TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN

Fakultät V – Verkehrs- und Maschinensysteme – Institut für Mechanik

FG Systemdynamik
und Reibungsphysik

Prof. Dr. rer. nat. V. Popov
www.reibungsphysik.de

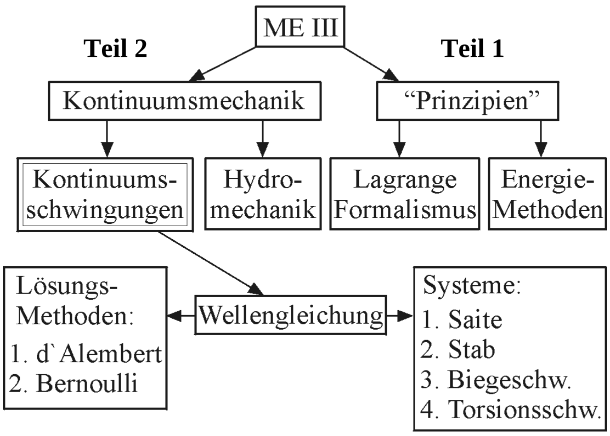
Energiemethoden der Mechanik

Vorlesungsnotizen WiSe 2015/16

Energiemethoden der Mechanik / Prof. Popov / Vorlesung 1.

Generalisierte Koordinaten, Lagrangefunktion, Lagrangegleichungen II. Art

- Hauger, Schnell, Gross: Technische Mechanik 3 (Abschnitt 4.3 Lagrangesche Gleichungen)
- Schnell, Gross, Hauger: Technische Mechanik 2 (Kapitel 6)
- G.-P. Ostermeyer: Mechanik III



I. Verallgemeinerte Koordinaten

Wenn die Gesamtheit irgendwelcher Größen $q_1, q_2, ..., q_s$ die Lage eines Systems (mit s Freiheitsgraden) völlig charakterisiert, so nennt man diese Größen ***verallgemeinerte (oder generalisierte) Koordinaten*** *und die Ableitungen $\dot{q}_i$* ***verallgemeinerte Geschwindigkeiten.***

Wichtig: *Verallgemeinerte Koordinaten müssen nichts mit den uns bereits bekannten kartesischen oder polaren Koordinaten zu tun haben. Das können beliebige Größen sein (Volumen, Spannung, elektrische Kapazität oder Ladung, aber auch Winkel, Abstände usw.).*

II. Lagrange-Funktion

Die Lagrange-Funktion eines Systems von Massenpunkten

$L \equiv K - U =$

= kinetische Energie – potentielle Energie =

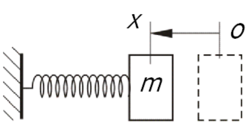
$$\sum_a \frac{m_a \dot{\vec{r}}_a^{\,2}}{2} - U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ...) = L(\{\dot{q}_i\}, \{q\})$$

Bemerkung: Potentielle Energie ist bis auf eine additive Konstante definiert. Diese Eigenschaft hat auch die Lagrange-Funktion.

III. Lagrangesche Gleichungen II. Art

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Beispiel 1. Gegeben sei ein Körper mit Masse m auf einer Feder mit Federsteifigkeit c. Zu bestimmen ist die Bewegungsgleichung.



Lösung: Als verallgemeinerte Koordinate wählen wir Auslenkung x aus dem ungespannten Zustand der Feder. Kinetische Energie ist gleich $K = \frac{m\dot{x}^2}{2}$, potentielle Energie der Feder ist $U = \frac{cx^2}{2}$. Lagrangefunktion ist gleich $L = K - U = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{cx^2}{2}$. Die Ableitungen lauten: $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{cx^2}{2}\right) = \frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\frac{m\dot{x}^2}{2}\right) = m\dot{x}$,

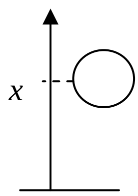
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{d}{dt} m\dot{x} = m\ddot{x},$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{cx^2}{2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{cx^2}{2}\right) = -cx.$$

Die Lagrangegleichung lautet

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow \boxed{m\ddot{x} + cx = 0}$. (Das 2. N.G.)

Beispiel 2. Bewegung im Schwerefeld.



$$K = \frac{m\dot{x}^2}{2}, \; U = mgx,$$

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - mgx$$

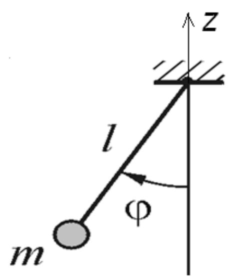
$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$, $\frac{\partial L}{\partial x} = -mg \;\Rightarrow\; \boxed{m\ddot{x} + mg = 0}$.

Beispiel 3. Bestimmen Sie für ein Pendel:

(1) Lagrange-Funktion,

(2) Bewegungsgleichung.

Lösung:



$K = \frac{m}{2}v^2 = \frac{m}{2}l^2\dot{\varphi}^2$

$U = mgz = -mgl\cos\varphi$

Lagrangefunktion:

$L = \frac{m}{2}l^2\dot{\varphi}^2 + mgl\cos\varphi$:

Ableitungen:

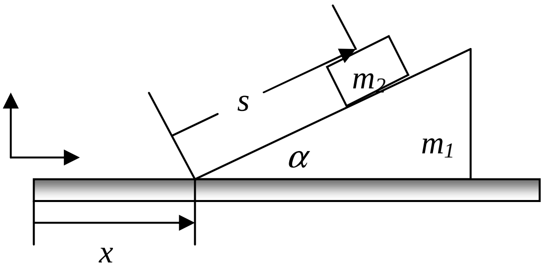
$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi}$, $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\ddot{\varphi}$, $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mgl\sin\varphi$.

Bewegungsgleichung:

$\boxed{ml^2\ddot{\varphi} = -mgl\sin\varphi}$.

Dies ist der Drallsatz für das Pendel.

Beispiel 4. Gegeben sei das auf dem Bild skizzierte System. Der Körper m_2 auf dem Keil und der Keil auf der horizontalen Ebene gleiten ohne Reibung. Zu bestimmen sind die Bewegungsgleichungen in passend gewählten generalisierten Koordinaten.



Lösung: Die Koordinate der vorderen Kante des Keils und des Abstandes der Masse m_2 von dieser Kante beschreiben eindeutig die Lage des gesamten Systems und können daher als verallgemeinerte Koordinaten gewählt werden. Zur Bestimmung kinetischer Energien beider Körper drücken wir zunächst kartesische Koordinaten von jedem Körper durch die gewählten verallgemeinerten Koordinaten aus:

$x_1 = x, \quad y_1 = 0$

$x_2 = x + s\cos\alpha, \quad y_2 = s\sin\alpha$.

$$K_1 = \frac{m_1 \dot{x}^2}{2},$$

$$K_2 = \frac{m_2}{2}\left[\left(\dot{x} + \dot{s}\cos\alpha\right)^2 + \left(\dot{s}\sin\alpha\right)^2\right] =$$

$$\frac{m_2}{2}\left[\dot{x}^2 + \dot{s}^2 + 2\dot{x}\dot{s}\cos\alpha\right]$$

$U_1 = konst$, $U_2 = m_2 g y_2 = m_2 g s \sin\alpha$.

Lagrange-Funktion:

$$L = \frac{(m_1 + m_2)\dot{x}^2}{2} + \frac{m_2 \dot{s}^2}{2} + m_2 \dot{x}\dot{s}\cos\alpha - m_2 g s \sin\alpha$$

Ableitungen:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m_1 + m_2)\dot{x} + m_2 \dot{s}\cos\alpha, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} = m_2 \dot{s} + m_2 \dot{x}\cos\alpha, \quad \frac{\partial L}{\partial s} = -m_2 g \sin\alpha.$$

Lagrangeschen Gleichungen:

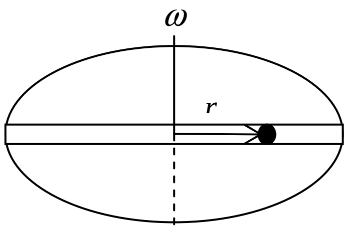
$$(m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2 \ddot{s}\cos\alpha = 0,$$

$$m_2 \ddot{s} + m_2 \ddot{x}\cos\alpha + m_2 g \sin\alpha = 0.$$

Daraus können beide Beschleunigungen bestimmt werden. Falls, z.B., nach $\ddot{x}$ gefragt wird, multiplizieren wir die zweite Gleichung mit $\cos\alpha$ und ziehen die zweite Gleichung von der ersten ab. Daraus folgt

$$\boxed{\ddot{x} = \frac{m_2 g \sin\alpha \cos\alpha}{m_1 + m_2 \sin^2\alpha}}.$$

Beispiel 5. Zu bestimmen sind die Bewegungsgleichungen für den Körper im Führungskanal auf einer sich drehenden Scheibe (Rotationsachse senkrecht zur Scheibe, Winkelgeschwindigkeit ω).



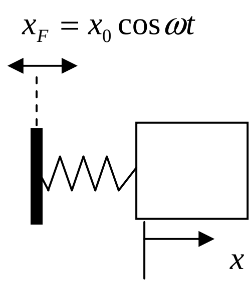
Lösung: Als verallgemeinerte Koordinate wählen wir den Abstand r des Körpers von der Rotationsachse. Lagrangesche Funktion: $L = K = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\omega^2\right)$ (potentielle Energie fällt raus, da sie konstant ist). Partielle Ableitungen: $\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$, $\frac{\partial L}{\partial r} = mr\omega^2$.

Lagrange-Gleichung: $\boxed{m\ddot{r} = mr\omega^2}$.

Man kann leicht die Bewegungsgleichung in einem nicht inertialen (rotierenden) System erkennen: $mr\omega^2$ ist nichts anderes als die Zentrifugalkraft.

Beispiel 6. Fußpunkterregung eines Schwingers. Zu bestimmen ist die Lagrange-Funktion und die Bewegungsgleichung.

Lösung: x sei die Dehnung der Feder aus dem ungespannten Zustand.



Die x-Koordinate der Masse ist dann $x_1 = x_0 \cos\omega t + x$. Die Geschwindigkeit der Masse ist $\dot{x}_1 = -x_0\omega \sin\omega t + \dot{x}$. Kinetische Energie ist

$$K = \frac{m\dot{x}_1^2}{2} = \frac{m\left(-x_0\omega\sin\omega t + \dot{x}\right)^2}{2}$$, potentielle Energie ist $U = \frac{cx^2}{2}$. Die Lagrange-Funktion:

$$L = \frac{m\left(-x_0\omega\sin\omega t + \dot{x}\right)^2}{2} - \frac{cx^2}{2}.$$ Ableitungen:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\left(-x_0\omega\sin\omega t + \dot{x}\right), \quad \frac{\partial L}{\partial x} = -cx.$$

Lagrangegleichung:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = m\left(-x_0\omega^2\cos\omega t + \ddot{x}\right) + cx = 0}.$$

$m\ddot{x} + cx = mx_0\omega^2\cos\omega t$ - N.G. für einen Schwinger mit Fußpunkterregung.

Prinzip der virtuellen Arbeit (Prinzip der virtuellen Verrückungen)

I. Kraft als Gradient der potentiellen Energie. Aus Mechanik II wissen Sie, dass potentielle Energie bei einer eindimensionalen Bewegung als Integral $U(x) = -\int F(x)dx$ definiert wird. Aus dieser Definition folgt, dass $F(x) = -\frac{\partial U}{\partial x}$ gilt. Die Verallgemeinerung dieser Beziehung auf mehrere Freiheitsgrade lautet:

$$F_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}.$$

II. Prinzip der virtuellen Arbeit (Prinzip der virtuellen Verrückungen)

Im statischen Gleichgewicht sind alle Kräfte gleich Null. Falls wir es mit einem konservativen System zu tun haben, gilt

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = 0, \ldots \frac{\partial U}{\partial x_i} = 0. \qquad (1)$$

Dies sind aber die Bedingungen für ein Minimum der potentiellen Energie. Gleichungen (1) bedeuten, dass das erste Differential der potentiellen Energie verschwindet:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2}dx_2 + \ldots = 0 \quad \text{oder}$$

$$dW = F_{x1}dx_1 + F_{x2}dx_2 + \ldots = 0$$

Im Gleichgewicht ist die Arbeit bei beliebigen virtuellen Verschiebungen gleich Null.

Umgekehrt:

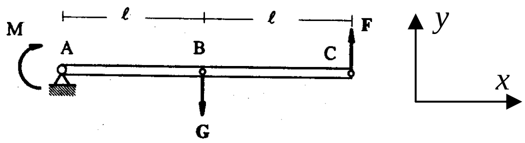
Wenn die Arbeit bei beliebigen virtuellen Verschiebungen gleich Null ist, so ist das System im Gleichgewicht

Da die *Zwangskräfte (Reaktionskräfte)* keine Arbeit leisten, brauchen sie bei der Berechnung der Arbeit nicht berücksichtigt zu werden. Das Prinzip der virtuellen Verrückungen wird daher meistens in der folgenden Form verwendet:

*Im Gleichgewicht muss die **Arbeit von allen Kräften ohne Berücksichtigung von Reaktionskräften** auf **allen mit den Bindungen verträglichen** Bewegungen verschwinden.*

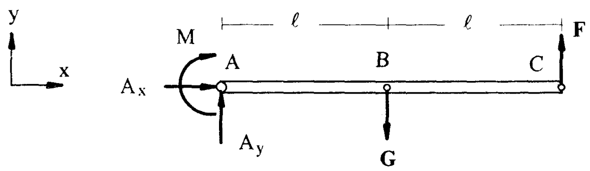
III. Beispiele für das Prinzip der virtuellen Verrückungen.

Beispiel 1. Gegeben sei ein Hebel der Länge *2l* im statischen Gleichgewicht. Im Punkt A ist der Hebel gelagert. Am Hebel greifen die Kräfte F und G sowie ein Moment M wie skizziert an.

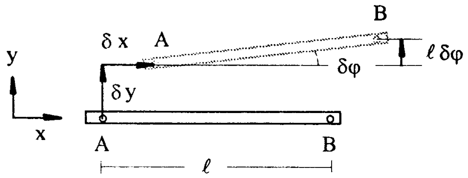


M und **G** sind gegeben. Zu bestimmen ist die Kraft **F** und die Auflagerreaktionen.

Um die virtuelle Arbeit bei beliebigen virtuellen Verrückungen des Hebels zu erhalten, muß zunächst der Hebel vom Lager freigeschnitten werden, um alle Kräfte am Hebel



sichtbar zu machen. Jetzt nehmen wir eine kleine, aber ansonst beliebige Verschiebung des Hebels vor. Ein starrer Körper in einer Ebene hat nur drei Freiheitsgrade: Er kann nach oben um δy, in horizontaler Richtung um δx verschoben werden und darüber hi-



naus um einen Winkel $\delta\varphi$ gedreht werden, sagen wir um das linke Ende des Hebels.

Virtuelle Verrückungen: $\delta x, \delta y, \delta\varphi$.

Die auf der virtuellen Verrückung geleistete Arbeit muss im Gleichgewicht verschwinden:

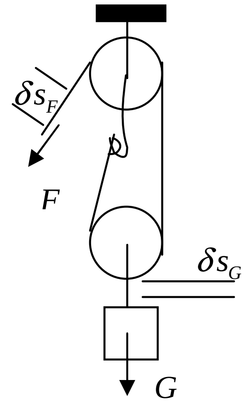
$$\delta W = A_x\delta x + \left(A_y - G + F\right)\delta y + \left(-lG + 2lF - M\right)\delta\varphi = 0$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert die Gleichgewichtsbedingungen:

$$A_x = 0, \qquad A_y - G + F = 0,$$

$$-lG + 2lF - M = 0.$$

Beispiel 2. Flaschenzug.
Bei gegebener Gewichtskraft G ist die Kraft F zu bestimmen.

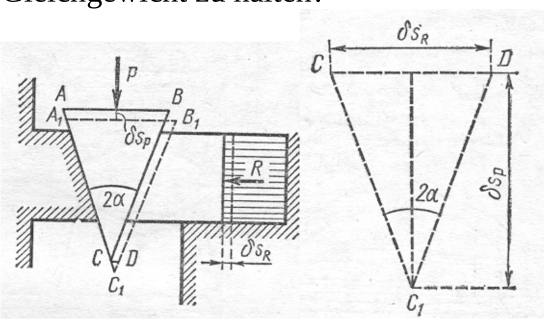


Lösung: Das ist ein System mit einem Freiheitsgrad. Das Ende des Seils wird um δs_F gezogen. Dabei hebt sich das Gewicht um $\delta s_G = \delta s_F / 2$. Die dabei verrichtete Arbeit ist

$$\delta A = F\delta s_F - G\delta s_G$$
$$= \left(F - G/2\right)\delta s_F .$$

Das System ist im Gleichgewicht, wenn die virtuelle Arbeit bei einer beliebigen Verschiebung gleich Null ist: $F - G/2 = 0$.

Beispiel 3. Welche horizontale Kraft muss an den Keil angelegt werden, um das System im Gleichgewicht zu halten?



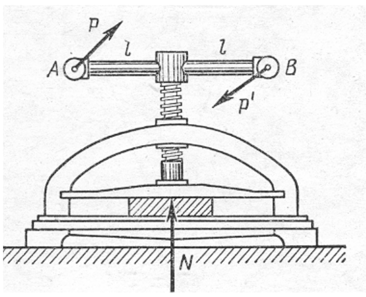
Lösung: $\delta s_R = 2\delta s_p \tan\alpha$

Die virtuelle Arbeit muss verschwinden:

$$\delta W = P\delta s_P - R\delta s_R = \left(P - 2R\tan\alpha\right)\delta s_p = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{R = \frac{P}{2\tan\alpha}}.$$

Beispiel 4. Schraubenpresse. Zu bestimmen ist das zum Erzeugen einer Druckkraft N erforderliche Kraftmoment des Kräftepaars P, P'.

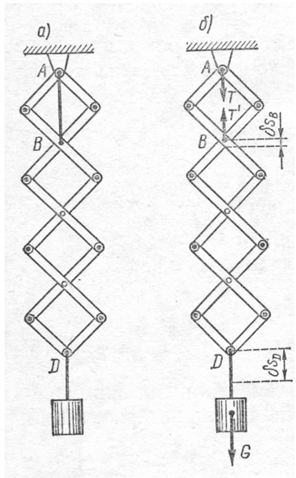


$$\delta s_N / h = \delta\varphi / 2\pi$$
$$\delta W = M\delta\varphi - N\delta s_N$$
$$= \left(M - \frac{h}{2\pi}N\right)\delta\varphi = 0$$
$$M = \frac{h}{2\pi}N$$

IV. Anwendung des Prinzips der virtuellen Arbeit zur Bestimmung der Reaktionskräfte.

Ist nach einer bestimmten Reaktionskraft in einem Konstruktionselement gefragt, so ersetzen wir nur die uns interessierende Bindung durch die Reaktionskräfte und geben ihr ansonsten die Möglichkeit, sich zu bewegen (virtuelle Verrückungen auszuführen).

