Notizen von Timo Schorlepp

ART-Seminar: Vortrag 3

16.09.2020

Formale Einführung folgender Konzepte (vor allem Defs., Bsp. und ein paar Eindeutigkeitsresultate)

① Teilchen, Energie, Impuls, Ladung, Dichte, Fluss (-erhaltung)
② Energie-Impuls-Tensor, Materiemodelle
③ em-Feldstärketensor, E- und B-Feld
④ Maxwell-Glgn.

Vorher Wiederholung folgender mathematischer Begriffe:

⓪ Integration auf Mf., Satz von Stokes, Divergenz allg. Tensorfelder, Killing-VF

0. Wiederholung

Sei M eine orientierte (d.h. alle Koordinatenwechsel im Atlas haben pos. Jacobidet.) (semi-) Riemannsche Mf. der Dimension d.

Ein Volumenelement ist eine d-Form Ω auf M mit

$\Omega(m) \neq 0 \;\; \forall m \in M$ und: Für jede Karte x des Atlas' von M

lässt sich Ω im Definitionsbereich U der Karte schreiben als

$\Omega|_U = f \cdot dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^d$ mit $f \in C^\infty(U)$ und $f > 0$.

Es existiert ein ausgezeichnetes, eindeutiges sog. <u>metrisches Volumenelement</u> Ω (wir arbeiten im Folgenden nur noch mit diesem Volumenelement), s.d. für $\forall m \in M$ $\forall$ pos. orientierten ONB $(X_1, \dots, X_d)$ von M_m gilt: $\Omega(X_1, \dots, X_d) = + \frac{1}{d!}$. (Eindeutigkeit gilt, da versch., konsistent orientierte ONB über orth. Trafo mit $\det = +1$ zusammenhängen, und $\Omega' = \det(\dots) \cdot \Omega$ für Trafo zw. Basen).

Ist $(X_1, \dots, X_d)$ eine konsistent orientierte, aber nicht notwendigerweise orthonormale Basis aus VF auf $U \subset M$ mit dualer Basis $(\omega^1, \dots, \omega^d)$ und Gramscher Determinante $g = |\det(g_{ij})| = |\det(g(X_i, X_j))|$, so gilt $\boxed{\Omega|_U = \sqrt{g}\ \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^d}$ (Ist $(Y_1, \dots, Y_d)$ pos. Ori. ONB mit $X_i = a^j{}_i Y_j$ und somit $g_{ij} = g(X_i, X_j) = a^l{}_i a^k{}_j \underbrace{g(Y_l, Y_k)}_{\pm\delta_{lk}} = \sum_{l=1}^{d-1} a^l{}_i a^l{}_j - a^d{}_i a^d{}_j$, also mit $A = (a^j{}_i)$, $G = (g_{ij})$: $G = A^T \cdot \mathrm{diag}(1, \dots, 1, -1) \cdot A \Rightarrow \det A = \sqrt{g} > 0$ [pos. Lsg., da (X_i) und (Y_i) gleich orientiert], und damit

$$\Omega(X_1, \dots, X_d) = a^{i_1}{}_1 \dots a^{i_d}{}_d\, \Omega(Y_{i_1}, \dots, Y_{i_d})$$

Permutieren etc. gibt det

$$= \frac{1}{d!} \det A = \sqrt{g}\ \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^d (X_1, \dots, X_d))$$

Insbesondere ist also für konsistent orientierte, orthonorm. $\omega^1, \dots, \omega^d$

$\Omega = \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^d$.

Weiterhin sei an die Definition des <u>inneren Produkts</u> erinnert: Für ein VF X können wir jeder q-Form ω $(q>0)$ eine $(q-1)$-Form $i(X)\omega$ durch $(i(X)\omega)(Z_1, \dots, Z_{q-1}) := q \cdot \omega(X, Z_1, \dots, Z_{q-1})$ zuordnen. Volumenformen im allgemeinen erfüllen folgendes:

$i(X)\Omega = i(Y)\Omega \Rightarrow X = Y$ (denn: Ang. $\Omega(X, Z_1, \dots, Z_{d-1}) = \Omega(Y, Z_1, \dots, Z_{d-1})$ $\forall Z_1, \dots, Z_{d-1} \in M_m$, d.h. $\Omega(X-Y, Z_1, \dots, Z_{d-1}) \equiv 0$. Ang. $X - Y \neq 0$, so ergänze zu pos. ori. ONB $\left(\frac{X-Y}{|g(X-Y, X-Y)|^{1/2}}, Z_1, \dots, Z_{d-1}\right)$ ⚡)

Man kann außerdem in Koordinaten nachrechnen: $\nabla\Omega = 0$, und $\Psi \wedge (i(Y)\Omega) = \Psi(Y) \cdot \Omega$ für alle VF Y und 1-Formen Ψ.

<u>Integration</u>: Für $f \in C(M, \mathbb{R})$, $K \subset M$ offen und rel. kp. definieren wir
$$\int_K f \cdot \Omega := \int_{x(K)} (x^{-1})^* (f \cdot \Omega)$$
(falls K ganz durch Karte x überdeckt wird, sonst Zerlegung der 1)

Konkret ist also $\int_{x(K) \subset \mathbb{R}^n} (f \circ x^{-1})(x_1, \dots, x_d) \sqrt{g}\, dx^1 \dots dx^d$ als Integral im $\mathbb{R}^n$

zu berechnen (die Definition ist sinnvoll, d.h. kartenunabhängig, denn falls y eine weitere Karte ist, deren Definitionsbereich K enthält mit

$$g' = \sqrt{|\det(g'_{ij})|}, \quad g'_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right) \text{ und } \frac{\partial}{\partial y^i} = a^j_i \frac{\partial}{\partial x^j},$$

so gilt, wie oben nachgerechnet, $g' = |\det(a^j_i)| \cdot g$, was genau der Jacobi-Determinante für den Trafosatz im $\mathbb{R}^n$ entspricht...)

<u>Satz von Stokes:</u> Sei $N \subset M$ eine kp., $(p+1)$-dim. ori. Mf mit Rand und ω eine p-Form auf M. Dann gilt:

$$\int_N d\omega = \int_{\partial N} \omega.$$

(wobei ∂N die induzierte Orientierung trägt: Ist $x = (x^1, \ldots, x^{p+1})$ Karte für N mit $x^1(m) = 0$ für $m \in \partial N$ und $x^1 < 0$ in N, so soll $dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^{p+1}$ pos. orientiert auf ∂N sein)

Integrales <u>Kriterium für Geschlossenheit</u> von Formen: Ist $\int_{\partial N} \omega = 0$ für ein ω und <u>alle</u> obigen, so folgt $d\omega = 0$ (denn ang. $d\omega \neq 0$ für ein $m \in M$, dann wähle N, s.d. $d\omega$ auf N_m nicht verschwindet, wg. Stetigkeit ist dann auch für N „klein genug"

$\int_N d\omega \neq 0$, also nach Stokes $\int_{\partial N} \omega \neq 0$ ↯)

Ein wesentlicher Punkt, der in diesem Vortrag gemacht werden soll, ist, dass man hier gar nicht alle N betrachten muss für die Folgerung $d\omega = 0$, sondern es reichen „physikalisch relevante", mehr dazu später. Analoge Aussagen ergeben sich dann später auch für die Bestimmung von Tensorfeldern aus physikalischen Messungen.

Kommen wir nun zum Begriff der Divergenz: Sei zunächst X ein VF, dann definieren wir die Fkt. $\operatorname{div} X$ durch:

$$\underbrace{d(i(X)\Omega)}_{n\text{-Form}} = \underbrace{\operatorname{div} X}_{\substack{\text{eindeutig bestimmt, da } n\text{-Formen} \\ \text{auf } M \text{ 1-dim.}}} \cdot \overbrace{\Omega}^{\neq 0}$$

Bsp.: $M = \mathbb{R}^3$, $\Omega = dx \wedge dy \wedge dz$, $i(X)\Omega = 3 \cdot dx \wedge dy \wedge dz(X, \cdot, \cdot)$

$$= X^1 \cdot dy \wedge dz + X^2 \cdot dz \wedge dx + X^3 dx \wedge dy$$

$$d(i(X)\Omega) = (\partial_x X^1 + \partial_y X^2 + \partial_z X^3)\, dx \wedge dy \wedge dz \quad ✓$$

Bem.: Da sich die Lie-Ableitung, angewandt auf Differentialformen, auch als $L_X = i(X)d + d\,i(X)$ schreiben lässt und $d\Omega = 0$, könnten wir auch $L_X \Omega = \operatorname{div} X \cdot \Omega$ definieren.

