

Afleidingen

Academiejaar 2021 – 2022

Robbe Decapmaker

Dedicated to Rebecca

Inleiding

De afleidingen voor trillingen en golven. De source code is te vinden op github.
https://github.com/debber1/Afleidingen_TG

Dit document is **niet** alles wat je moet kennen van theorie voor het examen. Ik ben niet verantwoordelijk voor jouw resultaat op jouw examen. Het is jouw verantwoordelijkheid om ook nog de andere onderdelen van deze cursus op een degelijke manier te verwerken. Het is namelijk zo dat dit document enkel wiskundige afleidingen bevat. Onderwerpen zoals polarisatie en radar zijn ook te kennen.

Contributors

Robbe Decapmaker
Sodir Yuksel
Jonathan Valgaeren
Robbe Willaert

Change log

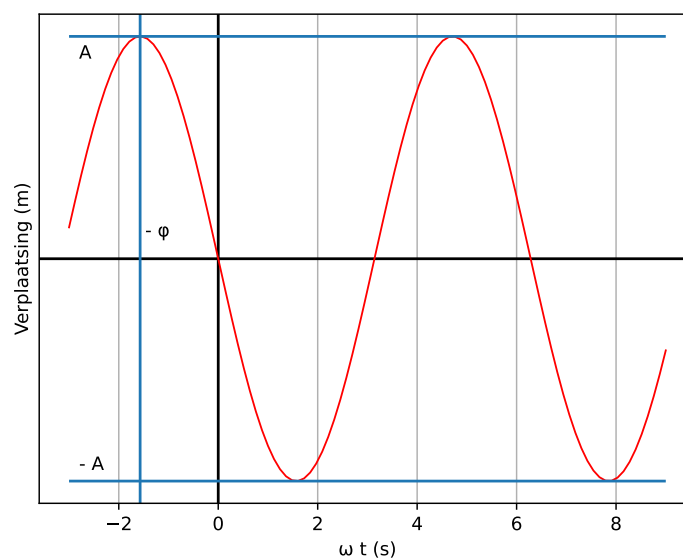
- Aan de hand van het document op Toledo aanduiden welke afleidingen niet gekend moeten zijn
In de titel staat nu 'niet in 2022'
- Fout in afleiding 6
- Fout in afleiding 24
- Fout in afleiding 27
- Fout in afleiding 28

1 Afleiding 1

Afleiding van de uitdrukking voor de verplaatsing van een ongedempte trilling aan de hand van de bewegings-vergelijking



Figuur 1: Massa veer systeem



Figuur 2: Harmonische Oscillator

We stellen eerst de tweede wet van Newton op voor het blokje M uit figuur 1.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

We kijken nu enkel naar de x-component en brengen de kracht van de veer in rekening:

$$-kx = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

We hebben ook de versnelling geschreven als de tweede afgeleide van de verplaatsing. Door alle termen naar het linker lid te verplaatsen krijgen we volgende differentiaal vergelijking:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0 \quad (1)$$

Deze differentiaal vergelijking moeten we oplossen aan de hand van beginvoorwaarden. Deze voorwaarden verkrijgen we experimenteel. Bij het experiment noteren we de uitwijking tegenover de tijd. Hierdoor verkrijgen we figuur 2. Wiskundig vertaalt dit zich tot:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (2)$$

We kunnen vergelijking 2 een eerste keer afleiden om de snelheid van het blokje te verkrijgen:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi) \quad (3)$$

Door vergelijking 2 nogmaals af te leiden, kunnen we ook de versnelling van het blokje verkrijgen:

$$a(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi) \quad (4)$$

Nu kunnen we vergelijkingen 4 en 2 invullen in vergelijking 1:

$$-\omega^2 m A \cos(\omega t + \varphi) + k A \cos(\omega t + \varphi) = 0 \quad (5)$$

Vergelijking 5 is nu een oplossing voor differentiaal vergelijking 1 als aan volgende voorwaarde voldaan is:

$$\begin{aligned} -\omega^2 m A \cos(\omega t + \varphi) + k A \cos(\omega t + \varphi) &= 0 \\ \left(\frac{k}{m} - \omega^2\right) A \cos(\omega t + \varphi) &= 0 \\ \frac{k}{m} - \omega^2 &= 0 \\ \frac{k}{m} &= \omega^2 \end{aligned}$$

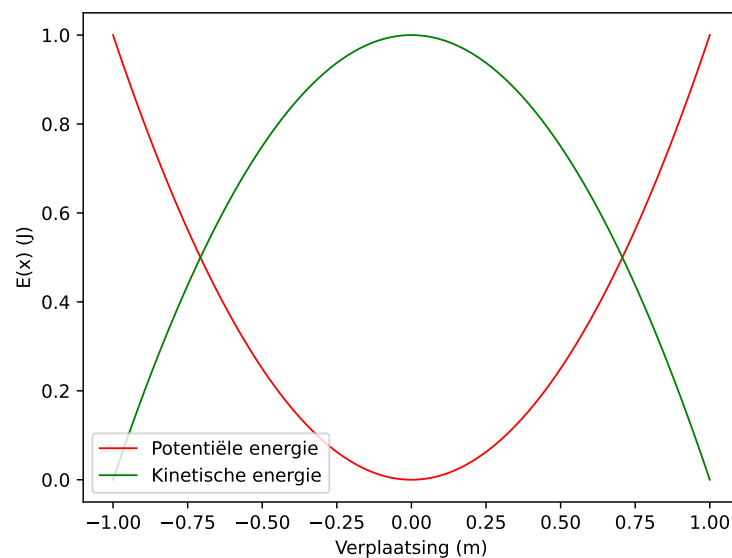
2 Afleiding 2

Afleiding van de potentiële en kinetische energie van een ongedempte trilling in functie van de plaats

Er zijn 2 vormen van energie aanwezig in een massa-veer-systeem. We hebben de potentiële energie in de veer en de kinetische energie van het blokje.

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 \\
 E(x) &= \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2}m\omega^2 A^2\sin^2(\omega t + \varphi) \\
 E(x) &= \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2}m\frac{k}{m}A^2\sin^2(\omega t + \varphi) \\
 E(x) &= \frac{1}{2}kA^2(\cos^2(\omega t + \varphi) + \sin^2(\omega t + \varphi)) \\
 E(x) &= \frac{1}{2}kA^2
 \end{aligned}$$

We zien nu duidelijk dat de hoeveelheid energie niet afhankelijk is van de uitwijking van de massa. Met andere woorden: de energie blijft constant in het systeem (figuur 3).



Figuur 3: Energie balans

3 Afleiding 3 (niet in 2022)

Snelheid in functie van de afstand

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

We kunnen vergelijkingen 3 en 4 invullen:

$$-A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) = \frac{dv}{dx} \cdot (-A\omega \sin(\omega t + \varphi))$$

Na schrappen en herschikken:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\omega \cos(\omega t + \varphi)}{\sin(\omega t + \varphi)}$$

Sinus substitutie:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} &= \frac{\omega \cos(\omega t + \varphi)}{\sqrt{1 - \cos^2(\omega t + \varphi)}} \\ \frac{dv}{dx} &= \frac{\pm \omega \frac{x}{A}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}} \end{aligned}$$

Nu integratie van beide leden:

$$\int dv = \int \frac{\pm \omega \frac{x}{A}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}} dx$$

De snelheid in functie van de afstand is dus:

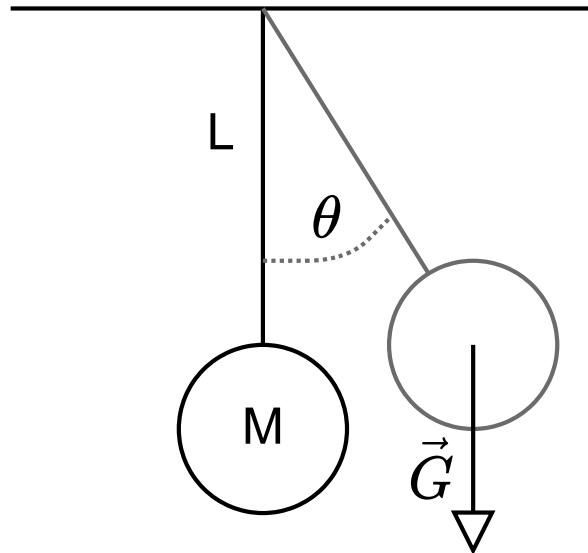
$$v(x) = \omega A \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \quad (6)$$

Uit vergelijking 6 kunnen we nu ook afleiden wat de uitdrukking is voor v_{\max} . We weten dat v_{\max} zich zal voordoen bij het evenwichtspunt oftewel als $x = 0$.

$$\begin{aligned} v(x) &= \omega A \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \\ v_{\max} &= \omega A \sqrt{1 - \frac{0^2}{A^2}} \\ v_{\max} &= \omega A \sqrt{1} \\ v_{\max} &= \omega A \end{aligned}$$

4 Afleiding 4

Afleiding van de beweging van een pendulum aan de hand van de bewegingsvergelijking



Figuur 4: Pendulum

De drijvende kracht van de pendulum is gelijk aan:

$$F = -mg \sin(\theta)$$

Hiermee kunnen we de bewegingsvergelijking opstellen:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -mg \sin(\theta)$$

We kunnen stellen dat $\sin(\theta) \approx \theta$ voor een kleine θ :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -mg\theta$$

We kunnen ook stellen dat $x = l\theta$:

$$ml \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -mg\theta$$

We kunnen dit nu herschrijven naar:

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \theta = 0$$

Dit geeft ons een differentiaalvergelijking. Een oplossing ziet er als volgt uit:

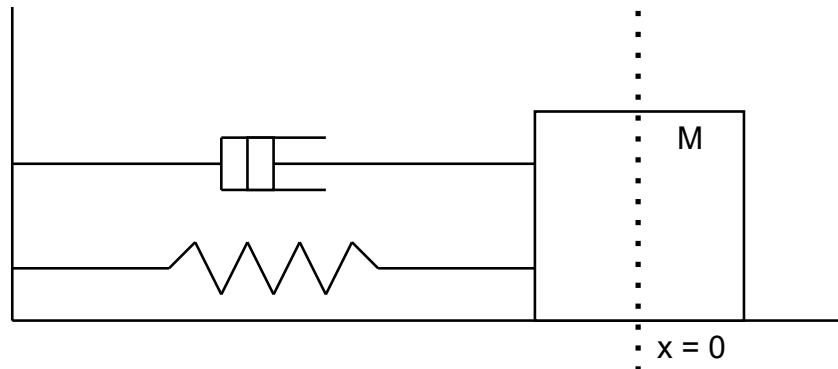
$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

Hierbij zien we dat $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

5 Afleiding 5

Gedempte harmonische trilling

We beginnen met de bewegingsvergelijking op te stellen:



Figuur 5: Gedempt massa-veer-systeem

$$\begin{aligned}
 m\vec{a} &= \vec{F}_{veer} + \vec{F}_{demper} \\
 m \frac{d^2x}{dt^2} &= -kx - bv \\
 m \frac{d^2x}{dt^2} &= -kx - b \frac{dx}{dt} \\
 0 &= m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx
 \end{aligned}$$

We maken gebruik van de formule van Euler $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$ om tot een oplossing van de differentiaalvergelijking te komen:

$$\tilde{x}(t) = Ae^{(\gamma+i\omega)t+i\varphi}$$

Het reëel deel is dus:

$$x(t) = \text{Re}(\tilde{x}(t)) = Ae^{\gamma t} \cos(\omega t + \varphi)$$

We kunnen deze nu invullen in de bewegingsvergelijking:

$$m(\gamma + i\omega)^2 \tilde{x}(t) + b(\gamma + i\omega) e^{(\gamma+i\omega)t+i\varphi} + k e^{(\gamma+i\omega)t+i\varphi} = 0 \quad (7)$$

Na herordenen en het delen door m, krijgen we:

$$\gamma^2 + 2i\gamma\omega - \omega^2 + \frac{b}{m}\gamma + i\frac{\omega b}{m} + \frac{k}{m} = 0$$

We kijken nu naar het imaginair deel:

$$\begin{aligned}
 2i\gamma\omega + i\frac{\omega b}{m} &= 0 \\
 2\gamma + \frac{b}{m} &= 0 \\
 -\frac{b}{2m} &= \gamma
 \end{aligned}$$

We vullen nu deze waarde van γ in in het reëel deel van vergelijking 7:

$$\begin{aligned}\gamma^2 - \omega^2 + \frac{b}{m}\gamma + \frac{k}{m} &= 0 \\ \left(-\frac{b}{2m}\right)^2 - \omega^2 + \frac{b}{m}\left(-\frac{b}{2m}\right) + \frac{k}{m} &= 0 \\ \frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2} &= \omega^2 \\ \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} &= \omega\end{aligned}$$

Hiermee hebben we nu de natuurlijke frequentie van het systeem gevonden. We kunnen tot slot ook nog stellen dat:

$$x(t) = \text{Re}(\tilde{x}(t)) = Ae^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega t + \varphi)$$