Beispiel 5. Zu berechnen ist die Spannkraft des Fadens AB in dem skizzierten Teufelsarm.

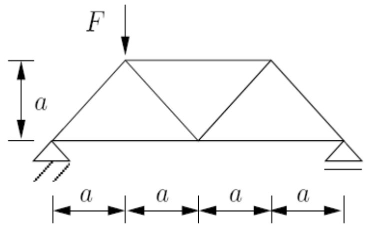


Lösung: Wir "schneiden" den Faden und lassen das Gewicht G eine kleine Verschiebung δs_D ausführen. Dabei verschiebt sich der Punkt B um $\delta s_B = \delta s_D / 4$. Die dabei geleistete Arbeit muss im Gleichgewicht verschwinden:

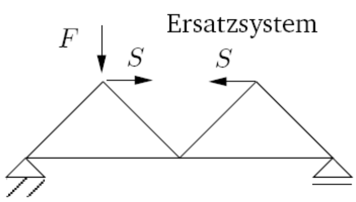
$$\delta W = -T' \cdot \delta s_B + G \cdot \delta s_D = 0$$

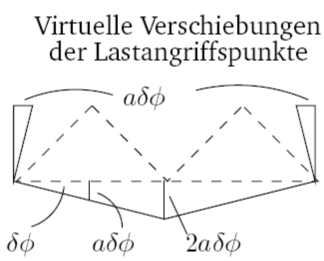
Daraus folgt $\boxed{T = 4G}$.

Beispiel 6. Stabkraft
Wie groß ist die Stabkraft im Obergurt des Fachwerks?



Lösung: Indem man den Stab herausnimmt und durch die gesuchte Stabkraft ersetzt, entsteht ein verschiebliches System mit einem Freiheitsgrad (z.B., ϕ), durch den alle anderen virtuellen Verschiebungen ausgedrückt werden können.





Die virtuelle Arbeit muss verschwinden:

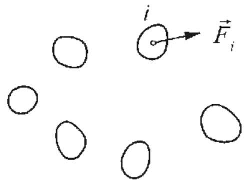
$$\delta W = Fa\delta\phi + Sa\delta\phi$$
$$+ Sa\delta\phi = 0$$

$$\Rightarrow \; S = -\tfrac{1}{2}F .$$

Generalisierte Kräfte, Lagrangesche Gleichungen 2. Art mit nicht konservativen Kräften

I. Verallgemeinerte (generalisierte) Kräfte

Gegeben sei ein Massenpunkthaufen.



Wenn alle Körper um $\delta \vec{r}_i$ verschoben werden (das sind die "virtuellen Verrückungen"), werden die zwischen den Körpern wirkenden konservativen Kräfte eine Arbeit

$$dW = -dU = -\frac{\partial U}{\partial x_1}dx_1 - \frac{\partial U}{\partial y_1}dy_1 - \frac{\partial U}{\partial z_1}dz_1 ...$$

leisten. Wir wissen, dass "Arbeit=Kraft mal Weg" gilt. Daraus ist ersichtlich, dass

$-\frac{\partial U}{\partial x_1}, -\frac{\partial U}{\partial y_1}, -\frac{\partial U}{\partial z_1}$ - Komponenten der Kraft sind. In verallgemeinerten Koordinaten gilt

$$dW = -dU = -\frac{\partial U}{\partial q_1}dq_1 - \frac{\partial U}{\partial q_2}dq_2 - ... - \frac{\partial U}{\partial q_i}dq_i - ...$$

In Analogie werden die Ableitungen $-\frac{\partial U}{\partial q_i}$ *verallgemeinerte Kräfte* genannt, so dass die Regel "Arbeit= verallgemeinerte Kraft mal verallgemeinerte Verschiebung" auch weiterhin gilt.
Ähnlich werden verallgemeinerte *nichtkonservative* Kräfte definiert.

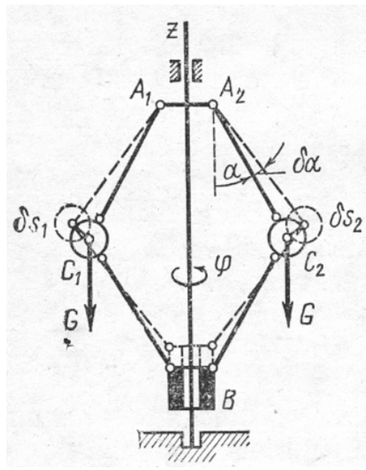
> Ist die Arbeit bei einer beliebigen virtuellen Verschiebung gleich
> $$dW = Q_1 dq_1 + Q_2 dq_2 + ... Q_i dq_i + ...$$
> ist, so nennt man Q_i die der verallgemeinerten Koordinate q_i entsprechende verallgemeinerte Kraft.

Beispiel 1. Zu finden ist die verallgemeinerte Kraft Q_φ, die dem Winkel φ entspricht.

<u>Lösung</u>: Aus der Dynamik wissen wir, dass die bei einer Rotation geleistete Arbeit ist gleich $dW = Md\varphi$ *ist*, wobei *M* das Kraftmoment ist.

> Das Kraftmoment *M* ist die dem Winkel zugeordnete verallgemeinerte Kraft.

Beispiel 2.
Ein Zentrifugalregler kann sich um die vertikale Achse drehen. Das Gewicht jeder Kugel ist *G*, andere Teile können als gewichtslos angenommen werden. Die verallgemeinerten Koordinaten seien α und φ. Zu finden sind die entsprechenden verallgemeinerten Kräfte.

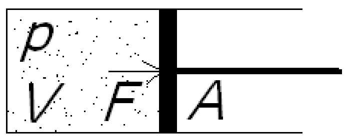


<u>*Lösung:*</u>
$\delta s_1 = \delta s_2 = l \cdot \delta\alpha$
Die virtuelle Arbeit bei Änderung des Winkels α ist

$$\delta W_\alpha = -G \cdot \delta s_1 \cdot \sin\alpha - G \cdot \delta s_2 \cdot \sin\alpha = -2G \cdot l \cdot \delta\alpha \cdot \sin\alpha$$

Für die verallgemeinerte Kraft folgt
$Q_\alpha = -2G \cdot l \cdot \sin\alpha$.
$\delta W_\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_\varphi = 0$.

Beispiel 3. Ein Kolben kann sich in einem unter Druck *p* stehenden Zylinder bewegen. Als verallgemeinerte Koordinate des Kolbens sei das Volumen der linken Kammer gewählt. Zu berechnen ist die dieser verallgemeinerten Koordinate zugeordnete verallgemeinerte Kraft.



<u>*Lösung:*</u> Die auf die Oberfläche des Kolbens wirkende Kraft ist gleich $F = p \cdot A$. Die Arbeit dieser Kraft bei einer kleinen Verschiebung dx des Kolbens ist gleich $dW = F \cdot dx = p \cdot A \cdot dx = p \cdot dV$.

Die verallgemeinerte Kraft ist $Q_V = \frac{\partial W}{\partial V} = p$.

> Die der verallgemeinerten Koordinate "Volumen" zugeordnete verallgemeinerte Kraft ist Druck.

Tabelle der generalisierten Kräfte

Generalisierte Koordinate		Generalisierte Kraft	
kartesische Koordinate	x	x-Komponente der Kraft	F_x
Rotationswinkel	φ	Kraftmoment bezüglich desselben Punktes	M
Volumen	V	Druck	p
Im Allgemeinen	q		$\delta W / \delta q$

II. Lagrangesche Gleichungen 2. Art mit nicht konservativen Kräften

Die uns bekannten Lagrangeschen Gleichungen 2. Art

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0$$

können auch in der folgenden Form geschrieben werden:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial K}{\partial q_i}+\frac{\partial U}{\partial q_i}=0$$

oder

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial K}{\partial q_i}=-\frac{\partial U}{\partial q_i}=Q_i\,.$$

Eine Bewegung kann sich aber nicht ändern, wenn wir Kräfte einer Natur durch die *gleichen Kräfte* anderer Natur ersetzen. Daraus folgt, daß die Gleichung $\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial K}{\partial q_i}=Q_i$ auch dann gilt, wenn Q_i beliebige verallgemeinerte Kräfte (nicht unbedingt konservative) sind.

Wenn wir die Kräfte als eine Summe aus konservativen und nicht konservativen Kräften darstellen, so gilt:

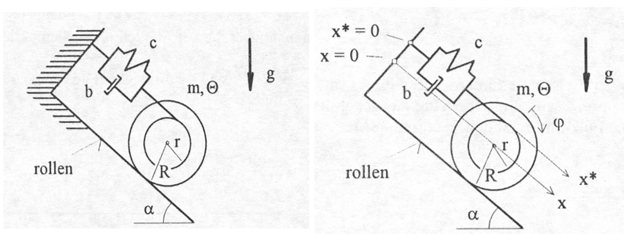
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial K}{\partial q_i}=Q_i^{(kons.)}+Q_i^{(n.kons.)}=-\frac{\partial U}{\partial q_i}+Q_i^{(n.kons.)}$$

Diese Gleichung kann in der folgenden Form geschrieben werden:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=Q_i^{(n.kons.)}}$$

Lagrangesche Gleichungen 2. Art für Systeme mit nicht konservativen Kräften

Beispiel 1. Gegeben sei eine abgesetzte Rolle mit den Radien *r* und *R* auf einer schrägen Ebene im Erdschwerefeld. Sie wird über einen Faden und eine Feder-Dämpferkombination gehalten. Die Ruhelänge der Feder sei *l*. Man ermittle die Bewegungsgleichungen des Systems.



<u>*Lösung:*</u> Die Lagrangefunktion des Systems:

$$L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}\Theta\dot{\varphi}^2-\frac{1}{2}c\left(x^*-l\right)^2+mgx\sin\alpha$$

Die Dämpferkraft ist eine nicht konservative Kraft. Die zugehörige virtuelle Arbeit ist $\delta W_{Dämpfer}=-b\dot{x}^*\delta x^*$.

Die Koordinaten x, x^*, φ sind abhängig.

1. Bindung: Die Rolle rollt $\Rightarrow$ $x=R\varphi$.

2. Bindung: x^* liegt auf der Rolle $\Rightarrow$ $x^*=(R+r)\varphi$.

Daraus folgen die Zusammenhänge zwischen den Koordinaten:

$$\varphi=x/R\,,\qquad x^*=\frac{R+r}{R}x\,.$$

Die Lagrangefunktion ausgedrückt als Funktion der einzigen gebliebenen verallgemeinerten Koordinate x:

$$L=\frac{1}{2}\left(m+\frac{\Theta}{R^2}\right)\dot{x}^2-\frac{1}{2}c\left(\frac{R+r}{R}x-l\right)^2+mgx\sin\alpha$$

Zur Berechnung der generalisierten Kraft, die derselben Koordinate x zugeordnet ist, berechnen wir die virtuelle Arbeit des Dämpfers

$$\delta W_{Dämpfer}=-b\frac{(R+r)^2}{R^2}\dot{x}\delta x \quad\Rightarrow$$

Die der Koordinate x zugeordnete nicht konservative verallgemeinerte Kraft ist somit

$$Q_x=-b\frac{(R+r)^2}{R^2}\dot{x}\,.$$

Die Lagrangegleichung lautet

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}-\frac{\partial L}{\partial x}=Q_x\,.$$

Ableitungen:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=\left(m+\frac{\Theta}{R^2}\right)\dot{x}\,,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=\left(m+\frac{\Theta}{R^2}\right)\ddot{x}\,,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=-c\frac{R+r}{R}\left(\frac{R+r}{R}x-l\right)+mg\sin\alpha\,.$$

Somit ergibt sich die folgende Bewegungsgleichung

$$\left(m+\frac{\Theta}{R^2}\right)\ddot{x}+c\frac{R+r}{R}\left(\frac{R+r}{R}x-l\right)-mg\sin\alpha=$$

$$=-b\frac{(R+r)^2}{R^2}\dot{x}.$$

Die Dissipationsfunktion. Zwangskräfte.

I. Die Dissipationsfunktion.

Zur Berechnung von generalisierten *dissipativen (Widerstands-)* Kräften benutzt man die Dissipationsfunktion.

Definieren wir eine Funktion *D*, deren Ableitungen nach Geschwindigkeitskomponenten mit negativem Vorzeichen die Reibungskraftkomponenten ergeben:

$$F_x^{(1)} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1},\; F_y^{(1)} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{y}_1}, \ldots \; . \qquad (1)$$

Beispiele:

- **Gleitreibung:** $D = \mu N \left| v_{rel} \right|$,

  μ - Reibkoeffizient, *N*- Normalkraft
- **lineare Dämpfung:** $D = \frac{1}{2} b v_{rel}^2$,

  b-*D*ämpfungskonstante
- **Luftwiderstand:** $D = \frac{1}{3} k \left| v_{rel} \right|^3$.

v_{rel} ist relative Gleitgeschwindigkeit.

Wir wollen nun *verallgemeinerte dissipative Kräfte* berechnen. Bei der Beschreibung eines Systems mit verallgemeinerten Koordinaten sind seine kartesischen Koordinaten Funktionen von verallgemeinerten Koordinaten:

$x_i = x_i(q_1, \ldots, q_s)$.

Zur Berechnung der verallgemeinerten Kräfte berechnen wir die virtuelle Arbeit bei einer beliebigen Verrückung des Systems:

$$dW = \sum_i F_i dx_i = \sum_i -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_i} dx_i \; .$$

eine verallgemeinerte Kraft wird definiert als

$$Q_j = \frac{\partial W}{\partial q_j} = \sum_i -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \sum_i -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_i}\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j}$$

Daraus folgt *für beliebige generalisierte Koordinaten* q_i:

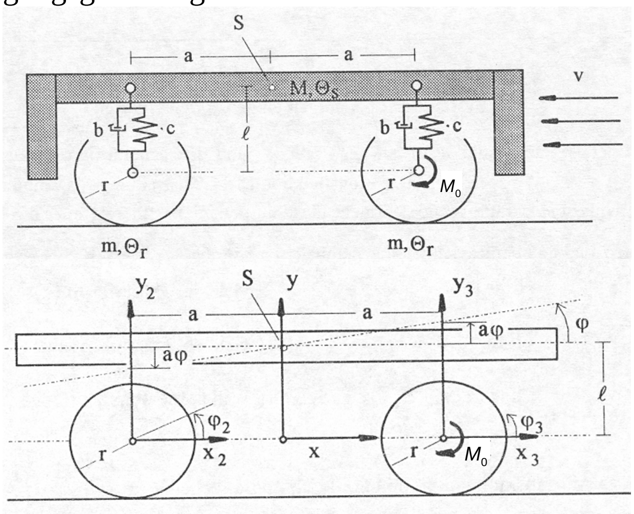
$$\boxed{Q_{q_i} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i}}$$

Mit der Dissipationsfunktion lassen sich die Lagrangegleichungen wie folgt schreiben:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i$$

In dieser Form sind die folgenden Kräfte berücksichtigt: (a) alle konservativen Kräfte stecken bereits in der Lagrangefunktion, (b) dissipative (Widerstands-) Kräfte durch die Dissipationsfunktion, (c) alle sonstigen mit Q_i.

Beispiel. Modell eines Fahrzeuges: Aufbau + zwei Räder über Feder-Dämpferbeine abgestützt. Nickbewegungen des Aufbaus seien klein. Ein Rad wird mit einem Moment M_0 angetrieben. Der Aufbau erfährt einen Widerstand durch den mit konstanter Geschwindigkeit *v* wehenden Wind. Man stelle die Bewegungsgleichungen auf.



Lösung: Die Lagrangefunktion des Systems:

$$L = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}\Theta_s \dot{\varphi}^2$$
$$+\frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}\Theta_r \dot{\varphi}_2^2$$
$$+\frac{1}{2}m\dot{x}_3^2 + \frac{1}{2}\Theta_r \dot{\varphi}_3^2$$
$$-Mgy - \frac{1}{2}c\left(y_2 - l\right)^2 - \frac{1}{2}c\left(y_3 - l\right)^2 .$$

Die Dissipationsfunktion des Systems ist

$$D = \frac{1}{2}b\dot{y}_2{}^2 + \frac{1}{2}b\dot{y}_3{}^2 + \frac{1}{3}k\left|\dot{x} + v\right|^3 .$$

Das Antriebsmoment muss über die virtuelle Arbeit $\delta W_{Antrieb} = -M_0 \delta\varphi_3$ berücksichtigt werden.

Bindungsgleichungen: Als generalisierte Koordinaten werden x, y, φ gewählt.

