Methoden und Anwendungen der Optimierung **WS 2017/18**

Prof. Dr. Michael Schneider schroeder@dpo.rwth-aachen.de

Übung 8 - Lösungen

Aufgabe 1 (Tabu-Suche):

Gegeben sei die in Abb. 1 dargestellte Instanz eines STSP in der euklidischen Ebene. Die Länge einer Kante zwischen zwei Knoten ist durch die euklidische Distanz gegeben. Es soll eine Tabu-Suche mit lokaler Bestensuche unter Verwendung der in Abb. 2 dargestellten Nachbarschaftsoperatoren implementiert werden.

a) Welche Attribute eines Lösungsübergangs halten Sie beim STSP für ein attributives Gedächtnis für geeignet?
Analog zum Beispiel in der Vorlesung lassen sich die `inc`-, `dec`- und `swap`-Attribute auf die Entscheidungsvaraiblen x_{ij} anwenden.

b) Was sind beim STSP die Vor- und Nachteile eines expliziten gegenüber eines attributiven Gedächtnisses?
Nachteile: Eine Lösung lässt sich durch eine Sequenz von N Ganzahlen beschreiben. Zur Überprüfung des Gedächtnisses müssten in Iteration i des Verfahrens also i Lösungen mit jedem Nachbarschaftselement verglichen werden, wobei der Vergleich selbst $\mathcal{O}(N)$ schwer ist. Bis zur i-ten Iteration ist zum Durchsuchen der 2-Opt-Nachbarschaft also ein Aufwand von $\mathcal{O}(i^2 \cdot N^3)$ nötig, was für praktische Anwendungen ($i > 50.000, N > 200$) unmöglich ist. Die sehr ineffiziente Speichernutzung ist ein weiterer Grund. Vorteil: Man läuft nicht Gefahr bisher nicht besuchte Lösungen zu tabuisieren.

c) Nennen Sie mögliche Tabu-Restriktionen.
Klassisch: gelöschte Kanten dürfen nicht wieder eingefügt (`dec`), bzw. eingefügte Kanten nicht gelöscht werden (`inc`). Denkbar aber typischer Weise nicht restriktiv genug: Der gleiche Satz an gelöschten/eingefügten Kanten darf nicht eingefügt/gelöscht werden (ähnlich `swap` mit mehreren Variablen).

d) Welche Struktur würden Sie von einer guten Lösung bei der vorliegenden Instanzstruktur erwarten?

Es ist davon auszugehen, dass eine gute Lösung bei einer Gleichverteilung der Knoten nur die kurzen Kanten aus dem vollständigen Graphen enthält. Für den vorliegenden Fall wären dies die Kanten, welche horizontal oder vertikal zwischen den Knoten verlaufen.

e) Wie können sie diese Eigenschaft verwenden, um die Laufzeitkomplexität der lokalen Suche zu verbessern? Welche Laufzeitkomplexität der lokalen Suche könnte unter sinnvollen Annahmen erreicht werden?

Hinweis: Nutzen Sie das Konzept der Generatorkanten (v, w) bei der Definition der Nachbarschaftsoperatoren, um die Nachbarschaft einzuschränken und die Tabu-Suche in vielversprechende Bereiche des Lösungsraums zu lenken.
Für den vorliegenden Fall ist es geschickt, nur die jeweils 4 Kanten eines Knotens zu seinem nächsten Nachbarn als Generatorkanten (v, w) einzusetzen. Damit verringert sich die Komplexität der lokalen Suche auf $\mathcal{O}(N)$, wobei die Beeinträchtigung der potentiellen Lösungsqualität i.d.R. minimal ausfällt. Eine Tabu-Suche in dieser Variante heißt *granulare Tabu-Suche*. Oft ist es so, dass die granulare Tabu-Suche sogar bessere Ergebnisse liefert, als eine Tabu-Suche mit vollständiger Nachbarschaft. Dies liegt daran, dass in gleicher Zeit ein viel größerer Teil des vielverprechenden Suchraums erkundet wird. Andere Granularisierungen wie z.B. nur die $\lambda\%$ kürzesten Kanten im vollständigen Graphen oder eine dynamische Granularisierung sind ebenfalls möglich.