Allgemein gilt: $\boxed{\operatorname{div} X = \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \partial_i (\sqrt{g} X^i)}$ in Koordinatenbasis x mit $X = X^i \partial_i$

(denn: $i(X)\Omega = \sqrt{g} \cdot \sum_{i=1}^{d} X^i \, dx^1 \wedge \ldots \wedge \overset{\wedge}{\underset{i}{}} \ldots \wedge dx^d$, also

$$d(i(X)\Omega) = \partial_i (\sqrt{g} X^i) \, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^d$$
$$= \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g} X^i) \cdot \Omega \quad)$$

Für den Levi-Civita-Zsh. ∇ auf (M, g) lässt sich dies auch schreiben als $\operatorname{div} X = \partial_i X^i + \Gamma^j_{ij} X^i$ (denn:

$$\operatorname{div} X = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g} X^i) = \partial_i X^i + \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g}) \cdot X^i = \ldots$$

allg. Formel für Ableitung der Determinanten: $(\det M(t))' = \det M \cdot \operatorname{tr}(M^{-1} \cdot M')$

$$\ldots = \partial_i X^i + \frac{1}{2} g^{jk} \underbrace{\partial_i g_{jk}}_{} \cdot X^i = \partial_i X^i + \Gamma^j_{ij} X^i \quad \checkmark \,)$$

$$= X_i \, g(X_j, X_k) = g(\nabla_{X_i} X_j, X_k) + g(X_j, \nabla_{X_i} X_k)$$
$$= \Gamma^l_{ij} g_{lk} + \Gamma^l_{ik} g_{lj}$$

 Dies motiviert folgende Verallgemeinerung zur Definition der

<u>Divergenz beliebiger (p,q)-Tensorfelder</u>: Ist T ein solches Tensorfeld mit Darstellung $T = T^{i_1,\dots,i_p}{}_{j_1,\dots,j_q} X_{i_1}\otimes\dots\otimes X_{i_p}\otimes\omega^{j_1}\otimes\dots\otimes\omega^{j_q}$ in loh. Basis, so ist $\operatorname{div} T$ das $(p-1,q)$-Tensorfeld mit $(\operatorname{div}T)^{i_1,\dots,i_{p-1}}{}_{j_1,\dots,j_q} = T^{i_1,\dots,i_{p-1},k}{}_{j_1,\dots,j_q;k}$, d.h.

$$\operatorname{div} T(\theta^1,\dots,\theta^{p-1},Y_1,\dots,Y_q) = \nabla_{X_\ell} T(\theta^1,\dots,\theta^{p-1},\omega^\ell,Y_1,\dots,Y_q).$$

Wegen der Regeln für Zsh. ($\nabla(A\otimes B) = \nabla A\otimes B + A\otimes\nabla B$, $\nabla_{X_i}X_j = \Gamma^k_{ij}X_k$ und $\nabla\delta^j_i = 0 = \nabla(\omega^j(X_i)) = \nabla\omega^j(X_i) + \omega^j(\nabla X_i)$, also $\nabla_{X_i}\omega^j = -\Gamma^j_{ik}\omega^k$) ergibt sich damit

$$(\operatorname{div}T)^{i_1,\dots,i_{p-1}}{}_{j_1,\dots,j_q} = X_\ell\left(T^{i_1,\dots,i_{p-1},\ell}{}_{j_1,\dots,j_q}\right) + T^{k,i_2,\dots,i_{p-1},\ell}{}_{j_1,\dots,j_q}\Gamma^{i_1}_{k\ell}$$

$$(*)\qquad + \dots + T^{i_1,\dots,i_{p-2},k,\ell}{}_{j_1,\dots,j_q}\Gamma^{i_{p-1}}_{k\ell}$$

$$- T^{i_1,\dots,i_{p-1},\ell}{}_{k,j_2,\dots,j_q}\Gamma^k_{j_1,\ell} - \dots - T^{i_1,\dots,i_{p-1},\ell}{}_{j_1,\dots,j_{q-1},k}\Gamma^k_{j_q,\ell}$$

<u>Bem.</u>: Eine längere Rechnung zeigt, dass unsere ursprüngliche Def. der Divergenz über $d(i(X)\Omega) = \operatorname{div}X\,\Omega$ auf beliebige antisymmetrische $(p,0)$-Tensorfelder verallgemeinerbar ist

und mit dem Ausdruck (*) übereinstimmt.

Neben den gegebenen Formeln für die Divergenz benötigen wir noch Koordinaten-Ausdrücke für die äußere Ableitung, dafür nutzen wir: $\boxed{d\eta = \omega^i \wedge \nabla_{X_i}\eta}$, wobei η eine bel. p-Form ist und (X_i) ein Basis aus VF mit dualer Basis (ω^i)

(denn: • die RHS ist unabh. von der Koordinatenwahl, da sich (X_i) und (ω^i) entgegengesetzt transformieren
• also reicht es, alles punktweise in Normalkoordinaten nachzurechnen, d.h. sei m bel., $(X_i(m))$ orthonormal und $\Gamma^h_{ij}(m) = 0 \; \forall i,j,h$, und $X_i = \partial_i$ Koordinaten-VF [die bekommen wir durch die Exponentialabbildung].

Dann gilt $\eta = \eta_{i_1,\dots,i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$, also damit

dann $d\eta = \partial_j \eta_{i_1,\dots,i_p} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$ per Def.

der äußeren Ableitung. Andererseits ist $\nabla_{X_j}\eta(m) = \partial_j \eta_{i_1,\dots,i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$

und damit $dx^j \wedge \nabla_{X_j}\eta(m) = d\eta(m)$)

Damit erhalten wir folgendes: Für 1-Formen η gilt

$$d\eta = \omega^j \wedge \nabla_{X_j}(\eta_i \omega^i) = \omega^j \wedge (\eta_{i;j} \omega^i)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\eta_{i;j}\,\omega^j\otimes\omega^i - \eta_{i;j}\,\omega^i\otimes\omega^j\right),$$

d.h. $\underbrace{(d\eta)_{ij}}_{\text{Komponente bzgl. } \omega^i\otimes\omega^j} = \frac{1}{2}\left(\eta_{j;i} - \eta_{i;j}\right),$

und analog (diesen Fall brauchen wir für die Maxwell-Glgn.)

für 2-Formen η: $d\eta = \omega^j \wedge \nabla_{X_j}\left(\eta_{ik}\,\omega^i\wedge\omega^k\right)$ das sind jetzt die Komponenten bzgl. $\omega^i\wedge\omega^k$

$$= \eta_{ik;j}\;\omega^j\wedge\omega^i\wedge\omega^k$$

$$\Rightarrow \underbrace{(d\eta)_{ijk}}_{\substack{\text{wieder Komponenten}\\ \text{bzgl. } \omega^i\otimes\omega^j\otimes\omega^k}} = \frac{1}{3}\left(\eta_{ij;k} + \eta_{ki;j} + \eta_{jk;i}\right)$$

Wir erinnern nun abschließend an das Konzept von Killing-VF, die eng verwandt mit dem Noether-Theorem sind. Zuerst und einmal die Definition und einige Eigenschaften von Lie-Ableitungen:

Ist $\phi: M\to N$ ein Diffeomorphismus und T ein (p,q)-Tensorfeld auf M, so definieren wir den Push-Forward von T durch

$$\phi_* T\left(\omega^1,\dots,\omega^p, X_1,\dots,X_q\right)_{(\phi(m))} = T\left(\phi^*\omega^1,\dots,\phi^*\omega^p,(\phi^{-1})_*X_1,\dots,(\phi^{-1})_*X_q\right)_{(m)}$$

für $\omega^1,\dots,\omega^p\in N^*_{\phi(m)}$, $X_1,\dots,X_q\in N_{\phi(m)}$. Ist X ein C^∞-VF auf M, so liefert der lok. Fluss von X eine Familie von Diffeos $\phi_t: U\to V$

- 9 - mit $\phi_{t+s} = \phi_t\circ\phi_s$, also $\phi_{-t} = (\phi_t)^{-1}$, $\phi_0 = \mathrm{id}$, um einen Punkt $m\in U$ herum.

Wir definieren dann die <u>Lie-Ableitung</u> eines Tensorfeldes T

durch X als: $$L_X T_{(m)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{T_{(m)} - (\phi_\varepsilon)_* T_{(m)}}{\varepsilon}$$

Push-Forward von $\phi_{-\varepsilon}(m)$ aus nach $\phi_\varepsilon(\phi_{-\varepsilon}(m)) = m$.