$x_2 = x - a \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_2 = \dot{x}$

$x_3 = x + a \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_3 = \dot{x}$

$y_2 = y - a\varphi \quad \Rightarrow \quad \dot{y}_2 = \dot{y} - a\dot{\varphi}$

$y_3 = y + a\varphi \quad \Rightarrow \quad \dot{y}_3 = \dot{y} + a\dot{\varphi}$

$\varphi_2 = -\frac{x_2}{r} = -\frac{x-a}{r} \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi}_2 = -\frac{\dot{x}}{r}$

$$\varphi_3 = -\frac{x_3}{r} = -\frac{x+a}{r} \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi}_3 = -\frac{\dot{x}}{r}$$

Für die Lagrangesche Funktion ergibt sich

$$L = \frac{1}{2} M \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \right) + \frac{1}{2} \Theta_s \dot{\varphi}^2 + 2 \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + 2 \frac{1}{2} \frac{\Theta_r}{r^2} \dot{x}^2$$

$$-Mgy - \frac{1}{2} c \left(y - a\varphi - l \right)^2 - \frac{1}{2} c \left(y + a\varphi - l \right)^2$$

oder

$$L = \frac{1}{2} M \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \right) + \frac{1}{2} \Theta_s \dot{\varphi}^2 + \left(m + \frac{\Theta_r}{r^2} \right) \dot{x}^2$$

$$-Mgy - c \left(y - l \right)^2 - ca^2 \varphi^2$$

Die Dissipationsfunktion ist

$$D = \frac{1}{2} b \left(\dot{y} - a\dot{\varphi} \right)^2 + \frac{1}{2} b \left(\dot{y} + a\dot{\varphi} \right)^2 + \frac{1}{3} k \left| \dot{x} + v \right|^3 =$$

$$= b\dot{y}^2 + ba^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{3} k \left| \dot{x} + v \right|^3 .$$

Die virtuelle Arbeit des Antriebsmomentes ist

$$\delta W_{Antrieb} = \frac{M_0}{r} \delta x \;\Rightarrow\; Q_x = \frac{M_0}{r} .$$

Die Bewegungsgleichungen:

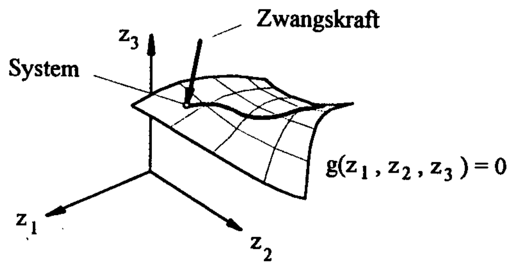
$$\boxed{\begin{aligned} &\left(M + 2m + 2\frac{\Theta_r}{r^2} \right) \ddot{x} + k \left| \dot{x} + v \right| \left(\dot{x} + v \right) = M_0 / r \\ &M\ddot{y} + Mg + 2c(y - l) + 2b\dot{y} = 0 \\ &\Theta \ddot{\varphi} + 2ca^2 \varphi + 2ba^2 \dot{\varphi} = 0 \end{aligned}}$$

II. Zwangskräfte können auch im Lagrangeformalismus berechnet werden.

Zwangskräfte stehen immer senkrecht zu den "erlaubten" Bewegungen. Gibt es in einem System eine Bindung der Form

$$g(q_1, q_2, ..., q_s) = 0 , \qquad (1)$$

so kann sich dieses System im q-Raum nur auf der Hyperfläche (1) bewegen:



Die Zwangskräfte sind senkrecht zu dieser Fläche gerichtet. Diese "senkrechte Richtung" kann analytisch berechnet werden: Erleiden alle Koordinaten q_i eine beliebige kleine Änderung, die mit der Bedingung (1) verträglich ist, so ändert sich g nicht, d.h.:

$$dg = \sum_i \frac{\partial g_i}{\partial q_i} dq_i = 0 .$$

Diese Gleichung kann als Skalarprodukt von zwei Vektoren: $\nabla g = \left(\frac{\partial g}{\partial q_1}, ..., \frac{\partial g}{\partial q_s} \right)$ und $\vec{dq} = \left(dq_1, ..., dq_s \right)$ aufgefasst werden. Vektor $\vec{dq}$ liegt dabei immer in der Hyperebene und Vektor $\nabla g = \left(\frac{\partial g}{\partial q_1}, ..., \frac{\partial g}{\partial q_s} \right)$ folglich senkrecht zu dieser Ebene. Das bedeutet, dass die Zwangskraft die gleiche Richtung hat, wie der Vektor ∇g :

$$\boxed{Q_i^{Zwang.} = \lambda \frac{\partial g}{\partial q_i}} .$$

Die noch unbekannte Größe λ heißt Lagrange-Multiplikator und kann aus der Bedingung (1) berechnet werden.

Lagrangesche Gleichungen 1. Art

für Systeme mit beliebigen eingeprägten Kräften und Zwangskräften

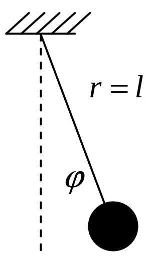
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial q_i}$$

$$g_1(q_1, q_2, ..., q_s) = 0$$

....

$$g_k(q_1, q_2, ..., q_s) = 0$$

Beispiel: Ein Pendel. Man stelle die Bewegungsgleichungen auf und gebe die Stangenkraft an.



<u>*Lösung:*</u> Die Lagrangefunktion *ohne Berücksichtigung der Zwangsbedingung* ist

$$L = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{1}{2} mr^2 \dot{\varphi}^2 + mgr \cos\varphi$$

.

Die Zwangsbedingung ist $r - l = 0$, somit $g(r, \varphi) = r - l$.

Die Bewegungsgleichungen sind:

1) $m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 - mg\cos\varphi = \lambda \frac{\partial g}{\partial r} = \lambda$

2) $mr^2 \ddot{\varphi} + 2mr\dot{r}\dot{\varphi} + mgr\sin\varphi = \lambda \frac{\partial g}{\partial \varphi} = 0$

3) $r - l = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{r} = 0$.

Die zweite Gleichung ist dann die gesuchte Bewegungsgleichung und die erste gibt die Zwangskraft an:

$$F_r = \lambda \frac{\partial g}{\partial r} = -mr\dot{\varphi}^2 - mg\cos\varphi .$$

I. Zwangskräfte (Fortsetzung)

II. Potentielle und kinetische Energie eines elastischen Stabes, Eigenschwingungen

I. Lagrangesche Gleichungen 1. Art für ein System mit mehreren Bindungen

Gibt es in einem mechanischen System mit der Lagrangefunktion L r Bindungen, die mittels der Bindungsgleichungen

$g_k(q_1,...,q_s)=0$, $k=1,...,r$

dargestellt werden können, so haben die Bewegungsgleichungen die Form:

Lagrangesche Gleichungen 1. Art

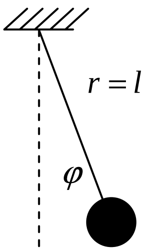
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}+\frac{\partial D}{\partial \dot q_i}=Q_i+\sum_{k=1}^{r}\lambda_k\frac{\partial g_k}{\partial q_i}$$

$$g_1(q_1,q_2,...,q_s)=0$$

....

$$g_r(q_1,q_2,...,q_s)=0$$

Beispiel: Ein Pendel. Man stelle die Bewegungsgleichungen auf und gebe die Stangenkraft an.



Lösung: Die Lagrangefunktion *ohne Berücksichtigung der Zwangsbedingung* ist

$$L=\frac{1}{2}m\dot r^2+\frac{1}{2}mr^2\dot\varphi^2+mgr\cos\varphi$$

Die Zwangsbedingung ist $r-l=0$, somit $g(r,\varphi)=r-l$.

Die Lagrangegleichungen sind:

1) $m\ddot r-mr\dot\varphi^2-mg\cos\varphi=\lambda\frac{\partial g}{\partial r}=\lambda$

2) $mr^2\ddot\varphi+2mr\dot r\dot\varphi+mgr\sin\varphi=\lambda\frac{\partial g}{\partial\varphi}=0$

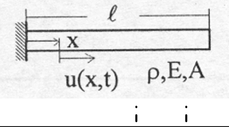
3) $r - l = 0 \quad\Rightarrow\quad \ddot r=0$.

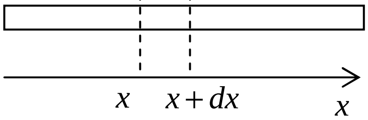
Die zweite Gleichung ist die gesuchte Bewegungsgleichung und die erste gibt die Zwangskraft an:

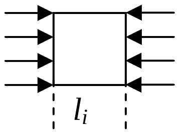
$$F_r=\lambda\frac{\partial g}{\partial r}=-mr\dot\varphi^2-mg\cos\varphi.$$

II. Kontinuierliche Medien

A. Potentielle und kinetische Energie eines deformierten Stabes







Spannung: $\sigma=E\varepsilon=E\frac{\partial u}{\partial x}$. Kraft:

$$F_i=A\sigma_i=AE\varepsilon_i=AE\frac{\Delta l_i}{l_i}=\frac{AE}{l_i}\Delta l_i=k\Delta l_i\Rightarrow$$

Steifigkeit eines Elementes: $k=\frac{AE}{l_i}$.

Potentielle Energie eines Elementes:

$$U_i=k\frac{\Delta l_i^2}{2}=\frac{AE}{2l_i}\Delta l_i^2=\frac{AE}{2}\frac{\Delta l_i^2}{l_i^2}l_i=$$

$$=\frac{AE}{2}\varepsilon_i^2 l_i=\frac{AE}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^2 l_i$$

Potentielle Energie des ganzen Stabes:

$$U=\sum_i U_i=\sum_i\frac{AE}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^2 l_i$$

oder

$$\boxed{U=\int_0^l\frac{AE}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2dx=\int_0^l\frac{AE}{2}u'^2dx}$$

Kinetische Energie des Stabes:

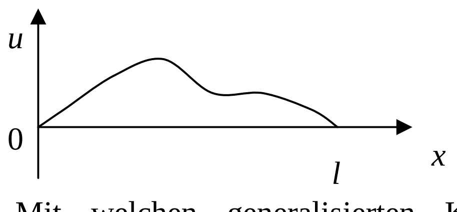
$$\boxed{K=\int_0^l dm\frac{v^2}{2}=\int_0^l\rho A\frac{\dot u^2}{2}dx}.$$

Lagrangefunktion:

$$L=\int_0^l\left(\rho A\frac{\dot u^2}{2}-\frac{AE}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right)dx$$

B. Lagrangefunktion eines elastischen Stabes in Fourier-Darstellung

Betrachten wir einen an beiden Enden festgespannten elastischen Stab der Länge l (Randbedingungen $u(0)=0$, $u(l)=0$):



Mit welchen generalisierten Koordinaten kann man einen Stab beschreiben?

<u>Erste Möglichkeit:</u> $u(x)$; hier spielt u die Rolle von generalisierten Koordinaten und x die Rolle des Indexes *i*, welcher die Koordinaten nummeriert.

<u>Zweite Möglichkeit:</u> Jede nicht singuläre Funktion kann auf dem Intervall $(0,l)$ in eine Taylor-Reihe entwickelt werden:

$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)x^n$. Die Entwicklungskoeffizienten a_n können als generalisierte Koordinaten gewählt werden.

<u>Dritte Möglichkeit:</u> Jede Funktion, die den Randbedingungen $u(0)=0$, $u(l)=0$ genügt, kann auf dem Intervall $(0,l)$ in eine Fourier-Reihe entwickelt werden:

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)\sin\frac{\pi n x}{l}.$$

Die Fourier-Koeffizienten a_n können ebenfalls als generalisierte Koordinaten gewählt werden.

<u>Weitere Möglichkeiten</u>:

$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)\varphi_n(x)$, wobei $\varphi_n(x)$ ein *voller* Satz von Basisfunktionen (es gibt verschiedene).

Betrachten wir die dritte Wahl der generalisierten Koordinaten näher:

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)\sin\frac{\pi n x}{l}.$$

Wir leiten die Bewegungsgleichungen für die generalisierten Koordinaten a_n her. Zu diesem Zweck muss die Lagrange-Funktion des Stabes

$L=\frac{1}{2}\int_0^l\left(\rho A\dot{u}^2-AEu'^2\right)dx$ als Funktion der generalisierten Koordinaten dargestellt werden. Die Ableitungen sind:

$$\dot{u}(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} \dot{a}_n(t)\sin\frac{\pi n x}{l},$$

$$u'(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)\left(\frac{\pi n}{l}\right)\cos\frac{\pi n x}{l}$$

$$K=\frac{1}{2}\int_0^l\sum_{n,k=1}^{\infty}\rho A\dot{a}_n\dot{a}_k\sin\frac{\pi n x}{l}\sin\frac{\pi k x}{l}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho A\dot{a}_n^2 l}{4}$$

$$U=\frac{1}{2}\int_0^l\sum_{n,k=1}^{\infty}AEa_na_k\frac{\pi n}{l}\frac{\pi k}{l}\cos\frac{\pi n x}{l}\cos\frac{\pi k x}{l}dx$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}AEa_n^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 l$$

Die Lagrangefunktion lautet:

$$L=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho A\dot{a}_n^2 l}{4}-\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}AEa_n^2\frac{\pi^2 n^2}{l}.$$

Die Lagrangegleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{a}_n}-\frac{\partial L}{\partial a_n}=0$$

lauten:

$$\rho A\ddot{a}_n l+AEa_n\frac{\pi^2 n^2}{l}=0.$$

Diese Gleichung beschreibt harmonische Schwingungen mit der Kreisfrequenz

$$\omega_n=\sqrt{\frac{E}{\rho}}\left(\frac{\pi n}{l}\right).$$

Wir haben heraus gefunden, dass die Bewegungsgleichungen für alle generalisierten Koordinaten a_n unabhängig von einander sind! Die allgemeine Lösung für die Koordinate $a_n(t)$ lautet:

$$a_n(t)=A_n\cos\omega_n t+B_n\sin\omega_n t$$

$$=A_n\cos\sqrt{\frac{E}{\rho}}\left(\frac{\pi n}{l}\right)t+B_n\sin\sqrt{\frac{E}{\rho}}\left(\frac{\pi n}{l}\right)t$$

Wenn wir eine Deformation haben, bei der zum Zeitpunkt $t=0$ nur *eine* Koordinate a_n verschieden von Null war, so ist dies auch zu einem beliebigen späteren Zeitpunkt gültig. In diesem Fall ist die Verschiebung durch den Ausdruck

$$u(x,t)=a_n(t)\sin\frac{\pi n x}{l}$$

gegeben. Diese Funktion heißt die n-te *Eigenform* der Schwingungen des elastischen Stabes. Der Stab oszilliert dabei mit einer konstanten Frequenz $\omega_n=\sqrt{\frac{E}{\rho}}\left(\frac{\pi n}{l}\right)$, welche als n-te *Eigenfrequenz* bezeichnet wird. Die generalisierten Koordinaten a_n heißen *Normalkoordinaten* des Stabes. Die allgemeine Lösung für die n-te Eigenform ist

$$u(x,t)=\left(A_n\cos\sqrt{\frac{E}{\rho}}\left(\frac{\pi n}{l}\right)t+B_n\sin\sqrt{\frac{E}{\rho}}\left(\frac{\pi n}{l}\right)t\right)\sin\frac{\pi n x}{l}$$

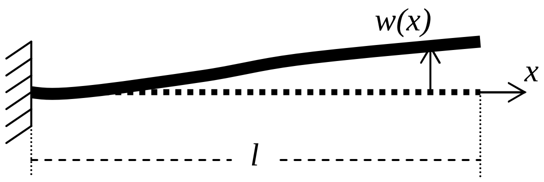
mit beliebigen Konstanten A_n und B_n, deren Werte von den Anfangsbedingungen abhängen.

Im zweiten Teil des Kurses, der *Kontinuumsmechanik*, werden wir diese Lösung auf einem anderen Weg, als die sogenannte *Bernoullische Lösung der Wellengleichung*, kennenlernen.

Energiemethoden der Mechanik / Prof. Popov / Vorlesung 6.

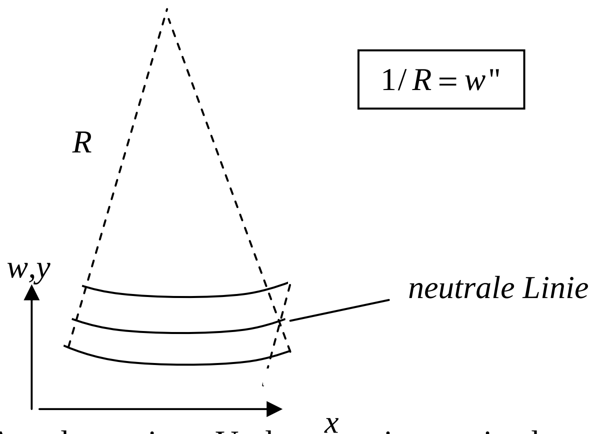
Potentielle und kinetische Energie eines elastischen Balkens, eines Torsionsstabes, einer gespannten Saite. Beispiele für Statik und Dynamik eines Balkens.

I. Energie eines Balkens



Gegeben sei ein Balken mit der Länge l, dem geometrischen Trägheitsmoment des Querschnitts I und dem Elastizitätsmodul E in einem deformierten Zustand, der durch die Querverschiebung $w(x)$ seiner Achse gegeben ist. Zu bestimmen ist seine potentielle Energie.

Wir betrachten einen infinitesimal kleinen Ausschnitt aus dem Balken:



Aus der vorigen Vorlesung wissen wir, dass potentielle Energie eines gedehnten Stabes

$U = \frac{AE}{2}\varepsilon^2 l = \frac{E}{2}\varepsilon^2 \cdot V$ ist (V ist Volumen).

Deformation einer "Faser" mit der Querkoordinate y (gemessen von der Mittellinie) ist $\varepsilon(y) = -y/R = -y \cdot w''$. Die potentielle Energie ist gleich:

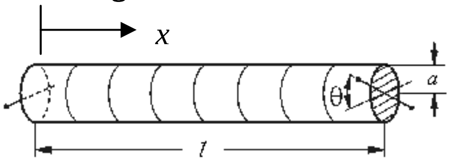
$$U = \int_0^l dx \iint \frac{E}{2}\varepsilon(y)^2 dydz = \frac{1}{2}\int_0^l dx \iint E y^2 w''^2(x) dydz$$

oder

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\int_0^l EIw''^2(x)dx}$$

Die kinetische Energie berechnet sich wie bei einem Stab zu: $\boxed{K = \int_0^l \rho A \frac{\dot{w}^2}{2} dx}$

II. Energie eines Torsionsstabes



Wir schneiden aus einem verdrehten Stab ein infinitesimal kleines Element zwischen x und $x+dx$. Der linke Rand ist gedreht um den Winkel $\theta(x)$, der rechte um $\theta(x+dx) = \theta + d\theta$. Das Torsionsmoment im Querschnitt ist gleich

$M = GI_r \frac{\Delta\theta}{\Delta x} = GI_r\theta'$ (I_r ist das polare geometrische Trägheitsmoment des Querschnitts). Der Torsionssteifigkeitskoeffizient des Elementes ist $k = GI_r/\Delta x$. Die potentielle Energie des Elementes ist

$$\Delta U = k\frac{\Delta\theta^2}{2} = G\frac{I_r}{\Delta x}\frac{\Delta\theta^2}{2} = G\frac{I_r}{2}\frac{\Delta\theta^2}{\Delta x^2}\Delta x = \frac{GI_r}{2}\theta'^2\Delta x$$

Potentielle Energie des gesamten Stabes ist

$$\boxed{U = \int_0^l \frac{GI_r}{2}\theta'^2 dx}.$$

Die kinetische Energie eines Elementes ist:

$$\Delta K = \sum_{\substack{\text{über}\\ \text{Querschnitt}}} \frac{\Delta m v^2}{2} = \sum_{\substack{\text{über}\\ \text{Querschnitt}}} \frac{\rho \cdot \Delta x \Delta y \Delta z \cdot r^2 \dot{\theta}^2}{2}$$

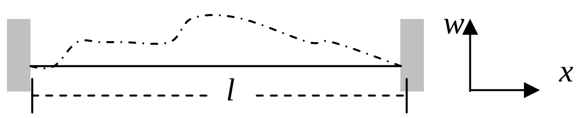
$$= \Delta x \sum_{\substack{\text{über}\\ \text{Querschnitt}}} \frac{\rho \cdot \Delta y \Delta z \cdot r^2 \dot{\theta}^2}{2} = \Delta x \frac{\rho}{2}\dot{\theta}^2 \int_{\substack{\text{über}\\ \text{Querschnit}}} r^2 dydz$$

$= \Delta x \frac{\rho I_r}{2}\dot{\theta}^2$. Die gesamte kinetische Energie:

$$\boxed{K = \int_0^l \frac{\rho I_r}{2}\dot{\theta}^2 dx}$$

III. Energie einer gespannten Saite

Saite ist ein vorgespannter Faden, der keine Biegesteifigkeit besitzt.



