

Finite Differenzen-Methode Wirbeltransportgleichung

David Nolte[†] und Ann-Kristin Baum

Projektgruppe Praktische Mathematik am Institut für Mathematik

Technische Universität Berlin

24. Oktober 2013

Inhaltsverzeichnis

1. Finite Differenzen-Methode	2
1.1. Einleitung	2
1.2. Finite Differenzen in 1D	2
1.3. Finite Differenzen in 2D	3
2. Diskretisierung der Wirbeltransportgleichung	4
2.1. Diskretisierung der Poisson-Gleichung	5
2.2. Diskretisierung der Cauchy-Riemann-DGLe	6
2.3. Diskretisierung des Konvektionsterms	7
2.4. Zeitdiskretisierung	8
3. Lösungsalgorithmus	10
A. Strömungsmechanische Grundlagen	11
A.1. Herleitung der Wirbeltransportgleichung	11
A.2. Stromfunktion	11
B. Reibung und Wandhaftung	12

[†]nolte@math.tu-berlin.de

1. Finite Differenzen-Methode

1.1. Einleitung

Die Finite Differenzen-Methode (FDM) ist ein numerisches Verfahren zur Diskretisierung partieller Differentialgleichungen (pDGL). Das betrachtete Rechengebiet wird durch ein Gitter zerlegt, in dessen Knotenpunkten die Differentialoperatoren der pDGL durch („finite“) Differenzenquotienten ersetzt werden. So entsteht ein System algebraischer Gleichungen – eine für jeden Knoten –, dessen Lösung in den Gitterpunkten die gesuchte Lösung der pDGL approximiert.

Es müssen also Näherungsformeln für die in der Differentialgleichung vorkommenden partiellen Ableitungen gefunden werden (siehe [2] und [1]).

1.2. Finite Differenzen in 1D

Als Ausgangspunkt dient die Definition der Ableitung

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Die naheliegendste Approximation nimmt für Δx einen endlichen Wert an, nämlich den Abstand zweier benachbarter Punkte $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ auf dem Gitter, wie in Abb. 1 skizziert:

$$f'(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} =: D^+ f(x). \quad (1)$$

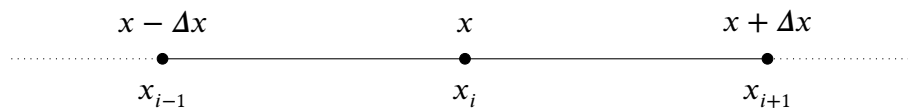


Abbildung 1: Skizze des i -ten Knotens eines FD-Gitters mit Nachbarn

Gl. (1) wird *vorwärtiger Differenzenquotient* genannt. Der *rückwärtige Differenzenquotient* ist definiert als

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} =: D^- f(x). \quad (2)$$

Der Mittelwert beider Formeln ergibt den *zentralen Differenzenquotienten*

$$f'(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} =: D^0 f(x). \quad (3)$$

Mittels Taylorreihenentwicklung um $f(x \pm \Delta x)$ kann die Fehlerordnung der Näherungsformeln bestimmt werden, falls f dreimal stetig differenzierbar ist,

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta x f'(x) + \frac{\Delta x^2}{2} f''(x) + \mathcal{O}(\Delta x^3), \quad (4)$$

$$f(x - \Delta x) = f(x) - \Delta x f'(x) + \frac{\Delta x^2}{2} f''(x) + \mathcal{O}(\Delta x^3). \quad (5)$$

Ersetzen von f' durch die einseitigen Differenzenquotienten D^\pm in der jeweiligen Gleichung zeigt, dass ein Fehler der Größenordnung Δx entsteht ($\mathcal{O}(\Delta x)$). Subtrahiert man (5) von (4), so zeigt sich im Vergleich mit der Definition des zentralen Differenzenquotienten, dass dieser ein Restglied $\mathcal{O}(\Delta x^2)$ besitzt. Der numerische Fehler ist also proportional zur Gitterweite Δx bzw. zu Δx^2 . Einseitige Differenzenformeln haben somit *Konvergenzordnung* 1, zentrale Differenzen sind Approximationen 2. Ordnung: Wird Δx um den Faktor a verringert, skaliert der Fehler mit a^p (p : Konvergenzordnung).

