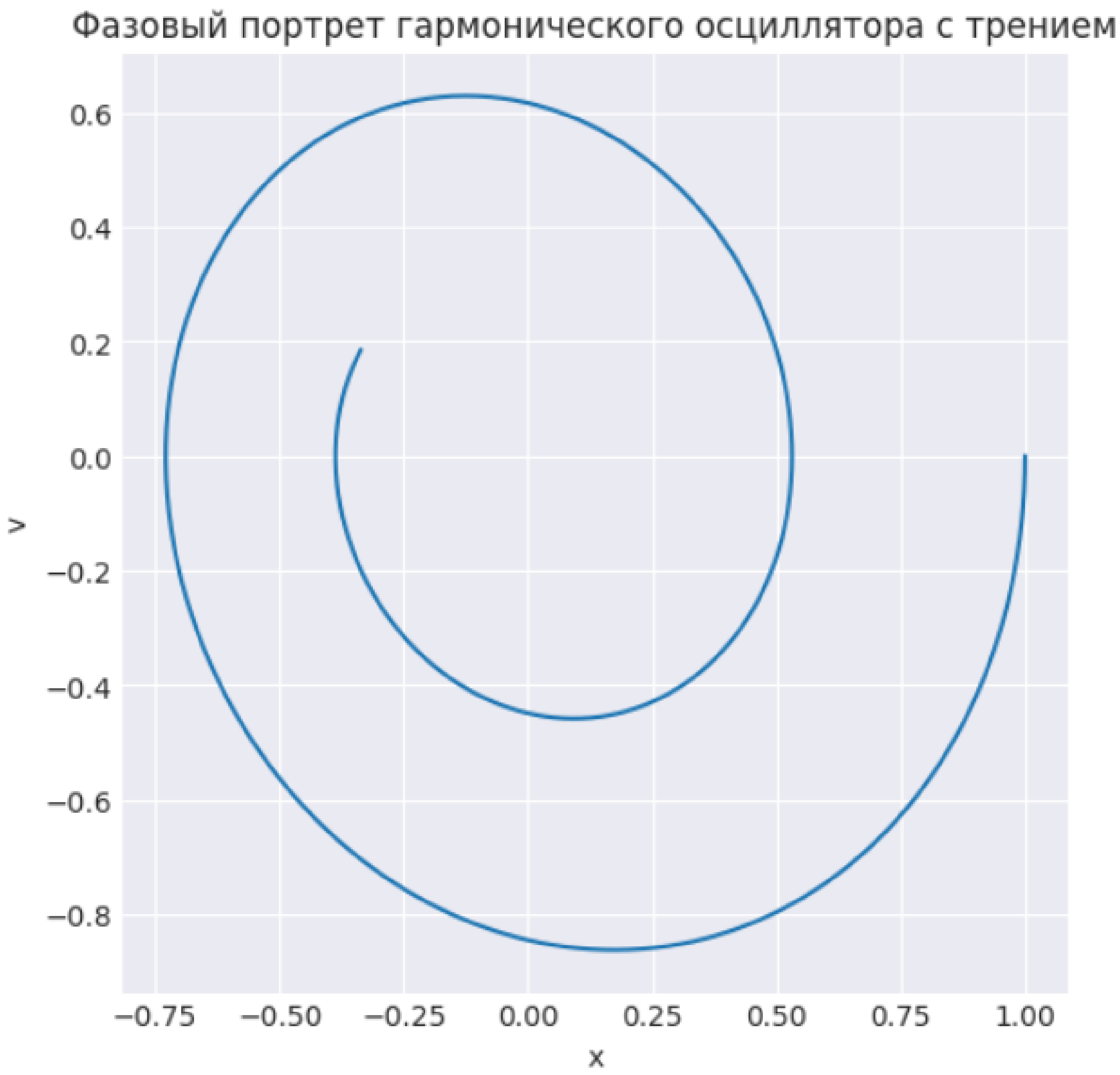
Гармонический осциллятор с трением

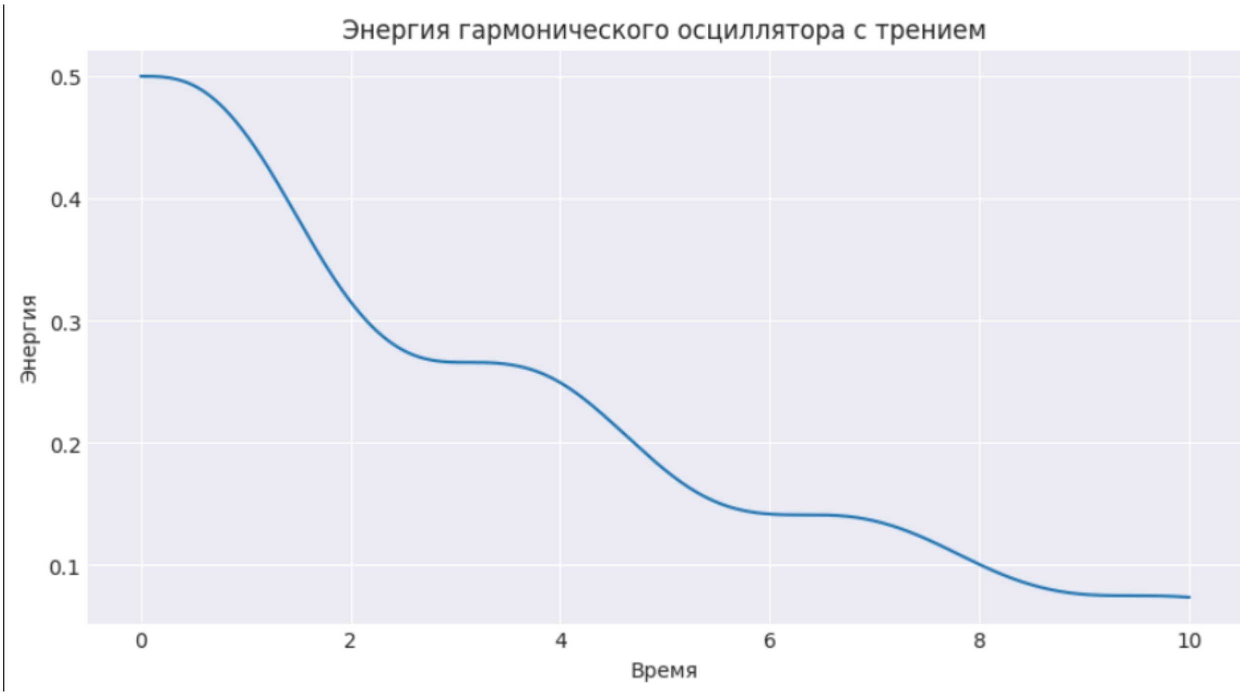
