Methoden und Anwendungen der Optimierung **WS 2017/18**

Prof. Dr. Michael Schneider schroeder@dpo.rwth-aachen.de

Übung 5 - Lösungen

Aufgabe 1 (CVRP Nachbarschaften):

Entwickeln Sie einen weiteren Nachbarschaftsoperator für das CVRP, welcher in Verbindung mit den in Abb. 2 gegebenen Operatoren zu einer stark zusammenhängenden Nachbarschaft führt und ebenfalls in $\mathcal{O}(1)$ berechenbar ist. Folgendes ist zu beachten:

- Der 2-Opt*-Operator schliesst eine Tour, falls $v_+ = w_- = 0$
- Der Relocate-Operator schliesst eine Tour, falls $v_+ = v_- = 0$

a) Weshalb ist die durch die gegebenen Operatoren definierte Nachbarschaft nicht stark zusammenhängend?
Da lediglich Touren geschlossen, jedoch nicht geöffnet werden können, ist jede Lösung, welche eine höhere Fahrzeuganzahl als die momentane besitzt, nicht erreichbar.

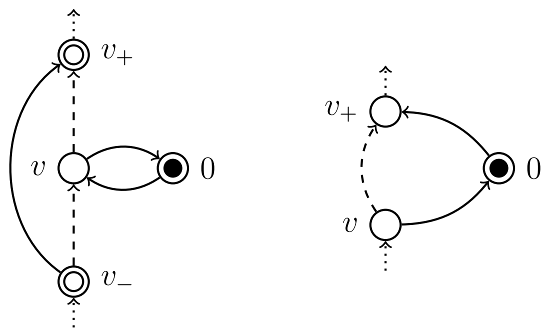
b) Finden Sie eine Lösung, von welcher aus Sie mit den gegebenen Operatoren jede andere Lösung erreichen können.
In der gesuchten Lösung wird jeder Kunde von einem einzelnen Fahrzeug beliefert. Diese Lösung ist die einzige mit $|K| = |V|$ und hat die folgende Form:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \rightarrow & 1 & \rightarrow & 0 \\ 0 & \rightarrow & 2 & \rightarrow & 0 \\ & & \vdots & & \\ 0 & \rightarrow & |V| & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Mit Hilfe des 2-Opt*- und/oder Relocate-Operators lässt sich aus dieser Lösung jede andere Lösung mit $|K| < |V|$ konstruieren.

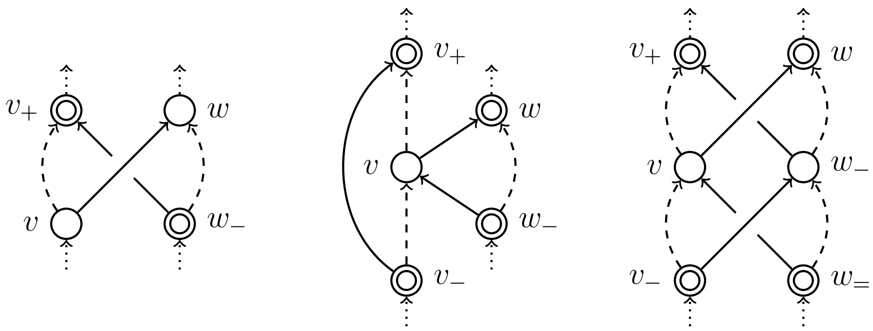
c) Gestalten Sie den neuen Operator so, dass diese Lösung immer erreicht werden kann.
Indem der neue Operator mehr Kanten in die momentane Lösung einfügt, als er löscht, kann er die Fahrzeuganzahl erhöhen. Zwei Möglichkeiten,

einen solchen Operator zu definieren, sind in Abb. 1 gegeben. Der Extract-Operator extrahiert einen Kunden aus einer bestehenden Tour und fügt ihn auf einer neuen Tour ein. Der Split-Operator teilt eine bestehende Tour in zwei neue Touren auf. Wegen $d_i < Q, \forall i \in |V| \setminus 0$ sind alle durch diese Operatoren erzeugten Lösungen zulässig. Durch Erweiterung der bestehenden Nachbarschaft mit einem oder beiden dieser Operatoren kann aus einer beliebigen Lösung die Lösung mit $|K| = |V|$ erreicht werden. Daher ist die so erweiterte Nachbarschaft stark zusammenhängend.



(a) Extract (b) Split

Abbildung 1: Zusätzliche Nachbarschaftsoperatoren für das CVRP.



(a) 2-Opt* (b) Relocate (c) Exchange

Abbildung 2: Nachbarschaftsoperatoren für das CVRP.