Für ein $(1,0)$-Tensorfeld, d.h. ein VF Y, ergibt sich bekanntermaßen

$$L_X Y = [X,Y] = XY - YX \underset{\text{in Koordinatenbasis}}{=} X^i \partial_i (Y^j \partial_j) - Y^j \partial_j (X^i \partial_i) = \partial_i Y^j \cdot X^i \partial_j - \partial_j X^i \cdot Y^j \cdot \partial_i,$$

also $$(L_X Y)^i = X^j \partial_j Y^i - Y^j \partial_j X^i$$

(dieser Ableitungsbegriff benötigt keine Extra-Struktur wie der Zsh., ist aber <u>nicht</u> C^∞-linear in X und deshalb keine „vernünftige" Verallgemeinerung der aus dem $\mathbb{R}^n$ bekannten Richtungsableitung)

Mit diesem Ausdruck für die Lie-Ableitung von VF lassen sich dann entsprechende Ausdrücke für andere Tensorfelder herleiten, bspw.

für 1-Formen: $$L_X (\omega(Y)) = L_X \omega\,(Y) + \omega(L_X Y),$$

Derivation, kommutiert mit Kontraktionen

und mit $\omega = \omega_j dx^j$, $Y = \partial_i$ ergibt sich

$$L_X(\omega(Y)) = L_X(\omega_i) = X^j \partial_j \omega_i = (L_X \omega)_i + \omega(X^j \partial_j \partial_i - \partial_i (X^j \partial_j))$$
$$= (L_X \omega)_i - \omega_j \partial_i X^j$$

$$\Rightarrow (L_X \omega)_i = X^j \partial_j \omega_i - \omega_j \partial_i X^j$$

Analog: $(L_X T)^{i_1,\dots,i_p}{}_{j_1,\dots,j_q} = X\left(T^{i_1,\dots,i_p}{}_{j_1,\dots,j_q}\right) - T^{l,i_2,\dots,i_p}{}_{j_1,\dots,j_q}\,\partial_l X^{i_1}$

$$- \dots + T^{i_1,\dots,i_p}{}_{l,j_2,\dots,j_q}\,\partial_{j_1} X^l + \dots$$

Ein <u>Killing-VF</u> ist nun ein VF X mit $\boxed{L_X g \equiv 0}$. Wir können eine ganze Reihe von Charakterisierungen von Killing-VF angeben:

1. X Killing gdw. der Fluss von X aus Isometrien besteht, d.h.

$$(\phi_t)_* g = g.$$

2. X Killing gdw. $\forall$ VF W, Z gilt: $Xg(W,Z) = g([X,W],Z) + g(W,[X,Z])$

(denn: $L_X(g \otimes W \otimes Z) = \underbrace{L_X g}_{=0} \otimes W \otimes Z + g \otimes L_X W \otimes Z + g \otimes W \otimes L_X Z$

Kontr.

$$\Rightarrow Xg(W,Z) = g(\underbrace{L_X W}_{=[X,W]}, Z) + g(W, \underbrace{L_X Z}_{=[X,Z]}) \quad)$$

3. X Killing gdw. $\forall$ VF W, Z gilt: $g(\nabla_W X, Z) + g(W, \nabla_Z X) = 0$

(denn mit Torsionsfreiheit und Metrik-Kompatibilität von ∇ gilt

$$Xg(W,Z) = g(\nabla_X W, Z) + g(W, \nabla_X Z)$$

$$= g(\nabla_W X, Z) + g(W, \nabla_Z X) + g([X,W],Z) + g(W,[X,Z]))$$

4. X parallel (d.h. $\nabla_Y X \equiv 0 \; \forall Y$) $\overset{3.}{\Rightarrow}$ X Killing

5. In Komponentenschreibweise: Z Killing $\Leftrightarrow Z_{j;l} + Z_{l;j} = 0$

(denn: Berechne 3. in Komponenten:

$$g(\nabla_V Z, W) + g(V, \nabla_W Z) = 0 \quad \forall V, W$$

$$\Leftrightarrow g(V^l \underbrace{\nabla_{X_l}(Z^i X_i)}_{= X_l(Z^i) \cdot X_i + Z^i \Gamma^k_{il} X_k}, W^j X_j) + g(V^l X_l, W^j \underbrace{\nabla_{X_j}(Z^i X_i)}_{= X_j(Z^i) X_i + Z^i \Gamma^k_{ij} X_k}) = 0$$

Produktregel

$$\Leftrightarrow V^l \cdot W^j \{ \underbrace{g_{ij} X_l(Z^i)}_{= X_l(Z_j) - Z^i \cdot X_l(g_{ij})} + g_{jk} Z^i \Gamma^k_{il} + \underbrace{g_{il} X_j(Z^i)}_{= X_j(Z_l) - Z^i X_j(g_{il})} + g_{lk} Z^i \Gamma^k_{ij} \} = 0$$

$X_l g(X_i, X_j)$
$= g(\nabla_{X_l} X_i, X_j)$
$+ g(X_i, \nabla_{X_l} X_j) = \ldots$

$$\Leftrightarrow V^l W^j \cdot \{ X_l(Z_j) - Z^i (\Gamma^k_{il} g_{kj} + \Gamma^k_{jl} g_{ki}) + g_{jk} Z^i \Gamma^k_{il} + X_j(Z_l)$$
$$- Z^i (\Gamma^k_{ij} g_{lk} + \Gamma^k_{lj} g_{ik}) + g_{lk} Z^i \Gamma^k_{ij} \} = 0$$

$$\Leftrightarrow V^l W^j \{ X_l(Z_j) - \Gamma^k_{jl} Z_k + X_j(Z_l) - \Gamma^k_{jl} Z_k \} = 0$$

$$\Leftrightarrow V^l W^j \{ Z_{j;l} + Z_{l;j} \} = 0 \quad \forall V, W \quad)$$

Killing-VF liefern <u>Erhaltungsgrößen längs Geodäten</u>: Ist X Killing und $\gamma: I \to M$ Geodäte, so gilt $g(\gamma_*, X) = \text{const.}$

(Rechnung dazu: $\frac{d}{du} g_{\gamma(u)}(\gamma_*(u), X(\gamma(u))) = g(\frac{D}{du}\gamma_*(u), X(\gamma(u)))$
$+ g(\gamma_*(u), \nabla_{\gamma_*} X(\gamma(u)))$

$\frac{D}{du}\gamma_* = 0$, da Geodäte $\rightsquigarrow = g(\gamma_*, \nabla_{\gamma_*} X) \overset{3.}{=} -g(\nabla_{\gamma_*} X, \gamma_*) = 0$)

Killing-VF sind divergenzfrei.

(Rechnung dazu in Komponentendarstellung: $Z_{i;j} + Z_{j;i} = 0 \Rightarrow 2g^{ij} Z_{i;j} = 0$

$$\Rightarrow g^{ij}\left(X_i(Z_j) - \Gamma^k_{ij} Z_k\right) = g^{ij}\left(g_{jk} X_i(Z^k) + Z^k \underbrace{X_i(g_{jk})}_{= \Gamma^l_{ij} g_{lk} + \Gamma^l_{ik} g_{jl}} - \Gamma^k_{ij} Z_k\right)$$

$$= \delta^i_k X_i(Z^k) + \delta^i_l \Gamma^l_{ik} Z^k$$

$$= X_i(Z^i) + \Gamma^j_{ij} Z^i = \operatorname{div} Z = 0 \,)$$

Wie in der klassischen Mechanik die Poissonklammer, so liefert die Lie-Klammer zweier Killing-VF wieder ein Killing-VF.

(denn: Mit 2. ist z.z.: $[X,Y]g(V,W) = g([[X,Y],V],W) + g(V,[[X,Y],W])$ $\forall V,W$.

Dazu: $[X,Y]g(V,W) = XYg(V,W) - YXg(V,W)$

$$\overset{X,Y \text{ Killing}}{\rightsquigarrow} = X\left(g([Y,V],W) + g(V,[Y,W])\right) - Y\left(g([X,V],W) + g(V,[X,W])\right)$$

$$= g([X,[Y,V]],W) + \cancel{g([Y,V],[X,W])} + \cancel{g([X,V],[Y,W])}$$

$$+ g(V,[X,[Y,W]]) - g([Y,[X,V]],W) - \cancel{g([X,V],[Y,W])}$$

$$- \cancel{g([Y,V],[X,W])} - g(V,[Y,[X,W]])$$

Jacobi-Identität $[[X,Y],V] + [[V,X],Y] + [[Y,V],X] = 0$

$$\rightsquigarrow = g([X,[Y,V]] - [Y,[X,V]],W) + g(V,[X,[Y,W]] - [Y,[X,W]])$$

$$= g([[X,Y],V],W) + g(V,[[X,Y],W]) \quad)$$

<u>Beispiele</u>: Am einfachsten findet man Killing-Koordinaten-VF: ∂_i ist Killing gdw. $\boxed{\partial_i g_{jk} = 0}$ $\forall j,k$, wenn also die Koeffizienten des Metrik-Tensors nicht von der i-ten Koordinate abhängen (denn mit 2. gilt ∂_i Killing gdw.