We kunnen nu drie gevallen onderscheiden:



Figuur 6: Ondergedempte trilling ($b^2 < 4mk$)



Figuur 7: Kritisch ($b^2 = 4mk$) en over gedempte ($b^2 > 4mk$) trilling

6 Afleiding 6

Gedwongen trillingen

We stellen eerst de bewegingsvergelijking op:

$$m \frac{d^2 \tilde{x}(t)}{dt^2} + b \frac{d\tilde{x}(t)}{dt} + k\tilde{x}(t) = F_0 \cos(\omega t) \quad (8)$$

Een voorstel voor de algemene oplossing van differentiaalvergelijking 8 ziet er als volgt uit:

$$\tilde{x}(t) = A e^{i(\omega t + \varphi)}$$

waarbij $\tilde{F} = F_0 e^{i\omega t}$. Dit kunnen we nu invullen in vergelijking 8:

$$\begin{aligned} m\omega^2 \tilde{x}(t) + i\omega b \tilde{x}(t) + k\tilde{x}(t) &= F_0 e^{i\omega t} \\ m\omega^2 A e^{i\omega t} e^{i\varphi} + i\omega b A e^{i\omega t} e^{i\varphi} + k A e^{i\omega t} e^{i\varphi} &= F_0 e^{i\omega t} \\ m\omega^2 A + i\omega b + k &= F_0 e^{-i\varphi} \end{aligned}$$

We kunnen dit opsplitsen in een imaginair en reëel deel:

Imaginaire: $\omega b A = -F_0 \sin(\varphi)$

Reëel: $-m\omega^2 A + k A = F_0 \cos(\varphi)$

Als we nu het imaginair deel delen door het reëel deel verkrijgen we voor φ :

$$\begin{aligned} -\frac{\omega b}{k - m\omega^2} &= \tan(\varphi) \\ b \tan\left(\frac{-\omega b}{k - m\omega^2}\right) &= \varphi \end{aligned}$$

Om de amplitude te bepalen kijken we opnieuw naar het imaginair deel:

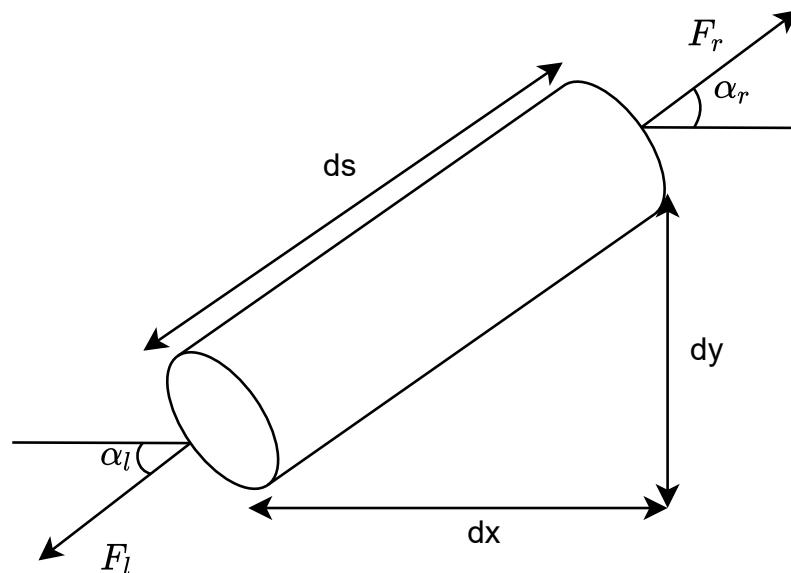
$$\begin{aligned} \omega b A &= -F_0 \sin(\varphi) \\ \omega b A &= -F_0 \frac{\tan(\varphi)}{\sqrt{1 + \tan^2(\varphi)}} \\ \omega b A &= -F_0 \frac{\tan(b \tan(\frac{-\omega b}{k - m\omega^2}))}{\sqrt{1 + \tan^2(b \tan(\frac{-\omega b}{k - m\omega^2}))}} \\ \omega b A &= -F_0 \frac{\frac{-\omega b}{k - m\omega^2}}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2 b^2}{(k - m\omega^2)^2}}} \\ \omega b A &= -F_0 \frac{\frac{-\omega b}{k - m\omega^2}}{\sqrt{\frac{(k - m\omega^2)^2 + \omega^2 b^2}{(k - m\omega^2)^2}}} \\ A &= \frac{\frac{F_0}{k - m\omega^2}}{\sqrt{\frac{(k - m\omega^2)^2 + \omega^2 b^2}{(k - m\omega^2)^2}}} \\ A &= \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\frac{k}{m} - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2 b^2}{m^2}}} \\ A &= \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2 b^2}{m^2}}} \end{aligned}$$

met ω_0 de natuurlijke frequentie van het systeem en ω de gedwongen frequentie.

7 Afleiding 7

Golf vergelijking

We nemen aan dat F_r en F_l uit figuur 8 gelijk zijn aan elkaar en aan de spanning in het touw σA . we stellen ook dat de massa voldoet aan $dm = \rho ds A$.



Figuur 8: Touw

We starten met het opstellen van de wet van Newton:

$$\begin{aligned}\sum \vec{F} &= m\vec{a} \\ F_r \sin(\alpha_r) - F_l \sin(\alpha_l) &= dm a_y \\ \sigma A (\sin(\alpha_r) - \sin(\alpha_l)) &= dm \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \\ \sigma \left(\frac{dy}{dx} \Big|_r - \frac{dy}{dx} \Big|_l \right) &= \rho ds \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\end{aligned}$$

We stellen dat α klein is, en dus kunnen we zeggen dat $\sin(\alpha) \approx \tan(\alpha) = \frac{dy}{dx}$. We nemen ook aan dat $ds \approx dx$.

$$\begin{aligned}\sigma \frac{\frac{dy}{dx} \Big|_r - \frac{dy}{dx} \Big|_l}{dx} &= \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \\ \sigma \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\end{aligned}$$

Hiermee zijn we de 1D golfvergelijking bekomen.

8 Afleiding 8 (niet in 2022)

Harmonische golven

Een voorstel voor de 1D golf vergelijking ziet er als volgt uit:

$$y(x, t) = y_m \sin(kx \pm \omega t + \varphi)$$

We kunnen deze oplossing invullen in de golfvergelijking:

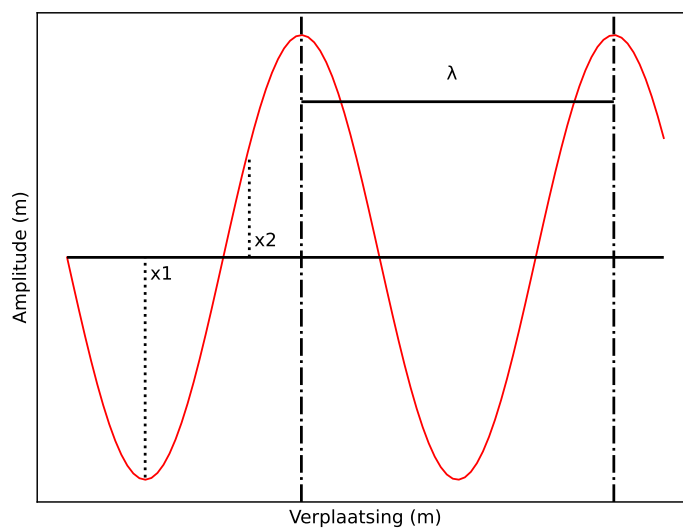
$$-\omega^2 y_m \sin(kx \pm \omega t + \varphi) = v^2 k^2 y_m \sin(kx \pm \omega t + \varphi)$$

Als we dit vereenvoudigen, krijgen we de voorwaarden waaraan een golf moet voldoen.

$$v^2 = \frac{\omega^2}{k^2}$$

$$v = \pm \frac{\omega}{k}$$

We kunnen nu een analyse doen op de golfvergelijking in het tijdsdomein:



Figuur 9: Tijdsdomein analyse

We starten opnieuw met de algemene oplossing, maar dan op vaste plaats x_1 :

$$y(x_1, t) = y_m \sin(kx_1 \pm \omega t + \varphi) \quad (9)$$

$$y(x_1, t) = y_m \sin(\pm \omega t + \varphi_1) \quad (10)$$

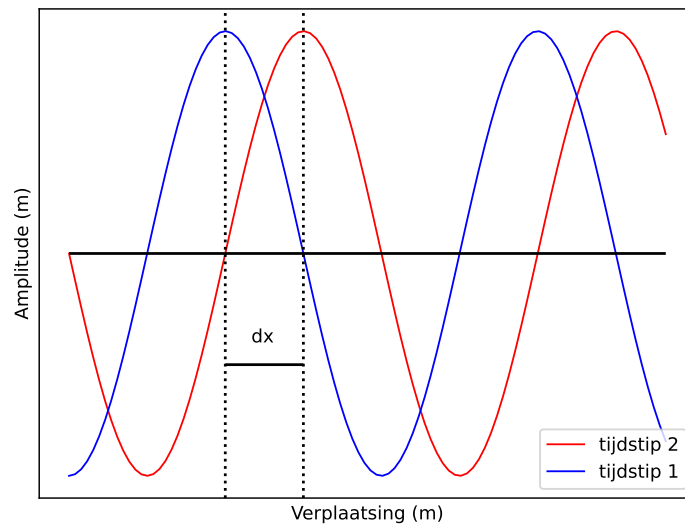
met $\varphi_1 = kx_1 + \varphi$. We kunnen dit opnieuw doen voor x_2 :

$$y(x_2, t) = y_m \sin(kx_2 \pm \omega t + \varphi) \quad (11)$$

$$y(x_2, t) = y_m \sin(\pm \omega t + \varphi_2) \quad (12)$$

met $\varphi_2 = kx_2 + \varphi$. Uit vergelijkingen 10 en 12 stellen we vast dat er enkel een fase verschuiving is. We vermelden ook nog dat oscillaties in fase zijn als $2\pi = k\lambda$.

We doen ook de analyse doen op de golfvergelijking in de ruimte:



Figuur 10: Ruimtelijke analyse

We starten opnieuw met de algemene oplossing, maar dan op vast tijdstip t_1 :

$$y(x, t_1) = y_m \sin(kx \pm \omega t_1 + \varphi) \quad (13)$$

$$y(x, t_1) = y_m \sin(kx + \varphi_1) \quad (14)$$

met $\varphi_1 = \varphi \pm \omega t_1$. We stellen dit opnieuw op voor t_2

$$y(x, t_2) = y_m \sin(kx \pm \omega t_2 + \varphi) \quad (15)$$

$$y(x, t_2) = y_m \sin(kx \pm \underbrace{\omega t_1 + \varphi}_{\varphi_1} \pm \Delta t) \quad (16)$$

$$y(x, t_2) = y_m \sin(kx + \varphi_2) \quad (17)$$

met $\varphi_2 = \varphi_1 \pm \Delta t$. Uit de waarden van φ_1 en φ_2 kunnen we de voortplantingsrichting van de golf bepalen:

$\varphi_1 < \varphi_2$	Golf naar rechts
$\varphi_1 > \varphi_2$	Golf naar links

We kunnen ook iets zeggen over de voortplantingssnelheid v .

$$v = \frac{dx_{max}}{dt} = \frac{d}{dt}(kx_{max} \pm \omega t + \varphi) = 0$$

$$k \frac{dx_{max}}{dt} \pm \omega = 0$$

$$\pm \frac{\omega}{k} = v$$

$$\pm \frac{2\pi f}{\frac{2\pi}{\lambda}} = v$$

$$\pm \lambda f = v$$

9 Afleiding 9 (niet in 2022)

Superpositie

We zeggen dat de algemene oplossing $y(x, t)$ van de golfvergelijking kan uitgedrukt worden door 2 nieuwe functies:

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$$

We vullen dit opnieuw in in de golfvergelijking:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} &= v^2 \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 y_1(x, t) + y_2(x, t)}{\partial t^2} &= v^2 \frac{\partial^2 y_1(x, t) + y_2(x, t)}{\partial x^2}\end{aligned}$$

We gebruiken de lineariteit van de afgeleide:

$$\frac{\partial^2 y_1(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 y_2(x, t)}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 y_1(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y_2(x, t)}{\partial x^2} \right)$$

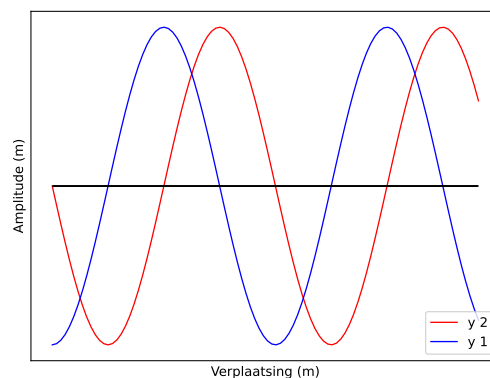
10 Afleiding 10 (niet in 2022)

