



10 - Übung - Lösungen

Aufgabe 1 (Genetischer Algorithmus):

Gegeben sei eine CVRP Instanz mit 14 Kunden und einer Fahrzeugkapazität von 15. Die Kundennachfrage ist in Tab. 1 und die Distanzmatrix in Tab. 2 dargestellt. Zur Lösung des Problems soll ein genetischer Algorithmus verwendet werden. Zu Beginn liegen die in Tab. 3 dargestellten Lösungen A und B vor. In der verwendeten Kodierung stellen unterstrichene Knoten den Beginn einer neuen Tour dar und die Reihenfolge der Knoten im Chromosom von Links nach Rechts gibt ihre Position auf der jeweiligen Tour an. Tritt in einer Lösung eine Kapazitätsverletzung auf, wird folgendes Reparaturverfahren zur Erzeugung einer zulässigen Lösung verwendet:

1. Markiere einen Knoten i , ab welchem die im Toursinn kumulierte Nachfrage als erstes die Fahrzeugkapazität überschreitet.
2. Falls eine Tour mit ausreichend freier Kapazität für Knoten i existiert, wähle von diesen jene Tour r , sodass die Entfernung zwischen dem letzten Knoten auf r und i minimal ist und schließe i und alle seine Nachfolger an r an.
3. Falls keine Tour mit ausreichend Kapazität zur Verfügung steht, starte eine neue Tour bei Knoten i .
4. Falls die Lösung unzulässig ist, gehe zu Schritt 1, sonst Ende.

- a) Weshalb ist das verwendete Reparaturverfahren im Rahmen eines genetischen Algorithmus sinnvoller, als ein Verfahren, welches einfach eine neue Tour mit dem Knoten i einfügt?

Grundidee bei einem genetischen Algorithmus ist, dass durch Rekombination von Teilen vielversprechender Lösungen weitere gute/bessere Lösungen erzeugt werden. Dazu müssen beim Generationswechsel die für die Lösungsgüte relevanten Eigenschaften so gut wie möglich erhalten bleiben. Würde man Knoten i in jedem Fall einer neuen Tour zuweisen, so führt dies zu unnötigen Informationsverlusten, da beim VRP die Knotenfolge die für die Lösungsgüte relevante Information darstellt.

- b) Welchem unerwünschten Effekt muss bei der verwendeten Kodierung in der Mutationsphase des Verfahrens entgegengewirkt werden?

Da alleine durch Rekombination keine Reduktion der Tourenzahl erfolgt, gleichzeitig durch das Reparaturverfahren allerdings neue Touren entstehen können, ergäbe sich ohne Gegenmaßnahme eine zu große Tourenzahl. Dies lässt sich verhindern, indem in der Mutationsphase Touren möglichst günstig (und zulässig) zusammengelegt werden.

- c) Erzeugen Sie eine Generation an Nachkommen unter Verwendung der PMX-, OX- und CX-Operatoren mit den Crossover-Punkten 6-7 und 11-12. Wenden Sie gegebenenfalls das Reparaturverfahren an.

Für den PMX-Operator ergibt sich folgendes Mapping:

$$\begin{array}{cccc}
 2 & \leftarrow & 14 & \rightarrow 8 \\
 12 & \leftrightarrow & 13 & \\
 6 & \leftrightarrow & 7 & \\
 11 & \leftrightarrow & 9 &
 \end{array}$$

Die Knoten außerhalb der Crossover-Punkte werden entsprechend umgetauscht:

Position	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
A	<u>4</u>	6	3	2	<u>1</u>	10	<u>14</u>	13	<u>7</u>	8	9	11	<u>5</u>	12
B	<u>5</u>	9	13	<u>1</u>	8	<u>3</u>	2	12	<u>6</u>	14	11	4	<u>10</u>	7
A'	<u>4</u>	7	3	8	<u>1</u>	10	2	12	<u>6</u>	14	11	9	<u>5</u>	13
B'	<u>5</u>	11	12	<u>1</u>	2	<u>3</u>	<u>14</u>	13	<u>7</u>	8	9	4	<u>10</u>	6

Reparatur von A':

Knoten	Anschlussmöglichkeiten	Beste
8	9, 13	13
2	–	Neue Tour

Reparatur von B':

Knoten	Anschlussmöglichkeiten	Beste
12	<u>3</u> , 13	3

PMX-Ergebnis:

A'_f	<u>4</u>	7	3	<u>1</u>	10	<u>2</u>	12	<u>6</u>	14	11	9	<u>5</u>	13	8
B'_f	<u>5</u>	11	<u>1</u>	2	<u>3</u>	12	<u>14</u>	13	<u>7</u>	8	9	4	<u>10</u>	6

Für den OX-Operator ergeben sich folgende Zwischenschritte:

Position	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
A	<u>4</u>	6	3	2	<u>1</u>	10	<u>14</u>	13	<u>7</u>	8	9	11	<u>5</u>	12
B	<u>5</u>	9	13	<u>1</u>	8	<u>3</u>	2	12	<u>6</u>	14	11	4	<u>10</u>	7
A_1	<u>4</u>	←	3	←	<u>1</u>	10	2	12	<u>6</u>	14	11	←	<u>5</u>	←
B_1	<u>5</u>	←	←	<u>1</u>	←	<u>3</u>	<u>14</u>	13	<u>7</u>	8	9	4	<u>10</u>	←
A_2	<u>1</u>	10	–	–	–	–	2	12	<u>6</u>	14	11	<u>5</u>	<u>4</u>	3
B_2	<u>1</u>	<u>3</u>	–	–	–	–	<u>14</u>	13	<u>7</u>	8	9	4	<u>10</u>	<u>5</u>
A'	<u>1</u>	10	13	<u>7</u>	8	9	2	12	<u>6</u>	14	11	<u>5</u>	<u>4</u>	3
B'	<u>1</u>	<u>3</u>	2	12	<u>6</u>	11	<u>14</u>	13	<u>7</u>	8	9	4	<u>10</u>	<u>5</u>

Reparatur von A' :

Knoten	Anschlussmöglichkeiten	Beste
13	11, <u>5</u> , 3	3
12	<u>5</u>	<u>5</u>

Lösung B' ist zulässig. OX-Ergebnis:

A'_f	<u>1</u>	10	<u>7</u>	8	9	2	<u>6</u>	14	11	<u>5</u>	12	<u>4</u>	3	13
B'	<u>1</u>	<u>3</u>	2	12	<u>6</u>	11	<u>14</u>	13	<u>7</u>	8	9	4	<u>10</u>	5

Für den CX-Operator ergeben sich folgende Zyklen:

Zyklus 1: $4 \rightarrow 5 \rightarrow 10 \rightarrow 3 \rightarrow 13 \rightarrow 12 \rightarrow 7 \rightarrow 6 \rightarrow 9 \rightarrow 11 \rightarrow 4$ Zyklus 2: $2 \rightarrow 1 \rightarrow 8 \rightarrow 14 \rightarrow 2$

In den Nachkommen werden die Gene von Zyklus 2 vertauscht:

Position	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
A	<u>4</u>	6	3	<u>2</u>	<u>1</u>	10	<u>14</u>	13	<u>7</u>	<u>8</u>	9	11	<u>5</u>	12
B	<u>5</u>	9	13	<u>1</u>	<u>8</u>	<u>3</u>	<u>2</u>	12	<u>6</u>	<u>14</u>	11	4	<u>10</u>	7
A'	<u>4</u>	6	3	<u>1</u>	8	10	2	13	<u>7</u>	14	9	11	<u>5</u>	12
B'	<u>5</u>	9	13	2	<u>1</u>	<u>3</u>	<u>14</u>	12	<u>6</u>	8	11	4	<u>10</u>	7

Reparatur von A':

Knoten	Anschlussmöglichkeiten	Beste
10	–	Neue Tour

Reparatur von B':

Knoten	Anschlussmöglichkeiten	Beste
2	<u>1</u>, <u>3</u>, 12	12

CX-Ergebnis:

A'_f	<u>4</u>	6	3	<u>1</u>	8	<u>10</u>	2	13	<u>7</u>	14	9	11	<u>5</u>	12
B'_f	<u>5</u>	9	13	<u>1</u>	<u>3</u>	<u>14</u>	12	2	<u>6</u>	8	11	4	<u>10</u>	7

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
d_i	7	4	5	2	8	4	7	2	1	7	4	6	3	3

Tabelle 1: Kundennachfrage

c_{ij}	i														
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	0	5	10	13	6	10	11	11	10	9	4	14	11	11	5
1	4	0	10	9	6	9	12	10	9	8	7	14	13	8	2
2	10	10	0	6	6	2	3	5	11	9	12	4	1	10	12
3	13	10	4	0	7	6	7	4	7	9	10	12	8	3	9
4	9	10	7	7	0	7	6	11	10	2	6	10	8	11	7
5	11	10	5	5	9	0	2	3	8	8	11	6	7	8	11
6	8	9	6	7	4	6	0	9	8	3	12	5	2	10	9
7	11	14	4	6	13	5	5	0	7	8	14	10	6	7	9
8	9	8	11	3	9	8	9	5	0	7	12	12	11	2	8
9	9	7	9	5	2	4	3	11	8	0	7	8	6	10	3
10	1	5	13	12	9	9	13	13	9	7	0	13	10	10	6
11	13	13	5	11	10	7	8	9	11	7	11	0	7	12	10
12	10	12	2	9	10	4	4	7	9	7	12	7	0	10	12
13	13	11	9	2	12	6	10	4	1	7	9	13	8	0	8
14	6	4	11	8	5	7	9	11	8	4	5	12	10	8	0

Tabelle 2: Distanzmatrix

Position	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
A	<u>4</u>	6	3	2	<u>1</u>	10	<u>14</u>	13	<u>7</u>	8	9	11	<u>5</u>	12
B	<u>5</u>	9	13	<u>1</u>	8	<u>3</u>	2	12	<u>6</u>	14	11	4	<u>10</u>	7

Tabelle 3: Startlösungen