$[\partial_i, V^j\partial_j] = \partial_i V^j \cdot \partial_j$

$$\partial_i\, g(V,W) = g([\partial_i, V], W) + g(V, [\partial_i, W]) \quad \forall V,W$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\partial_i (g_{jk} V^j W^k)}_{= \text{RHS} + \partial_i g_{jk} \cdot V^j W^k} = \partial_i V^j W^k g_{jk} + \partial_i W^k \cdot V^j g_{jk} \quad \forall V,W$$

, also ∂_i Killing $\Leftrightarrow \partial_i g_{jk} V^j W^k = 0 \;\forall V,W$
$\Leftrightarrow \partial_i g_{jk} \equiv 0$)

Damit sind bspw. VF, die auf Rotationsflächen im $\mathbb{R}^3$ um die Achse fließen, Killing. Im Minkowski-Raum $M = \mathbb{R}^4$, $g = \sum_{i=1}^{3} du^i \otimes du^i - du^4 \otimes du^4$ sind alle $\partial_1, \dots, \partial_4$ Killing, im Einstein-de Sitter-Modell $M = \mathbb{R}^3 \times (0,\infty)$,
$g = (u^4)^{4/3} \sum_{i=1}^{3} du^i \otimes du^i - du^4 \otimes du^4$ sind $\partial_1, \dots, \partial_3$ Killing, und in der Schwarzschild-Raumzeit ist ∂_t Killing.

Es kann jedoch noch mehr Killing-VF geben als hier genannt, z.B. die zu Drehungen gehörigen VF im

Minkowski-Raum, die man durch Einführen von Polar-

koordinaten finden kann.

Abschließend noch ein paar Anmerkungen zur im Folgenden genutzten

Konvention zur <u>Notation physikalisch äquivalenter Tensorfelder</u>:

Sei S ein $(0,2)$-Tensor auf M_m, $m \in M$, $X, Y \in M_m$,

$\chi = g(X,\cdot)$, $\Psi = g(Y,\cdot) \in M_m^*$ phys. äquiv. Der zu S phys. äquiv.

$(1,1)$-Tensor wird mit $\tilde{S}$ bezeichnet und über $\tilde{S}(\chi, Y) = S(X,Y)$

definiert. Der phys. äquiv. $(2,0)$-Tensor wird mit $\hat{S}$ bezeichnet und

über $\hat{S}(\chi, \Psi) = S(X,Y)$ definiert. Ist $Z \in M_m$, so bezeichnen wir

mit $\tilde{S}Z \in M_m$ denjenigen Vektor mit $\chi(\tilde{S}Z) = \tilde{S}(\chi, Z)$ $\forall \chi \in M_m^*$.

In Indexnotation lassen wir „$\sim$" und „$\wedge$" wie üblich weg, d.h. ist

(X_i) Basis von M_m mit dualer Basis (ω^i), so gilt

$$S = S_{ij}\, \omega^i \otimes \omega^j, \quad \tilde{S} = \underbrace{S^i{}_j}_{= g^{ik} S_{kj}} X_i \otimes \omega^j, \quad \hat{S} = \underbrace{S^{ij}}_{= g^{ik} g^{jl} S_{kl}} X_i \otimes X_j,$$

$$\tilde{S} Z = S^i{}_j Z^j \cdot X_i \quad \text{für } Z = Z^j X_j.$$

Die <u>Spur</u> definieren wir als $\operatorname{tr} S = \operatorname{tr} \tilde{S} = \operatorname{tr} \hat{S} = \tilde{S}(\omega^i, X_i) = S^i{}_i$.

1. Teilchen, Energie, Impuls, Ladung, Dichte, Fluss(-erhaltung)

<u>Def.:</u> Sei $m \in [0,\infty)$ und $e \in \mathbb{R}$. Ein <u>Teilchen der Masse m und Ladung e</u> ist ein Tupel (γ, m, e), s.d. $\gamma : \mathcal{E} \to M$ eine zukunftsgerichtete Kurve mit $g(\gamma_*(u), \gamma_*(u)) \equiv -m^2 \leq 0 \ \forall u \in \mathcal{E}$ ist.

<u>Bem.:</u> • Als Beobachter hatten wir eine zukunftsgerichtete Kurve mit $g(\gamma_*, \gamma_*) \equiv -1$ definiert, also lässt sich jedes Teilchen mit $m > 0$ zu einem Beobachter (positiv-affin) reparametrisieren.

• Bogenlänge von $\gamma \ \hat{=}$ Eigenzeit

• γ frei fallend $:\Longleftrightarrow \gamma$ Geodäte

• γ_* nennen wir in diesem Zsh. <u>Energie-Impuls-Vektor</u>

<u>Def.:</u> Sei (z, Z) ein instantaner Beobachter (d.h. $z \in M$, $Z \in M_z$, Z zukunftsgerichtet, $g(Z,Z) = -1$) und (γ, m, e) ein Teilchen mit $\gamma(u_0) = z$ für ein $u_0 \in \mathcal{E}$.

Zerlege $M_z = \underbrace{\operatorname{span} Z}_{\text{„lokale Zeitachse"}} \oplus \underbrace{Z^\perp}_{\text{„lokaler Raum"}}$ (das geht, weil Z zeitartig, vgl. Aufgabe 0.0.11).

Damit ex. $E \in \mathbb{R}$, $p \in Z^\perp$ mit $\gamma_*(u_0) = E \cdot Z + p$. E ist die von (z, Z) für γ gemessene <u>Energie</u>, p der <u>Impuls</u>. Es gilt offenbar $E = -g(\gamma_*(u_0), \tau) > 0$ (nach Aufgabe 1.1.9, insb. auch für $m=0$).

Definiere ferner $v = \frac{1}{E} \cdot p$ als <u>Newtonsche Geschwindigkeit</u>.

<u>Prop.:</u> a) $|v| := |g(v,v)|^{1/2} \in [0,1]$

b) $m > 0 \Rightarrow E = \frac{m}{(1-|v|^2)^{1/2}}, \; p = \frac{mv}{(1-|v|^2)^{1/2}}$

c) $|v| < 1 \Rightarrow m > 0, \; E = m + \frac{m}{2} v^2 + O(|v|^4), \; p = mv + O(|v|^3)$

d) $E^2 = m^2 + |p|^2$

<u>Bew.:</u> d) $g(\gamma_*(u_0), \gamma_*(u_0)) = -m^2 = -E^2 + \underbrace{g(p,p)}_{= |p|^2 \geq 0}$ (denn $\tau^\perp$ ist raumartig und Kor. 1.1.4)

a) $|v|^2 = \frac{|p|^2}{E^2} = 1 - \frac{m^2}{E^2} \begin{cases} \geq 0, \text{ da } m^2 \leq E^2 \\ \leq 1, \text{ da } m^2, E^2 \geq 0 \end{cases}$

b) $E^2 = m^2 + E^2 |v|^2$, also $E = \frac{m}{(1-|v|^2)^{1/2}}$

c) $|v| < 1 \overset{\text{s. a)}}{\Rightarrow} m > 0$, Rest mit Taylor aus b)

<u>Bem.:</u> • Man sieht sofort: $m > 0 \Leftrightarrow \gamma$ zeitartig $\Leftrightarrow \forall$ inst. Beob. ist $|v| < 1$
$\Leftrightarrow \exists$ inst. Beob. mit $|v| < 1$

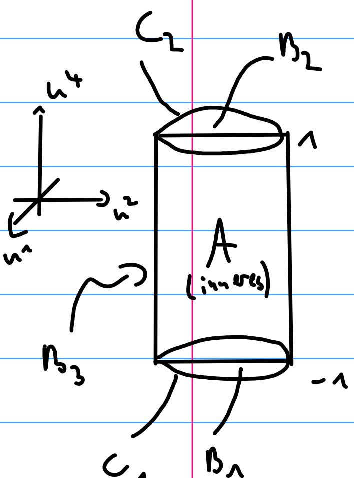
• Messungen bestimmen $\gamma_*(u_0)$ wie folgt eindeutig: Sind $X, Y \in M_m$, so gilt: $g(X, \tau) = g(Y, \tau) \; \forall$ inst. Beob. $(m, \tau) \Rightarrow X = Y$

(denn: $g(X,Z) = g(Y,Z)$ $\forall$ inst. Beob. (m,Z) ist nach Umskalieren äquivalent zu $g(X-Y,Z) = 0$ $\forall$ zeitartigen $Z \in M_m$. Wegen Stetigkeit ist dann aber auch $g(X-Y,Z)=0$ $\forall$ lichtartigen Z. Sei nun Z_0 zeitartig und Z raumartig, dann ist, da die Menge der zeitartigen Vektoren offen ist, für a klein genug $Z_0 + aZ$ zeitartig, d.h. $g(X-Y, Z_0+aZ) = 0$. Ableiten nach a liefert $g(X-Y,Z)=0$, und damit, da g nicht entartet, $X = Y$.)

- Vollkommen analog kann man bspw. zeigen: Falls $g(X,X) = g'(X,X)$ $\forall$ kausalen $X \in M_m$, so folgt $g = g'$.