Wir nehmen einen elastischen Faden mit der Länge l_0 im ungespannten Zustand und dehnen ihn um Δl_0 auf eine neue Länge $l = l_0 + \Delta l_0$; dadurch entsteht eine Spannkraft $S = c\Delta l_0$ (c ist der Steifigkeitskoeffizient).

Jetzt lenken wir die Saite aus diesem Zustand aus (Verschiebung in der Querrichtung $w(x)$). Dadurch dehnt sich der Faden auf die Länge

$$l' = \int_0^l \sqrt{1+w'^2}\,dx = \int_0^l \left(1+\frac{w'^2}{2} + G.h.O.\right)dx$$

$$\approx l + \int_0^l \frac{w'^2}{2}dx = l_0 + \Delta l_0 + \int_0^l \frac{w'^2}{2}dx = l_0 + \Delta l_0 + \Delta l_1$$

Die potentielle Energie vor der Auslenkung war $U_1 = \frac{c}{2}\Delta l_0^{\,2}$. Nach der Auslenkung:

$$U_2 = \frac{c}{2}\left(\Delta l_0 + \Delta l_1\right)^2 = \frac{c}{2}\left(\Delta l_0^{\,2} + 2\Delta l_0 \Delta l_1 + G.h.O.\right)$$

$U = U_2 - U_1 = c\Delta l_0 \Delta l_1 = S\Delta l_1$ oder

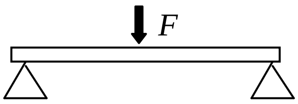
$$\boxed{U = \frac{S}{2}\int_0^l w'^2 dx}.$$

Sie hängt nicht von der Steifigkeit des Fadens, sondern nur von der Vorspannkraft S ab. Die kinetische Energie ist wie beim Balken

$$\boxed{K = \int_0^l \rho A \frac{\dot{w}^2}{2}dx.}$$

IV. Ein Balken im statischen Gleichgewicht: ein Beispiel.

Zu berechnen ist die Durchbiegung in der Mitte.



Lösung: Die potentielle Energie ist

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l EI\left(w''(x)\right)^2 dx + Fw(l/2)$$

Mit dem Ansatz $w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin\frac{\pi n x}{l}$, (der den Randbedingungen $w(0)=0$, $w(l)=0$ genügt), bekommen wir

$$w''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \sin\frac{\pi n x}{l}.$$

Die potentielle Energie ist

$$U = \frac{EIl}{4}\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \left(\frac{\pi n}{l}\right)^4 + F\cdot\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin\frac{\pi n}{2}.$$

Die Bedingungen für ein Gleichgewicht:

$$\frac{\partial U}{\partial a_n} = \frac{EIl}{2}\left(\frac{\pi n}{l}\right)^4 a_n + F\cdot\sin\frac{\pi n}{2} = 0$$

Daraus folgt $a_n = -\left(2Fl^3 \sin\frac{\pi n}{2}\right)/\left(EI\pi^4 n^4\right)$.

Die Durchbiegung in der Mitte ist somit

$$w\left(\frac{l}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin\frac{\pi n}{2} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2Fl^3 \sin^2\frac{\pi n}{2}}{EI\pi^4 n^4} =$$

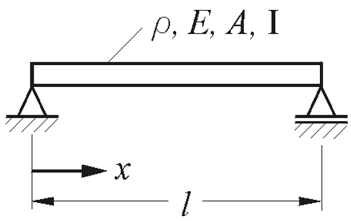
$$-\frac{2Fl^3}{EI\pi^4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4} = -\frac{Fl^3}{48\cdot EI}.$$

$$\left(\textit{berücksichtige}: \quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}\right)$$

V. Dynamik eines Balkens

Gegeben sei ein beidseitig drehbar gelagerter Balken. Zu bestimmen sind die Eigenfrequenzen.

Lösung: Die Querauslenkung des Balkens genügt den Randbedingungen $w(0)=0$, $w(l)=0$ und kann daher als folgende Fourier-Reihe dargestellt werden:



$$w(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)\sin\frac{\pi n x}{l}$$

. Als generalisierte Koordinaten wählen wir a_n. Die zur Berechnung von Energien benötigten Ableitungen sind:

$$\dot{w}(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\dot{a}_n(t)\sin\frac{\pi n x}{l},$$

$$w''(x,t) = -\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \sin\frac{\pi n x}{l}.$$

Kinetische und potentielle Energien:

$$K = \frac{1}{2}\int_0^l \sum_{n,k=1}^{\infty}\rho A \dot{a}_n \dot{a}_k \sin\frac{\pi n x}{l}\sin\frac{\pi k x}{l}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho A \dot{a}_n^2 l}{4}$$

$$U = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} EIa_n^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^4 l$$

Die Lagrangefunktion:

$$L = l\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho A \dot{a}_n^2}{4} - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} EIa_n^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^4\right).$$

Die Lagrangegleichungen:

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{a}_n} - \frac{\partial L}{\partial a_n} = 0$ oder

$\boxed{\rho A \ddot{a}_n + EIa_n\left(\frac{\pi n}{l}\right)^4 = 0}$. Diese Gleichungen beschreiben Schwingungen mit den Kreisfrequenzen $\omega_n^2 = \frac{EI}{\rho A}\left(\frac{\pi n}{l}\right)^4$. $\boxed{\omega_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}}$

Energiemethoden der Mechanik / Prof. Popov / Vorlesung 7. **Näherungslösungen auf der Basis von Prinzipien. Das Verfahren von Rayleigh-Ritz.** **Literatur: Ostermeyer §25.2**

I. Ritz-Ansatz (Statik)

Mehrere statische und dynamische Aufgaben mit Stäben und Balken haben wir gelöst, indem wir die Auslenkung als eine Fourier-Reihe dargestellt haben. Allgemeiner kann man eine Entwicklung der Form

$$w(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)\varphi_n(x) \qquad (1)$$

benutzen, wobei $\varphi_n(x)$ ein *voller* Satz von Basisfunktionen ist.

Wir haben gesehen, dass man oft sehr gute Ergebnisse bereits mit nur wenigen ersten Gliedern der Entwicklung (1) bekommt.

Meistens reicht es, statt einer unendlichen Reihe einen *endlichen Ansatz*

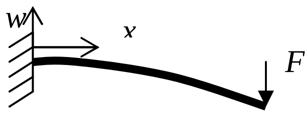
$$w(x)=\sum_{n=0}^{N} a_n\varphi_n(x) \qquad (2)$$

zu benutzen (***Ritz-Ansatz***).

<u>Bemerkung 1:</u> Die Ansatzfunktionen müssen die geometrischen Randbedingungen erfüllen.

<u>Bemerkung 2:</u> Bisher haben wir Fourier-Reihen benutzt, bei denen die Basis-Funktionen $\varphi_n(x)$ den Ortogonalitätsbedingungen genügten. Das ist zwar sehr bequem, aber nicht zwingend erforderlich.

Beispiel 1. Zu bestimmen ist die Form eines links fest eingespannten Balkens, auf dessen rechten Ende eine konzentrierte Kraft F wirkt.



<u>Lösung:</u> Benutzen wir den Ansatz:

$$w(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3=a_2x^2+a_3x^3$$

(Aus den geometrischen Randbedingungen links folgt $a_0=0$, $a_1=0$).

Zweite Ableitung: $w''(x)=2a_2+6a_3x$

Die potentielle Energie ist:

$$U=\frac{1}{2}\int_0^l EI\left(w''(x)\right)^2dx+Fw(l) \text{ ist gleich}$$

$$U=\frac{1}{2}\int_0^l EI\left(2a_2+6a_3x\right)^2dx+F(a_2l^2+a_3l^3)$$

$$U=EI\left(2a_2^2l+6a_2a_3l^2+6a_3^2l^3\right)+F(a_2l^2+a_3l^3)$$

Die Bedingungen für ein Minimum lauten

$$\left.\begin{aligned}4a_2+6a_3l&=-\frac{Fl}{EI}\\ 6a_2+12a_3l&=-\frac{Fl}{EI}\end{aligned}\right\}$$

Die Durchbiegung ist

$$w(x)=-\frac{Fl}{2EI}x^2+\frac{F}{6EI}x^3$$

Die Durchbiegung im Endpunkt ist

$w(l)=-\dfrac{Fl^3}{3EI}$. (Das ist das *exakte* Ergebnis!)

<u>Allgemeine Formulierung.</u> Wir betrachten dieselbe Aufgabe mit einem links eingespannten Balken, jetzt aber mit einer beliebigen Streckenlast $q(x)$. Zu bestimmen ist die Form des Balkens im Gleichgewicht. Die potentielle Energie des Balkens

$$U=\frac{1}{2}\int_0^l EI\left(w''(x)\right)^2dx+\int_0^l q(x)w(x)dx$$

muss im Gleichgewicht minimal werden. Berechnen wir U mit dem Ansatz (2):

$$w''(x)=\sum_{n=0}^{N} a_n\varphi_n''(x),$$

$$\left(w''(x)\right)^2=\sum_{n,k=0}^{N} a_na_k\varphi_n''(x)\varphi_k''(x)$$

$$U=\frac{1}{2}\int_0^l EI\sum_{\substack{n=0\\k=0}}^{N} a_na_k\varphi_n''(x)\varphi_k''(x)dx+$$

$$+\int_0^l q(x)\sum_{n=0}^{N} a_n\varphi_n(x)dx$$

Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein:

$$\int_0^l \varphi_n''(x)\varphi_k''(x)dx=A_{nk}\,,\quad \int_0^l q(x)\varphi_n(x)dx=b_n$$

Offensichtlich gilt $A_{nk}=A_{kn}$.

Die potentielle Energie erhält die Form:

$$U=\frac{1}{2}EI\sum_{n,k=0}^{N} A_{nk}a_na_k+\sum_{n=0}^{N} b_na_n\,.$$

Die Bedingung für ein Minimum ist

$$\frac{\partial U}{\partial a_n}=EI\sum_{k=0}^{N} A_{nk}a_k+b_n=0\,.$$

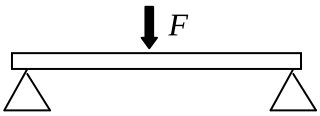
oder in Matrix-Form $EI\mathbf{A}\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{0}$.

Die Entwicklungskoeffizienten ergeben sich daraus zu

$$\mathbf{a}=-\frac{1}{EI}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}\,,$$

d.h. die Aufgabe über die Gleichgewichtsform eines Balkens wird mit Hilfe des Ritzschen Ansatzes auf Lösung eines linearen algebraischen Gleichungssystems zurückgeführt.

Beispiel 2. Zu berechnen ist die Durchbiegung des unten gezeigten Balkens in der Mitte. (Gegeben: l,E,I).



<u>Lösung:</u> Wir haben diese Aufgabe bereits mit Hilfe einer unendlichen Fourier-Reihe exakt gelöst. Jetzt benutzen wir einen Ritz-Ansatz in Form eines Polynoms vierter Ordnung:

$$\begin{aligned} w(x) &= ax(l-x)+bx^2(x-l)^2 \\ &= a\varphi_1(x)+b\varphi_2(x) \end{aligned} \quad . \qquad (*)$$

Die potentielle Energie ist gleich

$$U=\frac{1}{2}\int_0^l EI\left(w''(x)\right)^2 dx+Fw(l/2)$$

Mit dem Ansatz (*) erhält man

$$w(l/2)=a\left(l/2\right)^2+b\left(l/2\right)^4 .$$

Es ist leicht zu prüfen, dass gilt

$$\int_0^l \varphi_1''^2(x)dx=4l\ , \quad \int_0^l \varphi_2''^2(x)dx=\frac{4}{5}l^5 \ \text{, und}$$

$\int_0^l \varphi_1''(x)\varphi_2''dx=0$. Für die potentielle Energie ergibt sich somit

$$U=2EIl\left(a^2+\frac{1}{5}b^2l^4\right)+F\left(a\left(\frac{l}{2}\right)^2+b\left(\frac{l}{2}\right)^4\right).$$

Die Gleichgewichtsbedingungen lauten

$$\frac{\partial U}{\partial a}=4EIla+\frac{F}{4}l^2=0 \qquad a=-\frac{F}{16}\frac{l}{EI}$$

$$\frac{\partial U}{\partial b}=\frac{4}{5}EIl^5b+\frac{F}{16}l^4=0 \qquad b=-\frac{5}{4}\frac{F}{16}\frac{1}{EIl}$$

Die Durchbiegung in der Mitte ist somit

$$w\left(\frac{l}{2}\right)=-\left(\frac{63}{64}\right)\frac{Fl^3}{48\cdot EI} \ . \text{ (Fehler ca. 1.5\%).}$$

II. Ritz-Ansatz (Dynamik)

Betrachten wir eine vorgespannte Saite.

Das System ist mittels des Ritz-Ansatzes zu diskretisieren und Bewegungsgleichungen der Saite sind aufzustellen.

<u>Lösung:</u> Wir benutzen den Ritz-Ansatz:

$$w(x,t)=\sum_k^N a_k(t)\varphi_k(x) .$$

Die Lagrangefunktion einer Saite ist

$$L=\int_0^l \rho A\frac{\dot{w}^2}{2}dx-\frac{S}{2}\int_0^l w'^2 dx .$$

Mit den Bezeichnungen

$$\rho A\int_0^l \varphi_n(x)\varphi_k(x)dx=m_{nk}\ , S\int_0^l \varphi_n'(x)\varphi_k'(x)dx=c_{nk}$$

erhalten wir

$$L=\sum_{n,k=1}^N \frac{1}{2}m_{nk}\dot{a}_n\dot{a}_k-\sum_{n,k=1}^N \frac{1}{2}c_{nk}a_na_k$$

Die Lagrangegleichungen bezüglich der Variablen a_n lauten

$$\sum_{k=1}^N m_{nk}\ddot{a}_k+\sum_{k=1}^N c_{nk}a_k=0$$

oder in der Matrix-Form

$\mathbf{M\ddot{a}}+\mathbf{Ca}=\mathbf{0}$.

Die Aufgabe über die Bewegung einer Saite wird somit auf ein System von N gewöhnlichen Differentialgleichungen zurückgeführt, die mit Hilfe eines Exponentialansatzes gelöst werden können.

$\mathbf{M}$ nennt man *Massenmatrix*, $\mathbf{C}$ *Steifigkeitsmatrix*.

<u>Beispiel 3.</u> *Zu bestimmen ist die kleinste Eigenfrequenz einer Saite.*

<u>Lösung:</u> Nehmen wir den Ritz-Ansatz mit nur *einer* Funktion: $u=a(t)\psi(x)$.

Die Lagrangefunktion ist gleich

$$L=\frac{\dot{a}^2}{2}\rho A\int_0^l \psi^2(x)dx-\frac{a^2}{2}S\int_0^l \psi'^2(x)dx$$

Die Lagrangesche Gleichung ist

$$\ddot{a}\cdot\rho A\int_0^l \psi^2(x)dx+a\cdot S\int_0^l \psi'^2(x)dx=0$$

Das ist eine Schwingungsgleichung mit der Kreisfrequenz

$$\omega^2=\frac{S\int_0^l \psi'^2(x)dx}{\rho A\int_0^l \psi^2(x)dx} \ \text{(Rayleigh-Quotient).}$$

Wenn wir $\psi(x)=\sin\left(\pi x/l\right)$ wählen, dann ist

$$\omega^2=\frac{Sl\left(\frac{\pi}{l}\right)^2/2}{\rho Al/2}=\frac{S}{\rho A}\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 .$$

Das ist das *exakte* Ergebnis!

Bei einer beliebigen anderen Ansatzfunktion wird die berechnete Eigenfrequenz *größer* als die exakte sein.

Diese Vorlesung wird im laufenden Semester mit Inhalt der vorangegangenen Vorlesungen gefüllt. Möglicherweise wird auch gänzlich auf die Vertiefung „**Dynamik von Kontinua**“ verzichtet und direkt mit dem Thema aus VL 9 weitergemacht. An anderer Stelle würde dann ggf. ein zusätzliches Thema eingebaut werden.

I. Rayleigh-Ritz Verfahren zur Bestimmung von Eigenfrequenzen.

Beispiel 1. *Zu bestimmen ist die kleinste Eigenfrequenz einer Saite.*

Mit Hilfe eines eingliedrigen Ansatzes $u = a(t)\psi(x)$ erhalten wir die Lagrangefunktion:

$$L = \frac{\dot{a}^2}{2}\rho A\int_0^l \psi^2(x)dx - \frac{a^2}{2}S\int_0^l \psi'^2(x)dx .$$

Die Bewegungsgleichung ist

$$\ddot{a}\cdot\rho A\int_0^l \psi^2(x)dx + a\cdot S\int_0^l \psi'^2(x)dx = 0 .$$

Das ist eine Schwingungsgleichung mit der Kreisfrequenz

$$\omega^2 = \frac{S\int_0^l \psi'^2(x)dx}{\rho A\int_0^l \psi^2(x)dx} \quad (\textit{Rayleigh-Quotient}).$$

Wenn wir $\varphi(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$ wählen, dann ist

$$\omega^2 = \frac{S\frac{1}{2}l\left(\frac{\pi}{l}\right)^2}{\rho A\frac{1}{2}l} = \frac{S}{\rho A}\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 .$$

Das ist das *exakte* Ergebnis für die kleinste Eigenfrequenz der Saite, da wir als Ansatzfunktion die exakte Eigenform genommen haben. Nehmen wir $\psi(x) = x(l-x)$, so bekommen wir $\omega^2 = \frac{S}{\rho A}\frac{10}{l^2}$, was etwa 1,3% über dem exakten Wert liegt.

