MatLab Programmentwurf

Timo Johannsen, Benjamin Peiter, Omer Butt

27. April 2025

Inhaltsverzeichnis

1 Aufgabe (a): Visualisierung der Systemdynamik durch Phasenportraits

Zu der *Tschirikow Standardabbildung*, welche definiert ist durch:

$$F : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$$
$$F(I, \theta) = \begin{pmatrix} I + K \cdot \sin(\theta) \bmod 2\pi \\ I + \theta + K \cdot \sin(\theta) \bmod 2\pi \end{pmatrix}$$

gehört ein dynamisches System, welche gegeben ist durch die Rekursionsgleichungen

$$I_{n+1} = (I_n + K \cdot \sin(\theta_n)) \bmod 2\pi$$
$$\theta_{n+1} = (\theta_n + I_n) \bmod 2\pi$$

Zuerst werden 3 verschiedene K-Werte mit $K_1 =]0, 0.6]$, $K_2 = [0.9, 1.1]$ und $K_3 = [1.4, 2.0]$ gewählt und die Länge und Anzahl der Trajektorien definiert.

```
K_values = [rand()*0.6, 0.9 + rand()*0.2, 1.4 + rand()*0.6];
    % Parameter fuer die drei K-Werte
N = 1000; % Laenge der Trajektorien
M = 50; % Anzahl der Trajektorien
```

Daraufhin werden für die 3 K-Werte die Phasenportraits erstellt. In einer Schleife werden durch die K-Werte iteriert und für jeden K-Wert die Trajektorien gezeichnet.

```
figure;
for idx = 1:3
    K = K_values(idx);
    subplot(1,3,idx);
    hold on;
```

Jede Trajektorie bekommt eine zufälligen Startpostition (I_0, θ_0) aus dem Bereich $[0, 2\pi]$ x $[0, 2\pi]$. Zusätzlich wird für die Trajektorie zwei Vektoren der Länge 1000 erstellt, in der die Werte für I und θ gespeichert werden.

```
    for m = 1:M
        I = rand()*2*pi;
        theta = rand()*2*pi;
        I_traj = zeros(1,N);
        theta_traj = zeros(1,N);
```

Die Trajektorie wird dann rekursiv berechnet. Dabei werden die Formeln:

$$I_{n+1} = (I_n + K \cdot \sin(\theta_n)) \bmod 2\pi$$
$$\theta_{n+1} = (\theta_n + I_n) \bmod 2\pi$$

verwendet, wobei I und θ in jedem Schritt aktualisiert werden. Die Trajektorie wird dann in den Vektoren gespeichert und zum Schluss wird jeder Punkt gezeichnet.

```
        for n = 1:N
            I = mod(I + K*sin(theta), 2*pi);
            theta = mod(theta + I, 2*pi);
            I_traj(n) = I;
            theta_traj(n) = theta;
        end
        plot(theta_traj, I_traj, '.', 'MarkerSize', 1);
    end
```

Diese Werte werden dann in einem Diagramm gezeichnet. Dabei wird die x-Achse mit θ und die y-Achse mit I beschriftet. Dabei charakterisieren die Phasenportraits die Dynamik des Systems, dass für ein wachsendes K das chaotische Verhalten zunimmt.