Уравнение движения:

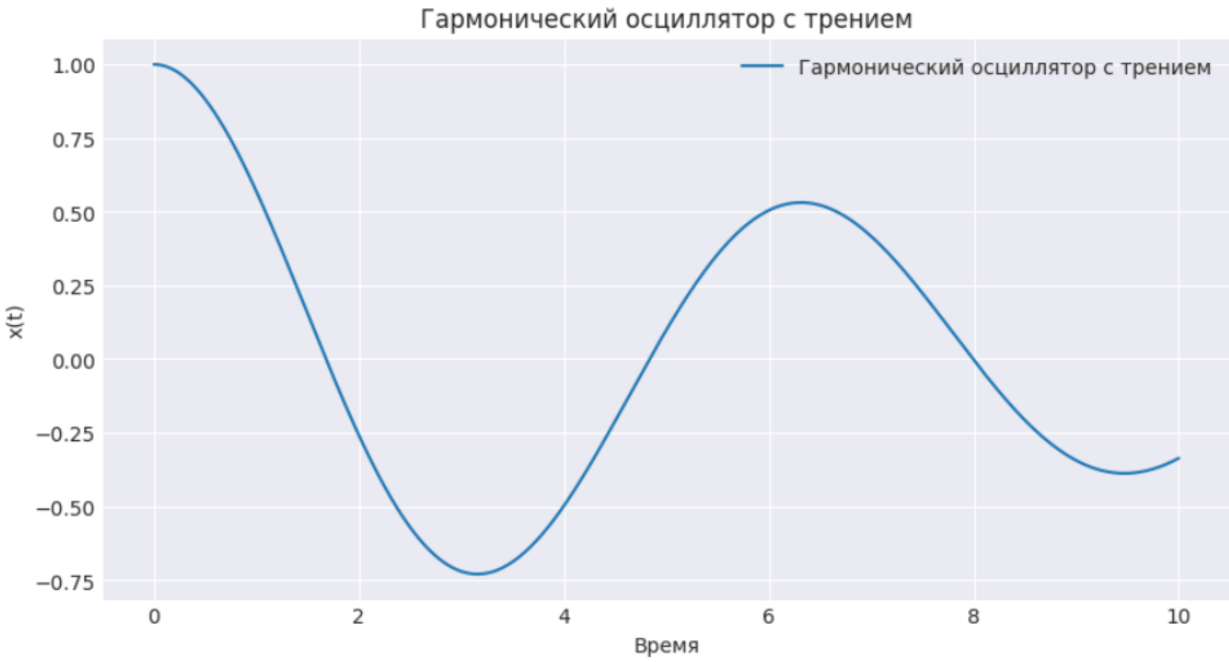
$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