Einseitige Differenzenformeln zweiter Ordnung lauten

$$f'(x) = \frac{1}{2\Delta x}(-3f(x) + 4f(x + \Delta x) - f(x + 2\Delta x)) + \mathcal{O}(\Delta x^2), \quad (6)$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2\Delta x}(-3f(x) + 4f(x - \Delta x) - f(x - 2\Delta x)) + \mathcal{O}(\Delta x^2). \quad (7)$$

Eine Näherungsformel für die zweite Ableitung $f''(x)$ lässt sich mittels Taylorentwicklung durch Addition von (4) und (5) oder durch zweifache Anwendung der Formeln für die erste Ableitung ermitteln,

$$f''(x) = \frac{f(x - \Delta x) - 2f(x) + f(x + \Delta x)}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2). \quad (8)$$

1.3. Finite Differenzen in 2D

Die abgeleitete Funktion hängt nun von zwei Raumkoordinaten ab, $f = f(x, y)$. Das 2D-Gitter ist in Abb. 2 skizziert. Später kommt noch die Zeit hinzu.

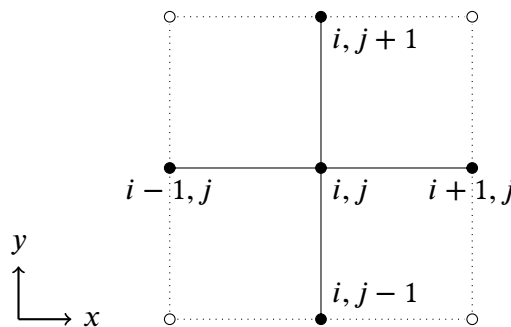


Abbildung 2: Ausschnitt eines 2D Gitters

Das Vorgehen für die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$, $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$ ist völlig analog zum eindimensionalen Fall. Die zentralen Differenzenquotienten lauten

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) &= \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x - \Delta x, y)}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2), \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) &= \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y - \Delta y)}{2\Delta y} + \mathcal{O}(\Delta y^2).\end{aligned}$$

Für die zweiten Ableitungen gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) &= \frac{f(x + \Delta x, y) - 2f(x, y) + f(x - \Delta x, y)}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2), \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) &= \frac{f(x, y + \Delta y) - 2f(x, y) + f(x, y - \Delta y)}{\Delta y^2} + \mathcal{O}(\Delta y^2).\end{aligned}$$

Eine Diskretisierung für den Laplace-Operator $\Delta f = \text{div grad } f = (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})f$ ist durch Addition beider Formeln gegeben. In Indexschreibweise wie in Abb. 2 ($f_{ij} \approx f(x_i, y_j)$) gilt für ein äquidistantes Gitter ($h = \Delta x = \Delta y$)

$$\Delta f|_{ij} = \frac{f_{i+1,j} + f_{i-1,j} - 4f_{ij} + f_{i,j+1} + f_{i,j-1}}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \quad (9)$$

im Punkt i, j des Gitters. Dieser Quotient wird auch *5-Punkte-Stern* genannt.

Anmerkung zur Notation $f(x, y)$ und $f(x_i, y_i)$ bezeichnen Funktionsauswertungen der **exakten Funktion** f in beliebigen Koordinaten (x, y) des Definitionsbereichs bzw. diskreten Koordinaten (x_i, y_i) des FD-Gitters. Diese Funktion jedoch ist im Folgenden unbekannt. Ziel der FDM ist, auf dem definierten Gitter eine Approximation an den wahren Verlauf von f zu finden. Für diese Näherung verwenden wir die Indexnotation f_{ij} . Es ist $f_{ij} \approx f(x_i, y_i)$ mit einem Fehler, der von h abhängt.

Mit den eingeführten Differenzenformeln lassen sich nun partielle Differentialgleichungen erster oder zweiter Ordnung diskretisieren. Im folgenden Kapitel werden sie auf die *Wirbeltransportgleichung* angewandt.

2. Diskretisierung der Wirbeltransportgleichung

Mit Hilfe der Finite-Differenzen-Methode wird das gekoppelte System der instationären, reibungsfreien Wirbeltransportgleichung (10), der Poisson-Gleichung der Stromfunktion ψ (11) und der Cauchy-Riemann-DGLen für das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{u} = (u, v)^T$ (12) diskretisiert.

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -\mathbf{u} \cdot \nabla \omega \quad (10)$$

$$-\Delta \psi = \omega \quad (11)$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (12)$$

Herleitung und Erklärung der Wirbeltransportgleichung stehen im Anhang A.

Das betrachtete Rechengebiet Ω , z.B. ein Quadrat mit Kantenlänge $L = 1\text{m}$, wird durch ein äquidistantes Gitter zerlegt. Die Indizes i, j der N^2 inneren Punkte durchlaufen $i, j = 1, \dots, N$. Die Knoten des Randes $\partial\Omega$ sind $(0, j)$, $(N+1, j)$, $(i, 0)$, $(i, N+1)$. FD-Formeln ersetzen in jedem inneren Knotenpunkt die partiellen Ableitungen.

Die Anwendung der FDM auf die Modellgleichungen wird in den folgenden Abschnitten der Reihe nach erläutert, anschließend wird in Abschnitt 3 knapp der Lösungsalgorithmus skizziert.

