Deutsche Post Lehrstuhl
für Optimierung von
Distributionsnetzwerken

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Methoden und Anwendungen der Optimierung **WS 2017/18**

Prof. Dr. Michael Schneider schroeder@dpo.rwth-aachen.de

Übung 4 - Lösungen

Aufgabe 1 (CVRP Nachbarschaften):

Das Capacitated Vehicle Routing Problem (CVRP) stellt eine Verallgemeinerung des TSP dar und kann folgender Maßen formuliert werden: Gegeben sei ein gerichteter Graph $\mathcal{G}(V, A)$ mit Distanzmatrix c_{ij}.

- Eine beliebige Anzahl Fahrzeuge $k \in K$ steht an einem Depot $0 \in V$ zur Verfügung.
- Es müssen alle Kunden $i \in V \setminus 0$ beliefert werden, wobei jeder Kunde die Menge $d_i > 0$ eines einzigen Gutes nachfragt.
- Jedes Fahrzeug hat eine gegebene Kapazität von Q Einheiten des Gutes, welche für alle Fahrzeuge gleich ist. Es gelte $Q \geq d_i,\ \forall i \in V \setminus 0$.
- Jeder Kunde muss von genau einem Fahrzeug beliefert werden.
- Die Fahrzeuge müssen am Depot starten und am Ende ihrer Tour wieder zum Depot zurückkehren.

Des Weiteren sei $r_i \in K$ das Fahrzeug, welches Kunde i beliefert. Im Folgenden werden die in Abb. 3 dargestellten Nachbarschaftsoperatoren betrachtet. Jede potenzielle Lösung in der Nachbarschaft kann in dieser Darstellung durch zwei Knoten $v, w \in V$ identifiziert werden. v_- und v_+ bezeichnen in der gegebenen Darstellung den Vorgänger- bzw. Nachfolgerknoten des Knotens v. Gestrichelte Kanten werden entfernt, durchgezogene Kanten eingefügt. Knoten mit einem inneren Kreis können sowohl ein Kunde als auch das Depot sein, während die anderen Knoten nur Kunden darstellen können. Die gepunkteten Kanten deuten die Orientierung der restlichen Tour an. Es gelten folgende Bedingungen:

- 2-Opt*: $v_+ \neq w$
- Relocate: $v \neq w_-$
- Exchange: $v \neq w_-$, $v \neq w_=$

a) In Abb. 1 sind 5 Ausschnitte von Lösungen abgebildet, die durch die in Abb. 3 gezeigten Operatoren verbessert werden können. Welche Operatoren führen Ihrer Meinung nach bei den folgenden Lösungen zu einer deutlichen Verbesserung? Welche Knoten müssen dabei jeweils für v und w gewählt werden?

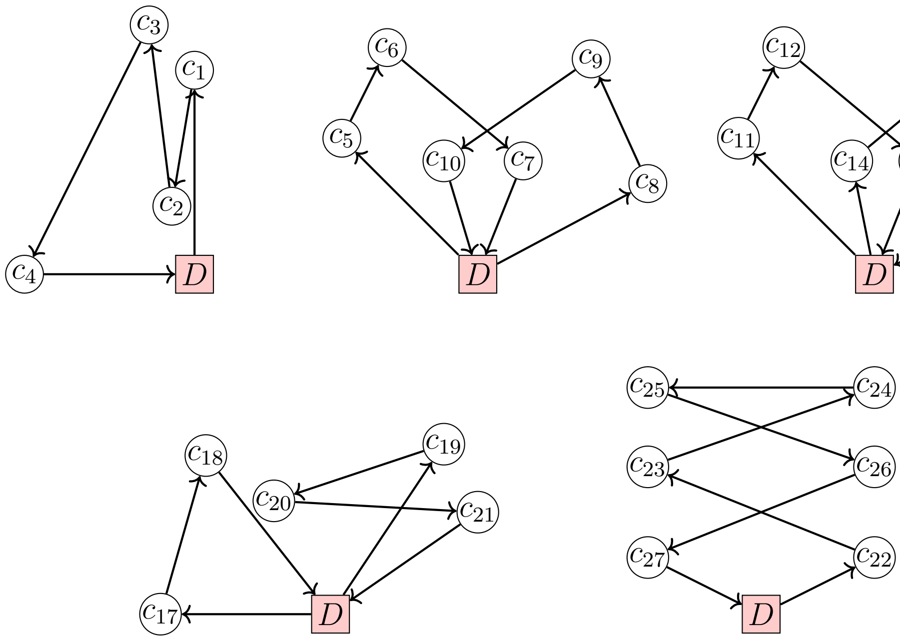


Abbildung 1: Ausschnitte von zu verbessernden Lösungen

Wie Abb. 2 zeigt, kann für jede der 5 Teillösungen eine deutliche Verbesserung durch einen der 3 Moves erzielt werden.
Lösung 1: relocate mit $v = 1$ und $w = 3$ (intra-route)
Lösung 2: two-opt* mit $v = 6$ und $w = 10$ (inter-route)
Lösung 3: exchange mit $v = 14$ und $w = D$ (inter-route)
Lösung 4: relocate mit $v = 20$ und $w = D$ (inter-route)
Lösung 5: exchange mit $v = 23$ und $w = 27$ (intra-route)

b) Wie können Sie die Zulässigkeit einer Lösung in der durch die Relocate- und Exchange-Operatoren definierten Nachbarschaft sowie deren Zielfunktionswert in $\mathcal{O}(1)$ berechnen?

Hinweis: Denken Sie über Werte nach, welche sich *vor* der Durchsuchung der Nachbarschaft berechnen lassen.