Interferentie

Interferentie doet zich voor als er meerdere verschillende golven aanwezig zijn in 1 medium. We kunnen dit voorstellen door volgende 2 functies (zie ook figuur 11):

$$y_1 = y_m \sin(kx \pm \omega t)$$

$$y_2 = y_m \sin(kx \pm \omega t + \phi)$$



Figuur 11: Golven y_1 en y_2 die zullen interfereren

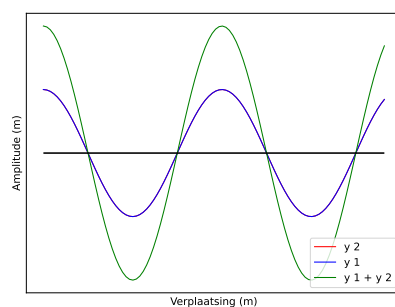
We bepalen nu hoe $y_1 + y_2$ er wiskundig uit zal zien aan de hand van de regels van Simpson:

$$y = y_1 + y_2$$

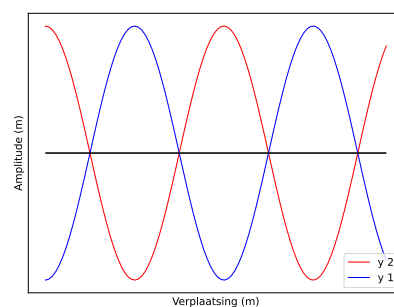
$$y = y_m \sin(kx \pm \omega t) + y_m \sin(kx \pm \omega t + \phi)$$

$$y = \underbrace{2y_m \cos\left(\frac{\phi}{2}\right)}_{A=f(\phi)} \sin\left(kx \pm \omega t + \frac{\phi}{2}\right)$$

De 2 uitersten van dit fenomeen krijgen een naam: destructieve- en constructieve-interferentie. Bij destructieve zullen de golven elkaar tegen werken zodat de beweging stopt (zie figuur 12b). Constructieve interferentie zal ervoor zorgen dat de resulterende golf groter wordt (zie figuur 12a).



(a) Constructieve interferentie



(b) Destructieve interferentie

Figuur 12: Twee extreme gevallen van interferentie.

11 Afleiding 11

Staande golven

Staande golven doen zich vaak voor bij muziek instrumenten zoals de gitaar. We een staande golf als volgt wiskundig voorstellen:

$$y(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t) + y_m \sin(kx + \omega t)$$

$$y(x, t) = \underbrace{2y_m \sin(kx)}_{A(x)} \cos(\omega t)$$

Hierbij gebruiken we wederom de regels van Simpson. Omdat de uiteinden van de snaar (met lengte L) vast gehouden worden, kunnen we volgende randvoorwaarden stellen:

$$y(0, t) = 0 \Rightarrow \sin(0) = 0$$

$$y(L, t) = 0 \Rightarrow \sin(kL) = 0$$

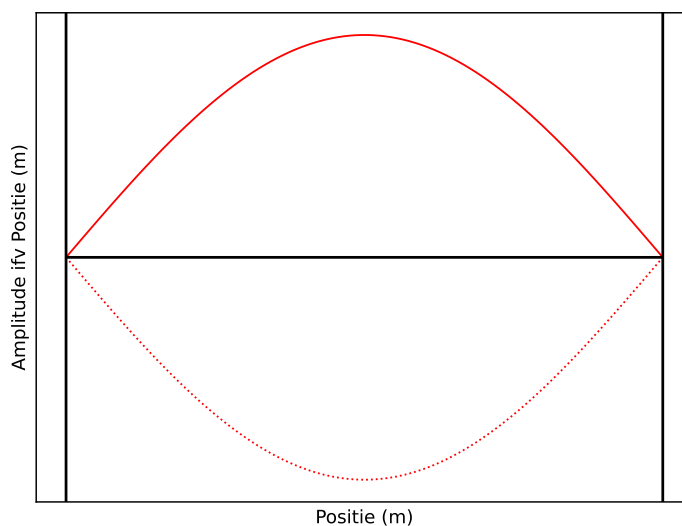
We kunnen dus algemeen zeggen dat $k \cdot L$ altijd gelijk moet zijn aan een veelvoud van π oftewel:

$$kL = m\pi (m \in \mathbb{N})$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} L = m\pi$$

$$\lambda = \frac{2L}{m}$$

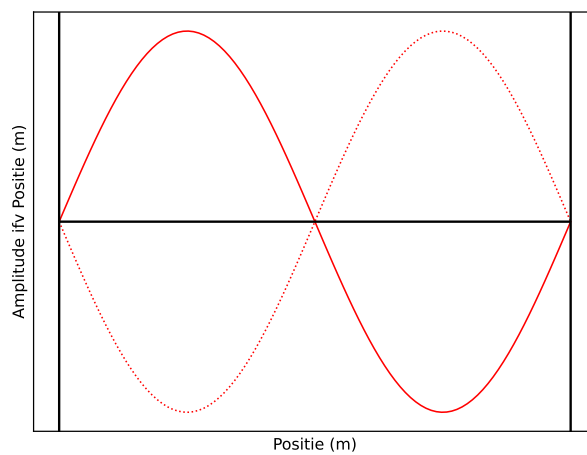
Eerste harmonische ($m = 1$)



Figuur 13: Eerste harmonische

Hierbij is $m = 1$ dus moet $\lambda = 2L$ en de frequentie is dan $f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{2L}$.

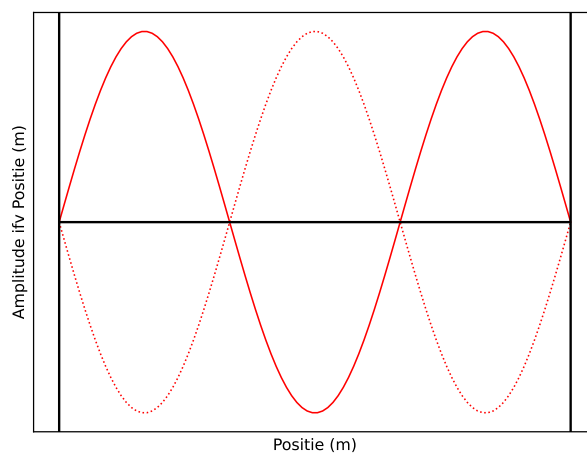
Tweede harmonische ($m = 2$)



Figuur 14: Tweede harmonische

Hierbij is $m = 2$ dus moet $\lambda = L$ en de frequentie is dan $f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{L}$.

Derde harmonische ($m = 3$)

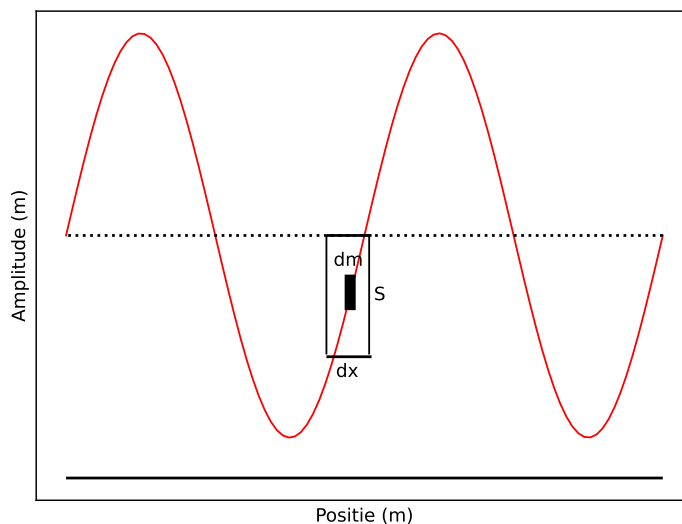


Figuur 15: Derde harmonische

Hierbij is $m = 3$ dus moet $\lambda = \frac{2}{3}L$ en de frequentie is dan $f = \frac{v}{\lambda} = \frac{3v}{2L}$.

12 Afleiding 12

Energie transport in een golf



Figuur 16: Energie transport

De energie in een massa-veer-systeem is:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = dE = \frac{1}{2}\omega^2 dm A^2$$

We gebruiken nu het feit dat $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ en $\omega = 2\pi f$:

$$dE = 2\pi^2 f^2 dm A^2$$

We kunnen dm herschrijven als $dm = \rho S dx = \rho S dt v$:

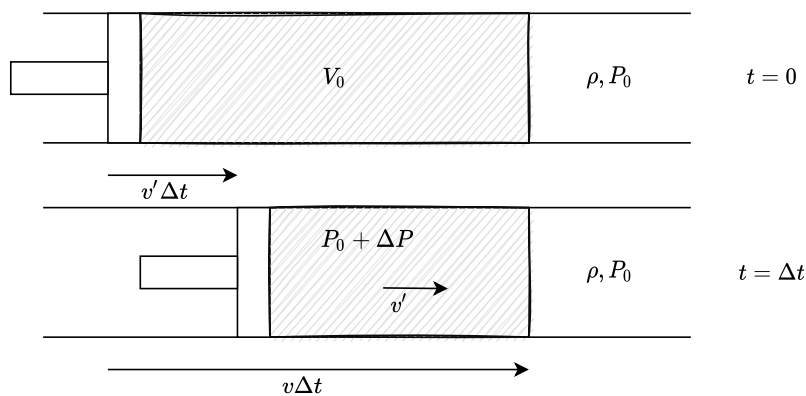
$$\begin{aligned} dE &= 2\pi^2 f^2 A^2 \rho S v dt \\ \frac{dE}{dt} &= 2\pi^2 f^2 A^2 \rho S v = P \end{aligned}$$

We bekomen het vermogen van de golf. We kunnen hieruit vervolgens de intensiteit I halen:

$$I = \frac{P}{S} = 2\pi^2 f^2 A^2 \rho v$$

13 Afleiding 13

Eigenschappen geluid



Figuur 17: Druk golf in een zuiger

Met v' de snelheid van de zuiger en v de geluidssnelheid kunnen we stellen dat:

$$\begin{aligned} V_0 &= Sv\Delta t \\ \Delta V &= -Sv'\Delta t \end{aligned}$$

De kracht is dan:

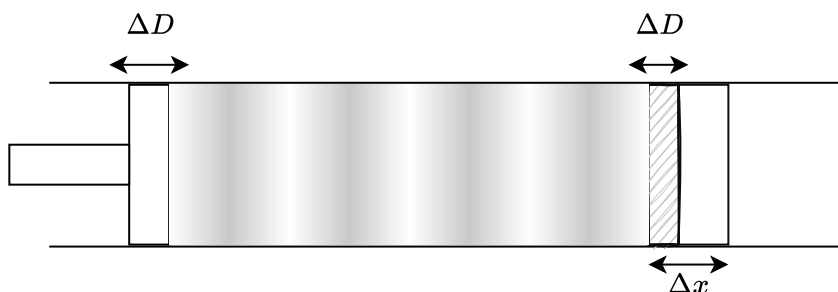
$$\begin{aligned} F_{\text{net}} &= (P_0 + \Delta P)S - P_0S \\ F_{\text{net}} &= \Delta PS \end{aligned}$$

Als we rekening houden met het feit dat $dm = \rho V_0$ kunnen we met behulp van impuls berekenen dat:

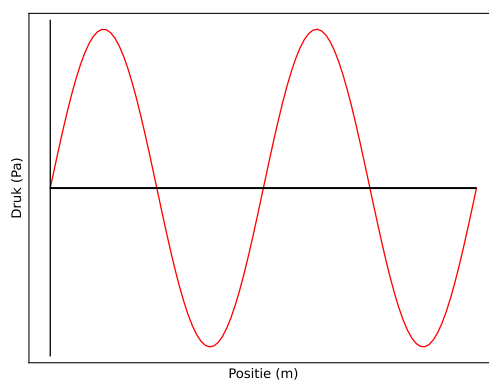
$$\begin{aligned} F_{\text{net}}\Delta t &= dm v' \\ F_{\text{net}}\Delta t &= \rho v\Delta t S v' \\ \Delta PS &= \rho v S v' \\ \Delta P &= \rho v v' \end{aligned}$$

14 Afleiding 14

Wiskundige beschrijving van geluid



Figuur 18: Drukgolven in een buis



Figuur 19: Drukgolven in een buis

Met de compressie- of bulk-modulus $B = \frac{\Delta P}{\frac{\Delta V}{V_0}}$ kunnen we zeggen dat:

$$\begin{aligned}\Delta P &= -B \frac{\Delta V}{dv} \\ \Delta P &= -B \frac{\Delta D S}{\Delta x S} \\ \Delta P &= -B \frac{\partial D}{\partial x}\end{aligned}$$

We geven een voorstel voor D : $D = \Delta \sin(kx \pm \omega t)$

$$\begin{aligned}\Delta P &= -BAk \cos(kx \pm \omega t) \\ &= -\rho v^2 Ak \cos(kx \pm \omega t) \\ &= -\rho v \omega A \cos(kx \pm \omega t) \\ &= \underbrace{-2\pi \rho v f A}_{\Delta P_m} \cos(kx \pm \omega t)\end{aligned}$$