2.1. Diskretisierung der Poisson-Gleichung

Für eine bekannte Verteilung der Wirbelstärke ω soll die Poisson-Gleichung

$$-\Delta\psi = \omega \quad \text{in } \Omega =]0, 1[\times]0, 1[$$

gelöst werden. Als Randbedingung ist auf dem gesamten Rand $\psi = \gamma = \text{const}$ vorgegeben. Der Rand bildet somit (nach Definition der Stromfunktion) eine Stromlinie. Da die Geschwindigkeitsvektoren tangential zu den Stromlinien sind, gibt es keine Flüsse über den Rand des Gebiets, d.h. die Wände sind undurchlässig.

Gleichung (11) wird mit der FD-Formel für den Laplace-Operator (9) diskretisiert und führt auf

$$h^{-2}(-\psi_{i-1,j} - \psi_{i+1,j} + 4\psi_{i,j} - \psi_{i,j-1} - \psi_{i,j+1}) = \omega_{i,j} \quad \text{für } i, j = 1 \dots N \quad (13)$$

mit *Dirichlet*-Randbedingungen

$$\psi_{0,j} = \psi_{N+1,j} = \psi_{i,0} = \psi_{i,N+1} = \gamma = \text{const.}$$

In Gleichungen (13) werden alle diese – ohnehin bekannten – Randpunkte auf die rechte Seite gebracht und durch die Randbedingung (hier γ , z.B. $\gamma = 0$) ersetzt. In einem Punkt $(1, j)$, dessen linker Nachbar auf dem Rand liegt, lautet die Gleichung dann z.B.

$$h^{-2}(-\psi_{2,j} + 4\psi_{1,j} - \psi_{1,j-1} - \psi_{1,j+1}) = \omega_{1,j} + h^{-2}\gamma.$$

Gl. (13) ist ein lineares Gleichungssystem aus N^2 Gleichungen, das in Matrix-Vektor-Form

$$\mathbf{A}\tilde{\boldsymbol{\psi}} = \tilde{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\gamma}. \quad (14)$$

geschrieben werden kann, mit

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\psi}} &= (\psi_{1,1} \quad \psi_{1,2} \quad \dots \quad \psi_{N,N-1} \quad \psi_{N,N})^T \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}} &= (\omega_{1,1} \quad \omega_{1,2} \quad \dots \quad \omega_{N,N-1} \quad \omega_{N,N})^T \end{aligned}$$

und der Koeffizientenmatrix \mathbf{A} . Im Vektor \mathbf{y} stehen die Randbedingungen von ψ (die Einträge der inneren Gitterpunkte sind immer 0). Für ein Gitter mit 4×4 inneren Knoten ist¹

[illegible]

mit entsprechenden Randbedingungen in der rechten Seite des LGS (hier kann $\gamma = 0$ angenommen werden).

Das Gleichungssystem (14) wird z.B. mittels LR -Zerlegung gelöst. Das Ergebnis ist ein Vektor $\tilde{\psi}$, dessen Einträge Näherungen für die Stromfunktion $\psi(x, y)$ in den Knoten des Gitters sind. Über die Werte zwischen diesen Knoten ist nichts bekannt. In den Lücken kann jedoch – näherungsweise! – ein linearer Verlauf angenommen und entsprechend interpoliert werden.

2.2. Diskretisierung der Cauchy-Riemann-DGLen

Mit Kenntnis von ψ_{ij} kann das dazugehörige Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{u} = (u, v)^T$ berechnet werden. Dazu müssen die Cauchy-Riemann-DGLen (12) diskretisiert werden:

$$u_{ij} = \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}}{2h} \quad (15)$$

$$v_{ij} = -\frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{2h} \quad \text{für } i, j = 1 \dots N. \quad (16)$$

Hinweis: Für die ψ_{ij} auf dem Rand ($i = 0, N + 1$ oder $j = 0, N + 1$) müssen die zuvor verwendeten Randbedingungen an ψ eingesetzt werden!

Die Geschwindigkeitskomponenten können direkt berechnet werden, ohne dass es der Lösung eines Gleichungssystems bedarf. Mit Hilfe der einseitigen Differenzenquotienten (zweiter Ordnung) (7),(6) ist es möglich, die Geschwindigkeiten auf dem Rand des Gebiets zu ermitteln.

¹Skizzen und viel Schmierpapier sind unabdingbar!