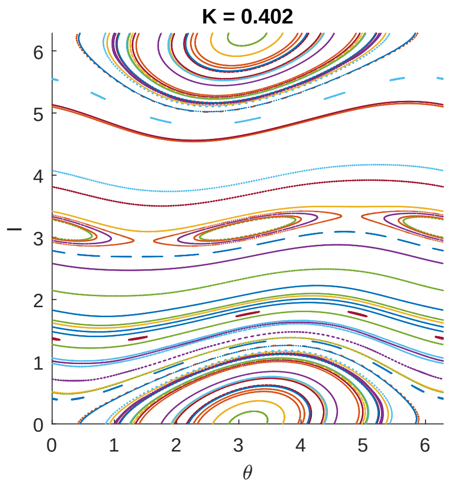

Abbildung 1: Phasenportrait für K_1

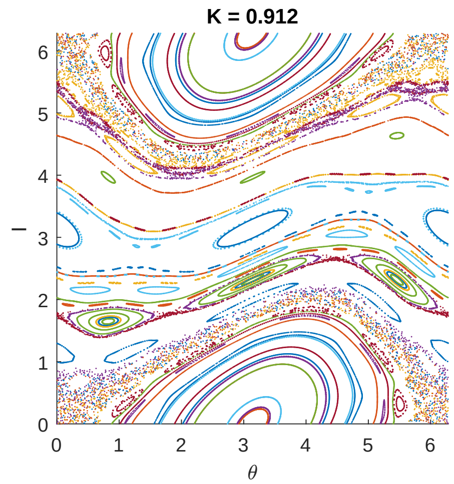

Abbildung 2: Phasenportrait für K_2

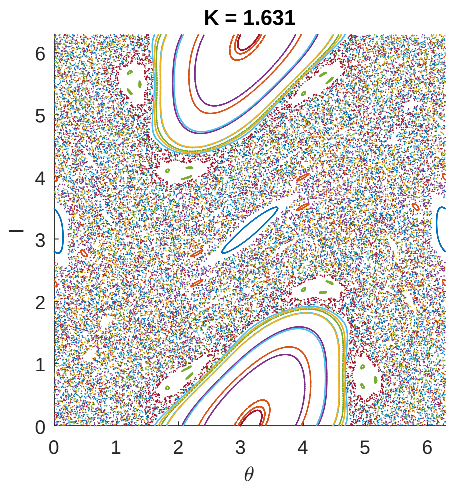

Abbildung 3: Phasenportrait für K_3

2 Aufgabe (b): Quantifizierung des Chaos durch Ljapunov-Exponenten

Die Ljapunov-Exponenten zeigen das Ausmaß an chaotischem Verhalten eines Systems quantifiziert an. Dafür werden im gleichmäßigen Abstand 200 K-Werte zwischen 0 und 4 gewählt.

```
K_vals = linspace(0, 4, 200);
N = 1000;
lambda1 = zeros(size(K_vals));
lambda2 = zeros(size(K_vals));
```

Für jeden K-Wert wird eine Trajektorie mit einer zufälligen Startposition (I_0, θ_0) aus dem Bereich $[0, 2\pi]$ x $[0, 2\pi]$ erstellt. Q ist anfangs eine Einheitsmatrix, die später in der QR-Zerlegung aktualisiert wird. $sumLogR11$ und $sumLogR22$ sind die Summen der Logarithmen der ersten beiden Diagonalelemente der Matrix R, die aus der QR-Zerlegung resultiert.

```
for idx = 1:length(K_vals)
    K = K_vals(idx);
    I = rand()*2*pi;
    theta = rand()*2*pi;
    Q = eye(2);

    sumLogR11 = 0;
    sumLogR22 = 0;
```

Die Ljapunov-Exponenten werden dann mit der berechneten Trajektorie berechnet. Dabei wird die *Systemmatrix* DF erstellt, welche die Ableitung der *Standardabbildung* F ist.

$$DF = \begin{pmatrix} 1 & K \cdot \cos(\theta) \\ 1 & 1 + K \cdot \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

```
    for n = 1:N
        % Ableitungsmatrix DF
        DF = [1, K*cos(theta); 1, 1 + K*cos(theta)];
```

Um die Ljapunov-Exponenten zu berechnen, wird die QR-Zerlegung der Matrix A durchgeführt, die aus der Ableitungsmatrix DF und der Matrix Q rekursiv resultiert. Dafür werden diese Rekursionsgleichungen aufgestellt:

$$Q_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{n+1} = DF(I_n, \theta_n) \cdot Q_n = \begin{pmatrix} 1 & K \cdot \cos(\theta) \\ 1 & 1 + K \cdot \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot Q_n$$

$$A_{n+1} = Q_{n+1} \cdot R_{n+1}$$

Dabei ist $Q_{n+1} \cdot R_{n+1}$ die QR-Zerlegung der Matrix A_{n+1}.

```
        A = DF * Q;
        [Q, R] = qr(A);
```

Die Ljapunov-Exponenten $\lambda_i, i = 1, 2$ sind dann gegeben durch:

$$\lambda_i = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} ln((R_n)_{ii})$$

Dann werden die I_n und θ_n entsprechend einer Trajektorie aktualisiert.

```
        sumLogR11 = sumLogR11 + log(abs(R(1,1)));
        sumLogR22 = sumLogR22 + log(abs(R(2,2)));

        I = mod(I + K*sin(theta), 2*pi);
        theta = mod(theta + I, 2*pi);
    end
```

Um die Ljapunov-Exponenten zu erhalten, wird die Summe der Logarithmen der Diagonalelemente $sumLogR11$ und $sumLogR22$, durch die Länge der Trajektorie N geteilt.

```
    lambda1(idx) = sumLogR11 / N;
    lambda2(idx) = sumLogR22 / N;
end
```

Diese Exponenten werden dann für jeden K-Werte in einem Diagramm gezeichnet.