Здесь γ — коэффициент демпфирования.

- **Особая точка**: x = 0, v = 0.
- **Устойчивость**: устойчивая, траектории стремятся к точке равновесия.
- **Энергия**: уменьшается со временем из-за трения.







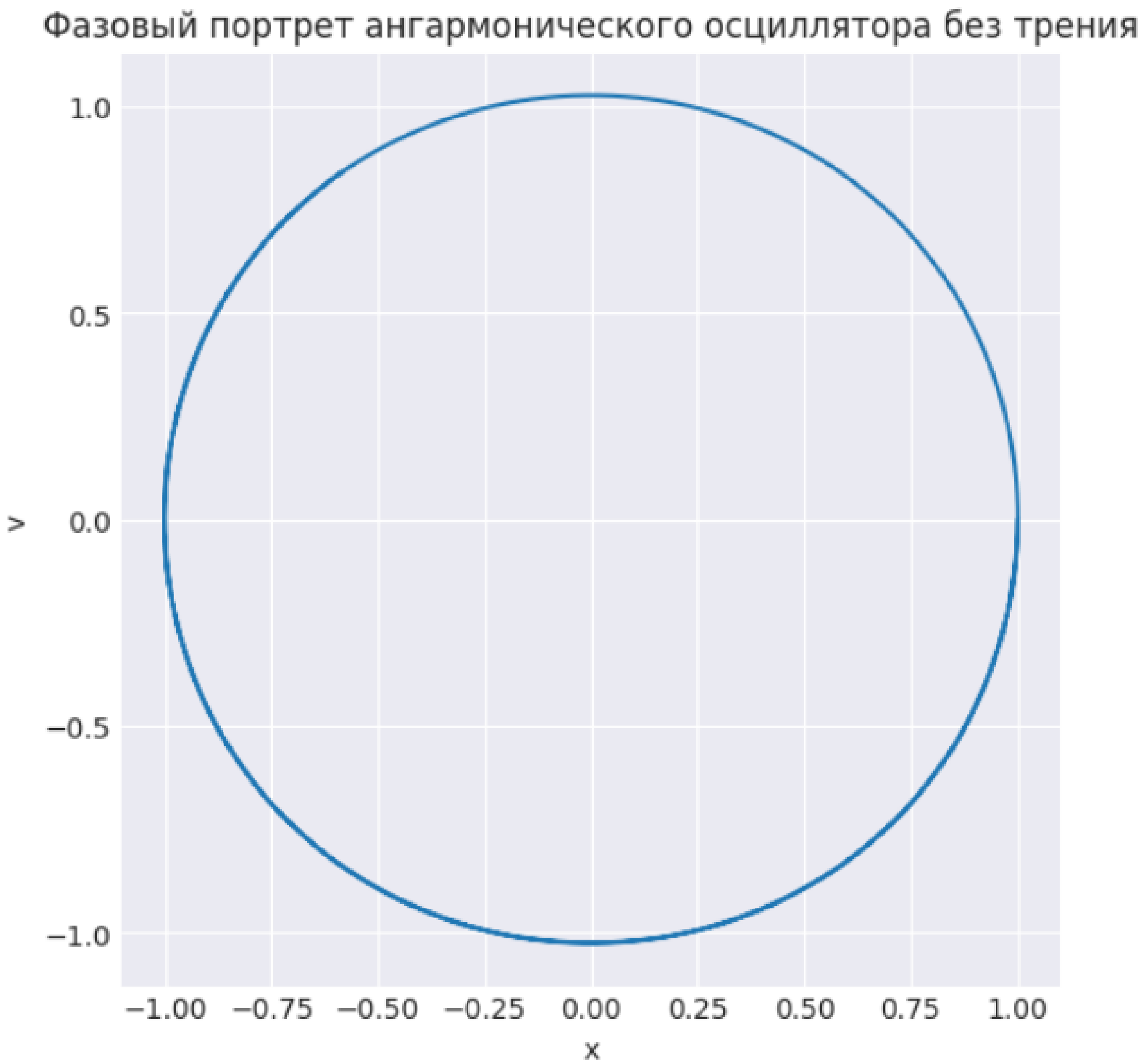
Ангармонический осциллятор без трения

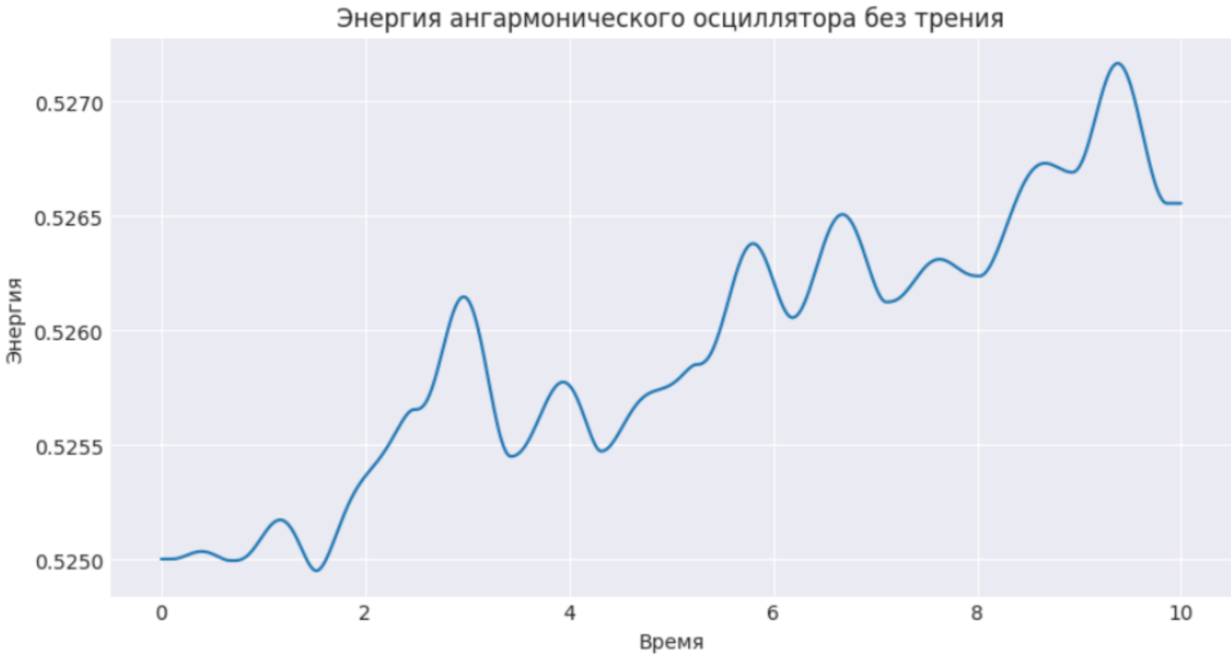
Уравнение движения:

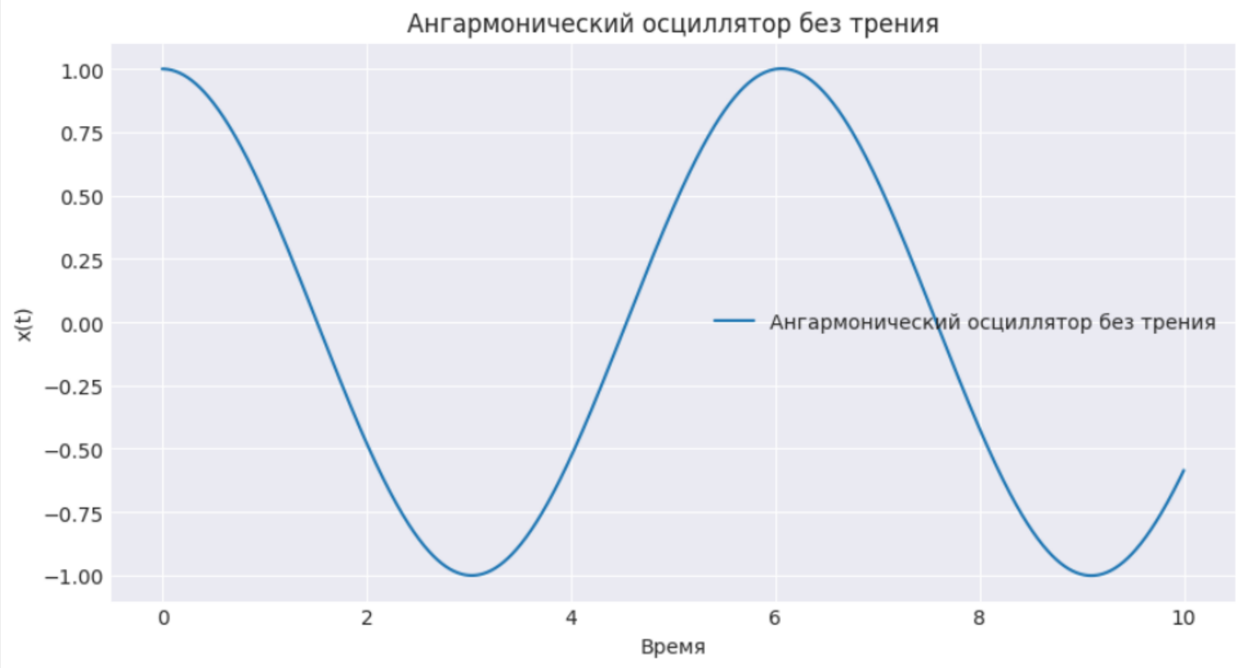
$$\ddot{x} + \omega^2 x + \alpha x^3 = 0$$

Здесь α — коэффициент нелинейности.

- **Особая точка**: x = 0, v = 0.
- **Устойчивость**: более сложная динамика, возможны бифуркации и хаотическое поведение.


Фазовый портрет ангармонического осциллятора без трения
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
v
−1.00
−0.75
−0.50
−0.25
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
x


Энергия ангармонического осциллятора без трения
0.5270
0.5265
0.5260
0.5255
0.5250
Энергия
0
2
4
6
8
10
Время