2.3. Diskretisierung des Konvektionsterms

Nun wird der Konvektionsterm der Wirbeltransportgleichung

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \omega = u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y}$$

diskretisiert. Die partiellen Ableitungen würden wir wieder intuitiv mit zentralen Differenzenquotienten ersetzen, um ein Verfahren zweiter Ordnung zu erhalten:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial \omega}{\partial x} \Big|_{ij} &= u_{ij} \frac{\omega_{i+1,j} - \omega_{i-1,j}}{2h} + \mathcal{O}(h^2), \\ v \frac{\partial \omega}{\partial y} \Big|_{ij} &= v_{ij} \frac{\omega_{i,j+1} - \omega_{i,j-1}}{2h} + \mathcal{O}(h^2). \end{aligned}$$

Jedoch sind die einfachen expliziten Zeitdiskretisierungsverfahren – das explizite Euler- und das Adams-Bashforth-2-Verfahren, s. folgender Abschnitt – kombiniert mit örtlichen Zentralkdifferenzen stets instabil: Störungen (z.B. Rundungsfehler) werden verstärkt und führen zu schnell wachsenden Oszillationen.

Abhilfe bietet das UPWIND-Verfahren. Es beruht auf der Beobachtung, dass der konvektive Informationsfluss eine Richtung besitzt: Die Strömung transportiert Informationen (über ω) von stromauf gelegenen Orten zu stromab gelegenen – Zustände, die in Strömungsrichtung *hinter* einem Punkt herrschen, beeinflussen diesen nicht. Dies aber steht im Widerspruch zu Zentralkdifferenzen, die stets alle Nachbarpunkte miteinbeziehen.

Das UPWIND-Verfahren verwendet vor- oder rückwärtige Differenzenquotienten erster Ordnung, je nach Richtung des Strömungsfeldes im betrachteten Punkt:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial \omega}{\partial x} \Big|_{ij} &= \begin{cases} u_{ij} \frac{\omega_{ij} - \omega_{i-1,j}}{h} + \mathcal{O}(h) & \text{falls } u_{ij} > 0, \\ u_{ij} \frac{\omega_{i+1,j} - \omega_{ij}}{h} + \mathcal{O}(h) & \text{falls } u_{ij} < 0, \end{cases} \\ v \frac{\partial \omega}{\partial y} \Big|_{ij} &= \begin{cases} v_{ij} \frac{\omega_{ij} - \omega_{i,j-1}}{h} + \mathcal{O}(h) & \text{falls } v_{ij} > 0, \\ v_{ij} \frac{\omega_{i,j+1} - \omega_{ij}}{h} + \mathcal{O}(h) & \text{falls } v_{ij} < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Wir verwenden eine kompaktere Schreibweise für den Konvektionsterm und erhalten die semidiskrete Form der Wirbeltransportgleichung (10), die noch die Zeitableitung enthält, wohingegen die Ortsableitungen diskretisiert wurden,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial t} &= - \left(\max(u_{ij}, 0) \frac{\omega_{ij} - \omega_{i-1,j}}{h} + \min(u_{ij}, 0) \frac{\omega_{i+1,j} - \omega_{ij}}{h} + \right. \\ &\quad \left. \max(v_{ij}, 0) \frac{\omega_{ij} - \omega_{i,j-1}}{h} + \min(v_{ij}, 0) \frac{\omega_{i,j+1} - \omega_{ij}}{h} \right) + \mathcal{O}(h) \\ &=: H(\omega_{ij}, \mathbf{u}_{ij}) + \mathcal{O}(h). \end{aligned} \tag{17}$$

An den Rändern wird vorgegeben, welcher Differenzenquotient verwendet werden muss.

Die Fehlerordnung dieses Verfahrens ist eins. Der Diskretisierungsfehler nimmt mit steigender Anzahl an Gitterpunkten N also langsamer ab als bei Zentralkdifferenzen. Er wirkt sich auf die Lösung aus wie ein künstlicher Diffusionsterm (vgl. Taylorentwicklung). Dieser Effekt wird *numerische Diffusion* genannt. Dafür ist das UPWIND-Schema mit dem expliziten Euler-Verfahren unter gewissen Bedingungen an die zeitliche und die örtliche Auflösung stabil (s. unten).

Ein UPWIND-Verfahren zweiter Ordnung kann mit den FD-Formeln (6) und (7) konstruiert werden. Andere Verfahren zweiter Ordnung zur Lösung von Advektionsproblemen (d.h., keine Diffusion) sind Zentralkdifferenzen mit künstlicher Viskosität zur Stabilisierung des Verfahrens (höhere Genauigkeit als UPWIND), nicht-lineares UPWIND 2. Ordnung, die Lax-Wendroff-Methode.

2.4. Zeitdiskretisierung

Betrachten wir zu guter Letzt die Zeitableitung in (10) bzw. (17). Auch die Zeitachse wird diskretisiert, indem konkrete Zeitpunkte

$$t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$$

zur Betrachtung bestimmt werden. Die Zeitschrittweite $\Delta t = t_{k+1} - t_k$ ist hier konstant, also ist $t_k = t_0 + k\Delta t$.

