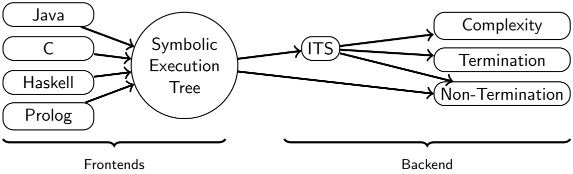
Geometrische Nicht-Terminierungs Argumente

Timo Bergerbusch

September 15, 2017

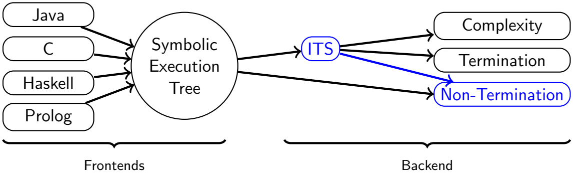
Einleitung und Motivation

- Verbreitung von Software
- Automatische Entwicklungsunterstttzung $\Rightarrow$Halte Problem
- AProVE



Einleitung und Motivation

- Verbreitung von Software
- Automatische Entwicklungsunterstttzung ⇒ Halte Problem
- AProVE



Beispiel C-Programm

Ein Beispiel für den gesamten Vortrag:

```c
int main(){

  int a;
  int b=1;

  while(a+b>=4){
    a=3*a+b;
    b=2*b-5;
  }
}
```

- einfaches C-Programm
- terminiert es?

Beispiel C-Programm

Ein Beispiel für den gesamten Vortrag:

```c
int main(){

  int a;
  int b=1;

  while(a+b>=4){
    a=3*a+b;
    b=2*b-5;
  }
}
```

- einfaches C-Programm
- terminiert es?

  $\Rightarrow$ Nein!

  wie kann man das beweisen?

Integer Transition Systems (ITS)

ITS betrachtete Programme:

$$\overbrace{f_x}^{(1)} \rightarrow \overbrace{f_y}^{(2)} (v_1, \ldots v_n) : | : cond_1$$

$$f_y(\underbrace{v_1, \ldots v_n}_{(3)}) \rightarrow f_y (\underbrace{v'_1, \ldots v'_n}_{(3)}) : | : \underbrace{cond_2}_{(4)}$$

(1) Funktionssymbol (kein Variablen $\Rightarrow$ Start)

(2) Funktionssymbol

(3) Variablen v'_i als linear Updates der Variablen v_j

(4) eine Menge von (Un-)Gleichungen über v_j

Geometrische Nicht-Terminierungs Argumente (GNA)

- Idee: Teilen des Programms in zwei Teile:
  - STEM: Variablen Deklaration und Initialisierung

```
int a;
int b=1;
```

  - LOOP: linear Updates und *while*-Bedingung

```
while(a+b>=4){
  a=3*a+b;
  b=2*b-5;
}
```

- anwenden der Definition der Geometrischen Nicht-Terminierungs Argumente von J. Leike und M. Heizmann

Beispiel

Das ITS zum Beispielprogramm:

$$f_1 \rightarrow f_2(1 + 3 * v_1, -3) : | : v_1 > 2 \;\&\&\; 8 < 3 * v_1$$

$$f_2(v_1, v_2) \rightarrow f_2(3 * v_1 + v_2, v_3) : | : v_1 + v_2 > 3 \;\&\&\; v_1 > 6 \;\&\&\; 3 * v_1 > 20 \;\&\&\; 5 + v_3 = 2 * v_2 \;\&\&\; v_3 < -10$$

erste Regel $\Leftrightarrow$ STEM zweite Regel $\Leftrightarrow$ LOOP

Definition (Geometrische Nicht-Terminierungs Argumente)

Ein Tupel der Form:

$$(x, y_1, \ldots, y_k, \lambda_1, \ldots, \lambda_k, \mu_1, \ldots, \mu_{k-1})$$

ist ein Geometrisches Nicht-Terminierungs Argument der Größe k für ein Programm $= (STEM, LOOP)$ mit n Variablen g.d.w. alle folgenden Kriterien erfüllt sind:

(domain) $x, y_1, \ldots, y_k \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_1, \ldots \lambda_k, \mu_1, \ldots \mu_{k-1} \geq 0$

(init) x repräsentiert den *Startterm* (STEM)

(point) $A \begin{pmatrix} x \\ x + \sum_i y_i \end{pmatrix} \leq b$

(ray) $A \begin{pmatrix} y_i \\ \lambda_i y_i + \mu_{i-1} y_{i-1} \end{pmatrix} \leq 0$ for all $1 \leq i \leq k$

Anmerkung: Definiere $y_0 = \mu_0 = 0$ statt einer Fallunterscheidung

Definition (Guard Matrix & Konstanten)

Die Guard Matrix G ist eine Koeffizienten Matrix für die Ungleichungen. Die Guard Konstanten g ein Vektor mit Konstanten der Ungleichungen.