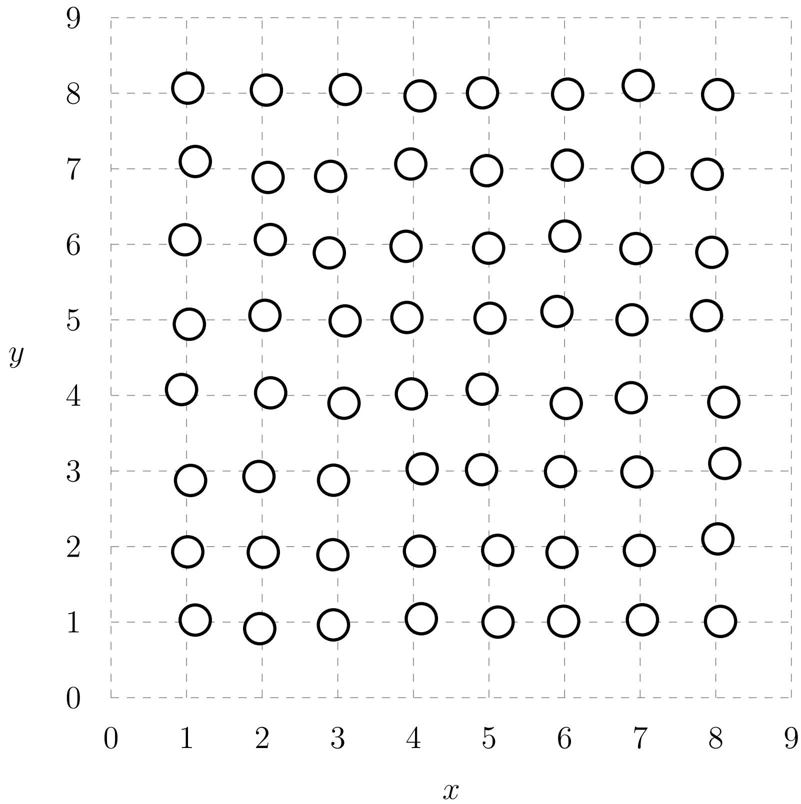
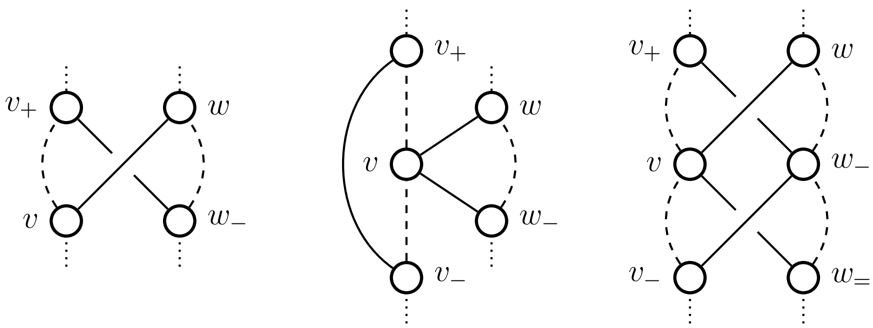


Abbildung 1: STSP Beispielinstanz



(a) 2-Opt (b) Relocate (c) Exchange

Abbildung 2: Nachbarschaftsoperatoren für das STSP.

Aufgabe 2 (Tabu-Suche):

Gegeben seien die in Tab. 1 dargestellten Lösungen x mit Attributen $b_i \in \{0,1\}$, $i = 1,\ldots,5$ und Kosten $c(x)$. Der zugehörige Nachbarschaftsgraph ist in Abb. 3 dargestellt. Führen Sie eine Tabu-Suche mit lokaler Bestensuche durch, welche bei $x = 1$ startet. Als Tabu-Kriterium wird das `inc`-Attribut (+) und das `dec`-Attribut (−) verwendet: Ändert sich bei einem Lösungsübergang das Attribut b_i, so ist die Umkehrung des Wertes von b_i für die nächsten zwei Iterationen tabu. Ein Übergang, welcher den besten gefundenen Zielfunktionswert verbessert, ist immer erlaubt. Brechen Sie die Suche nach 5 Übergängen ohne Verbesserung ab.

Lösung siehe Tab. 2. Nachbarn mit Tabu-Status sind durchgestrichen, x' ist die nächste Lösung und $x^\star$ ist die beste Lösung. Eine Nachbarlösung, welche mit ! markiert ist, erfüllt das Anspruchskriterium.

x	b_4	b_3	b_2	b_1	b_0	$c(x)$
1	0	0	0	0	1	50
2	0	0	1	1	1	51
3	0	0	0	1	1	46
4	1	0	1	1	1	47
5	1	1	1	1	0	52
6	0	0	1	1	0	48
7	0	1	0	1	0	49
8	1	1	0	1	0	61

Tabelle 1: Lösungen mit Attributen b_i.

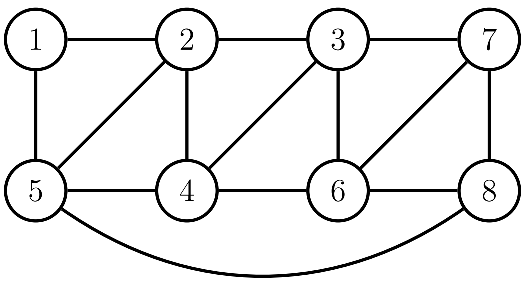


Abbildung 3: Nachbarschaftsgraph zu Aufgabe 2.

x	Tabuliste	$\mathcal{N}(x)$	x'	$x^\star$
1	–	$\{2, 5\}$	2	1
2	$+b_1, +b_2$	$\{\cancel{1}, 3!, 4, 5\}$	3	3
3	$+b_1, +b_2; -b_2$	$\{\cancel{2}, \cancel{4}, \cancel{6}, 7\}$	7	3
7	$-b_2; +b_3, -b_0$	$\{\cancel{3}, \cancel{6}, 8\}$	8	3
8	$+b_3, -b_0; +b_4$	$\{5, \cancel{6}, \cancel{7}\}$	5	3
5	$+b_4; +b_2$	$\{\cancel{1}, \cancel{2}, 4, \cancel{8}\}$	4	3
4	$+b_2; -b_3, +b_0$	$\{2, \cancel{5}, \cancel{3}, \cancel{6}\}$	2	3

Tabelle 2: Verlauf der Tabu-Suche.