Die Wirbelstärke ist eine Funktion der Zeit, $\omega = f(t, x, y)$. Ihre Näherungslösung im Gitterpunkt (x_i, y_j) zum Zeitpunkt t_k lautet ω_{ij}^k . Die Anfangsverteilung zum Zeitpunkt t_0 ist gegeben: $\omega^0 = \omega(t_0, x, y)$.

In den Differentialgleichungen für ψ und \mathbf{u} kommt die Zeit als Variable zwar nicht vor, eine Zeitabhängigkeit existiert jedoch implizit, da zu jedem $\omega(t)$ eine passende instantane Stromstärken- und Geschwindigkeitsverteilung gehört.

Am einfachsten lässt sich die Zeitableitung durch einen vorwärtigen Differenzenquotienten approximieren,

$$\frac{\partial \omega_{ij}(t)}{\partial t} = \frac{\omega_{ij}(t + \Delta t) - \omega_{ij}(t)}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t),$$

und in (17) näherungsweise

$$\frac{\omega_{ij}^{k+1} - \omega_{ij}^k}{\Delta t} = H(\omega_{ij}^k, \mathbf{u}_{ij}^k),$$

wobei H abkürzend für das FD-Schema des Konvektionsterms steht.

Aus der Lösung ω_{ij}^k bzw. $\tilde{\omega}^k$ zu einem bekannten Zeitpunkt t_k kann so über

$$\omega_{ij}^{k+1} = \omega_{ij}^k + \Delta t H(\omega_{ij}^k, \mathbf{u}_{ij}^k) \quad (18)$$

iterativ das Feld zum nächsten Zeitpunkt t_{k+1} berechnet werden. Gl. (18) kann auch in Matrix-Vektor-Form geschrieben werden mit einer Koeffizientenmatrix $\mathbf{B}^k = \mathbf{B}(\tilde{\mathbf{u}}^k, \tilde{\mathbf{v}}^k)$:

$$\tilde{\omega}^{k+1} = \tilde{\omega}^k + \Delta t \mathbf{B}^k \tilde{\omega}^k.$$

Dies ist das explizite Euler-Verfahren.

Die *von Neumann-Stabilitätsanalyse* zeigt, dass das explizite Euler-Verfahren mit dem UPWIND-Schema stabil ist, wenn die CFL²-Bedingung

$$\text{CFL} = \frac{|u|\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

erfüllt ist. In 2D muss die CFL-Bedingung für beide Raumrichtungen erfüllt sein,

$$\text{CFL}_x = \frac{|u|\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad \text{und} \quad \text{CFL}_y = \frac{|v|\Delta t}{\Delta y} \leq 1.$$

Die CFL-Zahl setzt die zeitlichen mit den örtlichen Schrittweiten in Zusammenhang und besagt, um wie viele Gitterweiten ein fiktives Teilchen pro Zeitschritt durch die Strömung transportiert wird. Ein Wert ≤ 1 bedeutet, dass der Transport von einer Gitterzelle zur nächsten stattfindet und keine Zellen „übersprungen“ werden. Mit dieser Bedingung kann aus der Gitterweite und der momentanen Geschwindigkeitsverteilung der maximal zulässige Zeitschritt Δt_{\max} berechnet werden.

Runge-Kutta-Verfahren höherer Ordnung liefern einen geringeren Diskretisierungsfehler als das primitive Euler-Verfahren. Für mehrstufige explizite RK-Verfahren sind zudem die Stabilitätsanforderungen schwächer. Implizite Methoden sind idR bedingungslos stabil und erlauben größere Δt , kommen aber wegen der komplexen Koppelung der Differentialgleichungen nicht in Frage. Das explizite RK3³ ist z.B. auch mit Zentraldifferenzen für $\text{CFL} \leq \sqrt{3}$ stabil. Jedoch erfordern mehrstufige Verfahren einen erhöhten Rechenaufwand, denn das komplette Gleichungssystem muss für jede Stufe komplett gelöst werden (mit dem klassischen RK4 vervierfacht sich die Rechenzeit gegenüber dem expl. Euler-Verfahren). Zentraldifferenzen verursachen hier (nicht im Allgemeinen!) zudem, selbst wenn stabil, physikalisch unplausible Oszillationen.

