Methoden und Anwendungen der Optimierung **WS 2017/18**

Prof. Dr. Michael Schneider schroeder@dpo.rwth-aachen.de

Übung 11 - Lösungen

Aufgabe 1 (VRPSPD):

Das Vehicle Routing Problem with Simultaneous Pickup and Delivery (VRPSPD) ist eine Erweiterung des CVRP dahingehend, das jeder Kunde i zusätzlich zu seiner Nachfrage d_i eine Gütermenge p_i besitzt, welche durch das Fahrzeug abgeholt werden muss. Beide Mengen teilen sich die verfügbare Fahrzeugkapazität. Die Abholmenge eines Kunden kann nicht verwendet werden, um die Nachfrage eines anderen Kunden zu decken, das heißt, zu Beginn einer Tour k befindet sich die gesamte Nachfragemenge D_k auf der Tour im Fahrzeug, während sich am Ende der Tour die gesamte Abholmenge P_k auf der Tour im Fahrzeug befindet. r_i sei die Tour, auf welcher Kunde i liegt.

a) Der wesentliche Unterschied zum CVRP besteht darin, dass die Ladungsmenge des Fahrzeugs im Verlauf einer Tour nicht nur abnehmen, sondern auch zunehmen kann. Für welche Werte von D_k und P_k auf einer Tour k ist die Tour in jedem Fall zulässig?
Den ungünstigsten Fall stellt eine Tour $0 \to \ldots \to i \to i' \to \ldots \to 0$, mit $d_i = 0,\ p_i = P_k,\ d_{i'} = D_k,\ p_{i'} = 0$ und $d_j = p_j = 0,\ \forall j \neq i, i'$ dar. Dann muss auf der Kante zwischen i und i' die Bedingung $P_k + D_k \leq Q$ gelten. Im günstigsten Fall hingegen gilt $d_i = D_k,\ p_i = 0,\ d_{i'} = 0,\ p_{i'} = P_k$, in welchem bereits $D_k \leq Q$ und $P_k \leq Q$ hinreichend ist.

b) Drücken Sie die Ladungsmenge l_i eines Fahrzeugs auf einer Kante vom Kunden i zum nachfolgenden Kunden i_+ auf einer Tour so aus, dass sie sich während einer lokalen Suche in $\mathcal{O}(1)$ berechnen lässt.
Hinweis: Denken Sie darüber nach, zu welchen Teilen aus d_j und p_j von Kunden j auf der Tour die Ladung des Fahrzeugs zu jeden Zeitpunkt abhängt.
Hinweis: Gehen Sie analog zur Zulässigkeitsberechnung des 2-Opt-Operators beim CVRP vor (Vorausberechnung von Hilfsfunktionen in $\mathcal{O}(N)$).
Es sei $\bar{d}_j$ die Nachfragemenge auf der Tour r_j ab einschließlich dem Kunden j und $\bar{p}_j$ die Abholmenge bis einschließlich dem Kunden j. Dann ist $l_i = \bar{p}_i + \bar{d}_{i_+}$. Die Werte $\bar{d}_j$ und $\bar{p}_j$ lassen sich beide in $\mathcal{O}(N)$ vorberechnen. Dieser Zusammenhang ist in Abb. 1 grafisch dargestellt.

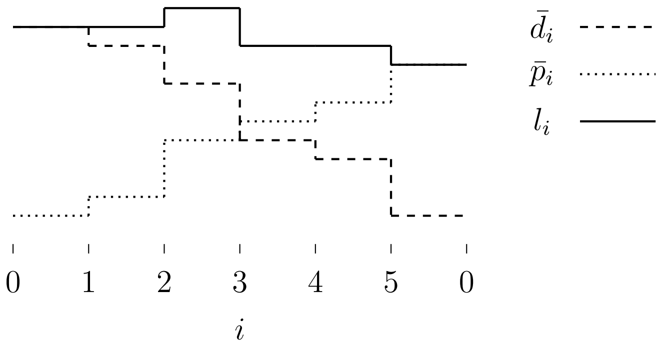


Abbildung 1: Zusammensetzung von l_i aus $\bar{d}_i$ und $\bar{p}_i$ auf einer Tour mit 5 Kunden.

c) Betrachten Sie die in Abb. 2 dargestellten Nachbarschaftsoperatoren. Finden Sie einen Weg, mit Hilfe weiterer aus l_i vorausberechneten Funktionen die Zulässigkeit einer Nachbarlösung für den Fall $r_v \neq r_w$ in $\mathcal{O}(1)$ zu berechnen.

Hinweis: Die Kapazitätsrestriktion lautet $l_i \leq Q$ für alle Knoten i.

Hinweis: Wie verändert sich die Ladungsmenge auf einer Tour, wenn Sie die Tour vor oder nach einen Knoten i verändern?