<u>Def.:</u> Sei $m \in [0,\infty)$, $e \in \mathbb{R}$. Ein Teilchenfluss ist ein Tupel (P, η, m, e) mit einer C^∞-Fkt. $\eta : M \to [0,\infty)$ („Weltdichte") und einem Vektorfeld P, s.d. jede Integralkurve von P ein Teilchen der Masse m und Ladung e ist. P heißt Energie-Impuls-VF.

Um den Begriff der Teilchenzahlerhaltung, der als nächstes eingeführt wird, mit integralen Begriffen zu illustrieren, benötigen wir etwas Vorarbeit:



Def.: Sei $N_0 = \{(u^1,\dots,u^4)\in\mathbb{R}^4 \mid \sum_{i=1}^{3}(u^i)^2 \leq 1, |u^4|\leq 1\}$ der Vollzylinder im Minkowski-Raum (4-dim. Umf. mit Rand). Zerlege den Rand ∂N_0 in 5 disjunkte Mengen wie in der Skizze. Eine <u>kausale Box</u> ist eine C^∞-Einbettung $\phi: N_0 \to M$, die Orientierung, Zeitorientierung und kausalen Charakter erhält. $D = \phi(B_2 \cup C_2)$ nennen wir <u>Raumschnitt</u>.

Bem.: Folgende Tabelle fasst die Skizze zusammen:

Mf.	Homöo. zu	Orientierung	kausaler Char.	Abschluss
A	$\mathbb{R}^4$	von M	zeitartig	N_0
B_1, B_2	$\mathbb{R}^3$	von A	raumartig	$B_i \cup C_i$
B_3	$S^2\times\mathbb{R}$	von A	zeitartig	$B_3 \cup C_1 \cup C_2$
C_1, C_2	S^2	von B_1, B_2	raumartig	C_i

(zur Erinnerung: Raumartig $\Leftrightarrow$ g pos. def., Lichtartig $\Leftrightarrow$ g pos. semidef., nicht pos. def., zeitartig sonst.)

Prop.: Sei ω eine 3-Form auf M und ψ eine 2-Form. Dann gilt:

a) $d\omega = 0 \Leftrightarrow \int_{\partial N} \omega = 0$ für alle kausalen Boxen $N = \phi(N_0) \subset M$.

b) $d\psi = 0 \iff \int_{\partial D} \psi = 0 \; \forall$ Raumschnitte D.

<u>Bew.:</u> Die Beweisidee ist analog zu den bereits bewiesenen Eindeutigkeitsergebnissen für die Bestimmung von Vektoren und Tensoren aus Messungen. Deshalb wird das Vorgehen nur für 0-Formen, d.h. C^∞-Fktn. $f: M \to \mathbb{R}$, gezeigt: Zunächst gilt:

$$df \equiv 0 \iff df(W) = 0 \;\forall W \iff f = \text{const.} \quad (M \text{ zsh.})$$
$$\iff f(\gamma(b)) = f(\gamma(a)) \;\forall \text{ Kurve } \gamma \quad (M \text{ wegzsh.})$$

wobei hier im Prinzip der Satz von Stokes via

$$\int_a^b df(\gamma_*(u))\,du = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) \text{ verwendet wird.}$$

Wir wollen jetzt zeigen, dass es genügt, nur zeitartige Kurven zu betrachten. Mit Stokes gilt: $f(\gamma(b)) = f(\gamma(a)) \;\forall$ zeitartigen Kurven γ
$\iff df(W) = 0 \;\forall$ zeitartigen W.

Für X bel. ist aber wieder $W + aX$ für a klein genug zeitartig, also $0 = df(W + aX) = a \cdot df(X) \Rightarrow df(X) = 0 \Rightarrow df \equiv 0$.

<u>Def.:</u> Sei (P, η, m, e) ein Teilchenfluss. Ist D ein Raumschnitt, so definiere $N = \int_D i(\eta \cdot P)\Omega$ als <u>Teilchenzahl</u> in D. Wir sagen,

dass Teilchenzahlerhaltung gilt, wenn $\int_{\partial N} i(\eta P)\,\Omega = 0$

für alle kausalen Boxen $N = \phi(N_0)$ (d.h. mit der Prop.

gdw. $d(i(\eta P)\Omega) = 0 = \mathrm{div}(\eta P)\cdot\Omega \Leftrightarrow \mathrm{div}(\eta P) = 0$!)

Bsp.: I) $M = \mathbb{R}^4$, $g = \sum_{i=1}^{3} du^i \otimes du^i - du^4 \otimes du^4$, $P = m\cdot\partial_4$ für $m \in (0,\infty)$,

Teilchenzahlerhaltung, falls $\mathrm{div}(\eta\,\partial_4) = \partial_4 \eta = 0$

Prop.: Sei (M,g) zeitorientierte Raumzeit, P Energie-Impuls-VF, $\phi: N \to M$ raumartige Einbettung einer 3-Mf. N, und $\eta_0 : N \to [0,\infty)$ C^∞. Dann ex. höchstens ein $\eta: M \to [0,\infty)$ s.d. $\mathrm{div}(\eta P) = 0$ und $\eta \circ \phi = \eta_0$, sofern jede max. Integralkurve von P $\phi(N)$ genau einmal schneidet (Bem.: Die ganze Situation ist insofern künstlich, als dass eigentlich g gemäß der Feldgl. durch (P,η) bestimmt werden muss und nicht a priori gegeben ist)

Bew.: Sei $m \in M$, dann ex. genau eine Integralkurve γ von P durch m, die $\phi(N)$ o.B.d.A bei $u^0 = 0$ schneidet: $\gamma(u^0) \in \phi(N)$, $\gamma(u^1) = m$.

Da Integralkurven entweder geschlossen sind oder niemals zum gleich Punkt zurückkehren (Skizze dazu machen!) und per Voraussetzung jede Integralkurve $\Phi(N)$ nur einmal schneidet, kann es kein $u^2 \neq u^1$ geben mit $\gamma(u^2) = m$. Definiere

$f = \eta \circ \gamma : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ (Existenz wird angenommen), $j = \operatorname{div} P \circ \gamma : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$

und berechne $\operatorname{div}(\eta P)\Omega = d(i(\eta P)\Omega) = d(\eta \cdot i(P)\Omega)$

$$= d\eta \wedge i(P)\Omega + \eta \cdot \operatorname{div} P \cdot \Omega$$

$$\overset{\text{Bem. am Anfg}}{=} (d\eta(P) + \eta \cdot \operatorname{div} P)\,\Omega \quad \text{, d.h.}$$

$\operatorname{div}(\eta P) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow f' + f \cdot j = 0$, und da $f(0)$ vorgeg. ist somit $\eta(m) = f(u^1) = \eta_0(\Phi^{-1}(\gamma(0))) \cdot \exp\left(-\int_0^{u_1} j(u)\,du\right)$ eindeutig bestimmt.

Bem.: Existenz einer solchen Einbettung ist bspw. für global hyperbolische Raumzeit (d.h. $\exists$ Teilmenge B, s.d. jede zeitartige Kurve in M B genau einmal schneidet, „Cauchy-Fläche") gesichert, z.B. $\Phi(N) = \{u^4 = 1\} \subset \mathbb{R}^4$ im Minkowski-Raum.

Bsp.: II $M = \mathbb{R}^3 \times (0,\infty)$, $g = (R(u^4))^2 \sum_{i=1}^{3} du^i \otimes du^i - du^4 \otimes du^4$,

$n : (0,\infty) \to (0,\infty)$ C^∞, $P = m \cdot \partial_4$, $\eta = \frac{1}{m} \cdot n(u^4)$ für $m \in (0,\infty)$.

Dann gilt η erhalten, d.h. $\mathrm{div}(\eta \cdot P) = 0$, gdw. $\exists a \in (0,\infty)$ mit $n(u^4) = a \cdot R(u^4)^{-3}$

(denn: $\mathrm{div}(\eta \cdot P) \overset{\text{s.o.}}{=} d\eta(P) + \eta \cdot \mathrm{div}\, P$

$\sqrt{g} = R^3$ $\quad = n' + \frac{1}{m} \cdot n \cdot \frac{m}{R^3} \, 3 R' \cdot R^2 = 0$,

$\mathrm{div}\, P = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g} \cdot P^i)$ $\quad$ also $\frac{n'}{n} = -3 \cdot \frac{R'}{R}$, d.h. in der Tat $n = a \cdot R^{-3}$.)

2. Energie-Impuls-Tensor, Materiemodelle

Def.: Ein <u>Energie-Impuls-Tensor</u> (EIT) ist ein symmetrisches $(2,0)$-Tensorfeld $\hat{E}$ auf M, s.d. $\hat{E}(\omega,\omega) \geq 0$ $\forall$ kausalen 1-Formen ω.