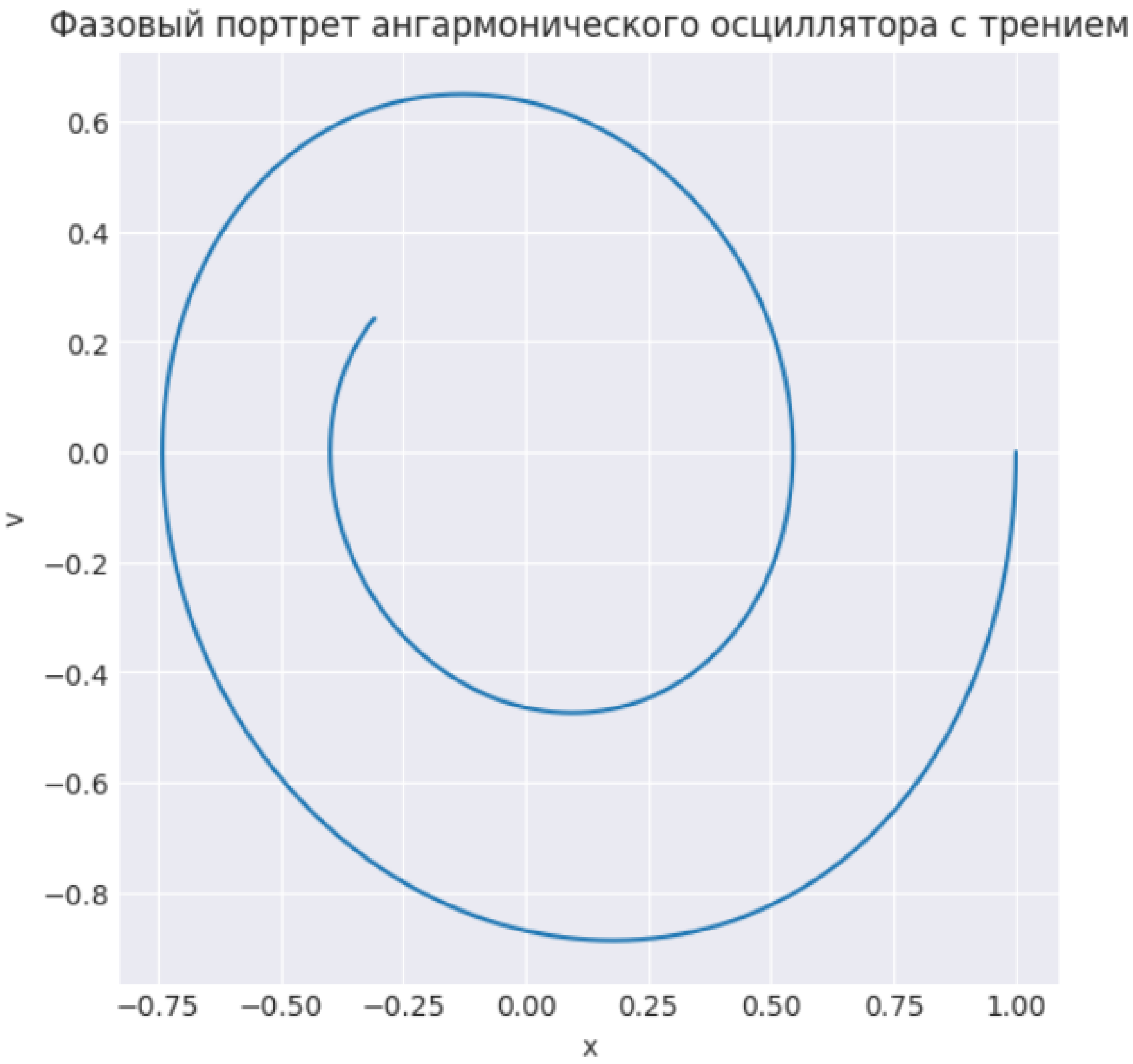


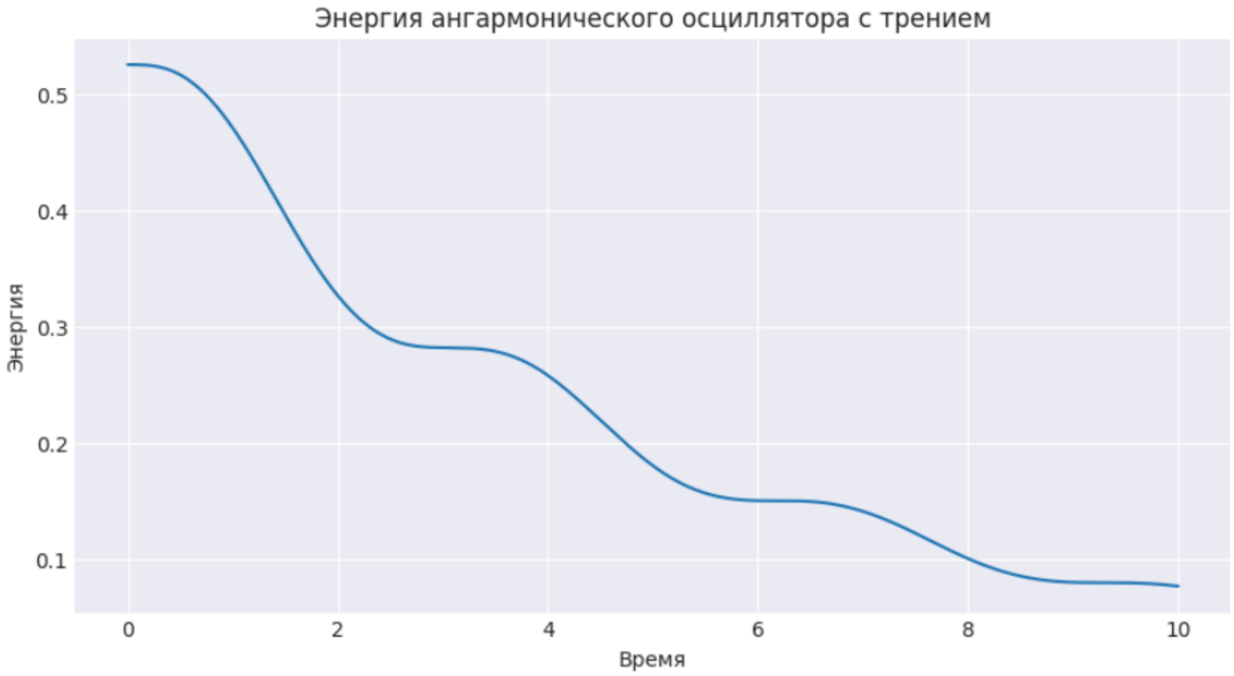
Ангармонический осциллятор с трением ¶

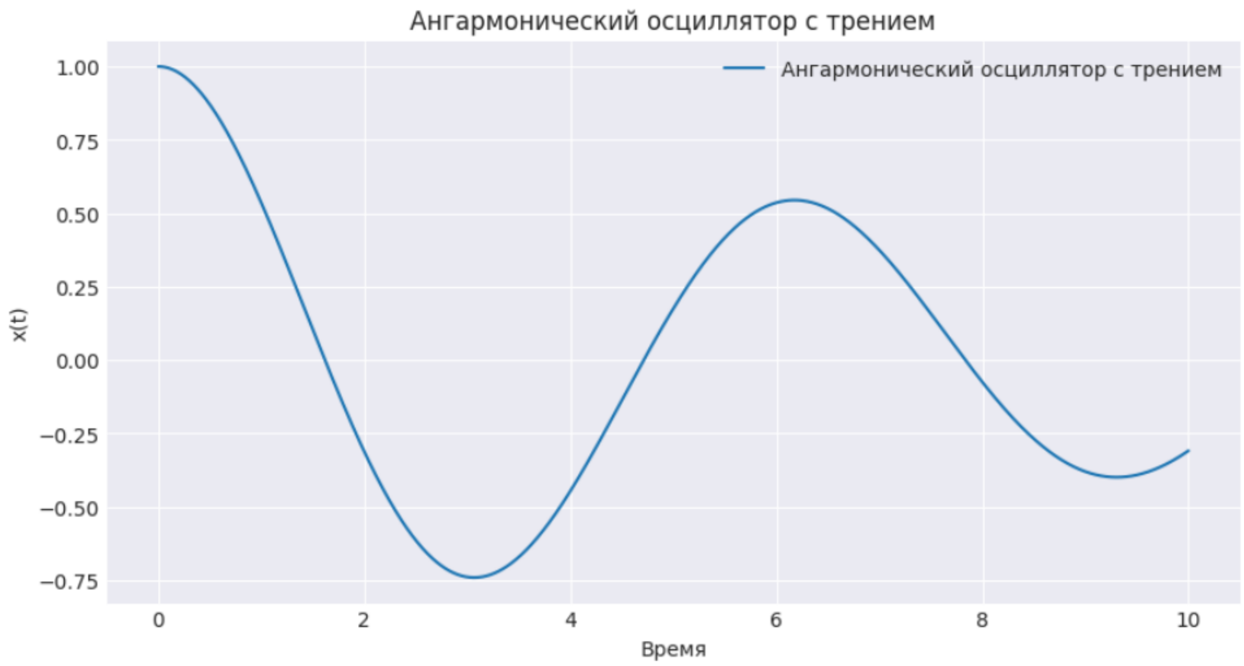
Уравнение движения:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x + \alpha x^3 = 0$$

- **Особая точка**: x = 0, v = 0.
- **Энергия**: уменьшается со временем за счёт трения, как и в случае гармонического осциллятора с трением.


Фазовый портрет ангармонического осциллятора с трением
0.6
0.4
0.2
0.0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
v
−0.75
−0.50
−0.25
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
x


Энергия ангармонического осциллятора с трением
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
Энергия
0
2
4
6
8
10
Время



Вывод:

При изменение параметров систем фазовые портреты не изменяются.