Definition (Update Matrix & Konstanten)

Die Update Matrix U und Konstanten u sind analog zu der Guard Matrix und Konstanten über den linearen Updates.

Definition (Iteration Matrix & Konstanten)

Mit $\mathbf{0}$ eine Matrix aus 0-en und I der Einheitsmatrix ergeben sich die Iteration Matrix A und Konstanten b wie folgt:

$$A = \begin{pmatrix} G & \mathbf{0} \\ U & -I \\ -U & I \end{pmatrix} \text{ and } b = \begin{pmatrix} g \\ -u \\ u \end{pmatrix}$$

Erinnerung: ITS

$$f_1 \rightarrow f_2(1 + 3 * v_1, -3) : | : v_1 > 2 \ \&\& \ 8 < 3 * v_1$$

$$f_2(v_1, v_2) \rightarrow f_2(3 * v_1 + v_2, v_3) : | : v_1 + v_2 > 3 \ \&\& \ v_1 > 6 \ \&\& \ 3 * v_1 > 20 \ \&\& \ 5 + v_3 = 2 * v_2 \ \&\& \ v_3 < -10$$

Beispiel: Guard Matrix & Konstanten

für das Beispiel ITS ergeben sich die Guard Matrix G und Konstanten g:

$$G = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \\ -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } g = \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ -21 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Erinnerung: ITS

$$f_1 \rightarrow f_2(1 + 3 * v_1, -3) : | : v_1 > 2 \;\;\&\&\;\; 8 < 3 * v_1$$

$$f_2(v_1, v_2) \rightarrow f_2(3 * v_1 + v_2, v_3) : | : v_1 + v_2 > 3 \;\;\&\&\;\; v_1 > 6 \;\;\&\&\;\; 3 * v_1 > 20 \;\;\&\&\;\; 5 + v_3 = 2 * v_2 \;\;\&\&\;\; v_3 < -10$$

Beispiel: Update Matrix & Konstanten

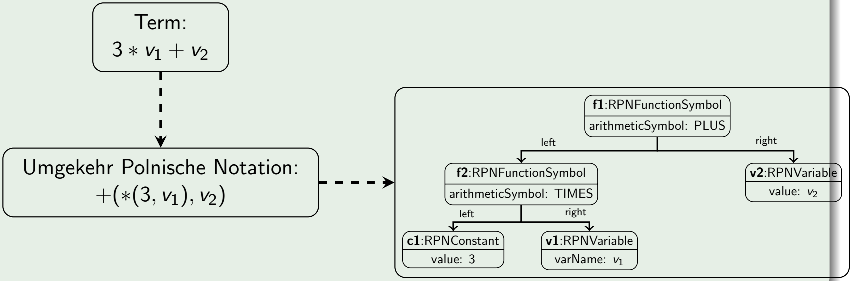
für das Beispiel ITS ergeben sich die Update Matrix U und Konstanten u:

$$U = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } u = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Reverse Polish Notation Tree (RPNTree)

- simple Baumstruktur für ausschlielich berücksichtigter Terme
- Klassen für Konstanten, Variablen und Operatoren

Beispiel



Sat. Modulo Theorie (SMT)

- Grundlegende Idee:

  Menge von Regeln: (Un)-Gleichungen mit Variablen

  $\xrightarrow{\textit{SMT-solver}}$ ein erf. Modell <u>oder</u> unerf. Kern
- erf. Modell: einen Wert für jede Variable
- unerf. Modell: ein (minimale) Menge von Regeln die nicht alle zeitgleich gelten können

Beispiel

Beispiel mit folgenden Regeln:

$$x \leq y \quad x > 5 \quad x + y \leq 20 \quad y \neq 10$$

Mögliches Modell $m_1 = \{x = 6, y = 6\}$.