Bem.:
- Inst. Beob. (z,Z) messen <u>Energiedichte</u> $E(z,Z)$
- Dass ausgerechnet ein $(2,0)$-Tensorfeld dafür geeignet ist, ist Beobachtungstatsache
- Wieder gilt: Ist $E(z,Z) = E'(z,Z)$ für alle inst. Beob., so folgt $E = E'$

Def.: Sei (P, η, m, e) ein Teilchenfluss auf M. Der EIT von (P, η, m, e) ist $\boxed{\hat{T} = \eta \cdot P \otimes P}$ (das ist tatsächlich ein EIT, denn: Symmetrie ist offensichtlich, und $\hat{T}(\omega, \omega) = \eta \cdot (\omega(P))^2 \geq 0$)

Motivation: Sei (Z, z) inst. Beob., $X_1, X_2, X_3 \in z^\perp$ Basis des lok. Ruhesystems von (Z, z), $K := \left\{ \sum_{i=1}^{3} \alpha_i X_i \mid \alpha_i \in [0,1] \right\} \subset z^\perp$ der von den X_i aufgespannte Parallelepiped mit gemessenem Volumen $V = |\Omega(X_1, X_2, X_3, z)|$ und enthaltener Teilchenzahl $N = \eta(z) \, |\Omega(X_1, X_2, X_3, P(z))|$

(das ist der Punkt, wo die Motivation zur Motivation statt zum Beweis wird; η gibt bei Integration über Teilmengen von M Teilchenzahlen, nicht an einem Punkt im Tangentialraum)

Die zugehörige Energiedichte, die (Z, z) misst, muss also

$$\frac{N \cdot E}{V} = \eta(z) \cdot \left| \frac{\Omega(X_1, X_2, X_3, P(z))}{\Omega(X_1, X_2, X_3, z)} \right| \cdot E$$

$P(z) = E \cdot z + p,$
$p \in z^\perp$

$$= \eta(z) \cdot E^2 = \eta(z) \cdot \left(g(P(z), z) \right)^2$$ sein.

Andererseits ist für $\hat{T} = \eta \cdot P \otimes P$, also

$T(z,z) = \eta(z) \cdot \left(g(P(z), z)\right)^2$ passend zum obigen

Ergebnis (man beachte auch, dass dieses Ergebnis unabhängig ist von der willkürlichen Wahl der Basis von $z^\perp$).

<u>Prop.:</u> Sei T der EIT eines Teilchenfluss' und X ein kausales VF. Dann gilt $T(X,X) - \frac{1}{2} \cdot (\operatorname{tr} T) \cdot g(X,X) \geq 0$.

<u>Bew.:</u> $T(X,X) = \eta \cdot \left(g(X,P)\right)^2$

$$\begin{aligned}\operatorname{tr} T &= \eta \cdot \sum_{i=1}^{4} \tilde{T}(\omega^i, X_i) \\ &= \eta \cdot \sum_{i=1}^{4} \omega^i(P) \cdot g(X_i, P) = \eta \cdot g\left(\sum_{i=1}^{4} \omega^i(P) \cdot X_i, P\right) \\ &= \eta \cdot g(P,P)\end{aligned}$$

(oder in Indexnotation: $T_{ij} = \eta \cdot P_i \cdot P_j$, $T^i{}_j = \eta \cdot g^{ik} P_k P_j$

$\operatorname{tr} T = T^i{}_i = \eta \cdot g^{ik} P_i P_k = \eta \cdot g_{ik} P^i P^k = \eta\, g(P,P)$)

Also $T(X,X) - \frac{1}{2} \operatorname{tr} T \cdot g(X,X) = \underbrace{\eta}_{\substack{\geq 0 \\ \text{per Def.}}} \cdot \underbrace{\left(g(P,X)^2 - \frac{1}{2} \cdot g(P,P) \cdot g(X,X)\right)}_{\substack{\geq 0 \text{ gemäß CSU} \\ \text{für kausale Vektoren,} \\ \text{vgl. Aufgabe 1.1.10 a)}}}$

(für kausale Vektoren v, w, d.h. $g(v,v), g(w,w) \leq 0$, gilt die umgekehrte CSU $|g(v,w)| \geq |v| \cdot |w|$ mit Gleichheit gdw. $w = \alpha \cdot v$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ [da der Nullvektor raumartig ist]. Zum Beweis zerlege wieder* $M_t = \operatorname{span} v + v^\perp$, also $w = \underbrace{\alpha \cdot v}_{= w_\parallel} + w_\perp$ mit $g(v, w_\perp) = 0$, $w_\perp$ raumartig,

also $$|g(v,w)| = |\alpha \cdot g(v,v)| = |\alpha| \cdot \left((-g(v,v))^{1/2} \right)^2$$
$$= |v| \cdot |w_\parallel| \geq |v| \cdot |w|,$$

denn $g(w,w) = \underbrace{g(w_\perp, w_\perp)}_{\geq 0} + \underbrace{g(w_\parallel, w_\parallel)}_{< 0} < 0$, d.h.

$$|g(w_\parallel, w_\parallel)| \geq |g(w_\perp, w_\perp)|, \quad |g(w,w)| \leq |g(w_\parallel, w_\parallel)|,$$

und Gleichheit gilt offenbar, wenn $w_\perp = 0$, d.h. $w = \alpha \cdot v$.

* Nehme an, dass v, w beide zeitartig, sonst ist die zu zeigende Ungleichung trivialerweise erfüllt.)

<u>Bem.:</u> Die Eigenschaft aus der obigen Proposition heißt <u>zeitartiges Konvergenzkriterium</u> des ET und impliziert, falls $(M, \mathfrak{M}, F)$

(s. später) die Einsteinschen Feldglgn. erfüllt, dass $\mathrm{Ric}(z,z) > 0$ $\forall$ zeitartigen VF z. Daraus folgt, dass kein Beobachter in einem geodätischen rotationsfreien Bezugssystem auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sein kann (vgl. Aufgabe 4.3.7), weil benachbarte zeitartige Geodäten zusammenlaufen.

<u>Bsp.:</u> Eine lustige Rechenaufgabe aus dem Buch ist folgende: Betrachte 4 inst. Beob. an einem Punkt z im Minkowski-Raum mit $z = \partial_4(z)$, $z^{\pm} = \frac{1}{3}(5\,\partial_4(z) \pm 4\partial_1(z))$, $z' = \frac{1}{4}(5\cdot\partial_4(z) + 3\cdot\partial_1(z))$, die jeweils Energiedichten $u = 1$, $u^{\pm} = \left(\frac{5}{3}\right)^2$, $u' = 3$ messen. Zeige, dass die oben entwickelte Theorie falsch ist, d.h. dass kein zugehöriger EIT existiert (Schreibe $E = E_{ij}\, du^i \otimes du^j$, z liefert $E_{44} = 1$, $z^{\pm}$ gibt $\left(\frac{5}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 E_{11} \pm \frac{40}{3}\cdot E_{12} \overset{!}{=} \left(\frac{5}{3}\right)^2$, also $E_{11} = E_{12} = 0$, aber dann müsste für z' gelten: $u' = \left(\frac{5}{4}\right)^2 \neq 3$ ↯)

<u>Def.:</u> Ein <u>Materiemodell</u> auf M ist eine Menge an Teilchenflüssen $\mathcal{M} = \{(P_A, \eta_A, m_A, e_A) \mid A = 1, \dots, N\}$. Der zugehörige

EIT ist $\hat{T} = \sum_{A=1}^{N} \eta_A \cdot P_A \otimes P_A$.

Bem.: • Es gilt: $T(Z,Z)(z) = 0$ für einen inst. Beob. (z, Z)

da $(g(P_A,Z))^2 > 0$ für alle $A=1,\dots,N$. $\Longleftrightarrow T(z) = 0 \Longleftrightarrow \eta_A(z) = 0 \ \forall A = 1,\dots,N$.

• $T(z) = 0$ interpretieren wir als Vakuum

• Wir betrachten nur Materie, die sich gemäß dieser Def. behandeln lässt, z.B. perfekte Fluide

3. em-Feldstärketensor, E- und B-Feld

Def.: • Eine Stromdichte ist ein VF J auf M, und ein inst. Beob. (z, Z) misst die Ladungsdichte $-g(Z, J)$.

• Die Stromdichte eines Teilchenfluss (P, η, m, e) ist $J = e \cdot \eta \cdot P$, also gilt: η erhalten $\Longleftrightarrow \operatorname{div} J = 0$ (falls $e \neq 0$).

• Entsprechend ist die Stromdichte eines Materiemodells $J = \sum_{A=1}^{N} J_A$.

• Ein em-Feld ist eine 2-Form F auf M.

• Ein Tupel $(M, \mathcal{M}, F)$ mit einer Raumzeit (M, g) mit

 Levi-Civita-Zsh. D, einem Materiemodell $\mathcal{M}$ auf M und einem em-Feld F auf M nennen wir <u>relativistisches Modell</u>.