Es sei j ein beliebiger Kunde auf der Tour. Werden nach j Kunden in die Tour eingefügt bzw. herausgenommen, so ändert sich l_i für alle i welche auf der Tour vor j liegen um genau den Wert der hinzugekommenen bzw. abgegangenen Nachfrage. Wird die Tour hingegen vor j modifiziert, so ändert sich l_i für alle i nach einschließlich j um genau die Differenz der Abholmenge. Um die Kapazitätsverletzung zu überprüfen, ist es also ausreichend, lediglich die maximale Ladungsmenge $\bar{l}_i^{\leftarrow}$ vor und die maximale Ladungsmenge $\bar{l}_i^{\rightarrow}$ nach einem Kunden i auf der Tour r_i abzuspeichern. Diese Berechnung benötigt ebenfalls $\mathcal{O}(N)$. Die Überprüfung der Zulässigkeit erfolgt dann nach:

- **2-Opt:**

$$\max\left[\,\bar{l}_{v_+}^{\leftarrow} - \bar{d}_{v_+} + \bar{d}_w,\ \bar{l}_w^{\rightarrow} - \bar{p}_{w_-} + \bar{p}_v\right] \quad \leq \quad Q \qquad (1)$$
$$\max\left[\,\bar{l}_w^{\leftarrow} - \bar{d}_w + \bar{d}_{v_+},\ \bar{l}_{v_+}^{\rightarrow} - \bar{p}_v + \bar{p}_{w_-}\right] \quad \leq \quad Q \qquad (2)$$

- **Relocate:**

$$\max\left[\,\bar{l}_v^{\leftarrow} - d_v,\ \bar{l}_{v_+}^{\rightarrow} - p_v\right] \quad \leq \quad Q \qquad (3)$$
$$\max\left[\,\bar{l}_w^{\leftarrow} + d_v,\ \bar{l}_{w_-}^{\rightarrow} + p_v\right] \quad \leq \quad Q \qquad (4)$$

- **Exchange:**

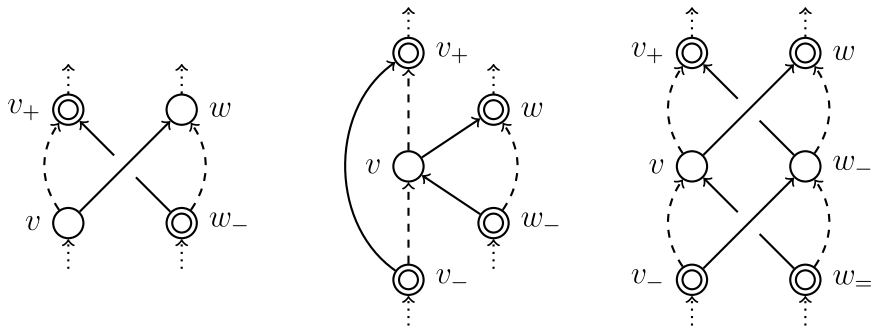
$$\max\left[\,\bar{l}_v^{\leftarrow} - d_v + d_{w_-},\ \bar{l}_v^{\rightarrow} - p_v + p_{w_-}\right] \quad \leq \quad Q \tag{5}$$
$$\max\left[\,\bar{l}_{w_-}^{\leftarrow} - d_{w_-} + d_v,\ \bar{l}_{w_-}^{\rightarrow} - p_{w_-} + p_v\right] \quad \leq \quad Q \tag{6}$$

d) Welche Besonderheit ergibt sich beim Relocate- und Exchange-Operator aus Abb. 2 für den Fall $r_v = r_w$?
Als Beispiel wird ein Element der Relocate-Nachbarschaft betrachtet, wenn v in der Tour vor w liegt:

$$\textbf{Vorher:}\quad \ldots \to v_- \to v \to v_+ \to \ldots \to w_- \to w \to \ldots$$
$$\textbf{Nachher:}\quad \ldots \to v_- \to v_+ \to \ldots \to w_- \to v \to w \to \ldots$$

Zunächst lässt sich feststellen, dass sich die Ladungsmenge auf der Tour vor v und nach w_- nicht verändert. Auf dem Abschnitt zwischen diesen Knoten verringert sich die Ladungsmenge jedoch um p_v und sie erhöht sich um d_v. Zur Prüfung der Zulässigkeit muss also $\bar{l}_{vw_-} - p_v + d_v \leq Q$, mit der maximalen Ladungsmenge $\bar{l}_{ij}$ auf dem Tourabschnitt zwischen i und j, gelten. Gleiches gilt im Falle des Exchange-Operators. Da $\bar{l}_{ij}$ zwei Indizes besitzt, benötigt seine Vorrausberechnung jedoch $\mathcal{O}(N^2)$. Soll der Fall $r_v = r_w$ also durch ein lokales Suchverfahren für das VRPSPD berücksichtigt werden, stellt dies eine untere Grenze für seine Laufzeitkomplexität dar.

Anmerkung: In der Praxis ist dieser Umstand eher unproblematisch, da die Dauer der Berechnung von $\bar{l}_{ij}$ im wesentlichen quadratisch von der Tourlänge abhängt, welche sich für konstantes Q bei wachsendem N allerdings nicht ändert. Daher skaliert die Vorberechnung von $\bar{l}_{ij}$ in der Praxis eher mit der Anzahl an Touren, also $\mathcal{O}(N)$.



(a) 2-Opt (b) Relocate (c) Exchange

Abbildung 2: Nachbarschaftsoperatoren für das VRPSPD.