Deutsche Post Lehrstuhl
für Optimierung von
Distributionsnetzwerken

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Methoden und Anwendungen der Optimierung **WS 2017/18**

Prof. Dr. Michael Schneider schroeder@dpo.rwth-aachen.de

Übung 7 - Lösungen

Aufgabe 1 (Scheduling Problem - Iterated Local Search (ILS)):

Bei Scheduling Problemen sollen Ablaufpläne erstellt werden, die Prozessen zeitlich begrenzt Ressourcen zuteilen. Eine spezielle Variante des Scheduling Problems versucht eine Reihenfolge für n zu bearbeitende Jobs $j \in J = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ zu finden, sodass die Summe der Verspätungen der Fertigstellungen minimal wird. Für die Bearbeitung der Jobs steht nur eine Maschine zur Verfügung. Dabei seien d_j die erwünschten Fertigstellungszeitpunkte (due dates) und p_j die Bearbeitungszeiten (processing times). Tabelle 1 zeigt eine Instanz dieser Problemklasse.

Jobs	0	1	2	3
d_j	10	4	8	7
p_j	4	9	2	3

Tabelle 1: Instanz für ein Scheduling Problem

a) Wie lautet die zu minimierende Zielfunktion, wenn mit C_j die tatsächlichen Fertigstellungszeitpunkte bezeichnet werden?
Die Summe der Verspätungen (engl.: tardiness) der Fertigstellungen soll minimiert werden. Die Zielfunktion lautet daher:

$$min z = \sum_{j=1}^{n} t_j = \sum_{j=1}^{n} \max\{0, C_j - d_j\} \tag{1}$$

b) Definieren Sie einen Swap/Exchange-Operator für das vorliegende Problem.
Lösungen lassen sich als Permutationen des Vektors $x = (0, 1, 2, \dots, n)$ darstellen. Eine Möglichkeit einen Swap-Operator zu definieren ist das Tauschen der Jobs der Positionen v und w.

$$x_v^{r+1} = x_w^r \tag{2}$$
$$x_w^{r+1} = x_v^r \tag{3}$$
$$x_i^{r+1} = x_i^r \qquad \forall i \neq v, w \tag{4}$$

c) Gestalten Sie einen Relocate-Operator für das vorliegende Problem.
Ein möglicher Relocate-Operator fügt den Job der Position v an der Position w ein.

Fall 1 ($v < w$):
Alle Jobs mit Positionen größer als v und kleiner gleich w werden eine Position nach vorne geschoben.
Fall 2 ($v > w$):
Alle Jobs mit Positionen größer gleich w und kleiner v werden eine Position nach hinten geschoben.

$$x_w^{r+1} = x_v^r \tag{5}$$
$$\tag{6}$$
$$\text{falls } v < w \; : \; x_i^{r+1} = x_{i+1}^r \quad \forall i : v \leq i < w \tag{7}$$
$$x_i^{r+1} = x_i^r \quad \text{sonst} \tag{8}$$
$$\text{falls } v > w \; : \; x_i^{r+1} = x_{i-1}^r \quad \forall i : w < i \leq v \tag{9}$$
$$x_i^{r+1} = x_i^r \quad \text{sonst} \tag{10}$$

d) Führen Sie eine *Iterated Local Search* (ILS) durch, um die Reihenfolge der Bearbeitung zu verbessern. Die Initiallösung sei $x = (0, 1, 2, 3)$, d.h. Job 0 wird als erstes bearbeitet, dann Job 1, dann Job 2 und zuletzt Job 3. Verwenden sie als lokale Suche zwei Durchläufe einer Erstensuche des Swap-Operators. Starten Sie mit dem Tausch des Jobs an Position 0 mit dem Job an Position 1. Als Perturbation wenden Sie den Relocate-Operator auf die Jobs der Positionen 0 und 3 an. Weiterhin akzeptieren Sie ein neues lokales Optimum nur dann als neue Lösung, wenn es einen besseren Zielfunktionswert aufweist als die bisherige Lösung. Welcher Zielfunktionswert ergibt sich, wenn Sie nach zwei Schleifendurchläufen der ILS abbrechen?