Die Näherung ist immer größer als die erste Eigenfrequenz.

Mit einem zweigliedrigen Ansatz

$\psi(x) = x(l-x) + ax^2(l-x)^2$

erhalten wir für den *Rayleigh*-Quotienten

$$\omega^2 = \frac{S\int_0^l \psi'^2(x)dx}{\rho A\int_0^l \psi^2(x)dx} = \frac{6S(2a^2l^4 + 14al^2 + 35)}{\rho A l^2(a^2l^4 + 9al^2 + 21)}$$

Dieser Ausdruck hat ein Minimum bei

$$a := \frac{-7+\sqrt{133}}{4l^2}$$

Der minimale Wert ist gleich

$$\omega^2 = \mathbf{9,8697}\frac{S}{\rho A}\frac{1}{l^2}$$

Vergleiche mit dem exakten Wert

$$\omega^2 = \mathbf{9,8696}\frac{S}{\rho A}\frac{1}{l^2} .$$

II. Statisches Gleichgewicht und seine Stabilität

Ein System mit der potentiellen Energie $U(q_1,...,q_s)$ ist dann im statischen Gleichgewicht, wenn $\frac{\partial U}{\partial q_i} = 0$ für alle *i*.

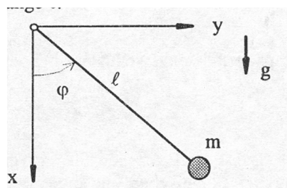
Ein Gleichgewicht ist *stabil*, wenn es einem *Minimum* der potentiellen Energie entspricht und *instabil* in allen anderen Fällen.

Im *eindimensionalen* Fall ist das Stabilitätskriterium besonders einfach:

U hat ein Minimum, wenn $\frac{\partial^2 U}{\partial q^2} > 0$ (stabil)

U hat ein Maximum, wenn $\frac{\partial^2 U}{\partial q^2} < 0$ (instabil).

Beispiel 2. Gegeben sei ein mathematisches Pendel (Masse *m* auf einem masselosen Stab der Länge *l*). Man bestimme die Gleichgewichtslagen und ihre Stabilität.



<u>*Lösung:*</u> Mit $U = -mgl\cos\varphi$ berechnet man die Gleichgewichtslagen aus der Gleichung

$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = mgl\sin\varphi = 0$. Sie hat zwei Lösungen:

$\varphi_1 = 0$ und $\varphi_2 = \pi$.

Die zweite Ableitung der potentiellen Energie nach φ gibt Auskunft über Stabilität:

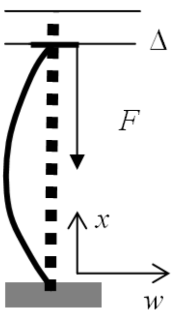
$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = mgl\cos\varphi .$$

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}\right|_{\varphi=\varphi_1} > 0 \quad \Rightarrow \text{ stabiles Gleichgewicht.}$$

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}\right|_{\varphi=\varphi_2} < 0 \quad \Rightarrow \text{ instabiles Gleichgewicht}$$

Beispiel 3. Knickung eines Stabes.

Ein elastischer Stab sei an seinen Enden gelenkig gelagert und in der vertikalen Richtung mit einer Kraft F belastet. Gegeben: E, I, l, F. Zu bestimmen sind die Stabilitätsbedingungen.



<u>Lösung:</u> Vorbereitender Schritt: Berechnung der potentiellen Energie:

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l EI\left(w''(x)\right)^2 dx - F\Delta$$

Bestimmen wir die Verschiebung Δ. Die Verkürzung wegen vertikaler Verschiebung ist Δ. Die Verlängerung wegen Biegung ist

$\int_0^l \tfrac{1}{2} w'^2 dx$. Die Längssteifigkeit eines schlanken Stabes ist viel größer als seine Biegesteifigkeit: In erster Annäherung kann der Stab als undehnbar angenommen werden. Das bedeutet, daß sich die Länge bei einer Auslenkung nicht ändert: $\Delta = \int_0^l \tfrac{1}{2} w'^2 dx$.

Für die potentielle Energie ergibt sich

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l EIw''^2 dx - F\int_0^l \tfrac{1}{2} w'^2 dx \qquad (1)$$

Mit dem Ansatz $w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin\frac{\pi n x}{l}$

(der den Randbedingungen $w(0) = 0$, $w(l) = 0$ genügt), bekommen wir

$$w'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{\pi n}{l}\right)\cos\frac{\pi n x}{l}$$

$$w''(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \sin\frac{\pi n x}{l}.$$

Die potentielle Energie:

$$U = \frac{l}{4} EI \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \left(\frac{\pi n}{l}\right)^4 - \frac{Fl}{4}\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$$

$$= \frac{l}{4}\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \left[EI\left(\frac{\pi n}{l}\right)^4 - F\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\right]$$

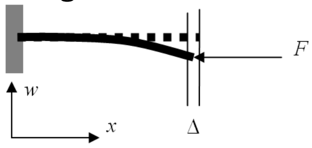
Diese Energie hat bei $a_1 = 0, ..., a_n = 0$ ein Minimum, wenn *alle* Koeffizienten vor a_n^2 positiv sind: $EI\left(\frac{\pi n}{l}\right)^4 - F\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 > 0$ oder

$EI\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 - F > 0$.

Der gerade Zustand ist stabil, wenn

$$\boxed{F < EI\left(\pi / l\right)^2}$$

IV. Rayleigh-Ritz-Verfahren zur Bestimmung von Knicklasten.



Die potentielle Energie eines wie gezeigt belasteten Stabes ist mit (1) gegeben. Wenn wir einen eingliedrigen Ansatz $w = a\psi(x)$ benutzen, so bekommen wir:

$$U = a^2\left(\frac{1}{2}\int_0^l EI\psi''^2 dx - F\int_0^l \tfrac{1}{2}\psi'^2 dx\right).$$

Die potentielle Energie hat bei $a = 0$ ein Minimum (stabiles Gleichgewicht), wenn

$$\frac{1}{2}\int_0^l EI\psi''^2 dx - F\int_0^l \tfrac{1}{2}\psi'^2 dx > 0.$$

Für die kritische Last bekommen wir daraus

$$F = \frac{\int_0^l EI\psi''^2 dx}{\int_0^l \psi'^2 dx} \qquad (\textit{Rayleigh-Quotient}) \qquad (2)$$

Die exakte Knicklast ist immer kleiner als eine Abschätzung der Form (2)!

<u>Bemerkung:</u> Die Ansatzfunktionen müssen stets die *geometrischen* Randbedingungen erfüllen. Die dynamischen Randbedingungen brauchen nicht berücksichtigt zu werden. Das Ergebnis wird allerdings verbessert, wenn auch die dynamischen Randbedingungen berücksichtigt werden.

<u>Numerisches Beispiel:</u> Im 1. Eulerschen Knickfall ist $F_k = \pi^2 EI / 4l^2 = \mathbf{2,467}\left(EI / l^2\right)$.

Benutzen wir einen eingliedrigen Ansatz $\psi = x^2$, so ergibt sich für die Knicklast:

$$F_k = EI\frac{4l}{\int_0^l 4x^2 dx} = \mathbf{3}\left(EI / l^2\right).$$

Mit einem zweigliedrigen Ansatz $\psi = x^2 + ax^3$:

$$F_k = EI\frac{1}{a}\frac{\frac{1}{18}\left(2 + 6al\right)^3 - \frac{4}{9}}{\frac{9}{5}a^2 l^5 + 3al^4 + \frac{4}{3}l^3}.$$

$$\frac{dF_k}{da} = \frac{180\left(18a^2 l^2 + 22al + 5\right)}{l\left(27a^2 l^2 + 45al + 20\right)^2} = 0$$

$$\frac{a}{l} = -\tfrac{11}{18} + \tfrac{\sqrt{31}}{18}.$$

$F_k = \mathbf{2.485}\left(EI / l^2\right)$ (Genauigkeit 0.7%)

Das Verfahren von Castigliano. Lit: Ostermeyer 25.3

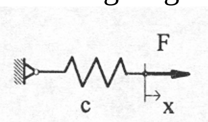
I. Erster Satz von Castigliano.

Verallgemeinerte Kräfte bekommt man als Ableitungen der potentiellen Energie nach verallgemeinerten Koordinaten: $\frac{\partial U}{\partial q_i} = -Q_i$.

Dieser Satz, den wir schon mehrmals benutzt haben, heißt *der erste Satz von Castigliano.*

II. Zweiter Satz von Castigliano.

Betrachten wir eine Feder, an der mit der Kraft F gezogen wird.



F ist hier die *äußere Kraft*

Es gilt: $F = cx$, $x = \frac{F}{c}$, $U = \frac{1}{2}cx^2 \Rightarrow$

$U = \frac{F^2}{2c}$. Daraus folgt: $\boxed{\frac{\partial U}{\partial F} = \frac{F}{c} = x}$.

D.h. *die Koordinate ist Ableitung der potentiellen Energie nach der Kraft.* Diese Behauptung ist der 2. Satz von Castigliano. <u>Eine genauere Formulierung siehe unten!</u>

III. Eine allgemeine Herleitung des 2. Satzes von Castigliano.

$U(q_1, q_2, ..q_s)$ sei die potentielle Energie eines Systems mit s Freiheitsgraden. Das volle Differential der potentiellen Energie ist

$$dU(q_1, q_2, ..q_s) = \sum \frac{\partial U}{\partial q_i} dq_i .$$

$\frac{\partial U}{\partial q_i} = -Q_i$ sind generalisierte Kräfte. Um das System in diesem Zustand im Gleichgewicht zu halten, müssen *äußere* generalisierte Kräfte $\frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i^{ext}$ angebracht werden. Somit:

$dU = \sum Q_i^{ext} dq_i$. Die Summe $\sum Q_i^{ext} dq_i$ kann transformiert werden:

$$dU = \sum Q_i^{ext} dq_i = d\left(\sum Q_i^{ext} q_i\right) - \sum q_i dQ_i^{ext} .$$

Daraus folgt: $d\left(\sum Q_i^{ext} q_i - U\right) = \sum q_i dQ_i^{ext}$.

Der Ausdruck $\tilde{U} = \sum Q_i^{ext} q_i - U$ heißt ***komplementäre Energie***.

Mit dieser Größe gilt $d\tilde{U} = \sum q_i dQ_i^{ext}$.

Daraus folgt $q_i = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial Q_i^{ext}}$:

Der 2. Satz von Castigliano: $q_i = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial Q_i^{ext}}$

Generalisierte Verschiebungen bekommt man als partielle Ableitungen der komplementären Energie nach generalisierten *äußeren* Kräften.

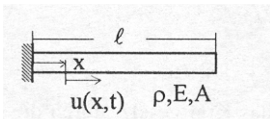
<u>Wichtige Bemerkung</u>: Im Fall von *linear* elastischen Systemen sind die *komplementäre Energie und die potentielle Energie gleich.*

<u>Beispiel:</u> Für eine Feder ist

$$\tilde{U} = xF - U = cx^2 - \frac{cx^2}{2} = \frac{cx^2}{2} = \frac{F^2}{2c} = U .$$

Der 2. Satz von Castigliano *<u>für linear elastische Systeme</u>*: *Die generalisierten Verschiebungen sind gleich den partiellen Ableitungen der potentiellen Energie, ausgedrückt als Funktion von generalisierten Kräften, nach generalisierten Kräften.*

Beispiel 1. Ein Dehnstab der Länge l mit der Dehnsteifigkeit EA hat die potentielle Energie



$$U = \frac{1}{2}\int_0^l AEu'^2 \, dx .$$

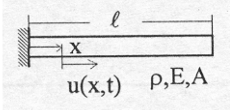
Mit $N(x) = EAu'(x)$ erhält man die potentielle Energie

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{N(x)^2}{EA} dx .$$

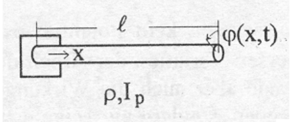
$N(x)$ ist der Normalkraftverlauf im Stab. Greift am Ende des Stabes eine Kraft F an, so ist $N(x) = F$. $\Rightarrow$ $U = \frac{F^2 l}{2EA}$.

Die Verschiebung des Angriffspunktes von F in Richtung F: $x = \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{Fl}{EA}$.

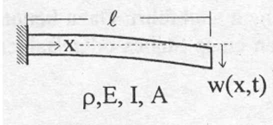
IV. Komplementäre Energien für verschiedene Systeme



$$U = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{N(x)^2}{EA} dx$$



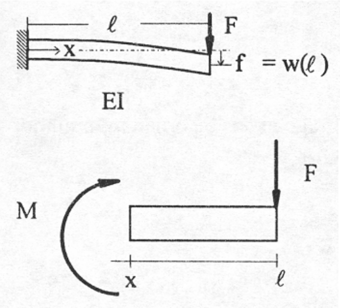
$$U = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M_t(x)^2}{GI_p} dx$$



$$U = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M(x)^2}{EI} dx$$

Hier haben wir die Formeln für die Energie eines Torsionsstabes $\left(U=\int_0^l \frac{GI_p}{2}\theta'^2 dx\right)$ und eines Biegebalkens $\left(U=\frac{1}{2}\int_0^l EIw''^2(x)dx\right)$ benutzt sowie die Beziehungen $M_t = GI_p\theta'$ für einen Torsionsstab und $M=-EIw''$ für einen Biegebalken.

Beispiel 2. Man berechne die Absenkung des skizzierten Kragbalkens unter der Kraft *F*.



<u>Lösung</u>: Freischneiden des Balkens bei *x* liefert den Momentenverlauf

$M(x)=-F(l-x)$

Die potentielle Energie ist

$$U=\frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2}{EI}dx=\frac{1}{2}\int_0^l \frac{F^2(l-x)^2}{EI}dx=\frac{1}{2}\frac{F^2l^3}{3EI}$$

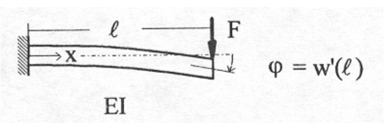
$$\Rightarrow \boxed{w(l)=\frac{\partial U}{\partial F}=\frac{Fl^3}{3EI}}.$$

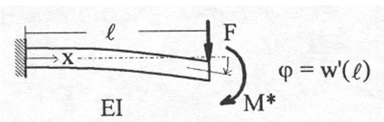
<u>Anmerkung:</u> Der große Vorteil des Satzes von Castigliano ist die Berechnung der Verformung, ohne die Biegedifferentialgleichung lösen zu müssen!

V. Berechnung von Verschiebungen an Stellen, wo keine Kräfte angreifen

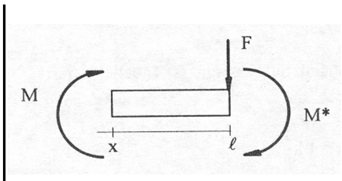
Interessiert man sich für Verformungen an Stellen eines elastischen Systems, an denen keine Kräfte oder Momente angreifen, so bringt man eine Kraft oder ein Moment an dieser Stelle an, berechnet die gewünschte Verformung und bringt in dieser dann den Einfluss der zusätzlichen Kraftgröße wieder zum Verschwinden, indem die Kraft oder das Moment gleich Null gesetzt wird.

<u>**Beispiel 3.**</u> Man berechne den Endwinkel des skizzierten Kragbalkens unter der Kraft *F*.





Lösung: Einem Winkel ist als verallgemeinerte Kraft ein Kraftmoment zugeordnet. Also bringen wir am Ende



ein Moment M^* ein.

Freischneiden bei *x* liefert den Momentverlauf

$M(x)=-F(l-x)-M^*$ Die Ableitung der Formänderungsenergie nach M^* liefert

$$\varphi(l)=\frac{\partial U}{\partial M^*}=\frac{\partial}{\partial M^*}\left(\frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2}{EI}dx\right)=\int_0^l \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial M^*}dx=$$

$$\int_0^l \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial M^*}dx=\int_0^l \frac{(-F(l-x)-M^*)}{EI}(-1)dx=$$

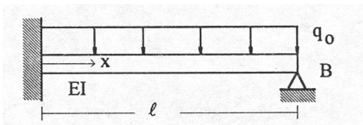
$$\left.\frac{-F(l-x)^2-M^*x}{2EI}\right|_{x=0}^{x=l}=\frac{Fl^2-M^*l}{2EI}$$

Bei $M^*=0 \Rightarrow \boxed{\varphi(l)=\frac{Fl^2}{2EI}}$.

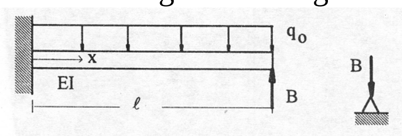
VI. Berechnung von Lagerkräften mit dem Satz von Castigliano.

Ist die Verformung vorgegeben, kann man mit dem Satz von Castigliano die dazugehörigen Kräfte berechnen.

Beispiel 4. Gegeben sei ein links eingespannter Balken mit einer konstanten Streckenlast q_0. Gesucht ist die Lagerkraft bei B.



<u>*Lösung:*</u> Freischneiden des Systems am Lager B macht die gesuchte Lagerkraft sichtbar.



Das System ist statisch unbestimmt: Kräftegleichgewicht am Gesamtsystem reicht nicht aus zur Bestimmung von Lagerreaktionen. Man kann die Aufgabe durch Lösung der Biegedifferentialgleichung lösen. Oder man benutzt die Castigliano-Methode: Man berechnet die resultierende Verschiebung unter der Wirkung der Kraft *B*. Und diese Verschiebung muss verschwinden: $\partial U/\partial B=0$.

$$M(x)=B(l-x)-\frac{1}{2}q_0(l-x)^2 .$$

$$\frac{\partial U}{\partial B}=\int_0^l \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial B}dx=\frac{1}{EI}\int_0^l\left[B(l-x)^2-\frac{1}{2}q_0(l-x)^3\right]dx=$$

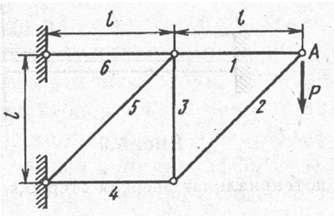
$$\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{3}Bl^3-\frac{1}{8}q_0l^4\right]=0$$

Daraus folgt $B=\frac{3}{8}q_0 l$.

