Notiz zur Eigenwertmethode für ungedämpfte Schwingungen

Michael Karow*

January 26, 2015

Problem: Bestimme alle Lösungen der homogenen DGL

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{M_e} \begin{bmatrix} \ddot{w} \\ \ddot{\mu} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} S & C \\ C^\top & 0 \end{bmatrix}}_{S_e} \begin{bmatrix} w \\ \mu \end{bmatrix} = 0. \tag{1}$$

<ins>Voraussetzungen an die Matrizen:</ins> $M \in \mathbb{R}^{N\times N}$ symmetrisch positiv definit, $S \in \mathbb{R}^{N\times N}$ symmetrisch positiv semidefinit, $S_e \in \mathbb{R}^{(N+K)\times(N+K)}$ invertierbar (Folgerung: die Spalten von $C \in \mathbb{R}^{N\times K}$ sind linear unabhängig).

<ins>Notation:</ins> $A = S_e^{-1} M_e$. <ins>Ansatz:</ins> Wir bestimmen zunächst Lösungen von (1) der Form

$$\begin{bmatrix} w(t) \\ \mu(t) \end{bmatrix} = f(t) \begin{bmatrix} w_0 \\ \mu_0 \end{bmatrix}, \qquad f(t) \in \mathbb{R}, \qquad \begin{bmatrix} w_0 \\ \mu_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N+K} \setminus \{0\} \text{ fest}, \quad f \not\equiv 0. \tag{$*$}$$

Satz 1. $(*)$ ist genau dann eine Lösung von (1), wenn

$$\ddot{f} + \frac{1}{\lambda} f = 0, \quad \text{wobei} \quad A \begin{bmatrix} w_0 \\ \mu_0 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} w_0 \\ \mu_0 \end{bmatrix}, \quad \lambda > 0.$$

Folgerung: Sei $\omega := 1/\sqrt{\lambda} > 0$. Dann sind alle Lösungen f von der Form

$$f(t) = \alpha \cos(\omega t) + \frac{\beta}{\omega} \sin(\omega t) = \rho \cos(\omega t - \phi), \quad \text{wobei} \quad \alpha, \beta, \phi \in \mathbb{R} \text{ beliebig}, \rho \geq 0.$$

Es ist $\alpha = f(0)$, $\beta = \dot{f}(0)$, $\rho = \sqrt{\alpha^2 + (\beta/\omega)^2}$, ϕ so dass $\alpha = \alpha \cos(\phi)$, $\beta/\omega = \rho \sin(\phi)$. ($\rho$ und ϕ sind die Polarkoordinaten des Vektors $[\alpha \quad \beta/\omega]^\top \in \mathbb{R}^2$.)

Interpretation im Balkenprojekt: Die Lösungen $(*)$ sind stehende Wellen.

Beweis von Satz 1. Einsetzen von $(*)$ in (1) ergibt

$$M_e \ddot{f} \begin{bmatrix} w_0 \\ \mu_0 \end{bmatrix} + S_e f \begin{bmatrix} w_0 \\ \mu_0 \end{bmatrix} = 0.$$

Durch Umstellen dieser Gleichung bekommt man

$$\underbrace{S_e^{-1} M_e}_{A} \begin{bmatrix} w_0 \\ \mu_0 \end{bmatrix} = \underbrace{-\frac{f}{\ddot{f}}}_{=:\lambda} \begin{bmatrix} w_0 \\ \mu_0 \end{bmatrix} \qquad (**).$$

Es ist $\lambda > 0$, denn

$$\begin{aligned} (**) \quad &\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ \mu_0 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} S & C \\ C^\top & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ \mu_0 \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow \quad M w_0 = \lambda S w_0 + C \mu_0, \quad C^\top w_0 = 0. \qquad (***) \end{aligned}$$

Falls $w_0 = 0$ folgt $C\mu_0 = 0$, und damit auch $\mu_0 = 0$, weil die Spalten von C linear unabhängig sind. Dies ist der triviale Fall, der in $(*)$ ausgeschlossen wurde. Also ist $w_0 \neq 0$. Multiplikation der ersten Gleichung von $(***)$ mit $w_0^\top$ ergibt wegen positiver Definitheit von M,

$$\underbrace{w_0^\top M w_0}_{>0} = \lambda \, (\underbrace{w_0^\top S w_0}_{\geq 0} + \underbrace{w_0^\top C}_{(C^\top w_0)^\top = 0} \quad \mu_0) \quad \Rightarrow \quad \lambda > 0 \qquad \square$$

*karow@math.tu-berlin.de

Satz 2 (ohne Beweis).