Eine weitere Alternative sind die Adams-Bashforth-Mehrschrittverfahren. Während Einschrittverfahren wie die Runge-Kutta-Verfahren die Lösung zum Zeitpunkt t_{k+1} aus der in t_k ermittelten Lösung berechnen und eine gewisse Anzahl an Stützstellen *zwischen* t_k und t_{k+1} verwenden, bestimmen Mehrschrittverfahren die Lösung als Linearkombination weiter zurückliegender Zeitpunkte $t_k, t_{k-1}, \dots, t_{k-s}$. Je höher die Verfahrensordnung, desto restriktiver jedoch die Stabilitätskriterien.

Ein allgemeines Adams-Bashforth-Verfahren der Ordnung s , angewandt auf das Anfangswertproblem

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = f(\omega, t), \quad \omega(t_0) = \omega^0$$

hat die Form

$$\frac{\omega^{k+1} - \omega^k}{\Delta t} = \sum_{j=0}^{s-1} b_j f(\omega^{k-j})$$

²Courant-Friedrichs-Lewy

³Runge-Kutta-Verfahren 3. Ordnung

mit speziellen Gewichten b_j und $\omega^k = \omega(t_k)$ wie oben.

Das Adams-Bashforth-Verfahren zweiter Ordnung AB2 (Herleitung durch Integration einer Interpolationsparabel im Tutorium!) lautet

$$\omega_{ij}^{k+1} = \omega_{ij}^k + \frac{\Delta t}{2} (3H(\omega_{ij}^k, \mathbf{u}_{ij}^k) - H(\omega_{ij}^{k-1}, \mathbf{u}_{ij}^{k-1})). \quad (19)$$

Diese Methode ist mit UPWIND-Differenzen stabil für $\text{CFL} \leq 0.35$. Zum *Starten* des Verfahrens muss ein Einschrittverfahren möglichst gleicher Ordnung verwendet werden.

Anmerkung: Es hat sich gezeigt, dass sich die Güte der Approximation hier(!) durch Verfahren höherer Ordnung gegenüber dem expliziten Euler-Verfahren kaum verbessern lässt. Vielversprechender erscheinen bessere Diskretisierungen des Konvektionsterms, z.B. UPWIND zweiter Ordnung!

3. Lösungsalgorithmus

Der schematische Ablauf der FD-Simulation ist wie folgt:

- Initialisierung:
 - Gitter (x_i, y_j)
 - Anfangsverteilung ω^0
 - Aufstellen der Koeffizientenmatrix \mathbf{A} aus Gl. (13) und LR -Zerlegung
 - Berechnen von ψ^0, \mathbf{u}^0
- Zeititeration (für $t_0 \leq t \leq T$ oder $k \leq \text{maxiter}$):
 1. Berechnen des Zeitschritts Δt mit CFL-Zahl
 2. Berechnen von ω^{k+1} aus ω^k, \mathbf{u}^k mit Gl. (18) bzw. (19)
 3. Berechnen von ψ^{k+1} aus ω^{k+1} mit Gl. (13)
 4. Berechnen von \mathbf{u}^{k+1} aus ψ^{k+1} mit Gl. (16)

A. Strömungsmechanische Grundlagen

A.1. Herleitung der Wirbeltransportgleichung

Die Navier-Stokes-Gleichungen beschreiben die Dynamik inkompressibler Fluide in 3D

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} \quad (20)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (21)$$

mit Geschwindigkeitsfeld \mathbf{u} , äußerem Kraftfeld \mathbf{f} , Dichte des Fluids ρ , Druckfeld p und kinematischer Viskosität ν . Gleichung (21) ist die Kontinuitätsgleichung (Divergenzfreiheit) inkompressibler Fluide.

Nach Einführung eines Kräftepotentials $-\nabla U = \mathbf{f}$ wird die Rotation auf Gleichung angewandt. Mit der Wirbelstärke $\boldsymbol{\omega} := \operatorname{rot} \mathbf{u}$ und der Identität $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u}^2 - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}$ folgt

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \operatorname{rot} \left(\frac{1}{2} \nabla \mathbf{u}^2 - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} \right) = -\operatorname{rot} (\nabla U) - \frac{1}{\rho} \operatorname{rot} (\nabla p) + \operatorname{rot} (\nu \Delta \mathbf{u}).$$

Wegen $\operatorname{rot} (\nabla F) = 0$ ist die Gleichung insbesondere nicht mehr vom Druck abhängig. Die Identität $\operatorname{rot} (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{u} \operatorname{div} \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \operatorname{div} \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u} \boldsymbol{\omega} - \nabla \boldsymbol{\omega} \mathbf{u}$ führt mit (21) und $\operatorname{div} \boldsymbol{\omega} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{u} = 0$ auf

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} - \nabla \mathbf{u} \boldsymbol{\omega} + \nabla \boldsymbol{\omega} \mathbf{u} = \nu \Delta \boldsymbol{\omega} \quad (22)$$