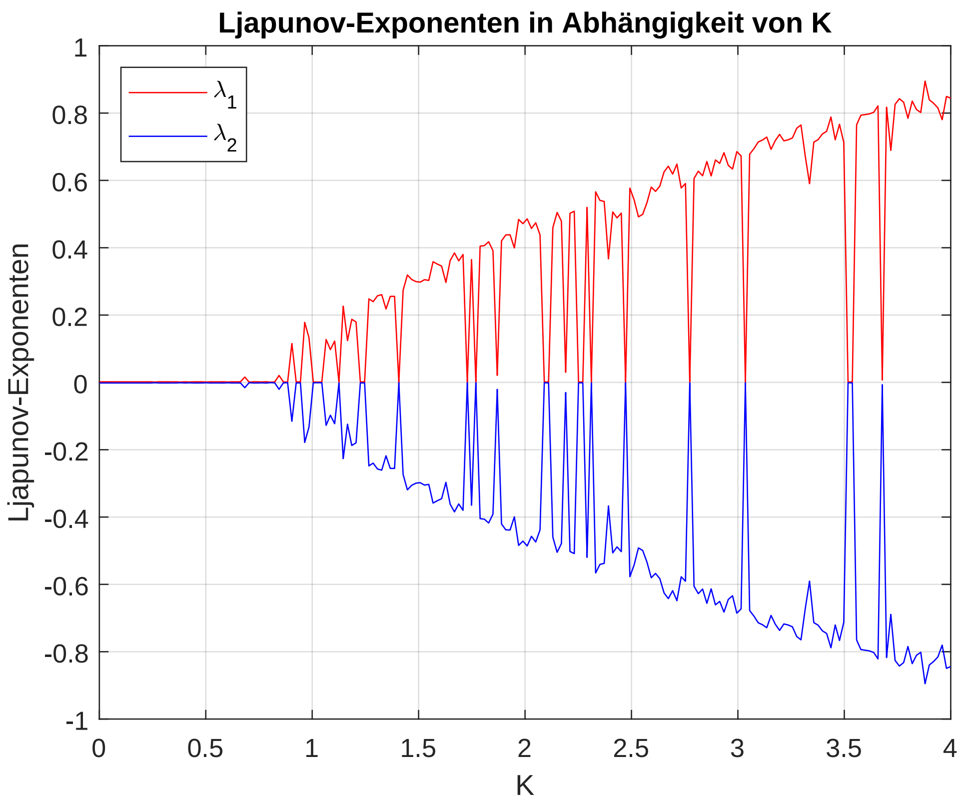

Abbildung 4: Ljapunov-Exponenten

3 Aufgabe (c): Plausibilisierung der Ergebnisse aus (b)

1. Determinante der Systemmatrix $DF(I, \theta)$:
Die Matrix $DF(I, \theta)$ ist gegeben durch:

$$DF(I, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & K \cdot \cos(\theta) \\ 1 & 1 + K \cdot \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Die Determinante dieser Matrix ist dann:

$$\begin{aligned} det(DF) &= (1 \cdot (1 + K \cdot \cos(\theta))) - (K \cdot \cos(\theta) \cdot 1) \\ &= 1 + K \cdot \cos(\theta) - K \cdot \cos(\theta) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Die Determinante der Systemmatrix ist unabhängig von K und θ und beträgt immer 1.