15 Afleiding 15 (niet in 2022)

Trillende lucht kolommen

We modelleren de verplaatsing van lucht als:

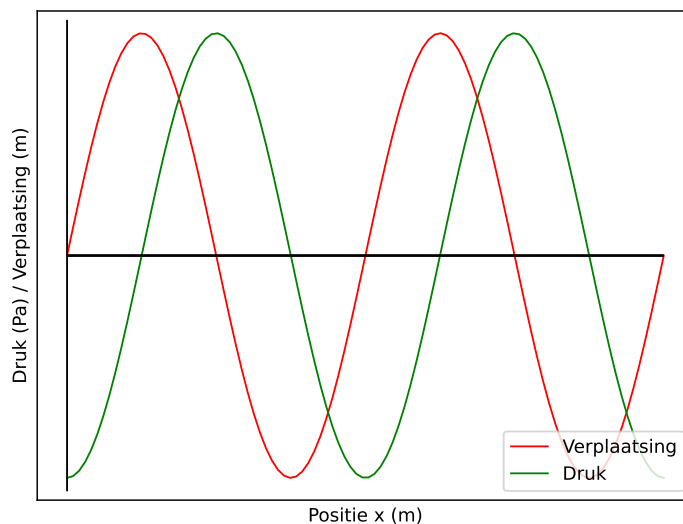
$$D = A \sin(kx \pm \omega t) \quad (18)$$

De druk kunnen we schrijven als:

$$\Delta P = -\Delta P_M \cos(kx \pm \omega t) \quad (19)$$

$$= -\Delta P_M \sin(kx \pm \omega t - \frac{\pi}{2}) \quad (20)$$

Uit vergelijking 18 en 20 kunnen we afleiden dat de druk een faseverschil van $\frac{\pi}{2}$ heeft tegenover de verplaatsing zoals te zien is in figuur 20. We zien hier duidelijk dat de druk na ijt op de verplaatsing.



Figuur 20: Fase verschil tussen druk en verplaatsing

16 Afleiding 16

Staannde golven in een open buis

We veronderstellen een open buis met lengte L . Als nevenvoorwaarde stellen we dat de druk aan de uiterste kanten van de buis gelijk is aan de atmosferische druk P_{atm} . We kijken eerst naar de drukverdeling in de buis:

$$\begin{aligned}\Delta P_S(x, t) &= \Delta P_m \sin(kx + \omega t) + \Delta P_m \sin(kx - \omega t) \\ &= 2\Delta P_m \sin(kx) \cos(\omega t)\end{aligned}$$

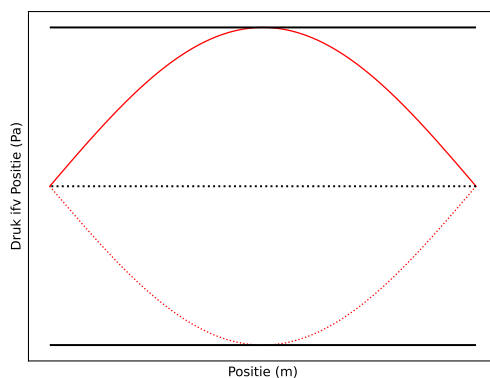
Hierbij gebruiken we de regels van Simpson. Vervolgens kijken we naar de verplaatsing in de buis:

$$\begin{aligned}D_S(x, t) &= A \sin(kx + \omega t + \frac{\pi}{2}) + A \sin(kx - \omega t + \frac{\pi}{2}) \\ &= 2A \sin(kx + \frac{\pi}{2}) \cos(\omega t)\end{aligned}$$

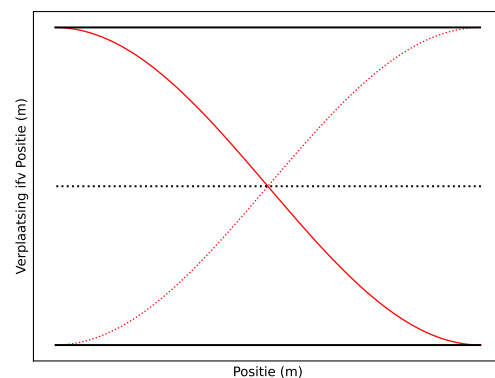
Hierbij gebruiken we nogmaals de regels van Simpson. Enkele oplossingen zien er als volgt uit:

Eerste harmonische

Hierbij is $\lambda = 2L$ en $f = \frac{v}{2L}$.



(a) Drukverdeling



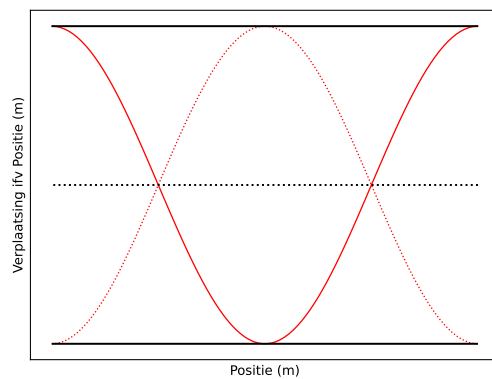
(b) Verplaatsing

Figuur 21: Druk en verplaatsing voor de eerste harmonische in een open buis

Tweede harmonische
Hierbij is $\lambda = L$ en $f = \frac{v}{L}$.



(a) Drukverdeling



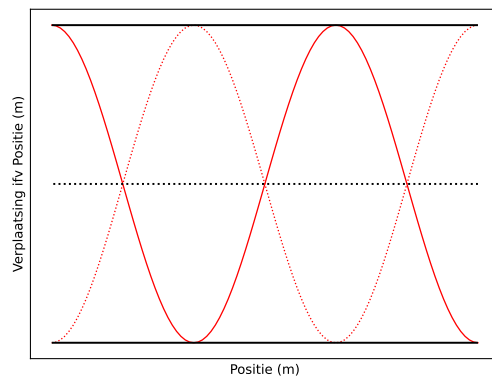
(b) Verplaatsing

Figuur 22: Druk en verplaatsing voor de tweede harmonische in een open buis

Derde harmonische
Hierbij is $\lambda = \frac{2L}{3}$ en $f = \frac{3v}{2L}$.



(a) Drukverdeling

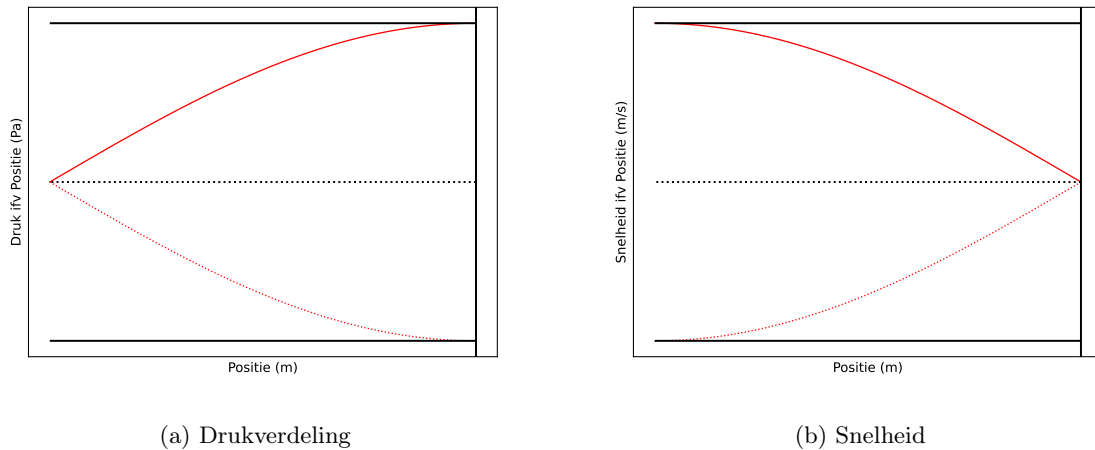


(b) Verplaatsing

Figuur 23: Druk en verplaatsing voor de derde harmonische in een open buis

17 Afleiding 17

Staande golven in een half open buis



Figuur 24: Druk en snelheid voor de eerste harmonische in een half open buis

We kunnen opnieuw enkele randvoorwaarden stellen:

$$D_s(L, t) = 0 \Rightarrow kl + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Dit wil zeggen dat:

$$k = \frac{\pi}{2L} = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 4L \wedge f = \frac{v}{4L}$$

We kunnen ook een tweede nevenvoorwaarde opstellen:

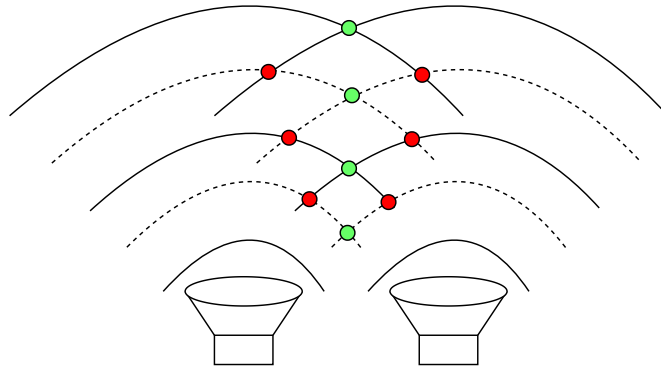
$$kL + \frac{\pi}{2} = 2\pi$$

Dit wil zeggen dat:

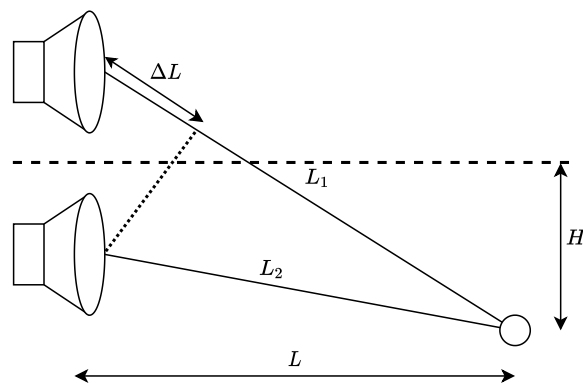
$$k = \frac{3\pi}{2L} = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{4L}{3} \wedge f = \frac{3v}{4L}$$

18 Afleiding 18 (niet in 2022)

Interferentie van geluidsgolven



Figuur 25: Interferentie bij speakers



Figuur 26: Interferentie wiskundig

We kunnen de druk beschrijven als:

$$\Delta P_1 = \Delta P_m \sin(kL_1 \pm \omega t)$$

$$\Delta P_2 = \Delta P_m \sin(kL_2 \pm \omega t)$$

Door beide op te tellen en de regels van Simpson toe te passen krijgen we:

$$\Delta P = 2\Delta P_m \sin\left(k \frac{L_1 + L_2}{2} \pm \omega t\right) \cos\left(k \frac{L_1 - L_2}{2}\right)$$

We onderscheiden 2 soorten interferentie zoals te zien in figuur 25. Constructieve interferentie (groen) en destructieve interferentie (rood).

Bij constructieve interferentie is $\frac{k\Delta L}{2} = 0, \pi, 2\pi, \dots$. Dit wil zeggen dat ΔL moet voldoen aan $\Delta L = 0, \lambda, 2\lambda, \dots$. Destructieve interferentie doet zich voor als $\frac{k\Delta L}{2} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$. ΔL moet hier dus voldoen aan $\Delta L = \frac{\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \dots$

19 Afleiding 19 (niet in 2022)

Kloppen van een golf

Als 2 golven frequenties hebben die zeer dicht bij elkaar liggen, krijgen we kloppingen. We kunnen de druk van beide golven voorstellen als:

$$D_1 = A \sin(2\pi f_1 t)$$

$$D_2 = A \sin(2\pi f_2 t)$$

Door beide op te tellen en de regels van Simpson toe te passen krijgen we:

$$D = 2A \cos(2\pi \frac{f_1 - f_2}{2} t) \sin(2\pi \frac{f_1 + f_2}{2} t)$$

Hierbij vermelden we ook nog dat als $f_1 \approx f_2 \Rightarrow \Delta\omega = \frac{f_1 - f_2}{2} \ll 1$.

20 Afleiding 20

Doppler effect

Het doppler effect doet zich voor als de bron en waarnemer van een geluid in beweging zijn tegenover elkaar. We analyseren nu het geval waarin de bron beweegt: als de bron naar rechts beweegt, zal een waarnemer die zich links bevindt een lagere frequentie waarnemen. Een waarnemer die rechts staat, zal daarentegen een hogere frequentie waarnemen. De nieuwe frequentie heet λ' . Wiskundig kunnen we λ' bepalen met volgende redenering:

$$\lambda' = \lambda \pm v_{bron}T = \lambda \pm v_{bron} \frac{\lambda}{v_s} = \lambda(1 \pm \frac{v_{bron}}{v_s})$$

De nieuwe frequentie is dan $f' = \frac{f}{1 \pm \frac{v_{bron}}{v_s}}$.