Bei ebenen Strömungen $\mathbf{u} = (u, v, 0)^T$ steht der Wirbelstärkevektor senkrecht auf dem Geschwindigkeitsfeld: $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y})^T$. In diesem Fall ist $\nabla \mathbf{u} \boldsymbol{\omega} = 0$. Für ebene Strömungen braucht die Wirbeltransportgleichung also nur in z -Richtung betrachtet werden. Mit *skalarer* Wirbelstärke $\omega = \omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ lautet sie dann

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = \nu \Delta \omega.$$

Für ideale (reibungslöse) Fluide ergibt sich die vereinfachte Endform

$$\frac{D\omega}{Dt} = \frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = 0.$$

A.2. Stromfunktion

Um die zeitliche Änderung der Wirbelstärke zu berechnen, wird das Geschwindigkeitsfeld \mathbf{u} benötigt. Über den Zusammenhang

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (23)$$

kann \mathbf{u} aus ω nicht bestimmt werden. Diesem Problem begegnet man mit der Einführung der *Stromfunktion* $\psi(x, y)$, die die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \quad (24)$$

erfüllt. Diese Differentialgleichungen heißen Cauchy-Riemann-DGLen. Die Niveaulinien der Stromfunktion sind Stromlinien der Strömung. Sie bestimmen die Bahnen, entlang derer sich fiktive (masselose, schlupffreie,...) Partikel bewegen würden. Die Geschwindigkeitsvektoren sind tangential zu diesen Linien. Aus beliebigen Stromfunktionen berechnete Geschwindigkeitsvektoren erfüllen außerdem immer die Kontinuitätsgleichung (21).

Setzt man (24) in die Definition der Wirbelstärke (23) ein, ergibt sich eine Poisson-Gleichung

$$-\Delta \psi = \omega \quad (25)$$

zzgl. Randbedingungen für ψ .

Aus einer bekannten Startverteilung der Wirbelstärke kann durch Lösen von (25) die Stromfunktion bestimmt werden. Die Cauchy-Riemann-DGLen (24) liefern die passenden Geschwindigkeitsvektoren, die benötigt werden, um einen Zeitschritt der Wirbeltransportgleichung (10) zu berechnen.

B. Reibung und Wandhaftung

In Kapitel 2 wurde die Wirbeltransportgleichung unter Vernachlässigung der Reibung betrachtet. Für reale Fluide mit Viskosität $\nu > 0$ gilt

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = \nu \Delta \omega. \quad (26)$$

Die FD-Diskretisierung des Laplace-Operators ist bekannt (s. Abschnitt 2.1). Da ω zum aktuellen Zeitschritt gegeben ist, muss nur $\Delta \omega$ ausgerechnet und kein lineares Gleichungssystem gelöst werden. Die diskretisierte Form des Reibungsterms lautet dann mit der FD-Matrix A wie oben:

$$\nu(-A\tilde{\omega} + \omega_{Rand})$$

Allerdings existieren für die Wirbelstärke, anders als für die Stromfunktion, keine Randbedingungen! Die Koeffizientenmatrix muss also so modifiziert werden, dass sie an den Rändern des Gebiets einseitige Differenzenquotienten verwendet (und der Vektor ω_{Rand} nicht auftritt).

Andererseits bietet sich hier die Gelegenheit, **Wandhaftung** zu implementieren, indem eine künstliche Randbedingung für ω hergeleitet wird. Wandhaftung bedeutet, dass die Strömungsgeschwindigkeit an der Wand $\mathbf{0}$ ist (bisher war nur die Tangentialkomponente ungleich 0). Wenn eine Wand mit u_{Wand} bewegt wird, bewegt sich das Fluid mit derselben Geschwindigkeit mit. Dieses Verhalten wird durch die Randbedingung

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} = u_{Wand} \quad (27)$$

beschrieben. \mathbf{n} ist der nach außen weisende Normalenvektor auf dem Rand und $\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}}$ die Normalableitung der Stromfunktion. Randbedingung dieser Form werden Neumann-Randbedingungen genannt. Mit $\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} = 0$ sind die tangentialen Geschwindigkeitskomponenten 0 (nachrechnen!!). Implementieren wir diese Bedingung statt der Dirichlet-Randbedingung in (11), müssten wir Durchströmung der Wände in Normalenrichtung zulassen, außerdem besäße das LGS keine eindeutige Lösung.