Energiemethoden der Mechanik / Prof. Popov / Vorlesung 11. **Das Verfahren von Castigliano II. Die Sätze von Betti und Maxwell.** ***Literatur: 1. W.H. Müller, Technische Mechanik, 21.4 (Sätze von M&B) oder 2. Schnell, Gross, Hauger, Technische Mechanik 2, Kapitel 6.3, 6.4***

I. Drei Beispiele zum Verfahren von Castigliano.

Beispiel 1. Elastische Formänderung von Fachwerken. *Zu bestimmen ist die vertikale Verschiebung des Punktes A.*



Lösung: Zunächst werden die Stabkräfte N_i in allen Stäben bestimmt und die jeweilige potentielle Energie $U_i = \dfrac{N_i^2 l_i}{2EA}$ berechnet.

No.	N_i	l_i	U_i
1	P	l	$P^2 l/2EA$
2	$-P\sqrt{2}$	$l\sqrt{2}$	$2P^2 l\sqrt{2}/2EA$
3	P	l	$P^2 l/2EA$
4	$-P$	l	$P^2 l/2EA$
5	$-P\sqrt{2}$	$l\sqrt{2}$	$2P^2 l\sqrt{2}/2EA$
6	$2P$	l	$4P^2 l/2EA$

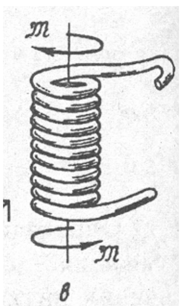
Die gesamte potentielle Energie ist

$$U = \frac{P^2 l}{2EA}\left(7 + 4\sqrt{2}\right).$$

Die gesuchte Verschiebung des Punktes A ist

$$\delta_A = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{Pl}{EA}\left(7 + 4\sqrt{2}\right).$$

Beispiel 2. Berechnung der Federkonstante einer "Torsionsfeder".



Die Parameter der Feder seien die folgenden: Durchmesser des Drahtes *d*, Radius der Feder *R*, Anzahl der Windungen *N*, Elastischer Modul *E*. *Zu bestimmen ist die Torsionssteifigkeit* γ.

(Definition der Torsionssteifigkeit: $M = \gamma\varphi$, wobei φ der Torsionswinkel ist).

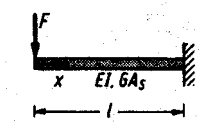
Lösung: In jedem Querschnitt der Feder wirkt das Kraftmoment *M*. Die potentielle Energie der Feder ist.

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2}{EI}dx = \frac{M^2}{2EI}l = \frac{M^2}{2EI}2\pi RN$$

Der Drehwinkel ist $\varphi = \dfrac{\partial U}{\partial M} = \dfrac{M}{EI}2\pi RN$.

Das geometrische Trägheitsmoment eines Kreises ist $I = \dfrac{\pi d^4}{64}$. Für den Drehewinkel erhalten wir $\varphi = \dfrac{128M}{Ed^4}RN$. Die Federsteifigkeit ist $\boxed{\gamma = \dfrac{Ed^4}{128RN}}$.

Beispiel 3. Ein Kragbalken wird durch eine Einzelkraft belastet. Wie groß ist die Absenkung w im Angriffspunkt *bei Berücksichtigung der Schubdeformation*?



Lösung: Potentielle Energie der Biegung und der Scherung können summiert werden:

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M(x)^2}{EI}dx + \frac{1}{2}\int_0^l \frac{Q(x)^2}{GA}dx.$$

Für Q und M gilt $Q(x) = -F$, $M(x) = -Fx$.

Die potentielle Energie:

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{F^2x^2}{EI}dx + \frac{1}{2}\int_0^l \frac{F^2}{GA}dx = \frac{F^2}{2}\left[\frac{l^3}{3EI} + \frac{l}{GA}\right]$$

Die Absenkung ist gleich

$$\boxed{w = \frac{\partial U}{\partial F} = F\left[\frac{l^3}{3EI} + \frac{l}{GA}\right]}.$$

Schub vernachlässigbar, wenn $l^2 \gg 3EI/GA$.

Für ein dünnwandiges Rohr ist $I = r^2 A/2$.

Das Rohr kann als ein "schlanker Balken" angesehen werden, wenn

$l^2 \gg 3Er^2/2G = 3(1+\nu)r^2 \approx 4r^2 = d^2$.

II. Einflußzahlen.

Betrachtet wird ein *linear elastisches* System. In N Angriffspunkten wirken Kräfte Q_i. Verschiebungen der Angriffspunkte in der Richtung der jeweiligen Kraft seien q_i. Aus der Linearität folgt:

$$q_i = \sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij} Q_j. \qquad (1)$$

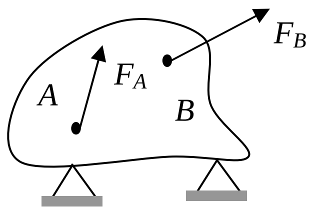
Die Koeffizienten α_{ij} werden *Maxwellsche Einflußzahlen* genannt.

Aus (1) folgt: $\alpha_{ij} = \partial q_i / \partial Q_j$. Nach dem Satz von Castigliano gilt aber $q_i = \partial U / \partial Q_j$. Für die Einflußzahlen ergibt sich deshalb: $\alpha_{ij} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial Q_i \partial Q_j}$. Daraus folgt der

Vertauschungssatz von Maxwell: $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$.

II. Der Satz von Betti (auch *Reziprozitätssatz von Betti*). *Wenn ein linearelastischer Körper zwei verschiedenen Lastsystemen ausgesetzt ist, so ist die Arbeit der Kräfte des ersten Systems an den Verschiebungen des zweiten Systems gleich der Arbeit der Kräfte des zweiten Systems an den Verschiebungen des ersten Systems.*

Beweis:



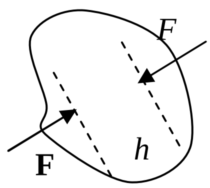
Zu beweisen ist also, dass $F_A \delta u_{AB} = F_B \delta u_{BA}$, wobei δu_{AB} die Verschiebung des Punktes A (in der Richtung der Kraft F_A) unter der Wirkung der Kraft F_B ist und δu_{BA} umgekehrt. Aus dem Satz von Maxwell folgt

$$F_A \delta u_{AB} = F_A \alpha_{AB} F_B,$$

$$F_B \delta u_{BA} = F_B \alpha_{BA} F_A = F_A \alpha_{AB} F_B.$$

Beispiel 4. Zu bestimmen ist die Änderung des Volumens eines elastischen Körpers beliebiger Form unter der Einwirkung eines Kräftepaars. Der Abstand zwischen den Angriffspunkten der Kräfte sei h.

Lösung: Betrachten wir außer des Kräftepaars auch einen hydrostatischen Druck p.

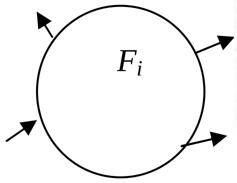


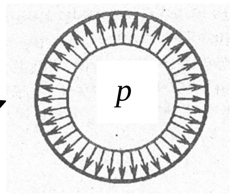
Δh_p sei die Änderung des Abstandes zwischen beiden Angriffspunkten unter der Einwirkung des Druckes; ΔV_F sei die Änderung des Volumens unter der Einwirkung des Kräftepaars. Nach dem Satz von Betti: $F \Delta h_p = p \Delta V_F$. Unter der Wirkung des hydrostatischen Druckes

$$\varepsilon = \frac{\Delta h_p}{h} = \frac{\sigma}{E} - \nu\frac{\sigma}{E} - \nu\frac{\sigma}{E} = \frac{p}{E}(1-2\nu) \Rightarrow$$

$\Delta h_p = \dfrac{p}{E}(1-2\nu)h$. Aus dem Satz von Betti folgt dann $\Delta V_F = \dfrac{Fh(1-2\nu)}{E}$.

Beispiel 5. Eine sphärische, nicht dehnbare Schale ist belastet durch ein beliebiges Kräftesystem. *Zu zeigen ist, daß sich das eingeschlossene Volumen bei der Biegung nicht ändert.*

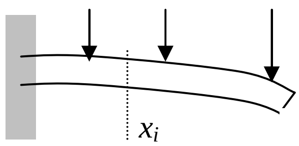




Lösung: $p \cdot \delta V_F = \sum F_i \delta_{ip} = 0$.

Beispiel 6. Gegeben: Ein gerader Balken steht unter der Wirkung von n Einzellasten. Gefragt wird nach der Verschiebung $w(x_i)$ in einem beliebigen Punkt x_i.

Lösung: Definitionsgemäß gilt



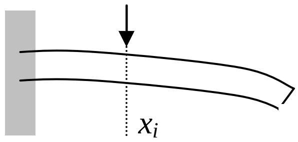
$$w(x_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} F_j.$$

Nach dem Satz von Maxwell gilt

$$w(x_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} F_j.$$

α_{ji} ist die Verschiebung $w(x_j)\big|_{F_i=1}$ unter der Wirkung einer Einheitslast im Punkt i. Somit ist $w(x_i) = \sum_{j=1}^{n} w(x_j)\big|_{F_i=1} F_j$.

Damit ist die Aufgabe zwar nicht gelöst, wird aber viel leichter lösbar, als die ursprüngliche. Statt der Verschiebung unter der Wirkung von mehreren Kräften berechnen wir nun mehrere Verschiebungen unter der Wirkung einer einzigen Kraft (im Punkt x_i).



$$x \in (0, x_i): \quad w(x) = -\frac{F x_i}{2EI} x^2 + \frac{F}{6EI} x^3$$

$$x \in (x_i, l): \quad w(x) = -\frac{F x_i^3}{3EI} - \frac{F x_i^2}{2EI}(x - x_i).$$

Z.B., wenn alle Kräfte links vom Punkt angreifen, in dem die Absenkung gesucht wird, so findet man:

$$w(x_j)\big|_{F_i=1} = -\frac{x_i^3}{3EI} - \frac{x_i^2}{2EI}(x - x_i) = \frac{x_i^3}{6EI} - \frac{x_i^2}{2EI} x$$

$$w(x_i) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{x_i^3}{6EI} - \frac{x_i^2}{2EI} x_j \right) F_j.$$

Das Prinzip der kleinsten Wirkung. Variationsrechnung

I. Beweis der Gültigkeit der Lagrangeschen Gleichungen

1). Äquivalenz der Newtonschen Gleichungen und der Lagrangeschen Gleichungen *in kartesichen Koordinaten* ist elementar zu beweisen, denn $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x}$ und $\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x} = F_x$.

2). Die Lagrangesche Gleichungen sind äquivalent zum *Prinzip der kleinsten Wirkung.*

3). Aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung folgen die Lagrangesche Gleichungen *in beliebigen generalisierten Koordinaten.*

Das Prinzip der kleinsten Wirkung

$L(q_1, q_2, ..., q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_s, t)$

oder in abgekürzter Schreibweise $L(q, \dot{q})$ sei die Lagrange-Funktion eines mechanischen Systems.

Zu den Zeitpunkten $t=t_1$ und $t=t_2$ nehme das System bestimmte Lagen ein, die durch zwei Koordinatenkonfigurationen $q^{(1)}$ und $q^{(2)}$ charakterisiert sind. Die Bewegung des Systems zwischen diesen beiden Lagen verläuft dann auf eine solche Weise, daß das Integral

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)dt \qquad (1)$$

den kleinstmöglichsten Wert annimmt.

Das Integral S heißt **Wirkung.**

Variationsaufgabe: Bei welcher Bewegung hat das Integral (1) ein Minimum?

Lösung: Angenommen $q = q(t)$ sei eben die gesuchte Funktion. $\Rightarrow$ S wächst, wenn $q(t)$ durch eine beliebige Funktion der Form $q(t) + \delta q(t)$ ersetzt wird. $\delta q(t)$ heißt **Variation** der Funktion $q(t)$.

Die Änderung (Variation) von S ist gleich:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t)dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)dt$$

In einem Minimum muss *die erste Variation* verschwinden:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta \dot{q} \right) dt = 0$$

$\delta \dot{q} = \frac{d}{dt}\delta q$, $\Rightarrow$ partielle Integration:

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt = 0 .$$

Nach dem Prinzip der kleinsten Wirkung ist

$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0 . \Rightarrow$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0}$$

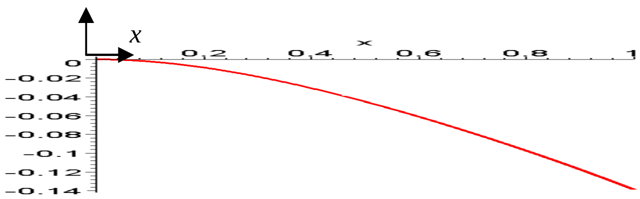
Bei mehreren Freiheitsgraden:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

II. Variationsproblem für ein kontinuierliches Medium am Beispiel eines statisches Gleichgewichtes ("das Prinzip der kleinsten potentiellen Energie").

Ein System ist im stabilen statischen Gleichgewicht, wenn seine potentielle Energie U ein Minimum annimmt.

Beispiel 1. Zu bestimmen ist die Durchbiegung eines links fest eingespannten schweren Balkens (Parameter ρ, A, E, I, l, g).



Lösung: Die potentielle Energie eines Balkens im Schwerefeld ist

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l EI\left(w''(x)\right)^2 dx + g\int_0^l \rho A w(x)dx .$$

Die Bedingung für ein Minimum besteht im Verschwinden der ersten Variation der potentiellen Energie:

$$\delta U = \int_0^l EIw''(x)\cdot \delta w''(x)dx + g\int_0^l \rho A \cdot \delta w(x)dx$$

Im ersten Term führen wir zweimal eine partielle Integration aus:

$$\int_0^l EIw''(x)\cdot \delta w''(x)dx = EIw''(x)\cdot \delta w'(x)\Big|_0^l -$$

$$\int_0^l EIw'''(x)\cdot \delta w'(x)dx = EIw''(x)\cdot \delta w'(x)\Big|_0^l -$$

$$-EIw'''(x)\cdot \delta w(x)\Big|_0^l + \int_0^l EIw^{IV}(x)\cdot \delta w(x)dx$$

Somit

$$\delta U = g\int_0^l \rho A\cdot\delta w(x)dx + EIw''(x)\cdot\delta w'(x)\Big|_0^l -$$

$$-EIw'''(x)\cdot\delta w(x)\Big|_0^l + \int_0^l EIw^{IV}(x)\cdot\delta w(x)dx\,.$$

Daraus folgt

$g\rho A + EIw^{IV} = 0$ und

$w(0)=0$, $w'(0)=0$, $w''(l)=0$, $w'''(l)=0$.

Aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung folgt nicht nur die Biegedifferentialgleichung sondern auch die <u>dynamischen Randbedingungen.</u>

Integration ergibt (s. Bild oben).

$$w(x) = \frac{g\rho A l^4}{EI}\left[-\frac{1}{18}\left(\frac{x}{l}\right)^4 + \frac{1}{6}\left(\frac{x}{l}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{x}{l}\right)^2\right]$$

III. Anwendung des Prinzips der kleinsten Wirkung zur Herleitung von Bewegungsgleichungen für einen elastischen Stab.

Beispiel 2. Der Stab sei am linken Ende fest eingespannt. Die Bewegungsgleichungen bekommt man aus der Forderung, daß die erste Variation des Wirkungsintegrals gleich Null ist:

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1}\delta L dt = \int_{t_0}^{t_1}\left\{\int_0^l\left(\begin{matrix}\rho A\dot u\delta\dot u - \\ -AE\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\delta u}{\partial x}\right)\end{matrix}\right)dx\right\}dt$$

Im ersten Term führen wir eine partielle Integration nach der Zeit und im zweiten eine partielle Integration nach der Koordinate aus:

$$\delta S_1 = \int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \rho A\dot u\delta\dot u\cdot dxdt = \int_0^l \rho A\dot u\delta u\cdot dx\Big|_{t_0}^{t_1} -$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \rho A\ddot u\delta u\cdot dxdt$$

$$\delta S_2 = \int_{t_0}^{t_1}\left\{\int_0^l\left(-AE\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\delta u}{\partial x}\right)\right)dx\right\}dt =$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}AE\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\delta u\Big|_0^l dt + \int_{t_0}^{t_1}\left\{\int_0^l AE\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\delta u dx\right\}dt$$

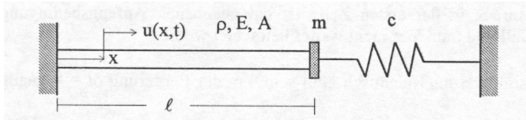
Daraus folgt:

$$-\rho A\ddot u + AE\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = 0 \quad \text{sowie}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = 0\ .$$

Das Prinzip der kleinsten Wirkung liefert neben der *Bewegungsgleichung* auch die *Randbedingungen.*

Beispiel 3.
Gegeben sei der skizzierte Stab. An seinem freien Ende ist eine Masse und eine Feder angeheftet. Bei nicht gedehntem Stab sei die Feder entspannt. Man berechne die Bewegungsgleichungen und die Randbedingungen.



<u>*Lösung:*</u> Die Lagrangefunktion ist:

$$L = \frac{1}{2}m\dot u^2(l,t) - \frac{1}{2}cu^2(l,t) + \frac{1}{2}\int_0^l \rho A\dot u^2 dx - \frac{1}{2}\int_0^l AEu'^2\,dx$$

Die Variation des Wirkungsintegrals:

$$\delta S = m\dot u(l,t)\delta u(l,t)\Big|_{t_0}^{t_1} + \int_0^l \rho A\dot u\delta u dx\Big|_{t_0}^{t_1} +$$

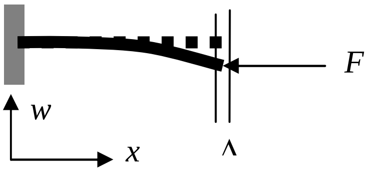
$$+\int_{t_0}^{t_1}\left\{\begin{matrix}-(m\ddot u + cu)\delta u\big|_{x=l} - \int_0^l \rho A\ddot u\delta u dx + \\ \int_0^l EAu''\delta u dx - (EAu'\delta u)\big|_{x=0}^{x=l}\end{matrix}\right\}dt$$

Daraus ergibt sich: $EAu'' - \rho A\ddot u = 0$

u(0)=0 (feste Einspannung, $\delta u = 0$)

$EAu'(l,t) + m\ddot u(l,t) + cu(l,t) = 0$.