Bron naar je toe	f ↗
Bron van je weg	f ↘

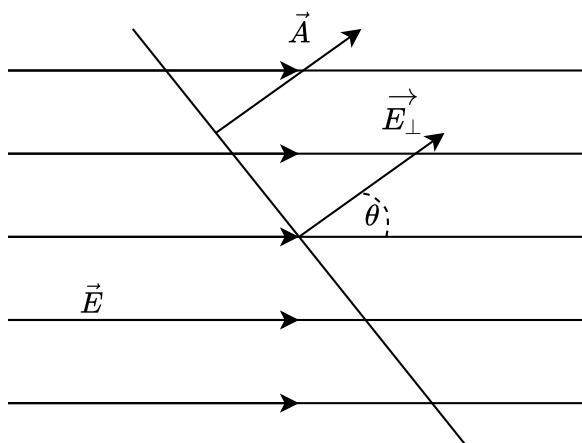
21 Afleiding 21 (Niet in 2022)

Basiswetten voor elektromagnetische golven

Wet van Ampère

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu I_{\text{us}} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

waarbij Φ_E de elektrische flux is:



Figuur 27: Elektrisch veld

$$\begin{aligned}\Phi_E &= E_{\perp} A \\ &= E \cos(\theta) A \\ &= \vec{E} \cdot \vec{A} \quad (\text{Scalair product})\end{aligned}$$

Wetten van Maxwell

$$\oint \vec{E} d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (21)$$

$$\oint \vec{B} d\vec{A} = 0 \quad (22)$$

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} \quad (23)$$

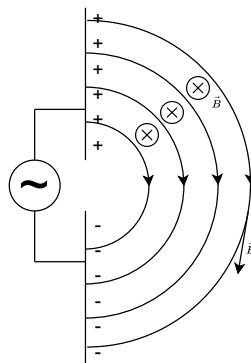
$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu \epsilon_0 \frac{\partial \Phi_E}{\partial t} \quad (24)$$

waarbij vergelijking 23 en 24 invloed hebben op elektromagnetische golven.

22 Afleiding 22 (niet in 2022)

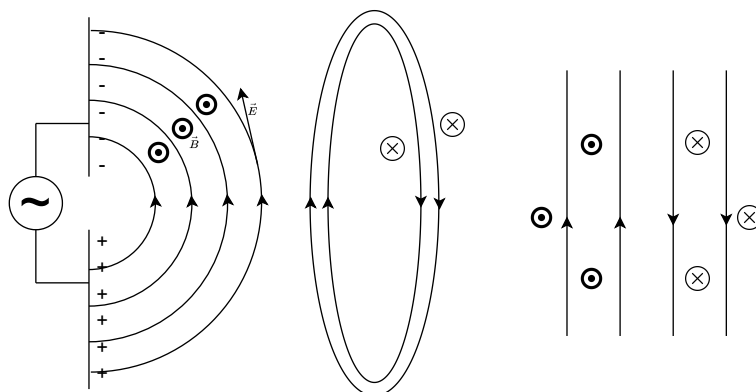
Generatie EM golven

Men kan elektromagnetische golven genereren door twee platen naast elkaar te zetten met een wisselspanningsbron zoals in figuur 28:



Figuur 28: Generatie EM golf

Als de spanningsbron van polariteit veranderd, veranderen ook de velden van richting zoals in figuur 29. Hier kunnen we tevens ook zien hoe de golf zich voortplant in de ruimte: na verloop van tijd zullen de golven een lineair karakter krijgen.



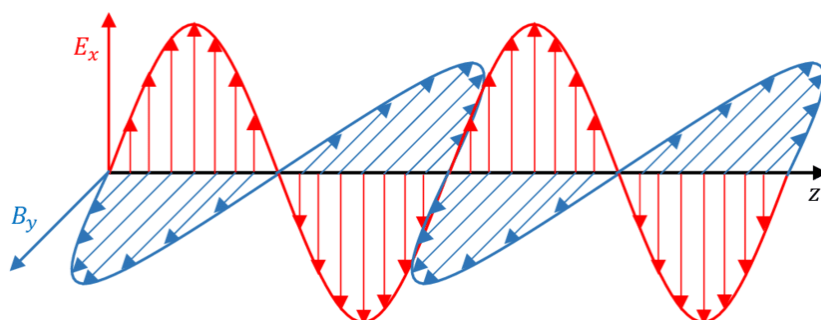
Figuur 29: Generatie en voortplanting EM golf

23 Afleiding 23 (niet in 2022)

Elektromagnetische velden

Eerst enkele eigenschappen van elektromagnetische golven:

1. \vec{B} en \vec{E} staan loodrecht op de voortplantingsrichting (transversale golven)
2. \vec{B} staat loodrecht op \vec{E}
3. $\vec{B} \times \vec{E}$ geeft de voortplantingsrichting van de golf
4. \vec{B} en \vec{E} zijn harmonische golven met $\Delta\Phi = 0$



Figuur 30: Elektromagnetische golf

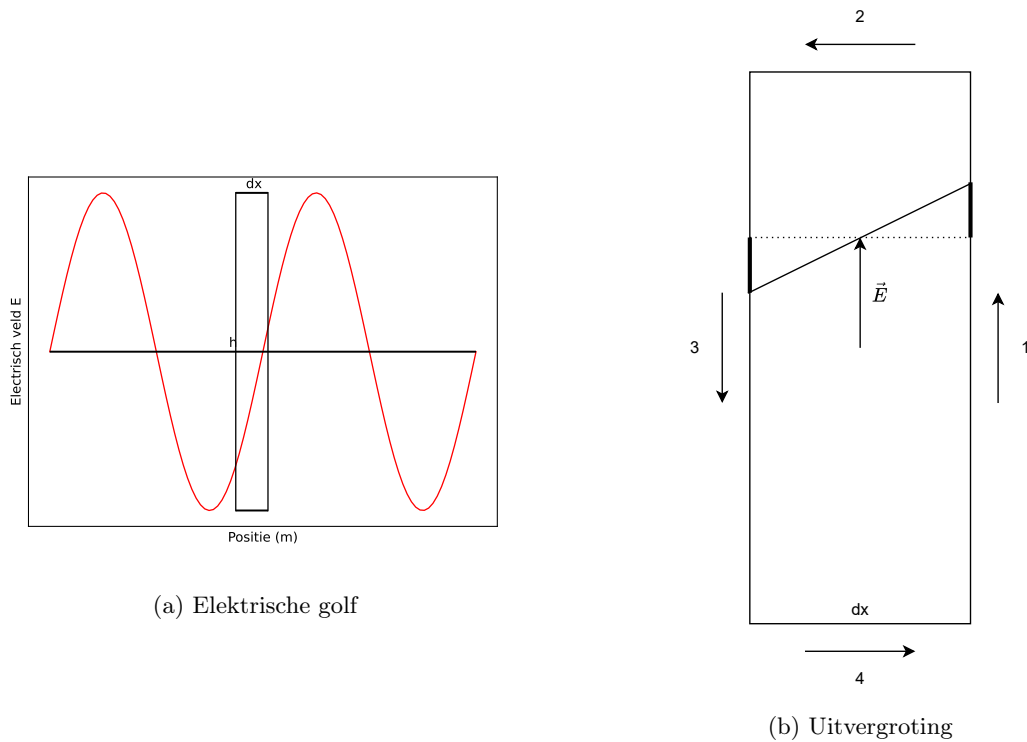
In figuur 30 kunnen we stellen dat:

$$\vec{E} = E_m \sin(kx - \omega t) \vec{j}$$

$$\vec{B} = B_m \sin(kx - \omega t) \vec{k}$$

24 Afleiding 24

Opstellen van de golfvergelijking van een elektromagnetische golf Wet van Faraday



Figuur 31: Wet van Faraday

We berekenen de verandering in de elektrische flux van een golf. We definiëren hiervoor een gesloten kring zoals te zien is in figuur 31a. We nemen dx zo klein mogelijk, zodat we de golf op dit kleine interval als lineair kunnen aannemen. We zien deze linearisering in figuur 31b. Hierdoor wordt het effectief elektrisch veld gereduceerd tot de twee dikke lijnen op de linker en rechter zijde van de rechthoek. Deze zijn respectievelijk gelijk aan:

$$\begin{aligned}\vec{E}_L &= \vec{E} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} \frac{dx}{2} \\ \vec{E}_R &= \vec{E} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} \frac{dx}{2}\end{aligned}$$

Door de wet van Faraday $-\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S}$ toe te passen op alle 4 zijden van de rechthoek bekomen we:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \underbrace{\left(E + \frac{\partial E}{\partial x} \frac{dx}{2}\right)h}_1 + \underbrace{0}_2 - \underbrace{\left(E - \frac{\partial E}{\partial x} \frac{dx}{2}\right)h}_3 + \underbrace{0}_4$$

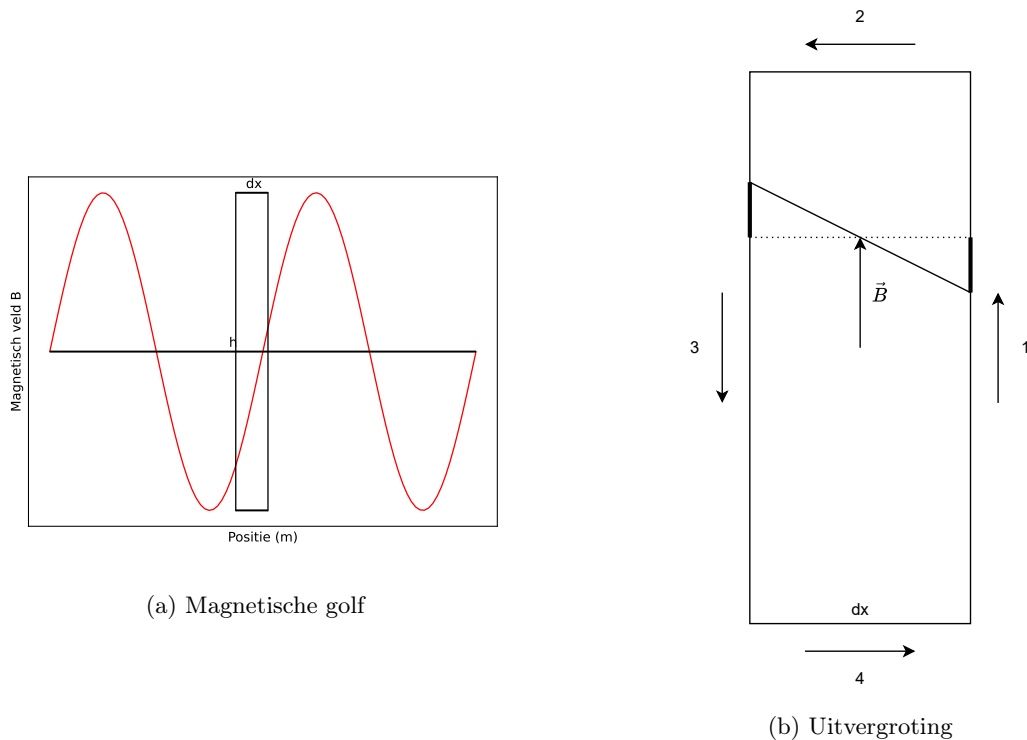
Hierbij zijn de scalaire producten voor zijde 2 en 4 gelijk aan nul omdat de vectoren loodrecht op elkaar staan. We kunnen deze uitdrukking verder vereenvoudigen (met de wet van Faraday) tot:

$$\frac{\partial E}{\partial x} h dx = -\frac{\partial B}{\partial t} h dx \quad (25)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (26)$$

Wet van Maxwell

We maken opnieuw dezelfde redenering als voor de afleiding met de wet van Faraday:



Figuur 32: Wet van Maxwell

We merken wel op dat we nu met een magnetisch veld werken en dat we gebruik maken van de wet van Maxwell ($\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \Phi_E}{\partial t} = \oint \vec{B} \cdot d\vec{S}$). De twee dikke lijnen kunnen we hierdoor definiëren als:

$$\vec{B}_L = \vec{B} - \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} \frac{dx}{2}$$

$$\vec{B}_R = \vec{B} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} \frac{dx}{2}$$

We passen de wet van Maxwell toe op de randen van de gesloten kring:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \underbrace{(B - \frac{\partial B}{\partial x} \frac{dx}{2})h}_1 + \underbrace{0}_2 - \underbrace{(B + \frac{\partial B}{\partial x} \frac{dx}{2})h}_3 + \underbrace{0}_4$$

Hierbij zijn de scalaire producten voor zijde 2 en 4 gelijk aan nul omdat de vectoren loodrecht op elkaar staan. We kunnen deze uitdrukking verder vereenvoudigen (met de wet van Maxwell) tot:

$$-\frac{\partial B}{\partial x} h dx = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} h dx \quad (27)$$

$$-\frac{\partial B}{\partial x} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \quad (28)$$

Opstellen van de golfvergelijking met de inductie wetten

We werken nu verder met vergelijking 26 en 28. We leiden eerst vergelijking 26 af naar de tijd om volgende uitdrukking te krijgen:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} \quad (29)$$

We leiden nu ook vergelijking 28 af maar dit keer naar de ruimte:

$$-\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t \partial x} \quad (30)$$

We kunnen nu vergelijking 29 en 30 samenbrengen om de golfvergelijking op te stellen:

$$\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = -\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \frac{\partial^2 B}{\partial x^2}$$

Hierbij vermelden we nog dat $c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$.

