

Die Newmark-Methode

Michael Karow

June 6, 2012

Sei $x : [t_1, t_e] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Lösung der Gleichung

$$f(\ddot{u}(t), \dot{u}(t), u(t), t) = 0.$$

Sei außerdem $t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = t_e$ eine Unterteilung des Intervalls $[t_1, t_e]$. Gesucht sind Näherungswerte $u_j, \dot{u}_j, \ddot{u}_j$ für $u(t_j), \dot{u}(t_j), \ddot{u}(t_j)$. Naheliegende Forderungen an die Näherungsfolgen sind die Bedingungen

$$u_1 = u(t_1), \quad \dot{u}_1 = \dot{u}(t_1), \quad \ddot{u}_1 = \ddot{u}(t_1). \quad (1)$$

und

$$f(\ddot{u}_{j+1}, \dot{u}_{j+1}, u_{j+1}, t_{j+1}) = 0, \quad j = 1, \dots, n-1 \quad (2)$$

Zur Herleitung einer Berechnungsvorschrift für die gesuchten Folgen betrachten wir die Taylorentwicklungen mit Restglied:

$$u(t_{j+1}) = u(t_j) + \dot{u}(t_j) h_j + \frac{\ddot{u}(\tau_1)}{2} h_j^2 \quad \tau_1 \in [t_j, t_{j+1}], \quad (3)$$

$$\dot{u}(t_{j+1}) = \dot{u}(t_j) + \ddot{u}(\tau_2) h_j, \quad \tau_2 \in [t_j, t_{j+1}], \quad (4)$$

wobei

$$h_j = t_{j+1} - t_j$$

die Schrittweite ist. In diesen Formeln werden nun $u(t_{j+1}), u(t_j), \dot{u}(t_j), \dot{u}(t_{j+1})$ durch die entsprechenden Näherungswerte ersetzt. Die unbekannten Werte $\ddot{u}(\tau_1)$ und $\ddot{u}(\tau_2)$ werden durch gewichtete Mittelwerte von \ddot{u}_j und \ddot{u}_{j+1} ersetzt. So bekommt man die Berechnungsformeln

$$u_{j+1} = u_j + \dot{u}_j h_j + \left(\left(\frac{1}{2} - \beta\right) \ddot{u}_j + \beta \ddot{u}_{j+1}\right) h_j^2, \quad (5)$$

$$\dot{u}_{j+1} = \dot{u}_j + ((1 - \gamma) \ddot{u}_j + \gamma \ddot{u}_{j+1}) h_j. \quad (6)$$

Dabei sind $\beta \in [0, \frac{1}{2}]$, $\gamma \in [0, 1]$ fest gewählte Werte. Die Gleichungen (1), (2), (5) und (6) definieren das Newmark-Verfahren. Zur praktischen Ausführung fassen wir den von j abhängigen Teil der rechten Seiten von (5) und (6) zusammen:

$$u_j^* = u_j + \dot{u}_j h_j + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \ddot{u}_j h_j^2, \quad (7)$$

$$\dot{u}_j^* = \dot{u}_j + (1 - \gamma) \ddot{u}_j h_j. \quad (8)$$

Mit diesen Hilfsgrößen lauten die Gleichungen (5) und (6):

$$u_{j+1} = u_j^* + \beta \ddot{u}_{j+1} h_j^2, \quad \dot{u}_{j+1} = \dot{u}_j^* + \gamma \ddot{u}_{j+1} h_j. \quad (9)$$

Dies in (2) eingesetzt ergibt

$$f(\ddot{u}_{j+1}, \dot{u}_j^* + \gamma \ddot{u}_{j+1} h_j, u_j^* + \beta \ddot{u}_{j+1} h_j^2, t_{j+1}) = 0. \quad (10)$$

Der Newmark-Algorithmus ist nun folgender:

- Setze $u_1 = u(t_1)$, $\dot{u}_1 = \dot{u}(t_1)$, $\ddot{u}_1 = \ddot{u}(t_1)$.
- Für $j = 1$ bis $n - 1$:
 - (a) Berechne u_j^* und \dot{u}_j^* mittels (7) und (8).
 - (b) Berechne die Lösung \ddot{u}_{j+1} von (10).
 - (c) Berechne u_{j+1} und \dot{u}_{j+1} mittels (9).

Das Newmark-Verfahren wurde ursprünglich entwickelt für Funktionen der Form

$$f(\ddot{u}, \dot{u}, u, t) = M\ddot{u} + D\dot{u} + Su - p(t).$$

In diesem Fall lautet Schritt (b) des Algorithmus:

(b') Löse das lineare Gleichungssystem

$$(M + \gamma h_j D + \beta h_j^2 S)\ddot{u}_{j+1} = p(t_{j+1}) - D\dot{u}_j^* - Su_j^*.$$

Optimale Parameter: $\beta = 1/4$, $\gamma = 1/2$.

Bei diesen Parametern ist das Verfahren für jede Schrittweite stabil. Ausserdem hat man Energieerhaltung falls $D = 0$, $p = 0$.

Gute Parameter sind auch $\beta = 1/12$, $\gamma = 1/2$. Bei dieser Parameterwahl ist das Verfahren zwar nur für genügend kleine Schrittweiten stabil. Dafür ist die numerische Phasenverschiebung bei Schwingungen am geringsten.