Aufgabe 2 (TTP Nachbarschaften):

Das *Traveling Tournament Problem* (TTP) beschäftigt sich mit der Organisation eines Turniers zwischen N Sportmannschaften $i \in I = \{1, \ldots, N\}$. Die Kosten für eine Fahrt vom Heimstadion der Mannschaft i zum Heimstadion der Mannschaft j betragen c_{ij}. Es gelten folgende Nebenbedingungen:

- Jede Mannschaft soll genau zweimal gegen jede andere Mannschaft spielen.
- Spiele zwischen zwei Mannschaften sollen einmal im Station der einen und einmal im Stadion der anderen Mannschaft stattfinden.
- Eine Mannschaft soll nicht mehr als dreimal in Folge heimwärts (Home) oder auswärts (Away) spielen.
- Alle Mannschaften starten an ihrem Heimstadion und müssen nach dem Turnier wieder zu ihrem Heimstadion zurückkehren.

Ziel ist es, einen Spielplan zu finden, welcher die Summe der Reisekosten aller Mannschaften minimiert. Als Beispiel dient der in Tab. 1 dargestellte Spielplan mit $N = 6$. Dabei bezeichnet g_{ir} den Gegner der Mannschaft i in Runde $r \in R = \{1, \ldots, 2(N-1)\}$, wobei ein vorangestelltes $+$ ($-$) ein Heimspiel (Auswärtsspiel) der Mannschaft i anzeigt. Für alle Runden gilt

$$g_{ir} = +j \quad \Leftrightarrow \quad g_{jr} = -i.$$

r	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_{1r}	$+3$	$+5$	$+2$	-3	$+4$	-6	-4	-5	$+6$	-2
g_{2r}	$+6$	-3	-1	-5	$+3$	-4	$+5$	-6	$+4$	$+1$
g_{3r}	-1	$+2$	-6	$+1$	-2	$+5$	$+6$	-4	-5	$+4$
g_{4r}	$+5$	-6	-5	$+6$	-1	$+2$	$+1$	$+3$	-2	-3
g_{5r}	-4	-1	$+4$	$+2$	-6	-3	-2	$+1$	$+3$	$+6$
g_{6r}	-2	$+4$	$+3$	-4	$+5$	$+1$	-3	$+2$	-1	-5

Tabelle 1: Beispiellösung für das TTP mit $N = 6$.

Es werden folgende Nachbarschaften betrachtet:

- *Swap-Rounds* tauscht zwei Runden v, w des Spielplans (Spalten in Tab. 1) aus:

$$g_{iv} \leftrightarrow g_{iw}, \quad \forall i \in I$$

- *Swap-Teams* tauscht die Spiele zweier Mannschaften v, w aus. Die Runden des Spielplans, in denen die beiden Mannschaften gegeneinander spielen, bleiben dabei unverändert:

$$g_{vr} \leftrightarrow g_{wr}, \quad \forall r \in R, \ g_{vr} \neq w \ \wedge \ g_{wr} \neq v$$

- *Swap-Home-Away* tauscht den Ort des Hin- und Rückspiels zweier Mannschaften v, w aus:

$$g_{vr} \rightarrow -g_{vr}, \quad g_{wr} \rightarrow -g_{wr}, \quad \forall r \in R, \ g_{vr} = w \ \vee \ g_{wr} = v$$

a) Wenden Sie den Swap-Rounds-Operator auf die Runden 3 und 5 des Beispiels an und ermitteln Sie die Zulässigkeit der resultierenden Lösung. Welche Laufzeitkomplexität besitzt die Feststellung des Gewinns und der Zulässigkeit einer Nachbarlösung?
Die resultierende Lösung (zulässig) ist in Tab. 2 gegeben. Für die Gewinnberechnung müssen für jede der N Zeilen 4 Kanteneinfügungen und -löschungen berücksichtigt werden. Daher ist die Laufzeitkomplexität $\mathcal{O}(N)$. Die Überprüfung der Zulässigkeit einer manipulierten Zeile beträgt $\mathcal{O}(1)$, da nur die 7 Einträge rund um die manipulierten Einträge überprüft werden müssen. Da N Zeilen durch diesen Operator verändert werden, beträgt die Laufzeitkomplexität insgesamt $\mathcal{O}(N)$.

b) Wenden Sie den Swap-Teams-Operator auf die Mannschaften 2 und 5 des Beispiels an und ermitteln Sie die Zulässigkeit der resultierenden Lösung. Welche Laufzeitkomplexität besitzt die Feststellung des Gewinns und der Zulässigkeit einer Nachbarlösung?
Die resultierende Lösung (unzulässig aufgrund von Zeile 2, Runden 7-10) ist in Tab. 3 gegeben. Der Gewinn kann durch die Differenz der Gewichte von eingefügten und gelöschten Kanten bestimmt werden. In Zeile v und w werden zwar nur jeweils 4 Kanten gelöscht und hinzugefügt ($\mathcal{O}(1)$). Durch die konsekutiven Veränderung im Spielplan entstehen aber $2(N-2)$ veränderte Spalten. In jeder müssen 4 Kanten gelöscht und eingefügt werden. Daher ist die Laufzeitkomplexität linear ($\mathcal{O}(N)$). Da vier Einträge in $2(N-2)$ Spalten durch diesen Operator verändert werden, beträgt die Laufzeitkomplexität für die Zulässigkeitsprüfung

ebenfalls $\mathcal{O}(N)$.

c) Wenden Sie den Swap-Home-Away-Operator auf die Mannschaften 2 und 4 des Beispiels an und ermitteln Sie die Zulässigkeit der resultierenden Lösung. Welche Laufzeitkomplexität besitzt die Feststellung des Gewinns und der Zulässigkeit einer Nachbarlösung?