25 Afleiding 25 (niet in 2022)

Energie van een elektromagnetische golf

We definiëren de energiedichtheid van een elektrisch en magnetisch veld als volgt:

$$U_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

$$U_B = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$$

We stellen dat de totale energiedichtheid van een elektromagnetische golf gegeven wordt door de som van deze dichtheden:

$$U_{\text{tot}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$$

We kunnen nu de individuele bijdrage van elk veld bepalen door gebruik te maken van de wet van Faraday, meer bepaald vergelijking 26:

$$\frac{\partial}{\partial x}(E_m \sin(kx - \omega t)) = -\frac{\partial}{\partial t}(B_m \sin(kx - \omega t))$$

$$E_m k \cos(kx - \omega t) = B_m \omega \cos(kx - \omega t)$$

$$\frac{E_m}{B_m} = \frac{\omega}{k} = c$$

Hieruit volgt dat:

$$E_m = c B_m$$

Als we de verkregen relatie tussen E en B in de totale energiedichtheid invullen krijgen we:

$$U_{\text{tot}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$$

$$U_{\text{tot}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \frac{E^2}{\mu_0 c^2}$$

$$U_{\text{tot}} = \underbrace{\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2}_{50\%} + \underbrace{\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2}_{50\%}$$

De totale energie valt ook makkelijk te berekenen als:

$$U_{\text{tot}} = \epsilon_0 E^2 = \epsilon_0 c E B = \frac{E B}{\mu_0}$$

We kijken nu ook naar de relatie tussen energiedichtheid en vermogen. We kijken naar de hoeveelheid energie die een elektromagnetische golf kan afzetten op een volume:

$$dU = \epsilon_0 E^2 dV = \epsilon_0 E^2 A c dt$$

We gaan nu van energie over naar vermogen door deze afzetting te bekijken over een klein tijdsinterval dt:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\epsilon_0 E^2 A c dt}{dt} = \epsilon_0 E^2 A c$$

Het vermogen per oppervlakte wordt dan:

$$S = \frac{\epsilon_0 E^2 A c}{A} = \epsilon_0 E^2 c = \frac{E B}{\mu_0}$$

We kijken nu naar de Poynting vector \vec{S} :

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$$

Tot slot definiëren we ook nog de intensiteit, het gemiddelde van het vermogen per oppervlakte:

$$\begin{aligned} S &= \frac{EB}{\mu_0} \\ &= \frac{E^2}{\mu_0 c} \\ &= \frac{1}{\mu_0 c} E_m^2 \sin^2(kx - \omega t) \\ &= \frac{E_m^2}{\mu_0 c} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2(kx - \omega t)) \right) \end{aligned}$$

We nemen nu het gemiddelde van \vec{S} :

$$\vec{S} = \frac{1}{T} \int_0^T S dt = \frac{E_m^2}{2\mu_0 c} = \frac{E_{\text{RMS}} B_{\text{RMS}}}{\mu_0}$$

26 Afleiding 26

Bewijs de gelijkheid van de lichtsnelheid via eenheden

We zullen bewijzen dat de volgende gelijkheid klopt met betrekking tot de eenheden:

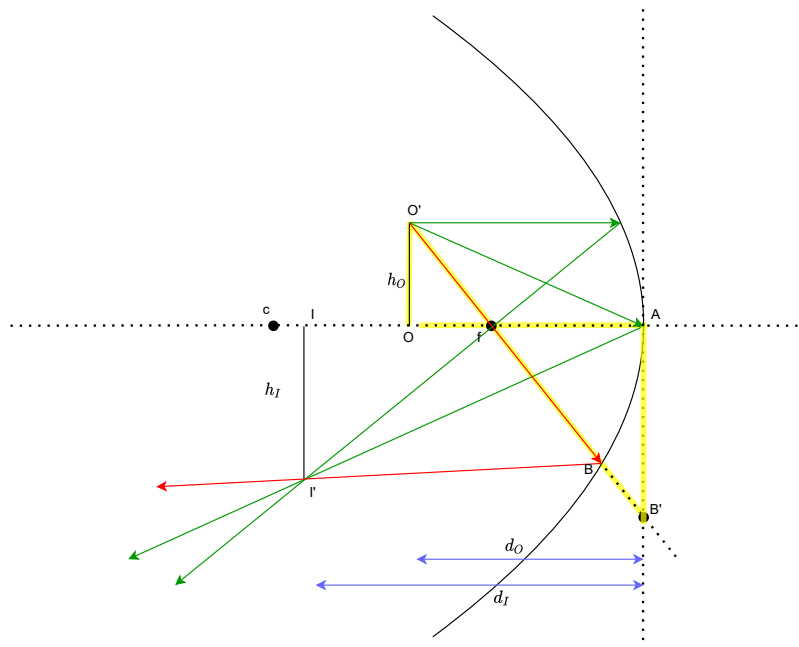
$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

We vullen de eenheden in van alle constanten en werken dan verder:

$$\begin{aligned} \frac{m}{s} &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{N}{A^2}\right)\left(\frac{C^2}{N \cdot m^2}\right)}} \\ \frac{m}{s} &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{s^2}{C^2}\right)\left(\frac{C^2}{m^2}\right)}} \\ \frac{m}{s} &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{s^2}{m^2}\right)}} \\ \frac{m}{s} &= \frac{1}{\frac{s}{m}} \\ \frac{m}{s} &= \frac{m}{s} \end{aligned}$$

27 Afleiding 27

Afleiding van de werking van een sferische spiegel op verschillende posities van het object
 We bespreken eerst de situatie waarbij een object tussen C en f staat, zoals te zien is in figuur 33.



Figuur 33: Object tussen C en f

We zoeken een waarde voor d_I , daarvoor gebruiken we de geometrie van de driehoeken $O'OA$ en IAI' . We weten dus dat:

$$\begin{aligned}\Delta O'OA &\Rightarrow \tan(\theta) = \frac{|OO'|}{d_O} \\ \Delta IAI' &\Rightarrow \tan(\theta) = \frac{|II'|}{d_I}\end{aligned}$$

Hieruit leiden we af dat de versterking m gelijk is aan :

$$\frac{h_I}{h_O} = \frac{d_I}{d_O} = |m|$$

Om nu de afstand d_I te vinden, kunnen we de twee congruente driehoeken gebruiken die in het geel aangeduid staan op figuur 33. Voor deze driehoeken geldt dat:

$$\frac{|OO'|}{|Of|} = \frac{|AB'|}{|Af|} \approx \frac{|AB'|}{f} \Rightarrow \frac{h_O}{d_O - f} = \frac{h_I}{f}$$

Dit kunnen we verder uitwerken tot:

$$\frac{h_O}{h_I} = \frac{d_O - f}{f} = \frac{d_O}{d_I} \Rightarrow \frac{1}{f} - \frac{1}{d_O} = \frac{1}{d_I}$$

We bespreken nu de situatie waarbij het object tussen f en de spiegel staat, zoals in figuur 34.



Figuur 34: Object tussen f en spiegel

We proberen opnieuw om de afstand d_I te bepalen aan de hand van driehoeken.

$$\Delta fBA \Rightarrow \tan(\theta) = \frac{|AB|}{f} \approx \frac{h_O}{f}$$

$$\Delta fII' \Rightarrow \tan(\theta) = \frac{h_I}{f + d_I}$$

Hieruit volgt dat:

$$\frac{h_O}{h_I} = \frac{f}{f + d_I}$$

We kijken nog naar 2 andere driehoeken

$$\Delta CII' \Rightarrow \tan(\theta) = \frac{h_I}{2f + d_I}$$

$$\Delta COO' \Rightarrow \tan(\theta) = \frac{h_O}{2f - d_O}$$

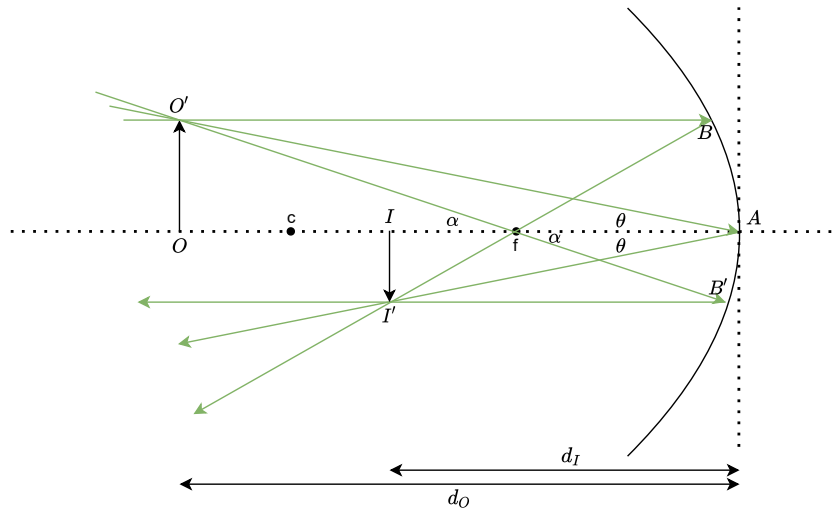
Hieruit volgt dat:

$$\frac{h_O}{h_I} = \frac{2f - d_O}{2f + d_I}$$

We kunnen dus stellen dat:

$$\begin{aligned} \frac{f}{f + d_I} &= \frac{2f - d_O}{2f + d_I} \\ \frac{1}{d_O} &= \frac{1}{f} + \frac{1}{d_I} \end{aligned}$$

We bespreken nu de situatie waarbij het object ver weg staat, zoals te zien is in figuur 35.



Figuur 35: Object staat ver van de spiegel

We proberen opnieuw om de afstand d_I te bepalen aan de hand van driehoeken.

$$\Delta OO'A \Rightarrow \tan(\theta) = \frac{h_O}{d_O}$$

$$\Delta II'A \Rightarrow \tan(\theta) = \frac{h_I}{d_I}$$

Hieruit volgt dat:

$$\frac{h_O}{h_I} = \frac{d_O}{d_I}$$

We kijken nog naar 2 andere driehoeken

$$\Delta OO'f \Rightarrow \tan(\theta) = \frac{h_I}{d_O - f}$$

$$\Delta fAB \Rightarrow \tan(\theta) = \frac{h_I}{f}$$

Hieruit volgt dat:

$$\frac{h_O}{h_I} = \frac{d_O - f}{f}$$

We kunnen dus stellen dat:

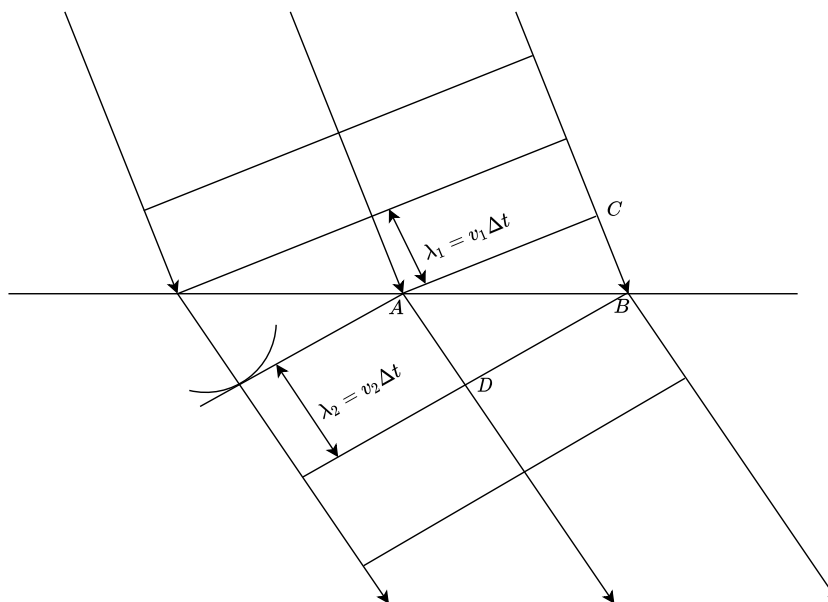
$$\frac{d_O}{d_I} = \frac{d_O - f}{f}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{d_I} + \frac{1}{d_O}$$

Alle bovenstaande inzichten moeten ook toegepast kunnen worden op een convexe spiegel.