Betrachten wir Gl. (13) in einen Punkt auf dem unteren Rand $(i, 0)$,

$$h^{-2}(-\psi_{i-1,0} - \psi_{i+1,0} + 4\psi_{i,0} - \psi_{i,-1} - \psi_{i,1}) = \omega_{i,0}. \quad (28)$$

Wegen der homogenen Dirichlet-Randbedingung an ψ ist $\psi_{i-1,0} = \psi_{i+1,0} = \psi_{i,0} = 0$ und (28) vereinfacht sich zu

$$h^{-2}(-\psi_{i,-1} - \psi_{i,1}) = \omega_{i,0}. \quad (29)$$

$\psi_{i,-1}$ liegt jedoch außerhalb des Rechengebiets! Die Neumann-Randbedingung (27), diskretisiert mit Zentralkdifferenzen am unteren Rand ($\mathbf{n} = -\mathbf{e}_y = (0, -1)^T$),

$$\frac{\psi_{i,-1} - \psi_{i,1}}{2h} = u_{\text{Wand}}$$

bietet einen Zusammenhang zwischen $\psi_{i,-1}$ und $\psi_{i,1}$, der in (29) eingesetzt eine künstliche Randbedingung für ω liefert:

$$\omega_{i,0} = -\frac{2\psi_{i,1}}{h^2} - \frac{2u_{\text{Wand}}}{h}.$$

Für nichtbewegte Wände ist $u_{\text{Wand}} = 0$. Das Vorgehen an den anderen Rändern ist analog: An allen Randpunkten können Randwerte von ω aus den inneren Werten der Stromfunktion bestimmt werden. Die Randwerte werden im Vektor $\boldsymbol{\omega}_{\text{Rand}}$ zusammengefasst – die FD-Koeffizientenmatrix der Poisson-Gleichung der Stromfunktion kann unverändert übernommen werden!

Der Reibungsterm stabilisiert das numerische Verfahren, für den Konvektionsterm kommen nun auch zentrale Differenzenquotienten zweiter Ordnung in Betracht (die Kombination von Euler-Verfahren mit Zentralkdifferenzen wird auch FTCS, *Forward-Time Central Space* genannt).

Allerdings stellt der Reibungsterm weitere (restriktive!) Stabilitätsbedingungen an die Fourier-Zahl Fo

$$Fo = \frac{\nu \Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{4}.$$

Bei der Berechnung der Zeitschrittweite muss diese Bedingung zusätzlich zum CFL-Kriterium eingehalten werden.

Mit dem vorgestellten Algorithmus kann der klassische Testfall, „cavity flow“, simuliert werden: Betrachte ein quadratisches Rechengebiet mit festen Wänden ($\psi = 0$). Die obere Wand wird mit konstanter Geschwindigkeit bewegt (z.b. $u_{\text{Wand}} = 1$). Im Anfangszeitpunkt ist das

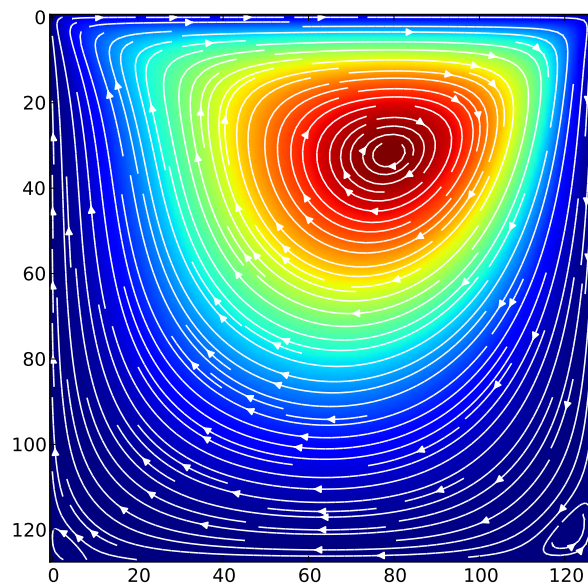


Abbildung 3: Cavity flow, Farbverlauf kennzeichnet Stromfunktion (rot: max., blau: min.), darüber Stromlinien des Geschwindigkeitsfelds

Fluid im Innern in Ruhe, $\mathbf{u} = 0$. Unter Berücksichtigung der u -Randbedingung wird die passende Anfangsverteilung der Wirbelstärke berechnet (aus ihrer Definition) und ein erster Zeitschritt der Wirbeltransportgleichung kann berechnet werden. Abb. 3 zeigt eine Lösung dieses Problems auf einem 128×128 Gitter. Stromlinien sind über der Verteilung der Stromfunktion dargestellt (Achtung: normalerweise ist eine Farbskala/Colorbar hier Pflicht!!).

Literatur

- [1] Wolfgang Hackbusch, Hrsg. *Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen*. Leipzig: Max-Planck-Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften, 2005. URL: <http://www.mis.mpg.de/de/publications/andere-reihen/ln/lecturenote-2805.html>.
- [2] Jörg Liesen. *Vorlesungsskript: Numerik II für Ingenieure*. Technische Universität Berlin, Institut für Mathematik, 2012.