Die resultierende Lösung (zulässig) ist in Tab. 4 gegeben. Auch hier kann der Gewinn durch die Differenz der Gewichte von eingefügten und gelöschten Kanten in $\mathcal{O}(1)$ bestimmt werden. Da lediglich vier Einträge durch diesen Operator verändert werden, beträgt die Laufzeitkomplexität insgesamt $\mathcal{O}(1)$.

r	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_{1r}	$+3$	$+5$	$\boxed{\mathbf{+4}}$	-3	$\boxed{\mathbf{+2}}$	-6	-4	-5	$+6$	-2
g_{2r}	$+6$	-3	$\boxed{\mathbf{+3}}$	-5	$\boxed{\mathbf{-1}}$	-4	$+5$	-6	$+4$	$+1$
g_{3r}	-1	$+2$	$\boxed{\mathbf{-2}}$	$+1$	$\boxed{\mathbf{-6}}$	$+5$	$+6$	-4	-5	$+4$
g_{4r}	$+5$	-6	$\boxed{\mathbf{-1}}$	$+6$	$\boxed{\mathbf{-5}}$	$+2$	$+1$	$+3$	-2	-3
g_{5r}	-4	-1	$\boxed{\mathbf{-6}}$	$+2$	$\boxed{\mathbf{+4}}$	-3	-2	$+1$	$+3$	$+6$
g_{6r}	-2	$+4$	$\boxed{\mathbf{+5}}$	-4	$\boxed{\mathbf{+3}}$	$+1$	-3	$+2$	-1	-5

Tabelle 2: Resultierende Lösung für Swap-Rounds mit Runden 3 und 5.

r	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_{1r}	$+3$	$\boxed{\mathbf{+2}}$	$\boxed{\mathbf{+5}}$	-3	$+4$	-6	-4	$\boxed{\mathbf{-2}}$	$+6$	$\boxed{\mathbf{-5}}$
g_{2r}	$\boxed{\mathbf{-4}}$	$\boxed{\mathbf{-1}}$	$\boxed{\mathbf{+4}}$	-5	$\boxed{\mathbf{-6}}$	$\boxed{\mathbf{-3}}$	$+5$	$\boxed{\mathbf{+1}}$	$\boxed{\mathbf{+3}}$	$\boxed{\mathbf{+6}}$
g_{3r}	-1	$\boxed{\mathbf{+5}}$	-6	$+1$	$\boxed{\mathbf{-5}}$	$\boxed{\mathbf{+2}}$	$+6$	-4	$\boxed{\mathbf{-2}}$	$+4$
g_{4r}	$\boxed{\mathbf{+2}}$	-6	$\boxed{\mathbf{-2}}$	$+6$	-1	$\boxed{\mathbf{+5}}$	$+1$	$+3$	$\boxed{\mathbf{-5}}$	-3
g_{5r}	$\boxed{\mathbf{+6}}$	$\boxed{\mathbf{-3}}$	$\boxed{\mathbf{-1}}$	$+2$	$\boxed{\mathbf{+3}}$	$\boxed{\mathbf{-4}}$	-2	$\boxed{\mathbf{-6}}$	$\boxed{\mathbf{+4}}$	$\boxed{\mathbf{+1}}$
g_{6r}	$\boxed{\mathbf{-5}}$	$+4$	$+3$	-4	$\boxed{\mathbf{+2}}$	$+1$	-3	$\boxed{\mathbf{+5}}$	-1	$\boxed{\mathbf{-2}}$

Tabelle 3: Resultierende Lösung für Swap-Teams mit Mannschaften 2 und 5.

r	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_{1r}	$+3$	$+5$	$+2$	-3	$+4$	-6	-4	-5	$+6$	-2
g_{2r}	$+6$	-3	-1	-5	$+3$	$\boxed{\mathbf{+4}}$	$+5$	-6	$\boxed{\mathbf{-4}}$	$+1$
g_{3r}	-1	$+2$	-6	$+1$	-2	$+5$	$+6$	-4	-5	$+4$
g_{4r}	$+5$	-6	-5	$+6$	-1	$\boxed{\mathbf{-2}}$	$+1$	$+3$	$\boxed{\mathbf{+2}}$	-3
g_{5r}	-4	-1	$+4$	$+2$	-6	-3	-2	$+1$	$+3$	$+6$
g_{6r}	-2	$+4$	$+3$	-4	$+5$	$+1$	-3	$+2$	-1	-5

Tabelle 4: Resultierende Lösung für Swap-Home-Away mit Mannschaften 2 und 4.