Lokale Suche ($x^0 = (0, 1, 2, 3)$):

1. Durchlauf:

x^0	**0**	**1**	**2**	**3**
d_j	**10**	**4**	**8**	**7**
p_j	**4**	**9**	**2**	**3**
C_j	**4**	**13**	**15**	**18**
t_j	**0**	**9**	**7**	**11**

$z^0 = \sum_{j=1}^{n} t_j = 0 + 9 + 7 + 11 = 27$

SWAP(0,1): $x^1 = (1, 0, 2, 3)$

x^1	**1**	**0**	**2**	**3**
d_j	**4**	**10**	**8**	**7**
p_j	**9**	**4**	**2**	**3**
C_j	**9**	**13**	**15**	**18**
t_j	**5**	**3**	**7**	**11**

$z^1 = 26 < 27 = z^0$

SWAP(0,1) wird angewendet.

$x^1 = (1, 0, 2, 3)$

2. Durchlauf:

SWAP(0,1) : $x^2 = (0, 1, 2, 3)$ $z^2 = 27 < 26$ **verbessert nicht.**

SWAP(0,2) : $x^2 = (2, 0, 1, 3)$

x^2	**2**	**0**	**1**	**3**
d_j	**8**	**10**	**4**	**7**
p_j	**2**	**4**	**9**	**3**
C_j	**2**	**6**	**15**	**18**
t_j	**0**	**0**	**11**	**11**

$z^2 = 22 < 26 = z^1$

SWAP(0,2) wird angewendet.

$x^2 = (2, 0, 1, 3)$

- **Iterationszähler = 1:**

Perturbation ($x^2 = (2, 0, 1, 3)$):

REL(0,3): $(0, 1, 3, 2)$

x^3	**0**	**1**	**3**	**2**
d_j	**10**	**4**	**7**	**8**
p_j	**4**	**9**	**3**	**2**
C_j	**4**	**13**	**16**	**18**
t_j	**0**	**9**	**9**	**10**

$z^3 = 28$

Lokale Suche ($x^3 = (0, 1, 3, 2)$):

1.Durchlauf:

SWAP(0,1): $x^4 = (1, 0, 3, 2)$

x^4	**1**	**0**	**3**	**2**
d_j	**4**	**10**	**7**	**8**
p_j	**9**	**4**	**3**	**2**
C_j	**9**	**13**	**16**	**18**
t_j	**5**	**3**	**9**	**10**

$z^4 = 27 < 28 = z^3$

SWAP(0,1) wird angewendet.

$x^4 = (1, 0, 3, 2)$

2.Durchlauf:

SWAP(0,1) : $x^5 = (0, 1, 3, 2)$ $z^5 = 28 > 27$ **verbessert nicht.**

SWAP(0,2) : $x^5 = (3, 0, 1, 2)$

x^5	**3**	**0**	**1**	**2**
d_j	**7**	**10**	**4**	**8**
p_j	**3**	**4**	**9**	**2**
C_j	**3**	**7**	**16**	**18**
t_j	**0**	**0**	**12**	**10**

$z^5 = 22 < 27 = z^4$**.**

SWAP(0,2) wird angewendet.

$x^5 = (3, 0, 1, 2)$

Akzeptanzkriterium ($x^2 = (2, 0, 1, 3), x^5 = (3, 0, 1, 2)$):

$z(x^5) = z(x^2)$**, daher wird** x^5 **nicht als neue Lösung akzeptiert.**
$x^6 := x^2 = (2, 0, 1, 3)$

- **Iterationszähler = 2:**
  $x^7 =$ **Perturbation** ($x^2 = (2, 0, 1, 3)$)
  $x^9 =$ **Lokale Suche** ($x^3 = (0, 1, 3, 2)$)
  $x^{10} =$ **Akzeptanzkriterium** ($x^2 = (2, 0, 1, 3), x^5 = (3, 0, 1, 2)$)

Iteration 2 ist identisch zu Iteration 1, daher sollte Perturbation in der Praxis zufällig gewählt werden!

$x^* = (2, 0, 1, 3)$ **mit** $z^* = 22$ **ist die beste gefundene Lösung.**