28 Afleiding 28

Afleiding van Snellius



Figuur 36: Wet van Snellius

Als een golf van medium verandert zoals te zien is in figuur 36, zal er een verandering in voorplantingsrichting optreden. We maken de aanname dat de brekingsindex van het tweede medium kleiner is dan dat van het eerste medium in figuur 36. We kunnen dus stellen dat:

$$\begin{aligned} n_2 &< n_1 \\ \frac{c}{v_2} &< \frac{c}{v_1} \\ v_2 &> v_1 \end{aligned}$$

We stellen ook dat de afstand tussen de golffronten in medium 1 gelijk is aan λ_1 . We kunnen dus volgende redenering maken (omdat de frequentie van de golf niet verandert):

$$\begin{aligned} v_1 &= \lambda_1 f \\ v_2 &= \lambda_2 f \end{aligned}$$

We kunnen deze vergelijkingen delen door elkaar:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_1 \Delta t}{\lambda_2} \quad (31)$$

Waaruit volgt dat:

$$\lambda_2 = v_2 \Delta t$$

Uit driehoek $\triangle ACB$ en $\triangle ADB$ vinden we dat:

$$\begin{aligned} \triangle ACB &\Rightarrow \sin(\theta_1) = \frac{\lambda_1}{|AB|} \\ \triangle ADB &\Rightarrow \sin(\theta_2) = \frac{\lambda_2}{|AB|} \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat:

$$\frac{\lambda_1}{\sin(\theta_1)} = \frac{\lambda_2}{\sin(\theta_2)} \Rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\sin(\theta_1)}{\sin(\theta_2)}$$

Met deze informatie kunnen we de inzichten uit vergelijking 31 toepassen om tot het volgende te komen:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\sin(\theta_1)}{\sin(\theta_2)} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

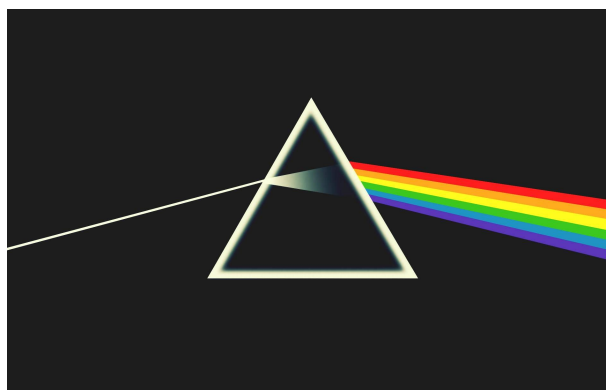
Na herordening krijgen we de wet van Snellius:

$$n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2) \tag{32}$$

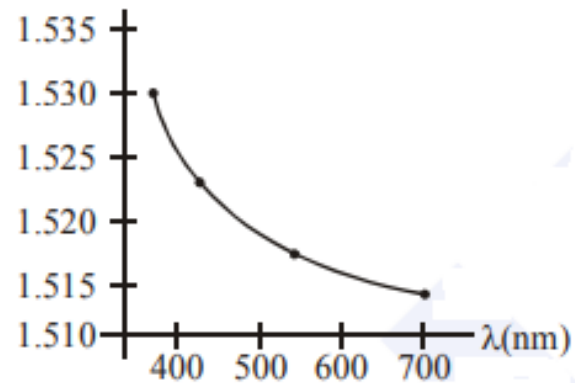
29 Afleiding 29

Regenboog

We bespreken eerst de chromatische dispersie van wit licht. Zoals te zien is in figuur 37a, zal bij het breken van licht een splitsing van de kleuren gebeuren. De volgorde van de gesplitste kleuren is niet willekeurig: als de golflengte van licht korter wordt, zal de brekingsindex toe nemen zoals te zien is op figuur 37b.



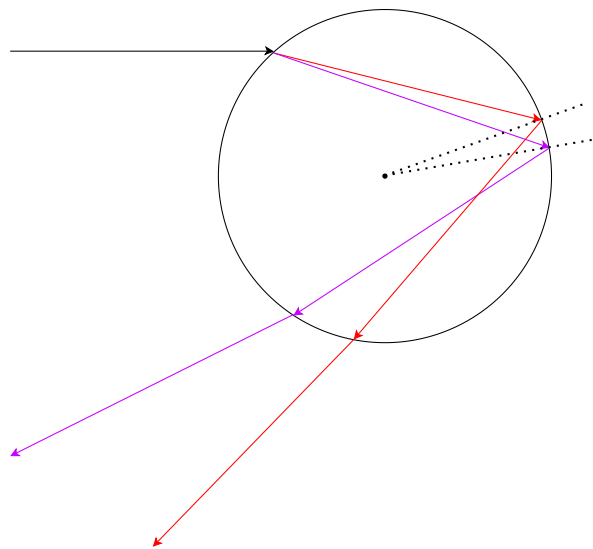
(a) Prisma



(b) Chromatische dispersie

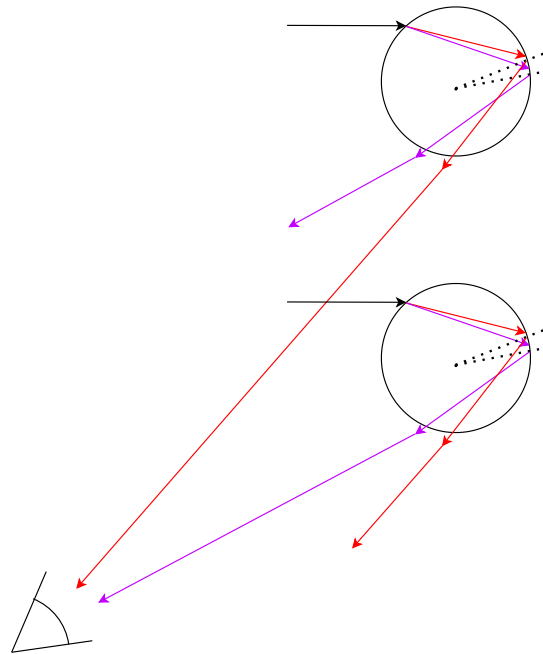
Figuur 37: Dispersie

Door bovenstaand concept toe te passen op een regendruppel die door de lucht valt, krijgen we figuur 38.



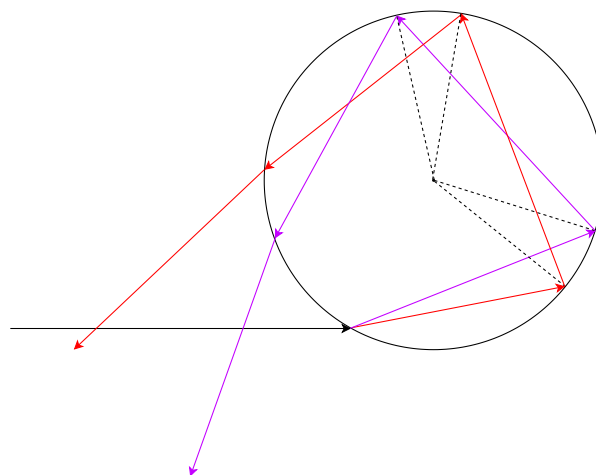
Figuur 38: Analyse van één druppel

Als we enkel rekening houden met één enkele druppel, zien we dat de volgorde van kleuren omgekeerd is vergeleken met een normale regenboog. Daarom moeten we ook rekening houden met het feit dat er meerdere regendruppels nodig zijn om een regenboog te vormen (zie figuur 39).



Figuur 39: Er zijn meerdere druppels nodig om een regenboog te vormen

Tevens is het mogelijk om een tweede regenboog waar te nemen boven de eerste. Deze noemt men de secundaire regenboog. Ze is minder fel in vergelijking met de eerste doordat er meer interne reflecties gebeuren vooraleer het licht vertrekt naar de observeerde persoon.

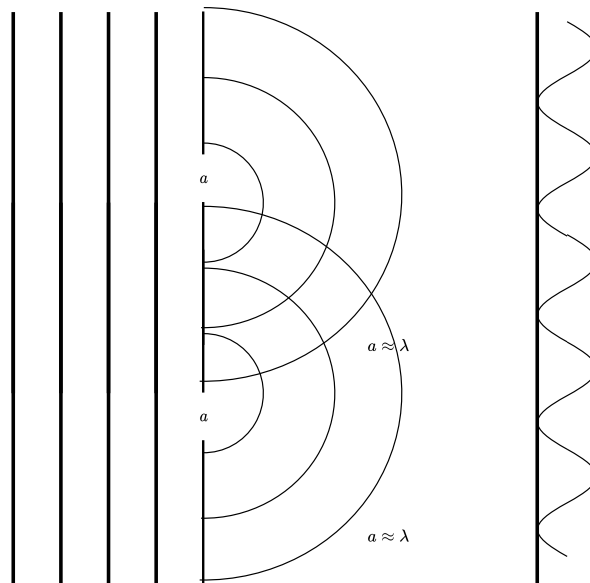


Figuur 40: Secundaire regenboog

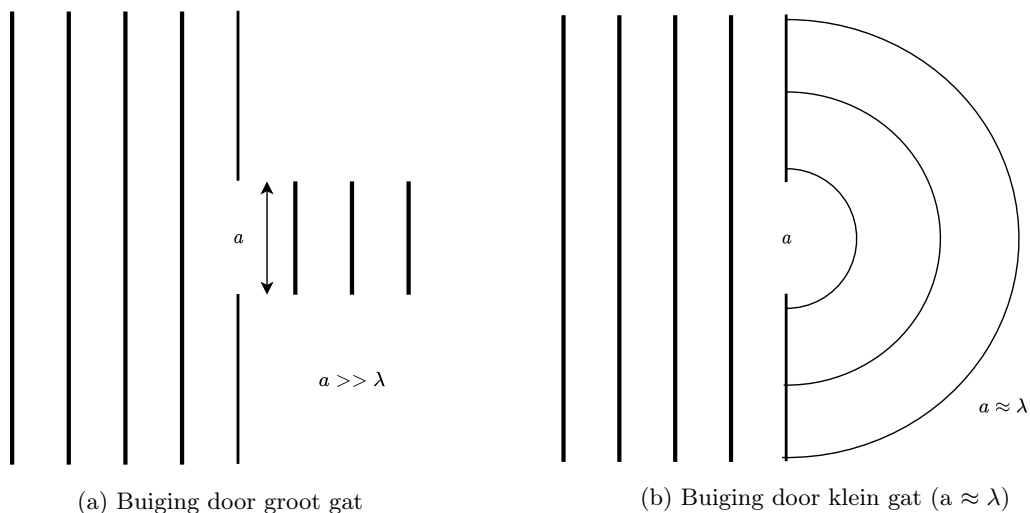
30 Afleiding 30

Experiment van Young

Het experiment van Young was belangrijk om het golfkarakter van licht aan te tonen. Concreet werd aangetoond dat lichtgolven met elkaar kunnen interfereren zoals geluidsgolven. Het experiment bestaat uit twee spleten die dicht bij elkaar geplaatst worden, zoals te zien is in figuur 41. Hierbij is het belangrijk dat de spleten klein genoeg zijn (grote orde $a \approx \lambda$), anders zal er geen buiging van het licht plaats vinden zoals te zien is in figuur 42a en 42b. We merken op dat het golfpatroon op figuur 41 enkel theoretisch is, de reden hiervoor staat in afleiding 32.