Ändern der dritten Regel zu $x + y \leq 10$:
Kein Modell ex. mit unerf. Kern $\{x \leq y,\ x > 5,\ x + y \leq 10\}$

Herleitung: STEM

unterscheiden von zwei Möglichkeiten:

konstanter STEM : $f_x \to f_y(c_1, \ldots, c_n) : | : \mathit{TRUE}$
$\Rightarrow$ Werte ablesen

Beispiel

$$f_1 \to f_2(10, -3) \Rightarrow \text{STEM} = (10, -3)^T$$

variabler STEM : $f_x \to f_y(c_1 + \sum_{i=1}^n a_{1,i} v_i, \ldots, c_n + \sum_{i=1}^n a_{n,i} v_i) : | : \bigwedge_{\text{guard } g} \sum_{i=1}^n g_{n,i} v_i \leq c_m$
$\Rightarrow$ Bedingungen einem *SMT-solver* geben und Modell ablesen

Beispiel

$$f_1 \to f_2(1 + 3v_1, -3) : | : v_1 > 2 \;\&\&\; 8 < 3v_1$$
$$\Rightarrow \text{Modell } m_1 = \{v = 3\} \Rightarrow \text{STEM} = (10, -3)^T$$

Herleitung: Guard Matrix & Konstanten

- (Un-)Gleichungen vom *Symbolic Execution Graph* der Form
$$r = \&\&(g_1, (\&\&(\dots, (\&\&(g_{n-1}, g_n))\dots)))$$
- Aufspalten zu $G = \{g \mid g \text{ ist eine (Un-)Gleichung}\}$
- Problem: g könnte nicht die Form $\varphi \leq c$ haben
- Schlimmer: g könnte mittels "$=$" neue Variablen einführen
- Lösung: umformen von g in die gewünschte Form:
  1. Gleichungen suchen — ersetzen "neuer" Variablen
  2. Normalisierung ($\leq$) — umschreiben $<, >, \geq$ to $\leq$
  3. Normalisierung (c) — umschreiben der Konstanten

function FILTEREQUALITIES(G)
  $V_{left} = \{v \mid \text{die linke Seite beinhaltet } v\}$
  $V_{right} = \{v \mid \text{die rechte Seite beinhaltet } v\}$
  $V_{sub} = V_{right} - V_{left}$
  definiere Substitutionen $\theta = \{\}$
  while $V_{sub} \neq \emptyset$ **do**
    wähle $s \in V_{sub}$
    wähle $g_s \in \{g \in G \mid g \text{ beinhaltet } "=" \text{ und } s\}$
    entferne g_s aus G
    umschreiben von g_s zur Form $s = \psi$
    $\theta = \theta\{s/\psi\}$
    for all $g \in G$ **do**
      $g = \theta g$
    entferne s aus V_{sub}
  return G

Beispiel

Fürs Beispiel ITS erhalten wir:

$\{v_1 + v_2 > 3,\ v_1 > 6,\ 3 * v_1 > 20,\ 5 + v_3 = 2 * v_2,\ v_3 < -10\}$

1. berechne $V_{left} = \{v_1, v_2\}$, $V_{right} = \{v_1, v_2, v_3\}$ so $V_{sub} = \{v_3\}$
2. starte mit $\theta = \{\}$
3. Da $V_{sub} \neq \emptyset$ wähle $s = v_3$ und wähle $g_s \Leftrightarrow 5 + v_3 = 2 * v_2$
4. g_s umschreiben zur Form $s = \psi$ führt zu $v_3 = 2 * v_2 - 5$
5. $\theta = \theta\{s/2 * v_2 - 5\} = \{s/2 * v_2 - 5\}$
6. $G = \{v_1 + v_2 > 3,\ v_1 > 6,\ 3 * v_1 > 20,\ 2 * v_2 - 5 < -10\}$
7. Da $V_{sub} = \emptyset$ gebe G zurück

Normalisierung ($\leq$)

Umschreiben von g_i der Form $g_i \Leftrightarrow \psi + c_\psi \circ c$, mit $\circ \in \{<, >, \leq, \geq\}$ zur Form $\eta * \psi + \eta * c_\psi \leq \eta * c - \tau$ abhängig von $\circ$.

$\circ$	η	τ	$\eta * \psi + \eta * c_\psi \leq \eta * c - \tau$
$<$	1	1	$\psi + c_\psi \leq c - 1$
$>$	-1	1	$-\psi - c_\psi \leq -c - 1$
$\leq$	1	0	$\psi + c_\psi \leq c$
$\geq$	-1	0	$-\psi - c_\psi \leq -c$

η beschreibt die Umwandlung von $\geq$ ($>$) zu $\leq$ ($<$)
τ steht für möglich Subtraktion um $\leq$ statt $<$ zu erhalten

Normalisierung (c)

Subtrahiere $\eta * c_\psi$ auf beiden Seiten:
endgültige Form: $\eta * \psi \leq \eta * c - \tau - 1 * \eta * c_\psi$

Beispiel

Normalisierung der Ungleichung

$$g \Leftrightarrow 3 * v_1 > 20 \Leftrightarrow \underbrace{3 * v_1}_{\psi} + \underbrace{0}_{c_\psi} > \underbrace{20}_{c}$$