<u>Def.</u>: Sei F ein em-Feld und $(7, Z)$ inst. Beob.. Das <u>E-Feld</u>, das $(7,Z)$ misst, ist definiert als $E = \tilde{F}Z \in Z^\perp$

(Denn F ist antisymmetrisch, also $F(Z,Z) = 0 = \tilde{F}(g(Z,\cdot),Z) = g(\tilde{F}Z, Z)$.

In Komponenten gilt $E = \tilde{F}Z = F^i{}_j Z^j \cdot X_i$ für Basis $(X_1, \dots, X_4)$)

Das <u>B-Feld</u> ist definiert als das eindeutige $B \in Z^\perp$ mit

$4!\, \Omega(X,Y,B,Z) = F(X,Y) \; \forall X,Y \in Z^\perp$ (d.h.

man betrachte den 3dim VR $Z^\perp$ mit Skalarprod. g und Volumen-element $4 \cdot \Omega(\cdot,\cdot,\cdot,Z)$ (Orientierung von M_Z geerbt).

B ist dann physikalisch äquivalent zum Hodge-Dual von $F|_{Z^\perp}$. In Komponenten: Sei (X_1, X_2, X_3, Z) orientierte ONB von M_Z, dann ist also $\sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} x^i y^j B^k \overset{!}{=} \sum_{i=1}^{3} F_{ij} x^i y^j \; \forall X, Y \in Z^\perp$

d.h. mit
$$\left.\begin{aligned} X=(1,0,0),\ Y=(0,1,0)&: B^3 = F_{12} \\ X=(0,1,0),\ Y=(0,0,1)&: B^1 = F_{23} \\ X=(0,0,1),\ Y=(1,0,0)&: B^2 = F_{31} \end{aligned}\right)$$

<u>Bem.:</u> • In der ONB (X_1, X_2, X_3, Z) erhalten wir damit die bekannte Darstellung $\left(F_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 0 & B^3 & -B^2 & E^1 \\ -B^3 & 0 & B^1 & E^2 \\ B^2 & -B^1 & 0 & E^3 \\ -E^1 & -E^2 & -E^3 & 0 \end{pmatrix}$ (dass die B-Feld-Komponenten so aussehen müssen, hatten wir gerade festgestellt, und für das E-Feld gilt in dieser Basis $E^i = F^i{}_4$, $i = 1,2,3$, also $F_{i4} = \underbrace{g_{ij}}_{= \delta_{ij},\ 1 \le i,j \le 3} F^j{}_4 = E^i$)

• Das B-Feld hängt damit explizit von der Orientierung der Mf ab!

Bei Änderung der Orientierung ändert B das Vorzeichen („Pseudo-Vektor")

• Im Minkowski-Raum können wir kurz auch für den em-Tensor aus der Sicht von $Z = \partial_4$:
$$F = 2 \cdot \left[\sum_{i=1}^{3} E^i \, du^i \wedge du^4 + B^1 du^2 \wedge du^3 + B^2 du^3 \wedge du^1 + B^3 du^1 \wedge du^2 \right]$$
schreiben.

<u>Bsp.:</u> Das folgende Beispiel zeigt noch einmal konkret, dass E- und B-Felder beobachterabhängig sind und F das eigentliche physikalische Objekt ist: Betrachte im Minkowski-Raum

$$F = 2\cdot\left[\mathcal{E}\, du^1 \wedge du^4 + \mathcal{B}\, du^3 \wedge du^1\right], \text{ d.h. } z = \partial_4$$

misst mit obigen Überlegungen $E = \mathcal{E}\cdot\partial_1$, $B = \mathcal{B}\cdot\partial_2$.

Der Beobachter $z' = \frac{1}{3}(5\cdot\partial_4 + 4\cdot\partial_1)$ misst aber bspw. im Fall $\mathcal{E}\equiv 0$

$$E' = \tilde{F}z' = \tilde{F}^i{}_j (z')^j\,\partial_i = \tilde{F}^3{}_1 (z')^1\,\partial_3 = \frac{4}{3}\cdot\mathcal{B}\,\partial_3 \neq 0,$$

während in diesem Fall $E = 0$.

4. Maxwell Glgn.

Wir betrachten hier (M, g, ∇) und $\mathcal{M}$ als gegeben und definieren zwei Bestimmungsgleichungen für F. Tatsächlich liefert F aber auch einen EIT, der wiederum die Metrik gemäß der Feldglg. beeinflusst, s. später.

<u>Def.</u>: Das rel. Materiemodell $(M, \mathcal{M}, F)$ erfüllt die <u>Maxwell-Glgn.</u>

genau dann wenn:

> a) F geschlossen ist, d.h. $dF = 0$
>
> b) $\operatorname{div} \hat{F} = 4\pi J$

<u>Bsp.</u>: Betrachte wieder den Minkowski-Raum mit

$$F = 2\cdot\left[\sum_{i=1}^{3} E^i \, dx^i \wedge dx^4 + B^1 \, dx^2 \wedge dx^3 + B^2 \, dx^3 \wedge dx^1 + B^3 \, dx^1 \wedge dx^2\right],$$

a) $dF = 0$ bedeutet wie in den mathematischen Vorüberlegungen hier

$\partial_i F_{jk} + \partial_k F_{ij} + \partial_j F_{ki} = 0$, oder wir berechnen direkt:

$$dF = 2\cdot\Big[\sum_{i=1}^{3} \partial_j E^i \, dx^j \wedge dx^i \wedge dx^4 + \partial_j B^1 \, dx^j \wedge dx^2 \wedge dx^3$$
$$+ \partial_j B^2 \, dx^j \wedge dx^3 \wedge dx^1 + \partial_j B^3 \, dx^j \wedge dx^1 \wedge dx^2\Big] \overset{!}{=} 0$$

Koeffizientenvgl. liefert bspw. für $dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^4$ die Glg.

$\partial_1 E^2 - \partial_2 E^1 + \partial_4 B^3 = 0$ und für $dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ die

Glg. $\partial_1 B^1 + \partial_2 B^2 + \partial_3 B^3 = 0$, und wir erhalten insgesamt

die bekannten homogenen Maxwell-Glgn. $\nabla \cdot B = 0$, $\nabla \times E = -\partial_t B$.

b) Berechne zunächst $\hat{F} = F^{ij} \partial_i \otimes \partial_j$ mit

$$(F^{ij}) = (g^{ik} g^{jl} F_{kl}) = \begin{pmatrix} 0 & B^3 & -B^2 & -E^1 \\ -B^3 & 0 & B^1 & -E^2 \\ B^2 & -B^1 & 0 & -E^3 \\ E^1 & E^2 & E^3 & 0 \end{pmatrix},$$ und damit dann

wegen $\Gamma^k_{ij} \equiv 0$: $\operatorname{div} \hat{F} = \partial_l F^{il} \cdot \partial_i \overset{!}{=} 4\pi J^i \partial_i$, was offensichtlich

$\nabla \times B = 4\pi j + \partial_t E$ und $\nabla \cdot E = 4\pi J^0 = 4\pi \rho$ ergibt.

Bsp.: (1.) Konstantes Magnetfeld: Sei $B: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ C^∞-Fkt. auf dem Minkowski-Raum. $F = \underbrace{2B \cdot du^3 \wedge du^1}_{B\text{-Feld in } \partial_2\text{-Richtung für } \partial_4}$ löst die Maxwell-Glg. für $J = 0$ gdw.

a) $dF = 0$, d.h. $\partial_2 B = \partial_4 B = 0$

b) $\operatorname{div} \hat{F} = 0$, d.h. $\partial_1 B = \partial_3 B = 0$

insg. $B =$ const. nötig!

(2.) Wellen im Minkowski-Raum (ebene Welle in ∂_3-Richtung):

Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ C^∞, $f \not\equiv 0$, $\phi = u^3 - u^4$, und

$F = 2 \cdot f \circ \phi \cdot d\phi \wedge du^1 = 2 \cdot f \circ \phi \cdot (du^3 - du^4) \wedge du^1$,

dann gilt: a) $dF = 2 \cdot (f' \circ \phi) \cdot d\phi \wedge d\phi \wedge du^1 = 0$ ✓

b) $$(F_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -f\circ\phi & f\circ\phi \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ f\circ\phi & 0 & 0 & 0 \\ -f\circ\phi & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ also}$$

$$(F^{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -f\circ\phi & -f\circ\phi \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ f\circ\phi & 0 & 0 & 0 \\ f\circ\phi & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und damit}$$

$$\operatorname{div} \hat{F} = \partial_\ell F^{i\ell} \partial_i = \underbrace{\partial_1 (f\circ\phi)}_{=0} (\partial_3 + \partial_4) - \underbrace{(\partial_3 + \partial_4)(f\circ\phi)}_{=0} \cdot \partial_1 = 0$$

also erfüllt F bspw. mit $f(x) = A \cdot \sin(\omega x)$ die Maxwell-Glgn. im Vakuum. ∂_4 misst dabei $E = f(u^3 - u^4)\partial_1$, $B = f(u^3 - u^4)\partial_2$; die Welle breitet sich mit $\frac{du^3}{du^4} = 1$, also Lichtgeschwindigkeit, aus.