Durch Subtraktion der Gewichte der entfernten Kanten und Addition der Gewichte der eingefügten Kanten lässt sich der Zielfunktionswert in konstanter Zeit bestimmen. Zur Bestimmung der Zulässigkeit sei D_k die Gesamtnachfrage für jede Tour k. Im Falle des Relocate-Operators

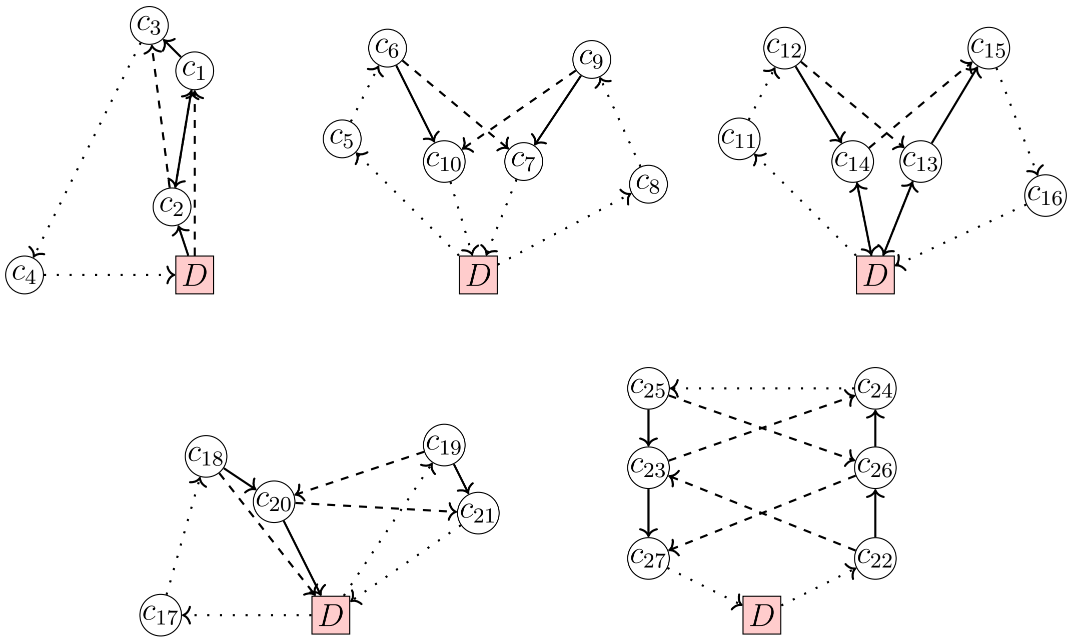


Abbildung 2: Verbessernde Moves

ergibt sich keine Kapazitätsverletzung falls

$$D_{s_v} - d_v \leq Q, \tag{1}$$
$$D_{s_w} + d_v \leq Q. \tag{2}$$

Für den Exchange-Operator gilt analog

$$D_{s_v} + d_{w_-} - d_v \leq Q, \tag{3}$$
$$D_{s_w} + d_v - d_{w_-} \leq Q. \tag{4}$$

c) Welches Problem ergibt sich in der 2-Opt*-Nachbarschaft im Falle eines intra-route moves?

Hinweis: Ein intra-route move bezeichnet die Veränderung der Lösung auf nur einer Route.

Falls $r_v = r_w$ ist die resultierende Lösung strukturell ungültig, da eine Subtour entsteht, welche nicht mit dem Depot verbunden ist.

d) Wie müssen Sie die Nachbarschaft des 2-Opt*-Operators einschränken, um dieses Problem zu umgehen?

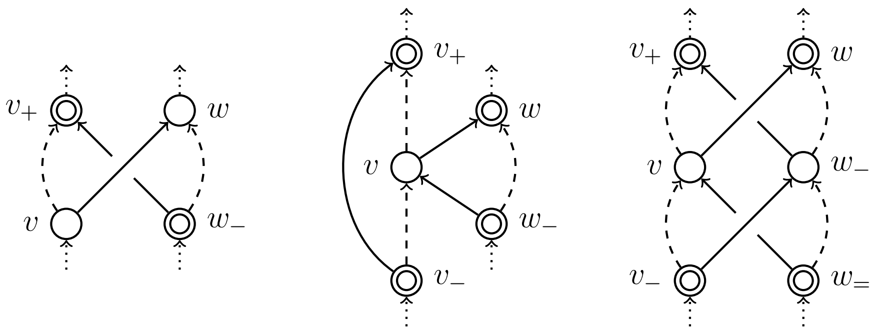
Hinweis: Finden Sie eine Bedingung an die Knoten v und w.

Eine Einschränkung der Nachbarschaft auf Knoten v, w mit $r_v \neq r_w$ verhindert das oben beschriebene Problem.

e) Wie können Sie die Zulässigkeit in der aus d) resultierenden Nachbarschaft ebenfalls in $\mathcal{O}(1)$ berechnen?

Es sei $\bar{d}_i$ die kumulierte Nachfrage aller Kunden nach einschließlich i auf der Tour r_i. Damit ergibt sich keine Kapazitätsverletzung für den 2-Opt*-Operator falls

$$\begin{aligned} D_{s_v} - \bar{d}_{v_+} + \bar{d}_w &\leq Q, && (5) \\ D_{s_w} - \bar{d}_w + \bar{d}_{v_+} &\leq Q. && (6) \end{aligned}$$



(a) 2-Opt* (b) Relocate (c) Exchange

Abbildung 3: Nachbarschaftsoperatoren für das CVRP.