2. Determinante von Q_n:
Da die Matrix Q_n für alle $n \in \mathbb{N}$ eine orthogonale Matrix ist, gilt:

$$det(Q_n) = \pm 1$$

3. Folgerung für $det(A_n)$:
Da $A_n = DF \cdot Q_n$ gilt, ist die Determinante von A_n gegeben durch:

$$\begin{aligned} det(A_n) &= det(DF) \cdot det(Q_n) \\ &= 1 \cdot (\pm 1) \\ &= \pm 1 \end{aligned}$$

4. Folgerung für $det(R_n)$:
Da $A_n = Q_n \cdot R_n$ gilt, ist die Determinante von A_n gegeben durch:

$$\begin{aligned} det(A_n) &= det(Q_n) \cdot det(R_n) \\ \pm 1 &= \pm 1 \cdot det(R_n) \\ det(R_n) &= \pm 1 \end{aligned}$$

5. Diagonalelement von R_n:
Da R_n eine obere Dreiecksmatrix mit positiven Diagonalelement ist gilt:

$$det(R_n) = (R_n)_{11} \cdot (R_n)_{22} = 1$$

6. Wert von $ln((R_n)_{11}) + ln((R_n)_{22})$:
Da $ln(a \cdot b) = ln(a) + ln(b)$ gilt, ist:

$$\begin{aligned} ln((R_n)_{11}) + ln((R_n)_{22}) &= ln((R_n)_{11} \cdot (R_n)_{22}) \\ &= ln(1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

7. Folgerung für die Ljapunov Exponenten λ_1 und λ_2:
Die Exponenten sind definiert durch:

$$\lambda_i = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} ln((R_n)_{ii})$$

Die Summe von λ_1 und λ_2 ist somit gegeben durch:

$$\begin{aligned}\lambda_1 + \lambda_2 &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [ln((R_n)_{11}) + ln((R_n)_{22})] \\ &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \cdot 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

Das heißt, dass die Exponenten symmetrisch sind und heben sich gegenseitig auf:

$$\lambda_1 = -\lambda_2$$

Dies ist auch in dem Diagramm zu sehen:

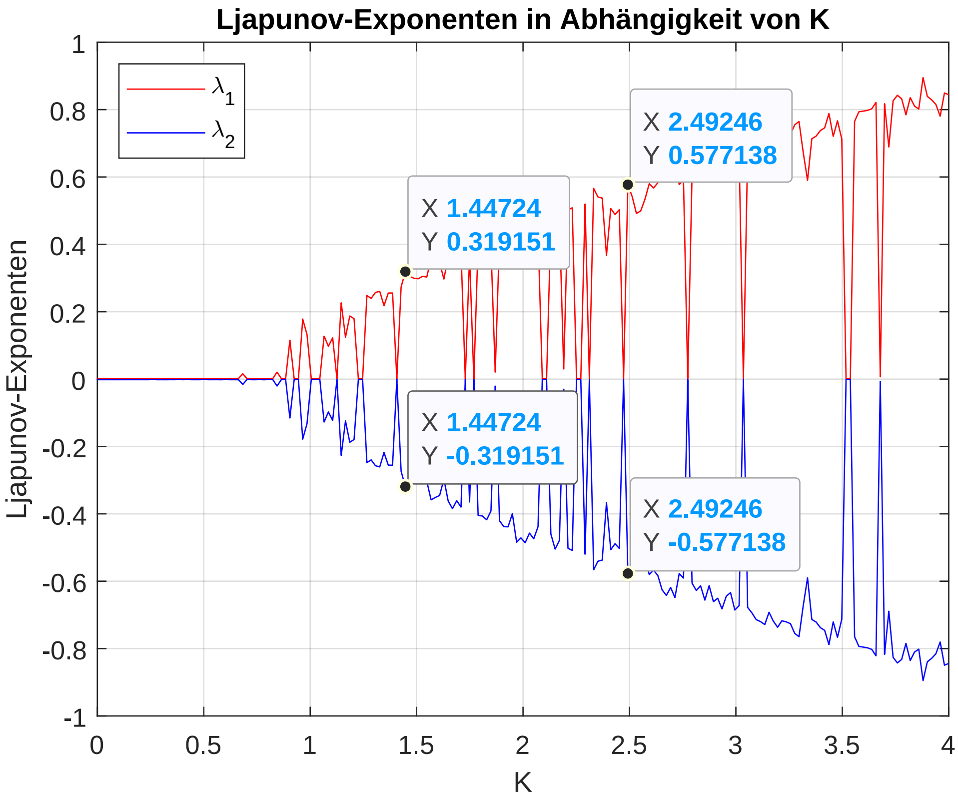

Abbildung 5: Ljapunov-Exponenten