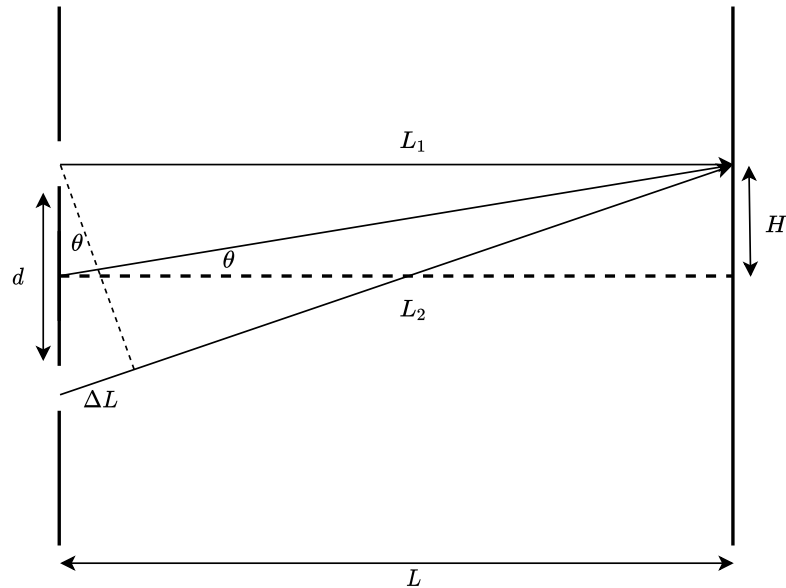


Figuur 41: Experiment Young



Figuur 42: Spleten

Uit het experiment van Young kunnen we ook de golflengte afleiden van de invallende lichtgolven. Hiervoor kijken we naar figuur 43:



Figuur 43: Intensiteit

We kunnen ΔL schrijven als $L_2 - L_1$ en de faseverschuiving als $k\Delta L$. Verder maken we ook nog de veronderstelling dat $L \gg d$ waardoor we kunnen zeggen dat $\Delta L \approx d \sin(\theta)$. Verder zullen we spreken over constructieve interferentie als voldaan is aan $k\Delta L = 2n \cdot \pi$ met $n \in \mathbb{N}$. Destructieve interferentie doet zich voor als $k\Delta L = (2n + 1) \cdot \pi$ met $n \in \mathbb{N}$. Door deze veronderstellingen toe te passen krijgen we:

$$\text{Constructieve interferentie} \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} d \sin(\theta) = 2n\pi$$

$$\text{Destructieve interferentie} \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} d \sin(\theta) = (2n + 1)\pi$$

Als we nu ons eerste maximum zoeken door $n = 1$ te kiezen, krijgen we twee uitdrukkingen:

$$\frac{2\pi}{\lambda} d \sin(\theta) = 2\pi \quad (33)$$

$$(1) \Rightarrow \sin(\theta) = \frac{\lambda}{d} \quad (34)$$

$$(2) \Rightarrow \sin(\theta) \approx \tan(\theta) = \frac{H}{L} \quad (35)$$

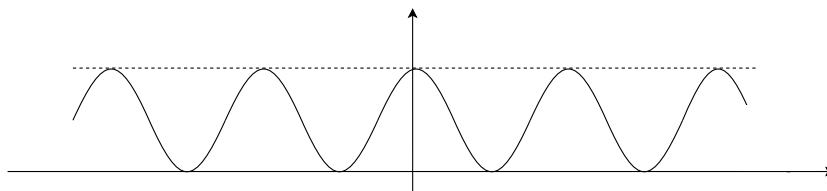
Door vergelijking 34 en 35 te combineren krijgen we:

$$\lambda = \frac{dH}{L} \quad (36)$$

31 Afleiding 31

Intensiteits-profiel

Om een idee te krijgen over de intensiteit van licht bij het experiment van Young, kijken we eerst naar figuur 44:



Figuur 44: Intensiteits-profiel

Het bewijs dat deze figuur klopt, volgt uit figuur 43. We weten nu ook dat licht een golf is, dus kunnen we de elektrische golf vergelijking opschrijven:

$$\begin{aligned} E_1 &= E_0 \sin(\omega t) \\ E_2 &= E_0 \sin(\omega t + \delta) \end{aligned}$$

Het totaal wordt dan:

$$\begin{aligned} E_{\text{Totaal}} &= E_0 \sin(\omega t) + E_0 \sin(\omega t + \delta) \\ &= 2E_0 \sin\left(\omega t + \frac{\delta}{2}\right) \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) \end{aligned}$$

We maken nu gebruik van het feit dat $\delta = k\Delta L = k d \sin(\theta) \approx k \frac{dH}{L}$

$$= 2E_0 \sin\left(\omega t + \frac{\delta}{2}\right) \cos\left(k \frac{dH}{2L}\right)$$

Nu we de totale golfvergelijking hebben gevonden, kunnen we gebruik maken van de Poynting vector om de intensiteit te bepalen

$$\begin{aligned} I &= \bar{S} = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} = \frac{4E_0^2}{2\mu_0 c} \cos^2\left(k \frac{dH}{2L}\right) \\ I &= I_0 \cos^2\left(k \frac{dH}{2L}\right) \end{aligned}$$

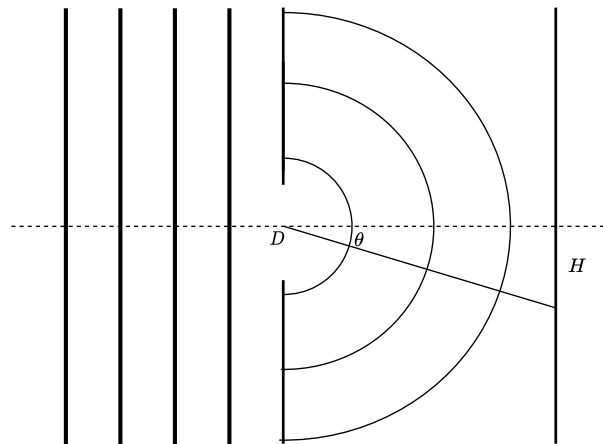
Het eerste maximum kunnen we vinden door $k \frac{dH}{2L}$ gelijk te stellen aan π . Door dit in te vullen in de intensiteits-vergelijking, krijgen we dat:

$$\lambda = \frac{dH}{L}$$

Merk op dat deze vergelijking gelijk is aan vergelijking 36. We kunnen analoog werken om de minima te vinden.

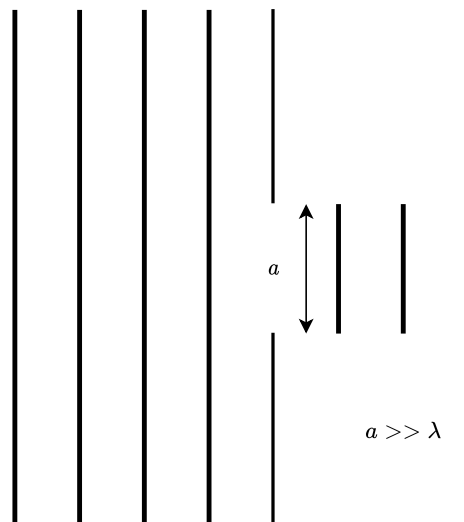
32 Afleiding 32

Buiging door één opening



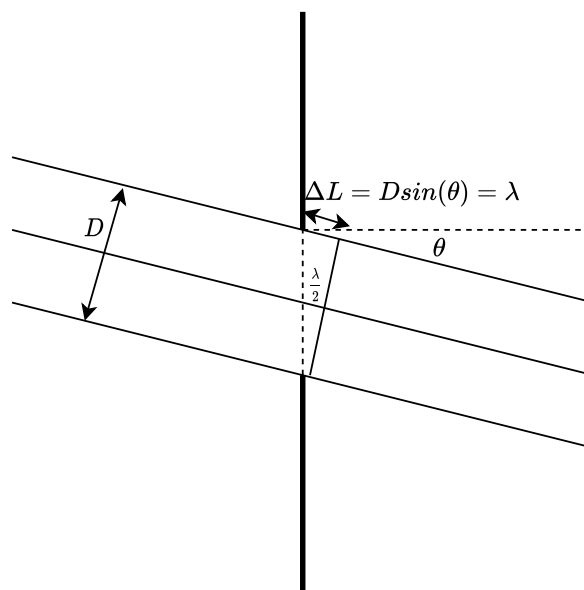
Figuur 45: Buiging door één opening

Bij afleiding 30 en 31 is een verkeerde aanname gemaakt. Er is verondersteld dat licht niet zal interfereren als het door één enkele spleet gaat, dit is echter niet het geval zoals aangetoond zal worden in de volgende afleiding. Om de realistische intensiteit te weten te komen op figuur 45, kijken we naar de volgende vier figuren (46, 47, 48, 49).



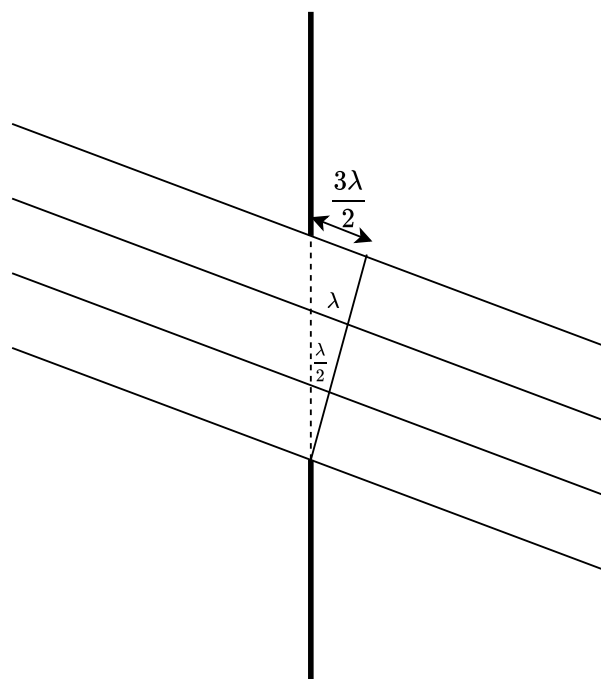
Figuur 46: $D \sin(\theta) = 0$

Hier is er geen enkele interferentie, we zien één heldere plek in het midden van het scherm waarop we projecteren.



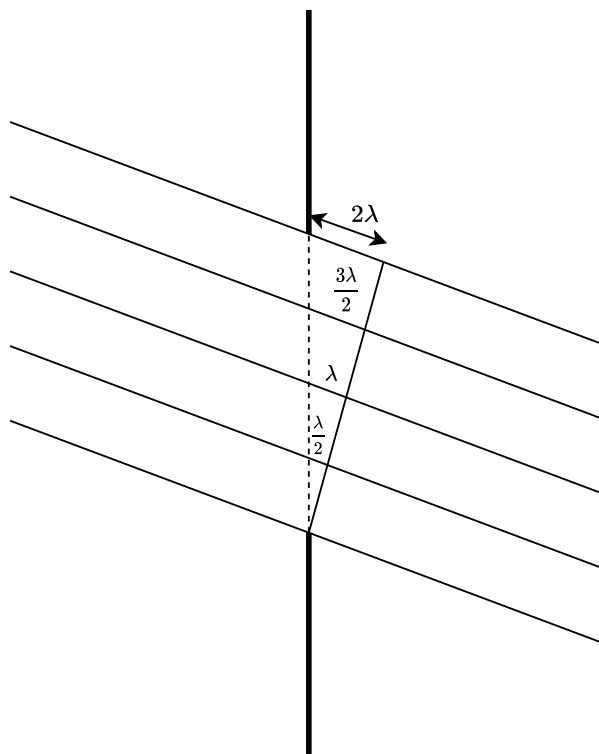
Figuur 47: $D \sin(\theta) = \lambda$

Hier zal de onderste helft van de lichtstralen destructief interfereren. ($\frac{DH}{L} = \lambda \Rightarrow H = \frac{\lambda L}{D}$)



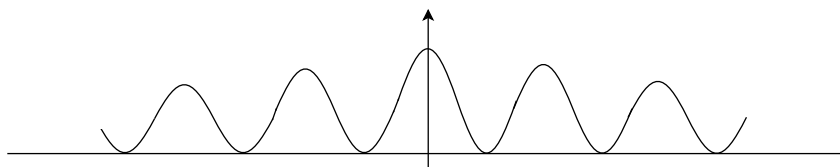
Figuur 48: $D \sin(\theta) = \frac{3\lambda}{2}$

Hier zullen de onderste twee derden van de lichtstralen destructief interfereren. ($\frac{DH}{L} = \frac{3\lambda}{2} \Rightarrow H = \frac{3\lambda L}{2D}$)



Figuur 49: $D \sin(\theta) = 2\lambda$

Hier zal de onderste helft van de lichtstralen destructief interfereren. ($\frac{DH}{L} = 2\lambda \Rightarrow H = \frac{2\lambda L}{D}$)
 We zien dus dat de intensiteit sterk af neemt als we θ toe laten nemen. Dit zorgt er ultiem voor dat de resultaten van het experiment van Young er uit zien als op figuur 50. We zien duidelijk dat de pieken niet gelijk blijven, maar verder afnemen in amplitude naarmate we θ laten toe nemen.

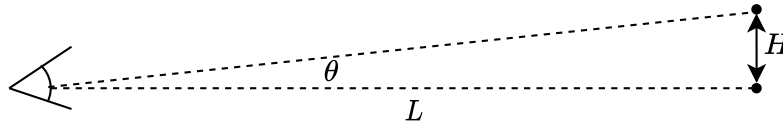


Figuur 50: Secundair intensiteitsprofiel

33 Afleiding 33 (niet in 2022)

Optische resolutie

Wanneer twee objecten dicht bij elkaar liggen, kunnen we ze niet van elkaar onderscheiden door buiging. Neem de opstelling in figuur 51:



Figuur 51: Optische resolutie

We stellen dat we twee objecten kunnen onderscheiden als voldaan is aan (waarbij D de diameter is van de lens waardoor de objecten bekeken worden):

$$\theta \approx \sin(\theta) = \frac{\lambda}{D}$$

In de praktijk vermenigvuldigen we het rechter-lid nog met 1.22 om rekening te houden met de optische eigenschappen van het menselijk oog. Concreet krijgen we dus volgende vergelijking:

$$\frac{H}{L} = \frac{1.22 \cdot \lambda}{D}$$

Als aan bovenstaande voorwaarde voldaan is, zijn we in staat om twee objecten van elkaar ten onderscheiden. We kunnen dus niets dichter dan $\frac{1.22 \cdot \lambda L}{D}$ zien.