



Übung 2 - Lösungen

Aufgabe 1 (Greedy Algorithmen):

Gegeben sei die in Abb. dargestellte Instanz des Traveling Salesman Problems (TSP). Es wird die euklidische Distanz verwendet. Die zugehörige Distanzmatrix ist in Tab. 1 gegeben (gerundete Werte). In dieser Aufgabe sollen drei Greedy Algorithmen für das TSP angewendet werden:

1. *Nearest-Neighbor*: wähle zunächst einen Startknoten und füge die kürzeste Kante zu einem der anderen Knoten ein. Danach wird die kürzeste Kante von diesem Knoten zu einem Knoten, welcher sich noch nicht auf dem entstehenden Pfad befindet, eingefügt. Befinden sich alle Knoten auf dem Pfad, so wird die Kante vom letzten Knoten zum Startknoten eingefügt.
2. *Nearest-Insertion*: wähle einen Startknoten s und den Knoten $i \neq s$ mit der kürzesten Entfernung zu s , und bilde die Subtour $(s, i), (i, s)$. Danach werden die folgenden Schritte solange ausgeführt, bis eine TSP Tour entstanden ist:
 - Wähle den Knoten k , der den kürzesten Abstand zu einem Knoten der Subtour besitzt.
 - Der gefundene Knoten k wird so zwischen zwei Knoten i und j der bestehenden Tour eingefügt, dass die Kosten der neuen Tour minimal werden.
3. *Farthest-Insertion*: Analog zu Nearest-Insertion, nur dass in jedem Schritt der am weitesten entfernte Knoten gewählt wird.

Hinweis: Verwenden Sie als Startknoten den Knoten **a**.

- a) Wenden Sie das Nearest-Neighbor Verfahren auf die gegebene Instanz an.

Startknoten: a

(a, b): 58

(a, c): 114

(a, d): 51

(a, e): 90

(a, f): 104

Kürzeste Kante: (a, d) Tourlänge: 51

Momentaner Knoten: d

(d, b): 45

(d, c): 63

(d, e): 41

(d, f): 64

Kürzeste Kante: (d, e) Tourlänge: 92

Momentaner Knoten: e

(e, b): 78

(e, c): 36

(e, f): 32

Kürzeste Kante: (e, f) Tourlänge: 124

Momentaner Knoten: f

(f, b): 106

(f, c): 61

Kürzeste Kante: (f, c) Tourlänge: 185

Momentaner Knoten: c

(c, b): 82

Kürzeste Kante: (c, b) Tourlänge: 267

Rückweg: (b, a) = 58

Tourlänge: 325

Ende

- b) Wenden Sie das Nearest-Insertion Verfahren auf die gegebene Instanz an.

Startknoten: a

(a, b): 58

(a, c): 114

(a, d): 51

(a, e): 90

(a, f): 104

Nächster Knoten: d

$+(a, d)(51) + (d, a)(51) = 102$

Beste Tour: a - d - a Tourlänge: 102

(d, b): 45

(d, c): 63

(d, e): 41

(d, f): 64

(a, b): 58

(a, c): 114

(a, e): 90

(a, f): 104

Nächster Knoten: e

$$-(d, a)(51) + (e, a)(90) + (d, e)(41) = 80$$

Beste Tour: a - d - e - a Tourlänge: 182

(d, b): 45

(d, c): 63

(d, f): 64

(e, b): 78

(e, c): 36

(e, f): 32

(a, b): 58

(a, c): 114

(a, f): 104

Nächster Knoten: f

$$-(e, a)(90) + (f, a)(104) + (e, f)(32) = 46$$

$$-(d, e)(41) + (f, e)(32) + (d, f)(64) = 55$$

$$-(a, d)(51) + (f, d)(64) + (a, f)(104) = 117$$

Beste Tour: a - d - e - f - a Tourlänge: 228

(d, b): 45

(d, c): 63

(e, b): 78

(e, c): 36

(f, b): 106

(f, c): 61

(a, b): 58

(a, c): 114

Nächster Knoten: c

$$-(f, a)(104) + (c, a)(114) + (f, c)(61) = 71$$

$$-(e, f)(32) + (c, f)(61) + (e, c)(36) = 65$$

$$-(d, e)(41) + (c, e)(36) + (d, c)(63) = 58$$

$$-(a, d)(51) + (c, d)(63) + (a, c)(114) = 126$$

Beste Tour: a - d - c - e - f - a Tourlänge: 286

(c, b): 82

(d, b): 45

(e, b): 78

(f, b): 106

(a, b): 58

Nächster Knoten: b

$$-(f, a)(104) + (b, a)(58) + (f, b)(106) = 60$$

$$-(e, f)(32) + (b, f)(106) + (e, b)(78) = 152$$

$$-(c, e)(36) + (b, e)(78) + (c, b)(82) = 124$$

$$-(a, d)(51) + (b, d)(45) + (a, b)(58) = 52$$

$$-(d, c)(63) + (b, c)(82) + (d, b)(45) = 64$$

Beste Tour: a - b - d - c - e - f - a Tourlänge: 338

Ende

- c) Wenden Sie das Farthest-Insertion Verfahren auf die gegebene Instanz an.