Nachschlagen des Wertes von $\circ \Leftrightarrow >$:

$\circ$	η	τ	$\eta * \psi + \eta * c_\psi \leq \eta * c - \tau$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$>$	-1	1	$-\psi - c_\psi \leq -c - 1$

Endergebnis mit $\eta = -1$, $\tau = 1$ in:

$$-(3 * v_1) - (0) \leq -20 - 1 \Leftrightarrow -3 * v_1 \leq -21$$

- Jede Ungleichung hat die Form $\varphi \leq c$
- herleiten der Guard Konstanten ist nun trivial
- herleiten der Guard Matrix ist einfaches Ablesen (genauer unter der Update Matrix)

$\Rightarrow$ Guard matrix & Konstanten hergeleitet ✓

Herleitung: Update Matrix & Konstanten

- beinhalten keine (Un-)Gleichheiten
- haben die Form: $c + \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ (nicht $v_i a_i$)
- Problem: könnte "neue" Variablen aus den Guard beinhalten

  Lösung: Substitutionen auf die Updates anwenden
- Problem: keine Struktureigenschaft wie bei den Guards

  Lösung: rekursive Suche mit zwei Eigenschaften:
  1. es ex. maximal eine Konstante
  2. die Konstante wird nicht multipliziert

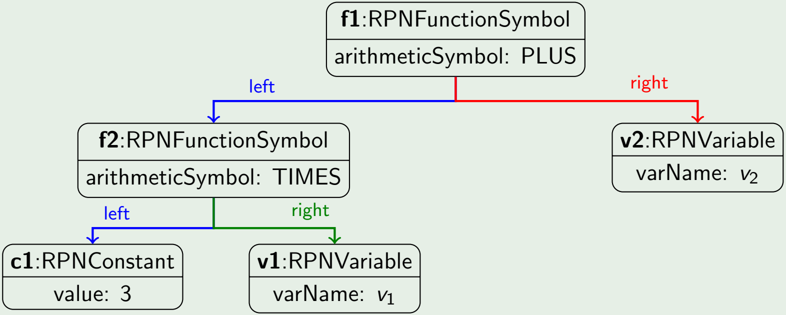
Algorithm 1 Derivation of a coefficient

```
function GETCOEFFICIENT(query)
    if this == query then
        return 1
    else if beinhaltet die query nicht then
        return 0

    if this repräsentiert PLUS then
        if linke Seite beinhaltet query then
            return getCoefficient(query)
        else
            return getCoefficient(query)
    if this repräsentiert TIMES then
        if this.right == query then
            return this.left.value
```

Beispiel

Beispielherleitung des Koeffizienten von v_1:



Update Matrix & Konstanten, Iteration Matrix & Konstanten

- Koeffizient für jede Variable und Konstante pro Update

$\Rightarrow$ Update Matrix & Konstanten ✓

- Iteration Matrix & Konstanten gegeben durch:

$$A = \begin{pmatrix} G & \mathbf{0} \\ M & -I \\ -M & I \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} g \\ -u \\ u \end{pmatrix}$$

can be computed

$\Rightarrow$ Iteration Matrix & Konstanten ✓

SMT-Problem

- geg. A und b nutze *SMT-solver* zum Beweisen der (nicht) ex. eines GNA
- in Anlehnung an den Beweis der GNA-Korrektheit:

Satz

λ_i ist der i-te Eigenwert von U.

- Problem: $\mu_i * y_i$ ist nicht-linear

  zwei mögliche Lösungsansätze:

  1. nutze *quantifier-free non-linear integer arithmetic*
  2. iterieren über alle μ's

Erinnerung: Domain Kriterium

(domain) $x, y_1, \ldots, y_k \in \mathbb{R}^n, \lambda_1, \ldots \lambda_k, \mu_1, \ldots \mu_{k-1} \geq 0$

$\Rightarrow$ Bedingungen für μ's hinzufgen

Erinnerung: Initiation Kriteria

(init) x repräsentiert den *Startterm* (STEM)

