



### Übung 3 - Aufgaben

#### Aufgabe 1 (Greedy Algorithmen - Rucksackproblem):

Gegeben sei eine Menge von Gegenständen mit Gewichten  $w_i$  und Profiten  $p_i$ . Das Ziel ist es, eine Auswahl  $I^* \subseteq I = \{1, 2, \dots, n\}$  zu treffen, die die Summe der Profite maximiert und gleichzeitig die Kapazität  $C$  nicht übersteigt. Das zugehörige binäre Optimierungsproblem lautet:

$$\max z = \sum_{i=1}^n x_i p_i \quad (1)$$

sodass

$$\sum_{i=1}^n x_i w_i \leq C, \quad (2)$$

$$x_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I \quad (3)$$

Die Greedy Heuristik für das Rucksackproblem berechnet im ersten Schritt die relativen Profite  $p_i/w_i$  für alle Gegenstände und sortiert sie dementsprechend. Dann wird solange der bisher noch nicht eingefügte Gegenstand mit dem größten relativen Profit eingepackt, bis die Kapazität es nicht mehr zulässt. Ist dies der Fall, so wird der nächste Gegenstand in der sortierten Liste ausgewählt, der noch in den Rucksack passt. Dies wird wiederholt, bis man am Ende der Liste angekommen ist.

- Gegeben sei die Instanz des Rucksackproblems aus Tabelle 1. Die Kapazität  $C$  sei 15. Führen Sie den Greedy Algorithmus durch und berechnen Sie die Performance der Heuristik.
- Ist die Lösung, die Sie in Aufgabenteil a) gefunden haben optimal? Wenn ja, wie lässt sich das begründen?

$i$	1	2	3	4	5	6	7
$p_i$	3	4	7	6	2	1	8
$w_i$	4	2	4	4	3	1	5

Tabelle 1: Instanz eines Rucksackproblems.

- c) Führen Sie die Greedy Heuristik für die Instanz aus Tabelle 2 durch. Die Kapazität  $C$  sei 20. Wie ist die Performance jetzt zu bewerten?
- d) Wie ändert sich die Performance der Heuristik, wenn man für die Instanz aus Aufgabe c) eine Kapazität  $C$  von 26 annimmt? Welche Lösung ist jetzt optimal, und was fällt bezüglich der Optimallösung auf?
- e) Welche Erkenntnis ziehen Sie aus den bisherigen Ergebnissen im Bezug auf die Performance der Greedy Heuristik?
- f) Wie steigert sich die Performance der Heuristik für die Instanz aus Aufgabe d) wenn man den Extended-Greedy-Algorithmus aus der Vorlesung anwendet?

$i$	1	2	3	4	5
$p_i$	6	60	9	7	8
$w_i$	1	20	2	2	2

Tabelle 2: Instanz eines Rucksackproblems.

**Aufgabe 2** (Greedy Algorithmen - Bin Packing Problem):

Das Bin Packing Problem beschreibt die Suche nach einer Möglichkeit eine gegebene Menge von  $n$  Gegenständen in möglichst wenige Behälter (Bins) zu packen.

$$z_{BP} = \min \sum_{j=1}^n y_j \quad (1)$$

$$\text{so dass} \quad \sum_{i=1}^n w_i x_{ij} \leq C y_j \quad \text{für alle } j = 1, \dots, n \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n \quad (3)$$

$$y_j \in \{0, 1\} \quad \text{für alle } j = 1, \dots, n \quad (4)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \text{für alle } i, j = 1, \dots, n \quad (5)$$

- a) Führen Sie zu der Instanz aus Tabelle 3 die *Best-Fit* Heuristik durch. Bei dieser werden die Gegenstände nacheinander so in einen der Bins gepackt, dass die Restkapazität dieses Bins minimal wird. Passt ein Gegenstand in keinen offenen Behälter, wird ein neuer geöffnet. Die Kapazität  $C$  jedes Bins sei 8.
- b) Berechnen Sie die Anzahl der benötigten Bins, wenn Sie die *Best-Fit-Decreasing* Heuristik benutzen. Dabei werden die Gegenstände vor der Zuordnung zu den Bins nach fallendem Gewicht sortiert.

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8
$w_i$	7	4	3	6	1	5	4	2

Tabelle 3: Instanz eines Binpackingproblems.