Startknoten: a

$$(a, b): 58$$

$$(a, c): 114$$

$$(a, d): 51$$

$$(a, e): 90$$

$$(a, f): 104$$

Nächster Knoten: c

$$+(a, c)(114) + (c, a)(114) = 228$$

Beste Tour: a - c - a Tourlänge: 228

$$(c, b): 82$$

$$(a, b): 58$$

Minimale Distanz zu b: 58

$$(c, d): 63$$

$$(a, d): 51$$

Minimale Distanz zu d: 51

$$(c, e): 36$$

$$(a, e): 90$$

Minimale Distanz zu e: 36

$$(c, f): 61$$

$$(a, f): 104$$

Minimale Distanz zu f: 61

Nächster Knoten: f

$$-(c, a)(114) + (f, a)(104) + (c, f)(61) = 51$$

Beste Tour: a - c - f - a Tourlänge: 279

$$(c, b): 82$$

$$(f, b): 106$$

$$(a, b): 58$$

Minimale Distanz zu b: 58

$$(c, d): 63$$

$$(f, d): 64$$

$$(a, d): 51$$

Minimale Distanz zu d: 51

(c, e): 36

(f, e): 32

(a, e): 90

Minimale Distanz zu e: 32

Nächster Knoten: b

$$-(f, a)(104) + (b, a)(58) + (f, b)(106) = 60$$

$$-(c, f)(61) + (b, f)(106) + (c, b)(82) = 127$$

$$-(a, c)(114) + (b, c)(82) + (a, b)(58) = 26$$

Beste Tour: a - b - c - f - a Tourlänge: 305

(b, d): 45

(c, d): 63

(f, d): 64

(a, d): 51

Minimale Distanz zu d: 45

(b, e): 78

(c, e): 36

(f, e): 32

(a, e): 90

Minimale Distanz zu e: 32

Nächster Knoten: d

$$-(f, a)(104) + (d, a)(51) + (f, d)(64) = 11$$

$$-(c, f)(61) + (d, f)(64) + (c, d)(63) = 66$$

$$-(b, c)(82) + (d, c)(63) + (b, d)(45) = 26$$

$$-(a, b)(58) + (d, b)(45) + (a, d)(51) = 38$$

Beste Tour: a - b - c - f - d - a Tourlänge: 316

(b, e): 78

(c, e): 36

(d, e): 41

(f, e): 32

(a, e): 90

Minimale Distanz zu e: 32

Nächster Knoten: e

$$-(d, a)(51) + (e, a)(90) + (d, e)(41) = 80$$

$$-(c, f)(61) + (e, f)(32) + (c, e)(36) = 7$$

$$-(f, d)(64) + (e, d)(41) + (f, e)(32) = 9$$

$$-(b, c)(82) + (e, c)(36) + (b, e)(78) = 32$$

$$-(a, b)(58) + (e, b)(78) + (a, e)(90) = 110$$

Beste Tour: a - b - c - e - f - d - a Tourlänge: 323

- d) Der optimale Zielfunktionswert beträgt 323. Berechnen Sie das Performance-Verhältnis für die verwendeten Greedy-Verfahren.

$$\text{Nearest-Neighbor Performance-Verhältnis} = \frac{325}{323} = 1.00619$$

$$\text{Nearest-Insertion Performance-Verhältnis} = \frac{338}{323} = 1.04644$$

$$\text{Farthest-Insertion Performance-Verhältnis} = \frac{323}{323} = 1$$

Aufgabe 2 (Lokale Suche):

- a) Führen Sie einen lokalen Abstieg in der 2-Opt Nachbarschaft der Lösung aus Aufgabe 1. a) aus und berechnen Sie das Performance-Verhältnis der resultierenden Lösung.

$$-(b, c)(82) -(d, a)(51) +(b, d)(45) +(c, a)(114) = 26$$

$$-(b, c)(82) -(e, d)(41) +(b, e)(78) +(c, d)(63) = 18$$

$$-(b, c)(82) -(f, e)(32) +(b, f)(106) +(c, e)(36) = 28$$

$$-(c, f)(61) -(d, a)(51) +(c, d)(63) +(f, a)(104) = 55$$

$$-(c, f)(61) -(e, d)(41) +(c, e)(36) +(f, d)(64) = -2$$

$$-(f, e)(32) -(d, a)(51) +(f, d)(64) +(e, a)(90) = 71$$

$$-(a, b)(58) -(c, f)(61) +(a, c)(114) +(b, f)(106) = 101$$

$$-(a, b)(58) -(e, d)(41) +(a, e)(90) +(b, d)(45) = 36$$

$$-(a, b)(58) -(f, e)(32) +(a, f)(104) +(b, e)(78) = 92$$

$$\text{Bester Kandidat: } -(c, f)(61) -(e, d)(41) +(c, e)(36) +(f, d)(64) = -2$$

Tourlänge: 323

$$-(b, c)(82) -(d, a)(51) +(b, d)(45) +(c, a)(114) = 26$$

$$-(b, c)(82) -(e, f)(32) +(b, e)(78) +(c, f)(61) = 25$$

$$-(b, c)(82) -(f, d)(64) +(b, f)(106) +(c, d)(63) = 23$$

$$-(c, e)(36) -(d, a)(51) +(c, d)(63) +(e, a)(90) = 66$$

$$-(c, e)(36) -(f, d)(64) +(c, f)(61) +(e, d)(41) = 2$$

$$-(e, f)(32) -(d, a)(51) +(e, d)(41) +(f, a)(104) = 62$$

$$-(a, b)(58) -(c, e)(36) +(a, c)(114) +(b, e)(78) = 98$$

$$-(a, b)(58) -(e, f)(32) +(a, e)(90) +(b, f)(106) = 106$$

$$-(a, b)(58) -(f, d)(64) +(a, f)(104) +(b, d)(45) = 27$$

Minimum erreicht! Tourlänge: 323

$$\text{Performance-Verhältnis} = \frac{323}{323} = 1$$

D	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>
<i>a</i>	0	58	114	51	90	104
<i>b</i>	58	0	82	45	78	106
<i>c</i>	114	82	0	63	36	61
<i>d</i>	51	45	63	0	41	64
<i>e</i>	90	78	36	41	0	32
<i>f</i>	104	106	61	64	32	0

Tabelle 1: TSP Distanzmatrix