$\Rightarrow$ keine weiteren Bedingungen

Erinnerung: Point Kriterium

(point) $A\begin{pmatrix} x \\ x+\sum_i y_i \end{pmatrix} \leq b$

- y_i unbekannt $\Rightarrow$ erstelle $s_i = x_i + \sum_{j=1}^{n} y_{j,i}$
- $A\begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} \leq b$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} & G & & 0 & \dots & 0 \\ a_{1,1} & \dots & a_{1,n} & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} & 0 & \dots & -1 \\ -a_{1,1} & \dots & -a_{1,n} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n,1} & \dots & -a_{n,n} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x1 \\ \vdots \\ x_n \\ s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} g \\ -u_1 \\ \vdots \\ -u_n \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{a_{1,1} * x_1 \quad \dots \quad a_{1,n} * x_n \quad -1 * s_1 \quad \dots \quad 0 * s_n} \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ a_{n,1} * x_1 \quad \dots \quad a_{n,n} * x_n \quad 0 * s_1 \quad \dots \quad -1 * s_n \\ \boxed{-a_{1,1} * x_1 \quad \dots \quad -a_{1,n} * x_n \quad 1 * s_1 \quad \dots \quad 0 * s_n} \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ -a_{n,1} * x_1 \quad \dots \quad -a_{n,n} * x_n \quad 0 * s_1 \quad \dots \quad 1 * s_n \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \boxed{-u_1} \\ \vdots \\ -u_n \\ \boxed{u_1} \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ füge Guard Bedingungen für den STEM hinzu, n Bedingungen mit Gleichheit

und eine Bedingung pro s_i

Erinnerung: Ray Kriterium

$$\text{(ray)} \quad A \begin{pmatrix} y_i \\ \lambda_i y_i + \mu_{i-1} y_{i-1} \end{pmatrix} \leq 0 \text{ for all } 1 \leq i \leq k$$

$i = 1$: $\Rightarrow \mu_{i-1} y_{i-1} = 0 \Rightarrow A \begin{pmatrix} y_1 \\ \lambda_1 y_1 \end{pmatrix} \leq 0$

füge Bedingung hinzu mit $y_{1,j}$ $1 \leq j \leq n$ als neue Variablen

$i > 1$: mit λ_i als den i-ten Eigenwert

füge Bedingung hinzu mit $y_{i,j}$ $1 \leq j \leq n$

und μ_i als neue Variablen

$\Rightarrow$ alle nötigen Bedingungen hinzugefügt✓

lasse den *SMT-solver* ein GNA herleiten (wenn eins ex.)

Erinnerung: Hergeleitete Matrix und Werte

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ -21 \\ -6 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 2 \quad x = (10, -3)^T$$

Beispiel: Bedingungen I: Point Crit.

- Guards: $-10 - (-3) \leq -4$
- Gleichheitsbedingung: $30 - 3 - s_1 = 0$
- Summenbedingungen: $s_1 = y_{1,1} + y_{2,1}$ und $s_2 = y_{1,2} + y_{2,2}$

Erinnerung: Hergeleitete Matrix und Werte

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ -21 \\ -6 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \lambda_1 = 3, \\ \lambda_2 = 2 \\ x = (10, -3)^T \end{matrix}$$

Beispiel: Bedingungen II: Ray Crit.

i=1: Beispielbedingung: $-y_{1,1} - y_{1,2} \leq 4$,

$$3 * y_{1,1} + y_{1,2} - 3 * y_{1,1} \leq 0$$

i>1: Beispielbedingung: $-y_{2,1} - y_{2,2} \leq 4$,

$$3 * y_{2,1} + y_{2,2} - 1 * (2 * y_{2,1} + \mu * y_{1,1}) \leq 0$$

Verifizierung eines GNA

- bekommen ein GNA vom *SMT-solver*
- wollen testen ob dieses wirklich korrekt ist

$\Rightarrow$ Nachberechnen des GNA mit geg. Matrizen und Werten

Beispiel: Verifizierung eines GNA I

Vom *SMT-solver*: $y_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix}$, $y_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \end{pmatrix}$, $\mu_1 = 0$

(domain) offensichtlich wahr ✓

(init) gegenrechnen STEM ✓

(point) $A \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \\ 10+9+8 \\ -3+0+(-8) \end{pmatrix} \leq b \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \\ 27 \\ -11 \end{pmatrix} \leq b$ ✓

Beispiel: Verifizierung eines GNA II

Vom *SMT-solver*: $y_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix}$, $y_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \end{pmatrix}$, $\mu_1 = 0$

(ray)

$$i = 1:\ A \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 3 * 9 \\ 3 * 0 \end{pmatrix} \leq 0 \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 27 \\ 0 \end{pmatrix} \leq 0 \checkmark$$

$$i > 1:\ A \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ 2 * 8 + 0 * 9 \\ 2 * (-8) + 0 * 0 \end{pmatrix} \leq 0 \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ 16 \\ -16 \end{pmatrix} \leq 0 \checkmark$$

$\Rightarrow$ das GNA erfüllt alle Kriterien $\Rightarrow$ Nicht-Terminierung ist bewiesen