(i) Es gibt $N - K$ linear unabhängige Eigenvektoren $\begin{bmatrix} w_k \\ \mu_k \end{bmatrix}$, so dass

(a) $A \begin{bmatrix} w_k \\ \mu_k \end{bmatrix} = \lambda_k \begin{bmatrix} w_k \\ \mu_k \end{bmatrix}, \quad \lambda_k > 0,$

(b) $w_j^\top M w_k = 0$ für $j \neq k$. (Für $\lambda_j \neq \lambda_k$ folgt (b) aus (a)).

(ii) Alle Lösungen der DGL (1) sind von der Form

$$\begin{bmatrix} w(t) \\ \mu(t) \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{N-K} \left(\alpha_k \cos(\omega_k t) + \frac{\beta_k}{\omega_k} \sin(\omega_k t) \right) \begin{bmatrix} w_k \\ \mu_k \end{bmatrix}, \qquad \omega_k = 1/\sqrt{\lambda_k}, \quad \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}.$$

Es ist

$$\alpha_k = \frac{w_k^\top M w(0)}{w_k^\top M w_k}, \qquad \beta_k = \frac{w_k^\top M \dot{w}(0)}{w_k^\top M w_k} \qquad (****)$$

(das folgt aus (b), siehe Beweis unten). Die Vektoren $w(0)$, $\dot{w}(0) \in \mathbb{R}^N$ (Anfangswerte) können beliebig vorgegeben werden.

Bemerkungen:

- Die Summanden in (ii) nennt man Schwingungsmoden.
- Die Matrix A hat außer den positiven Eigenwerten λ_k auch noch den Eigenwert 0 mit algebraischer Vielfachheit $2K$.
- Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren mit dem Matlab-Befehl 'eig'. Eigenvektoren zum Eigenwert 0 ignorieren.
- Die DGL (1) bezeichnet man treffender als DAE (differential algebraic equation), weil die Matrix M_e, die vor den Ableitungen steht, nicht invertierbar ist.
- Zur Herleitung von (b) für $\lambda_j \neq \lambda_k$: Aus (a) folgt

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_k \\ \mu_k \end{bmatrix} = \lambda_k \begin{bmatrix} S & C \\ C^\top & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_k \\ \mu_k \end{bmatrix}.$$

Multiplikation mit dem Vektor $\begin{bmatrix} w_j \\ \mu_j \end{bmatrix}^\top$ ergibt

$$w_j^\top M w_k = \begin{bmatrix} w_j \\ \mu_j \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_k \\ \mu_k \end{bmatrix} = \lambda_k \begin{bmatrix} w_j \\ \mu_j \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} S & C \\ C^\top & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_k \\ \mu_k \end{bmatrix} \qquad (+)$$

Dieselbe Herleitung mit vertauschten Indizes liefert

$$w_k^\top M w_j = \begin{bmatrix} w_k \\ \mu_k \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_j \\ \mu_j \end{bmatrix} = \lambda_j \begin{bmatrix} w_k \\ \mu_k \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} S & C \\ C^\top & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_j \\ \mu_j \end{bmatrix} \qquad (++)$$

Wegen der Symmetrie der Matrizen ist

$$w_j^\top M w_k = w_k^\top M w_j, \qquad \begin{bmatrix} w_j \\ \mu_j \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} S & C \\ C^\top & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_k \\ \mu_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_k \\ \mu_k \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} S & C \\ C^\top & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_j \\ \mu_j \end{bmatrix}.$$

Durch Abziehen der Gleichungen (+) und (++) folgt daher

$$0 = (\lambda_k - \lambda_j) \begin{bmatrix} w_j \\ \mu_j \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} S & C \\ C^\top & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_k \\ \mu_k \end{bmatrix}, \text{ also } 0 = \begin{bmatrix} w_j \\ \mu_j \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} S & C \\ C^\top & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_k \\ \mu_k \end{bmatrix}, \text{ also wegen } (+),\ w_j^\top M w_k = 0$$

- Zur Herleitung von $(****)$ aus (b):
Wir haben

$$\dot{w}(0) = \sum_{k=1}^{N-K} (-\alpha_k \omega_k \sin(\omega_k 0) + \beta_k \cos(\omega_k 0)) w_k = \sum_{k=1}^{N-K} \beta_k w_k.$$

Multiplikation mit $w_j^\top M$ ergibt wegen (b), $w_j^\top M \dot{w}(0) = \beta_j w_j^\top M w_j$, $j = 1, \ldots N - K$. Hieraus folgt die Formel für β (Laufindix j durch k ersetzen). Die Herleitung für α geht analog.