IV. Herleitung der Eulerschen "Knick-Gleichung".



Potentielle Energie:

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l EIw''^2 dx - F\int_0^l \tfrac{1}{2}w'^2 dx$$

Im Gleichgewicht hat die potentielle Energie ein Minimum. Die erste Variation muß verschwinden:

$$\delta U = \int_0^l EIw''\cdot\delta w'' dx - F\int_0^l w'\delta w' dx$$

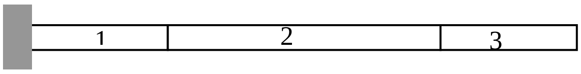
Zweifache partielle Integration im ersten Glied und eine einmalige partielle Integration im zweiten Glied führen zum Ausdruck

$$\delta U = \int_0^l EIw^{IV}\cdot\delta w dx + F\int_0^l w''\delta w dx + \text{Randvariationen.}$$

Dies ist identisch gleich Null, wenn $EIw^{IV} + Fw'' = 0$, was nichts anderes ist als die Eulersche Knick-Gleichung. Die Randvariationen ergeben die Randbedingungen.

Methode der Finiten Elementen (statische Aufgaben)

I. Finite Elemente auf dem Beispiel eines Balkens.

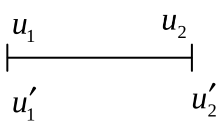


Wir teilen den Balken in mehrere Bereiche und approximieren die Form des Balkens in jedem Bereich mit Hilfe von Ansatzfunktionen. Wählen wir die Ansatzfunktionen in Form von Polynomen. Da jedes Element an jedem Ende jeweils zwei Rand- bzw. Übergangsbedingungen erfüllen muss, muss der Ansatz mindestens 4 Koeffizienten enthalten. Wir müssen deshalb mindestens ein Polynom dritter Ordnung nehmen:

$$u(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_3 x^3 .$$

Die Koeffizienten $a_1,..., a_4$ könnte man als generalisierte Koordinaten benutzen. Da Elemente in benachbarten Bereichen kontinuierlich in einander übergehen müssen, ist es aber am einfachsten als generalisierte Koordinaten unmittelbar die *Verschiebungen und die Neigungen in Knotenpunkten* zu wählen. Weiterhin führen wir eine neue, dimensionslose Variable ξ ein: $x = l\xi$. Mit dieser Variablen sieht der Ansatz wie folgt aus:

$$u(\xi) = c_1 + c_2\xi + c_3\xi^2 + c_4\xi^3 .$$



Als nächstes versuchen wir, die Koeffizienten des Ansatzes durch "Knotenvariablen" u_1, u_2, u_1' und u_2' auszudrücken.

$$\begin{cases} u_1 = c_1 \\ u_1' = \qquad c_2 \\ u_2 = c_1 + c_2 + c_3 + c_4 \\ u_2' = \qquad c_2 + 2c_3 + 3c_4 \end{cases}$$

Daraus folgt:

$$\begin{cases} c_1 = u_1 \\ c_2 = u_1' \\ c_3 = -3u_1 - 2u_1' + 3u_2 - u_2' \\ c_4 = 2u_1 + u_1' - 2u_2 + u_2' \end{cases}$$

$$u(\xi) = u_1 + u_1'\xi + \left(-3u_1 - 2u_1' + 3u_2 - u_2'\right)\xi^2 +$$
$$+\left(2u_1 + u_1' - 2u_2 + u_2'\right)\xi^3 =$$

$$= u_1 \underbrace{(1 - 3\xi^2 + 2\xi^3)}_{N_1} + u_1' \underbrace{(\xi - 2\xi^2 + \xi^3)}_{N_2} +$$
$$+ u_2 \underbrace{(3\xi^2 - 2\xi^3)}_{N_3} + u_2' \underbrace{(-\xi^2 + \xi^3)}_{N_4} .$$

Die vier eingeführten Funktionen kann man auch in der folgenden Form schreiben:

$$N_1 = (1 + 2L_1)L_2^2 , \qquad N_2 = L_1 L_2^2$$
$$N_3 = L_1^2(1 + 2L_2) , \qquad N_4 = -L_1^2 L_2 .$$

wobei $L_1 = \xi$, $L_2 = 1 - \xi$.

Bei den Integrationen ist es im Weiteren bequem die folgende Formel zu benutzen:

$$I_{pq} = \int_0^1 L_1^p L_2^q d\xi = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$$

Zur Berechnung der potentiellen Energie brauchen wir das Integral $\int_0^1 u''^2 d\xi$.

$$u''(\xi) = u_1(-6 + 12\xi) + u_1'(-4 + 6\xi) +$$
$$+ u_2(6 - 12\xi) + u_2'(-2 + 6\xi)$$

$$u''^2(\xi) = u_1^2(-6 + 12\xi)^2 + u_1'^2(-4 + 6\xi)^2 +$$
$$+ u_2^2(6 - 12\xi)^2 + u_2'^2(-2 + 6\xi)^2 +$$
$$+ 2u_1u_1'(-6 + 12\xi)(-4 + 6\xi)$$
$$+ 2u_1u_2(-6 + 12\xi)(6 - 12\xi)$$
$$+ 2u_1u_2'(-6 + 12\xi)(-2 + 6\xi)$$
$$+ 2u_1'u_2(-4 + 6\xi)(6 - 12\xi)$$
$$+ 2u_1'u_2'(-4 + 6\xi)(-2 + 6\xi)$$
$$+ 2u_2u_2'(6 - 12\xi)(-2 + 6\xi)$$

$$\int_0^1 u''^2 d\xi = u_1^2 \cdot 12 + u_1'^2 \cdot 4 + u_2^2 \cdot 12 + u_2'^2 \cdot 4 +$$
$$+ 2u_1u_1' \cdot 6$$
$$+ 2u_1u_2 \cdot (-12)$$
$$+ 2u_1u_2' \cdot 6$$
$$+ 2u_1'u_2 \cdot (-6)$$
$$+ 2u_1'u_2' \cdot 2$$
$$+ 2u_2u_2' \cdot (-6)$$

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

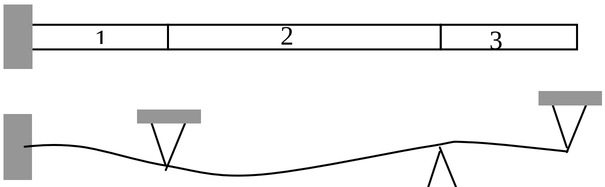
Die Matrix $\hat{S}$ nennt man die *Steifigkeitselementmatrix.*

Aber Vorsicht - in ursprünglichen Koordinaten:

$$\hat{S} = \frac{1}{l^3} \begin{pmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{pmatrix}$$

$U = \frac{1}{2} EI \vec{u}^T \hat{S} \vec{u} = \frac{1}{2} EI \sum_{i,j} u_i S_{ij} u_j$.

Beispiel.



Gegeben: $u_1 = 0$, $u_2 = -0.05$, $u_3 = +0.05$, $u_1' = 0$, $u_4 = 0$.

Die Steifigkeitselementmatrix für *ein* Balkenelement mit Länge l haben wir eben berechnet. Die Länge des ersten Elements sei 1, des zweiten 2 und des dritten 1, $EI = 1$. Dann ist

$$\hat{S}_1 = \hat{S}_3 = \begin{pmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_2 = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 12 & 12 & -12 & 12 \\ 12 & 16 & -12 & 8 \\ -12 & -12 & 12 & -12 \\ 12 & 8 & -12 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 & 1.5 & -1.5 & 1.5 \\ 1.5 & 2 & -1.5 & 1 \\ -1.5 & -1.5 & 1.5 & -1.5 \\ 1.5 & 1 & -1.5 & 2 \end{pmatrix}$$

Potentielle Energie des Elementes 1 ist

$$U_{Element} = \frac{1}{2} \vec{u}^T \hat{S} \vec{u} = \frac{1}{2} \Big[u_1^2 \cdot 12 + u_1'^2 \cdot 4 + u_2^2 \cdot 12 + u_2'^2 \cdot 4 + $$
$$+ 2u_1 u_1' \cdot 6 + 2u_1 u_2 \cdot (-12) + 2u_1 u_2' \cdot 6 + 2u_1' u_2 \cdot (-6)$$
$$+ 2u_1' u_2' \cdot 2 + 2u_2 u_2' \cdot (-6) \Big]$$

Die gesamte Steifigkeitsmatrix ist

$$\begin{pmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & \boxed{12} & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1.5 & 1.5 & -1.5 & 1.5 \\ 1.5 & 2 & -1.5 & 1 \\ -1.5 & -1.5 & 1.5 & -1.5 \\ 1.5 & 1 & -1.5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(\cancel{u_1} \quad \cancel{u'_1} \quad u_2 \quad \underline{u_2'} \quad u_3 \quad \underline{u_3'} \quad \cancel{u_4} \quad \underline{u_4'})$$

$$\begin{pmatrix} u_2 & \underline{u_2'} & u_3 & \underline{u_3'} & \underline{u_4'} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 13.5 & -4.5 & -1.5 & 1.5 & 0 \\ -4.5 & 6 & -1.5 & 1 & 0 \\ -1.5 & -1.5 & 13.5 & 4.5 & 6 \\ 1.5 & 1 & 4.5 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Die Gleichgewichtsbedingungen lauten $dU / dq_i = 0$. Die freien Variablen sind nur u_2', u_3', u_4'. Nur nach diese Variablen wird abgeleitet.

$$\begin{cases} -4.5u_2 & +6\underline{u_2'} & -1.5u_3 & +1 \cdot \underline{u_3'} & +0 \cdot \underline{u_4'} = 0 \\ 1.5u_2 & +1 \cdot \underline{u_2'} & +4.5u_3 & +6\underline{u_3'} & +2\underline{u_4'} = 0 \\ 0 \cdot u_2 & +0 \cdot \underline{u_2'} & +6u_3 & +2\underline{u_3'} & +4\underline{u_4'} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} +6\underline{u_2'} & +1 \cdot \underline{u_3'} & +0 \cdot \underline{u_4'} = 4.5u_2 + 1.5u_3 \\ +1 \cdot \underline{u_2'} & +6\underline{u_3'} & +2\underline{u_4'} = -1.5u_2 - 4.5u_3 \\ +0 \cdot \underline{u_2'} & +2\underline{u_3'} & +4\underline{u_4'} = -6u_3 \end{cases}$$

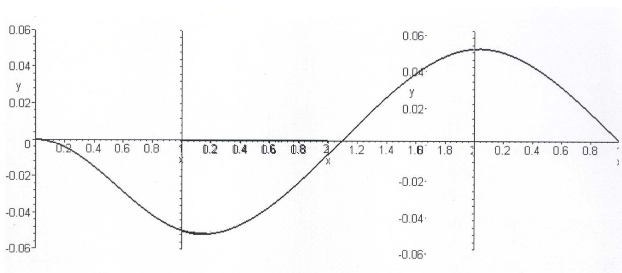
$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{116} \begin{pmatrix} 20 & -4 & 2 \\ -4 & 24 & -12 \\ 2 & -12 & 35 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung:

$$\begin{pmatrix} u_2' \\ u_3' \\ u_4' \end{pmatrix} = \frac{1}{116} \begin{pmatrix} 20 & -4 & 2 \\ -4 & 24 & -12 \\ 2 & -12 & 35 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4.5u_2 + 1.5u_3 \\ -1.5u_2 - 4.5u_3 \\ -6u_3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0.827u_2 + 0.310u_3 \\ -0.465u_2 - 0.362u_3 \\ 0.232u_2 - 1.31u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0259 \\ 0.00517 \\ -0.0776 \end{pmatrix}$$

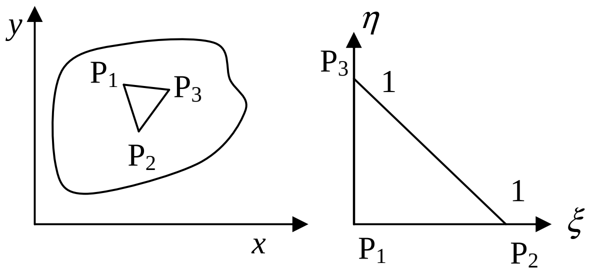
Somit sind alle 8 Knotenvariablen bekannt und die Form jedes Elementes lässt sich mit dem Ansatz 3. Ordnung direkt berechnen. Hier ist die Form:



I. 2D-FE am Beispiel einer Membran

Potentielle Energie einer Membran hat die Form

$$U = \frac{S}{2}\int\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)dxdy$$, wobei S die Spannkraft pro Längeneinheit ist.



$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)\xi + (x_3 - x_1)\eta \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)\xi + (y_3 - y_1)\eta \end{cases}$$

$$dxdy = Jd\xi d\eta$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (x_2 - x_1) & (y_2 - y_1) \\ (x_3 - x_1) & (y_3 - y_1) \end{vmatrix}$$ -

Jakobi-Determinante.

Konvention: $\frac{\partial u}{\partial x} \equiv u_x$, $\frac{\partial u}{\partial y} \equiv u_y$,....

$$\begin{cases} u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x \\ u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = (x_2 - x_1)\xi_x + (x_3 - x_1)\eta_x \\ 0 = (y_2 - y_1)\xi_x + (y_3 - y_1)\eta_x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = (x_2 - x_1)\xi_y + (x_3 - x_1)\eta_y \\ 1 = (y_2 - y_1)\xi_y + (y_3 - y_1)\eta_y \end{cases}$$

$$\xi_x = \frac{y_3 - y_1}{J}, \quad \eta_x = -\frac{y_2 - y_1}{J},$$

$$\xi_y = -\frac{x_3 - x_1}{J}, \quad \eta_y = \frac{x_2 - x_1}{J}.$$

$$\int\left(u_x^2 + u_y^2\right)dxdy = a\int u_\xi^2 d\xi d\eta +$$

$$2b\int u_\xi u_\eta d\xi d\eta + c\int u_\eta^2 d\xi d\eta$$

$$\begin{cases} a = \left[(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2\right]/J \\ b = -\left[(x_3 - x_1)(x_2 - x_1) + (y_3 - y_1)(y_2 - y_1)\right]/J \\ c = \left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2\right]/J \end{cases}$$

Linearer Ansatz:

$$u = \alpha_1 + \alpha_2\xi + \alpha_3\eta$$

$$u = u_1 + (u_2 - u_1)\xi + (u_3 - u_1)\eta =$$

$$u_1 \underbrace{(1 - \xi - \eta)}_{N_1} + u_2 \underbrace{\xi}_{N_2} + u_3 \underbrace{\eta}_{N_3}$$

$$\begin{cases} u_1 = \alpha_1 \\ u_2 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ u_3 = \alpha_1 + \alpha_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_1 = u_1 \\ \alpha_2 = u_2 - u_1 \\ \alpha_3 = u_3 - u_1 \end{cases}$$

$$u_\xi = u_2 - u_1, \qquad u_\eta = u_3 - u_1$$

$$I_1 = \int u_\xi^2 d\xi d\eta = (u_2 - u_1)^2/2 = \left(u_1^2 - 2u_1u_2 + u_2^2\right)/2$$

$$S_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I_2 = 2\int u_\xi u_\eta d\xi d\eta = 2\frac{1}{2}(u_2 - u_1)(u_3 - u_1) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2u_1^2 - 2u_1u_3 - 2u_1u_2 + 2u_2u_3\right)$$

$$S_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I_3 = \int u_\eta^2 d\xi d\eta = \frac{1}{2}(u_3 - u_1)^2 = \frac{1}{2}\left(u_3^2 - 2u_3u_1 + u_1^2\right)$$

$$S_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\int\left(u_x^2 + u_y^2\right)dxdy = \vec{u}^T S \vec{u} \quad \text{mit}$$

$$S = aS_1 + bS_2 + cS_3$$

II. Kubischer Ansatz im Dreieck

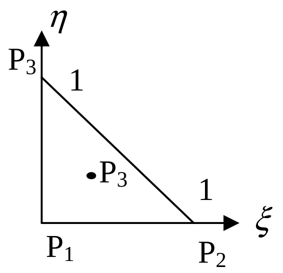
Potentielle Energie einer Platte ist

$$U_{Platte} = \frac{Eh^3}{24(1+\nu^2)} \iint \left[\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \right)^2 + \right.$$

$$\left. + 2(1-\nu) \left\{ \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \right\} \right] dxdy$$

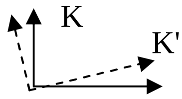
Wenn wir Gleichgewicht einer Platte suchen, so müssen Verschiebungen und Ableitungen kontinuierlich sein. In jedem Knoten gibt es drei Knotenvariablen, insgesamt 9. Aber es gibt keinen (vollen) Ansatz mit 9 Koeffizienten. Kubischer Ansatz würde 10 Koeffizienten enthalten. Deshalb führen wir eine weitere Variable – Verschiebung im Schwerpunkt des Elements (1/3 jeweiliger Kante) ein.

$u_1, u_{1x}, u_{1y}, u_2, u_{2x}, u_{2y}, u_3, u_{3x}, u_{3y}, u_4$



$$u(\eta,\xi) = c_1 + c_2\xi + c_3\eta + c_4\xi^2 + c_5\xi\eta + c_6\eta^2$$
$$+ c_7\xi^3 + c_8\xi^2\eta + c_9\xi\eta^2 + c_{10}\eta^3$$

I. Bewegung in einem rotierenden Bezugssystem. $\vec{r}$ sei der Radiusvektor eines Körpers im Bezugssystem K, welches sich bezüglich K' mit einer Winkelge-schwindigkeit $\vec{\Omega}$ dreht. Zu bestimmen sind die Bewegungsgleichun-gen bezüglich des rotierenden Systems.



Lösung: Die Lagrangefunktion ist in diesem Fall

$L = K = \frac{m\vec{v}\,'^2}{2} = \frac{m}{2}\left(\vec{v} + \vec{\Omega}\times\vec{r}\right)^2$. Als verallgemeinerte Koordinaten sind Komponenten des Radiusvektors $\vec{r}$ *bezüglich des rotierenden Koordinatensystems* gewählt. Für die Komponenten des Kreuzproduktes gilt:

$$\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)_x = \Omega_y z - \Omega_z y$$

$$\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)_y = \Omega_z x - \Omega_x z$$

$$\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)_z = \Omega_x y - \Omega_y x\ .$$

Die Lagrangefunktion:

$$L = \frac{m}{2}\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right) + mv_x\left(\Omega_y z - \Omega_z y\right) +$$
$$+ mv_y\left(\Omega_z x - \Omega_x z\right) + mv_z\left(\Omega_x y - \Omega_y x\right) +$$
$$\frac{m}{2}\left\{\left(\Omega_y z - \Omega_z y\right)^2 + \left(\Omega_z x - \Omega_x z\right)^2 + \left(\Omega_x y - \Omega_y x\right)^2\right\}$$

Die zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen erforderlichen Ableitungen:

$$\frac{\partial L}{\partial v_x} = mv_x + m\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)_x,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = mv_y\Omega_z - mv_z\Omega_y +$$
$$m\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)_y\Omega_z - m\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)_z\Omega_y =$$
$$m\left(\vec{v}\times\vec{\Omega}\right)_x + m\left(\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)\times\vec{\Omega}\right)_x$$

Die Lagrangesche Gleichung, die der Koordinate x zugeordnet ist:

$$m\dot{v}_x + m\left(\vec{\Omega}\times\vec{v}\right)_x = m\left(\vec{v}\times\vec{\Omega}\right)_x + m\left(\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)\times\vec{\Omega}\right)_x$$

oder $m\dot{v}_x = 2m\left(\vec{v}\times\vec{\Omega}\right)_x + m\left(\vec{\Omega}\times\left(\vec{r}\times\vec{\Omega}\right)\right)_x$

In der Vektorform:

$$m\dot{\vec{v}} = 2m\left(\vec{v}\times\vec{\Omega}\right) + m\left(\vec{\Omega}\times\left(\vec{r}\times\vec{\Omega}\right)\right)$$

Das erste Glied auf der rechten Seite ist die *Coriolis-Kraft*, das zweite die *Zentrifugalkraft.*

II. Statisches Gleichgewicht und seine Stabilität

Ein System mit der potentiellen Energie $U(q_1,...,q_s)$ ist dann im statischen Gleichgewicht, wenn $\frac{\partial U}{\partial q_i} = 0$ für alle *i*.

Ein Gleichgewicht ist *stabil*, wenn es einem *Minimum* der potentiellen Energie entspricht und *instabil* in allen anderen Fällen.

In der Nähe eines Gleichgewichts gilt die folgende Potenzentwicklung der potentiellen Energie (mehrdimensionale Taylor-Reihe):

$$U(q_1,q_2,...,q_s) = U(q_1^*, q_2^*,...,q_s^*) +$$
$$+\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial U}{\partial q_i}\cdot(q_i - q_i^*) + \sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{s}\frac{\partial^2 U}{\partial q_i\partial q_j}\cdot(q_i - q_i^*)\cdot(q_j - q_j^*) + ...$$

Der lineare Term ist identisch gleich Null wegen der Gleichgewichtsbedingung, somit ist die Änderung der potentiellen Energie in der Nähe eines Gleichgewichtspunktes eine quadratische Form:

$$\Delta U = U(q_1,q_2,...,q_s) - U(q_1^*, q_2^*,...,q_s^*) =$$
$$\sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{s}\frac{\partial^2 U}{\partial q_i\partial q_j}\cdot(q_i - q_i^*)\cdot(q_j - q_j^*) + (GhO).$$

Die notwendige und ausreichende Bedingung für ein stabiles Gleichgewicht ist, dass diese Form *positiv definit* ist. Wie Sie wissen, ist diese Forderung gleichbedeutend mit der Forderung nach positiver Definitheit der symmetrischen Matrix

$$\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial q_i\partial q_j}\right\} = \left\{\begin{matrix}\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2}\cdots\frac{\partial^2 U}{\partial q_1\partial q_s}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \frac{\partial^2 U}{\partial q_s\partial q_1}\cdots\frac{\partial^2 U}{\partial q_s^2}\end{matrix}\right\}$$

Das ist dann der Fall, wenn alle Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$\begin{vmatrix}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2} - \lambda\right)\cdots\frac{\partial^2 U}{\partial q_i\partial q_j}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \frac{\partial^2 U}{\partial q_i\partial q_j}\cdots\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_s^2} - \lambda\right)\end{vmatrix} = 0$$

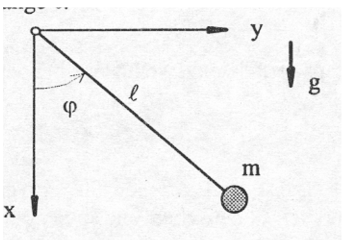
positiv sind.

Im *eindimensionalen* Fall ist das Stabilitätskriterium besonders einfach:

U hat ein Minimum, wenn $\dfrac{\partial^2 U}{\partial q^2} > 0$ (stabil)

U hat ein Maximum, wenn $\dfrac{\partial^2 U}{\partial q^2} < 0$ (instabil).

Beispiel 1.



Gegeben sei ein mathematisches Pendel (Masse *m* auf einem masselosen Stab der Länge *l*) .

Man bestimme die Gleichgewichtslagen und ihre Stabilität.

Lösung. Mit $U = -mgl\cos\varphi$ berechnet man die Gleichgewichtslagen aus der Gleichung $\dfrac{\partial U}{\partial \varphi} = mgl\sin\varphi = 0$. Sie hat zwei physikalisch verschiedene Lösungen: $\varphi_1 = 0$ und $\varphi_2 = \pi$.

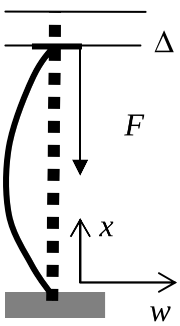
Die zweite Ableitung der potentiellen Energie nach φ gibt Auskunft über Stabilität:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = mgl\cos\varphi .$$

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}\right|_{\varphi=\varphi_1} > 0 \quad \Rightarrow \text{ stabiles Gleichgewicht.}$$

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}\right|_{\varphi=\varphi_2} < 0 \quad \Rightarrow \text{ instabiles Gleichgewicht}$$

Beispiel 2.



Ein elastischer Stab sei an seinen Enden gelenkig gelagert und in der vertikalen Richtung mit einer Kraft F belastet. Gegeben: E, I, l, F . *Zu bestimmen sind die Stabilitätsbedingungen.*

Lösung. Vorbereitender Schritt: Berechnung der potentiellen Energie:

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l EI\left(w''(x)\right)^2 dx - F\Delta$$

Bestimmen wir die Verschiebung Δ. Zu diesem Zweck berechnen wir die Gesamtlänge des Stabes nach der Auslenkung:

$$l = \int_0^l ds = \int \sqrt{dx^2 + dw^2} = \int_0^{l-\Delta} \sqrt{1 + w'^2}\, dx \approx$$

$$\approx \int_0^{l-\Delta} \left(1 + \tfrac{1}{2} w'^2\right) dx \approx l - \Delta + \int_0^l \tfrac{1}{2} w'^2 dx$$

Die Längssteifigkeit eines schlanken Stabes ist viel größer als seine Biegesteifigkeit. In erster Annäherung kann der Stab als undehnbar angenommen werden. Das bedeutet, dass sich die Länge bei einer Auslenkung nicht ändert: $l - \Delta + \int_0^l \tfrac{1}{2} w'^2 dx = l$. Daraus folgt: $\Delta = \int_0^l \tfrac{1}{2} w'^2 dx$.

Für die potentielle Energie ergibt sich

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l EI w''^2 dx - F\int_0^l \tfrac{1}{2} w'^2 dx$$

Mit dem Ansatz $w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin\dfrac{\pi n x}{l}$ (der den Randbedingungen $w(0) = 0$, $w(l) = 0$ genügt), bekommen wir

$$w'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{\pi n}{l}\right)\cos\frac{\pi n x}{l}$$

$$w''(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \sin\frac{\pi n x}{l}.$$

Die potentielle Energie:

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l EI \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{\,2} \left(\frac{\pi n}{l}\right)^4 \sin^2\frac{\pi n x}{l} dx$$

$$-F\int_0^l \tfrac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{\,2} \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \cos^2\frac{\pi n x}{l} dx$$

oder

$$U = \frac{l}{4} EI \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{\,2} \left(\frac{\pi n}{l}\right)^4 - \frac{Fl}{4}\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{\,2}\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$$

$$= \frac{l}{4}\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{\,2}\left[EI\left(\frac{\pi n}{l}\right)^4 - F\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\right]$$

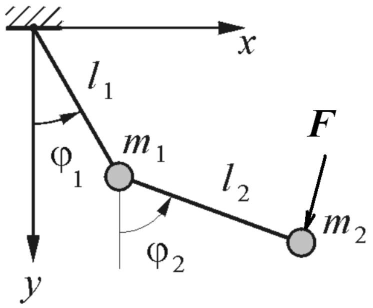
Diese Energie hat bei $a_1 = 0, \ldots, a_n = 0$ ein Minimum, wenn *alle* Koeffizienten vor $a_n^{\,2}$ positiv sind: $EI\left(\dfrac{\pi n}{l}\right)^4 - F\left(\dfrac{\pi n}{l}\right)^2 > 0$ oder

$$EI\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 - F > 0 .$$

Der gerade Zustand ist stabil, wenn

$$\boxed{F < EI\left(\pi / l\right)^2}$$

Aufgabe 1. (Berechnung von generalisierten Kräften). Gegeben ist ein Doppelpendel. Als generalisierte Koordinaten wählen wir Winkel φ_1 und φ_2. Auf den zweiten Körper wirkt eine nicht konservative Kraft $\vec{F}$. Der Betrag der Kraft $\vec{F}$ ist konstant, die Wirkungslinie ist stets senkrecht zum zweiten Pendelstab. Zu bestimmen sind die mit der Kraft $\vec{F}$ zusammenhängenden generalisierten Kräfte Q_{φ_1} und Q_{φ_2}.



Lösung: Die Kraft $\vec{F} = \left(-F\cos\varphi_2, F\sin\varphi_2\right)$ wirkt auf den zweiten Körper und leistet Arbeit bei seinen Verschiebungen. Koordinaten des zweiten Körpers sind

$$x_2 = l_1 \sin\varphi_1 + l_2 \sin\varphi_2,$$
$$y_2 = l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2.$$

Kleine Änderungen von generalisierten Koordinaten φ_1 und φ_2 führen zu Änderungen von Koordinaten x_2 und y_2:

$$\delta x_2 = l_1 \cos\varphi_1 \delta\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2 \delta\varphi_2$$
$$\delta y_2 = -l_1 \sin\varphi_1 \delta\varphi_1 - l_2 \sin\varphi_2 \delta\varphi_2,$$

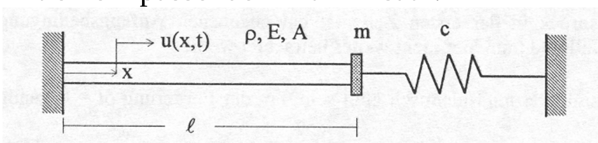
was bedeutet, daß der zweite Körper sich um den Vektor $\delta\vec{r}_2 = \left(\delta x_2, \delta y_2\right)$ verschiebt. Die Arbeit der Kraft $\vec{F} = \left(-F\cos\varphi_2, F\sin\varphi_2\right)$ auf dieser Verschiebung ist gleich

$$\delta W = \vec{F}\cdot\delta\vec{r}_2 =$$
$$-F\cos\varphi_2\left(l_1\cos\varphi_1\delta\varphi_1 + l_2\cos\varphi_2\delta\varphi_2\right) +$$
$$+F\sin\varphi_2\left(-l_1\sin\varphi_1\delta\varphi_1 - l_2\sin\varphi_2\delta\varphi_2\right) =$$
$$= -F\begin{bmatrix} l_1\left(\cos\varphi_2\cos\varphi_1 + \sin\varphi_2\sin\varphi_1\right)\delta\varphi_1 + \\ l_2\left(\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2\right)\delta\varphi_1 \end{bmatrix} =$$
$$-F\left(l_1\cos\left(\varphi_1-\varphi_2\right)\delta\varphi_1 + l_2\delta\varphi_2\right)$$

Die generalisierten Kräfte sind demnach gleich:

$$Q_{\varphi_1} = -Fl_1\cos\left(\varphi_1-\varphi_2\right)$$
$$Q_{\varphi_2} = -Fl_2.$$

Aufgabe 2. Gegeben sei der skizzierte Stab. An seinem freien Ende sind eine Masse und eine Feder angeheftet. Bei nicht gedehntem Stab sei die Feder entspannt. Schreiben Sie die Lagrangefunktion des Systems und berechnen Sie die Eigenfrequenz des Systems mit einem passenden Ritz-Ansatz!



Lösung: Die Lagrangefunktion ist:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{u}^2(l,t) - \frac{1}{2}cu^2(l,t) +$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^l \rho A\dot{u}^2 dx - \frac{1}{2}\int_0^l AEu'^2\, dx$$

Der einfachste brauchbare Ansatz für einen Stab ist ein (als Funktion von x) linearer Ansatz: $u(x,t) = a(t)(c_0 + x/l)$. Die Randbedingung $u(0) = 0$ ergibt $c_0 = 0$, somit $u(x,t) = a(t)x/l$.

Die für die Berechnung der Lagrangefunktion erforderlichen Werte bzw. Funktionen sind:

$$\dot{u}(l,t) = \dot{a}(t), \qquad u(l,t) = a(t)$$
$$\dot{u}(x,t) = \dot{a}(t)x/l, \qquad u'(x,t) = a(t)/l.$$

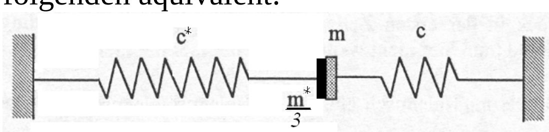
Daraus ergibt sich die Lagrangefunktion

$$L = \tfrac{1}{2}m\dot{a}^2 - \tfrac{1}{2}ca^2 +$$
$$+\frac{1}{2l^2}\int_0^l \rho A\dot{a}^2x^2 dx - \frac{1}{2l^2}\int_0^l AEa^2 dx$$

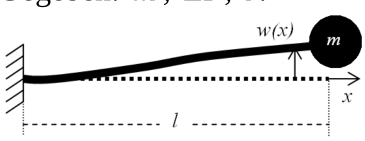
Oder

$$L = \tfrac{1}{2}\left(m + \tfrac{1}{3}\rho Al\right)\dot{a}^2 - \tfrac{1}{2}\left(c + AE/l\right)a^2.$$

Unter Berücksichtigung der Tatsachen, daß $m^* = \rho Al$ die Masse und $c^* = AE/l$ die Steifigkeit des Stabes ist, ist unser System dem folgenden äquivalent:



Aufgabe 3. Berechne mit einem passenden Ritz-Ansatz die erste Eigenfrequenz einer auf einer Blattfeder schwingenden Masse *m*. Gegeben: m, EI, l.



Lösung: Die Lagrangefunktion ist in diesem Fall

$$L = \frac{1}{2} m\dot{w}^2(l,t) + \frac{1}{2}\int_0^l \rho A \dot{w}^2 dx - \frac{1}{2}\int_0^l EI w''^2 dx .$$

Da jetzt zwei geometrische Randbedingungen am linken Ende ($w(0,t) = 0$ und $w'(0,t) = 0$) erfüllt sein müssen, ist der minimale Ansatz eine kubische Funktion. Dynamische Randbedingungen am rechten Ende müssen nicht unbedingt erfüllt sein. Jedoch bekommt man bessere Ergebnisse, wenn man auch die dynamischen Randbedingungen berücksichtigt. In diesem Fall die Momentenfreiheit $w''(l,t) = 0$. Ein nichttrivialer Ansatz ist demnach eine Funktion vierter Ordnung, die wir in der folgenden Form schreiben:

$$w(x,t) = a(t)\left(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + x^3 / 2l^3\right).$$

Aus den Randbedingungen ergibt sich $c_0 = 0$, $c_1 = 0$, $2c_2 + 3/l^2 = 0 \Rightarrow c_2 = -1.5/l^2$. Der Ansatz ist demnach

$$w(x,t) = a(t)\left(0.5\frac{x^3}{l^3} - 1.5\frac{x^2}{l^2}\right).$$

$$w(l,t) = -a(t) .$$

Die zur Berechnung der potentiellen Energie erforderliche zweite Ableitung ist gleich

$$w''(x,t) = \frac{3a(t)}{l^2}\left(\frac{x}{l} - 1\right).$$

Für die Lagrangefunktion ergibt sich zu

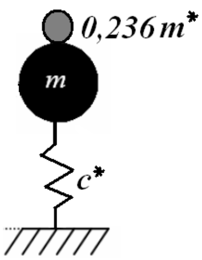
$$L = \frac{1}{2} m\dot{a}^2(l,t) + \frac{1}{2}\int_0^l \rho A \dot{a}^2(t)\left(0.5\frac{x^3}{l^3} - 1.5\frac{x^2}{l^2}\right)^2 dx$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^l EI \frac{9a^2(t)}{l^4}\left(\frac{x}{l} - 1\right)^2 dx$$

Oder

$$L = \frac{1}{2}\left(m + \rho A l \frac{33}{140}\right)\dot{a}^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{3EI}{l^3}\right)a^2$$

Unter Berücksichtigung der Tatsachen, daß $m^* = \rho A l$ die Masse und $c^* = \frac{3EI}{l^3}$ die Steifigkeit des Blattfeder ist, ist unser System dem folgenden äquivalent (Bild rechts).



Die Eigenfrequenz ist gleich

$$\omega = \sqrt{\frac{c^*}{m + 0.236 m^*}} .$$

III. Was man alles zur schriftlichen Klausur wissen muß?

1) Was ist Lagrangefunktion?

2) Generalisierte Koordinaten

3) Kinetische Energie bei Translation und Rotation

4) Potentielle Energie in Standardsituationen (Feder, Gewicht)

5) Lagrangegleichungen 1. und 2. Art

6) Bindungen

7) Das Prinzip der virtuellen Arbeit (oder der virtuellen Verschiebungen)

8) Generalisierte Kräfte und ihre Berechnung mit dem Prinzip der virtuellen Arbeit

9) Dissipationsfunktion und ihre Benutzung zur Aufstellung von Bewegungsdifferentialgleichungen.

10) Kinetische und potentielle Energien für Dehnstab, Torsionsstab, Biegebalken (alles auswendig):
(a) als Funktion von Auslenkungen und Verdrehungen
(b) potentielle Energie darüber hinaus auch als Funktion von Momenten und Schnittkräften.

11) Kinetische und potentielle Energie von Kombinationen aus kontinuierlichen und diskreten Elementen

12) Der 2. Satz von Castigliano

13) Berechnung von Durchbiegungen mit dem Satz von Castigliano an den Stellen, wo keine Kräfte wirken

14) Näherungsmethoden:
(a) Ritz-Ansatz. Wie wählt man Ansatzfunktionen?
(b) Rayleigh-Ritz-Verfahren zur Bestimmung von Eigenfrequenzen

15) Bedingungen für das Gleichgewicht und seine Stabilität bzw. Instabilität

16) Definition der Einflußzahlen; Vertauschungssatz von Maxwell und Betti

<u>Sehr wichtig:</u>

Eine der Klausuraufgaben ist eine der Hausaufgaben. Mann sollte *alle Hausaufgaben* selbst (am besten mehrmals) durchgerechnet haben!