Beobachterunabhängige Größen sind das Propagationsvf. $Y = \partial_3 + \partial_4$ und die Polarisationsachse $Y \wedge \partial_1$.

<u>Def.:</u> Wir definieren den EIT eines em-Feldes F durch die Komponenten $E_{ij} = \frac{1}{4\pi}\left(F_{im}F_j{}^m - \frac{1}{4} \cdot g_{ij} \cdot F^{mn}F_{mn}\right)$.

<u>Prop.:</u> a) E ist tatsächlich ein EIT, und $\operatorname{tr} E = 0$

b) Falls F die Maxwell-Glg. mit Quellterm J erfüllt, so gilt

$$\operatorname{div} \hat{E} = -\hat{F}J.$$

<u>Bew.:</u> a) Zunächst einmal hängt E nicht von der gewählten Basis ab: Sind (E_{ij}) wie oben die Komponenten von E bzgl. (X_i) und ist $Y_j = a^i{}_j X_i$ eine andere Basis, so gilt

$$E'_{ij} = a^k{}_i a^l{}_j E_{kl} = \frac{1}{4\pi}\Big(a^k{}_i a^l{}_j F_{km} F_l{}^m - \frac{1}{4} a^k{}_i a^l{}_j g_{kl} F^{mn} F_{mn}\Big)$$

$$= g'_{ij}$$

$$F'^{mn} F'_{mn} = (a^{-1})^m{}_r (a^{-1})^n{}_s F^{rs} a^k{}_m a^l{}_n F_{kl} = F^{mn} F_{mn} \checkmark$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left((a^{-1})^r{}_m F'_{ir}\, a^m{}_s F'_j{}^s - \frac{1}{4} g'_{ij} (F')^{mn} (F')_{mn} \right)$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left(F'_{ir} F'_j{}^r - \frac{1}{4} g'_{ij} F'^{mn} F'_{mn} \right).$$

E ist offenbar symmetrisch unter $i \leftrightarrow j$; für den zweiten Term ist das klar, und für den ersten Term gilt $F_{jm} F_i{}^m = F_{jm} \cdot g^{ml} \cdot F_{il} = F_{il} \cdot F_j{}^l$.

Zu zeigen bleibt $\hat{E}(\omega, \omega) \geq 0 \ \forall$ kausalen 1-Formen ω.

Wegen Stetigkeit genügt es, dies für zeitartige Formen nachzurechnen, und o.B.d.A. sei $|\omega| = 1$. Ergänze zu ONB $\{\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4\}$ mit $\omega^4 = \omega$, s.d. $(g_{ij}) = (g^{ij}) = \mathrm{diag}(1,1,1,-1)$, und damit $F^{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta} = F^\alpha{}_\beta = F_\alpha{}^\beta$ für $1 \leq \alpha, \beta \leq 3$,

$F^{4\alpha} = -F_{4\alpha}$, $F^{\alpha 4} = -F_{\alpha 4}$ und außerdem analog

$F^\alpha{}_4 = F_{\alpha 4}$, $F^4{}_\alpha = -F_{4\alpha} = F_{\alpha 4}$ für $\alpha = 1,2,3$.

Damit ergibt sich: $4\pi \hat{E}(\omega, \omega) = F^{4n} F^4{}_n + \frac{1}{4} F^{mn} F_{mn}$

(α, β von 1 bis 3, n, m von 1 bis 4)

$$= \underbrace{F^{4\alpha} F^4{}_\alpha}_{\text{da } F^{44} = F^4{}_4 = 0} + \frac{1}{4} \cdot \Big(\underbrace{F^{4\alpha} F_{4\alpha}}_{\text{s. links}} + \underbrace{F^{\alpha n} F_{\alpha n}}_{= F^{n\alpha} F_{n\alpha} = F^{4\alpha} F_{4\alpha} + F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}} \Big)$$

ignoriere oben-unten-Konvention ...

$$= F^{4\alpha} \cdot F^{4\alpha} + \frac{1}{4}\left(-2 \cdot F^{4\alpha} F^{4\alpha} + F^{\alpha\beta} \cdot F^{\alpha\beta}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot F^{4\alpha} \cdot F^{4\alpha} + \frac{1}{4} \cdot F^{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \geq 0 .$$

Als letztes noch die Spur:

$$4\pi \cdot \mathrm{tr}\,\tilde{E} = g^{il} F_{lm} F_i{}^m - \frac{1}{4} \underbrace{g_{ii}}_{=4} \cdot F^{mn} F_{mn}$$

$$= F_{lm} F^{lm} - F^{mn} F_{mn} = 0$$

b) z.z.: $E^{ij}{}_{;j} = -F^i{}_m J^m$

Bekannt: $dF = 0$, d.h. $F_{ij;k} + F_{jk;i} + F_{ki;j} = 0$, und

$\mathrm{div}\,\hat{F} = 4\pi J$, d.h. $F^{ij}{}_{;j} = 4\pi J^i$ (*), also berechnen wir

$$4\pi (\mathrm{div}\,\hat{E})^i = 4\pi E^{ij}{}_{;j} = \left(F^j{}_m F^{im}\right)_{;j} - \frac{1}{4}\left(g^{ij} F^{mn} F_{mn}\right)_{;j}$$

$g^{ij}{}_{;k} \equiv 0$ per Metrik-Kompatibilität, denn es gilt

$\nabla_{X_k} g(X_i, X_j) = X_k(g(X_i, X_j))$

$= g(\nabla_{X_k} X_i, X_j) + g(X_i, \nabla_{X_k} X_j)$

$\stackrel{\uparrow}{=} (\nabla_{X_k} g)(X_i, X_j) + g(\nabla_{X_k} X_i, X_j) + g(X_i, \nabla_{X_k} X_j)$

Derivation auf Tensoren

$\Rightarrow (\nabla_{X_k} g) \equiv 0$, also auch $\nabla_{X_k} \hat{g} \equiv 0$

$$= F^j{}_{m;j} \cdot F^{im} + F^j{}_m F^{im}{}_{;j} - \frac{1}{4} g^{ij} F^{mn}{}_{;j} F_{mn} - \frac{1}{4} g^{ij} F^{mn} F_{mn;j}$$

$$= \underbrace{-4\pi J_m}_{(*),\ jk \to m \text{ gibt „}-\text{"-Zeichen}} \cdot F^{im} + F^j{}_m F^{im}{}_{;j} - \underbrace{\frac{1}{2} g^{ij} F^{mn} F_{mn;j}}_{\text{Indices heben/senken...}}$$

$$= -4\pi F^i{}_m J^m + g^{ik} g^{ml} F_{kl;j} g_{mr} F^{jr}$$

$$- \frac{1}{2} \cdot g^{ik} F_{mj;k} F^{mj}$$

$$= -4\pi F^i{}_m J^m + g^{ik} F_{km;j} F^{jm} + \frac{1}{2} g^{ik} F_{mj;k} F^{jm}$$

$$\overbrace{}\, F_{km;j}F^{jm} - \frac{1}{2}\left(F_{km;j}F^{jm} - F_{mk;j}F^{jm}\right)$$

$-F_{mk;j}F^{jm}$ $= -F_{jk;m}F^{mj}$ $= F_{jk;m}F^{jm}$

$j \leftrightarrow m$ umbenennen

$$= -4\pi F^i{}_m J^m + \frac{1}{2} g^{ik} F^{jm}\left(F_{km;j} - F_{mk;j} + F_{mj;k}\right)$$

$$= -4\pi F^i{}_m J^m + \frac{1}{2} g^{ik} F^{jm}\underbrace{\left(F_{km;j} + F_{jk;m} + F_{mj;k}\right)}_{=0}$$

$$= -4\pi\left(\tilde{F}J\right)^i .$$

Bem.: · $E(Z,Z)$ ist die von Z gemessene Energiedichte:

$$E(Z,Z) = E_{ij}Z^iZ^j = \frac{1}{4\pi}\Big(\underbrace{F_{im}F_j{}^m Z^iZ^j}_{=|E|^2} + \frac{1}{4}\underbrace{F^{mn}F_{mn}}_{=-2|E|^2+2|B|^2}\Big) = \ldots$$

(sieht man sofort in ONB (X_1, X_2, X_3, Z))

$$\ldots = \frac{1}{8\pi}\left(|E|^2 + |B|^2\right).$$ E vereinigt damit Energiedichte, Poynting-Vektor und Maxwell-Spannungstensor.

Prop.: M, F, J erfüllen die Maxwell-Gl. gdw.

a) $\int_{\partial D} i(\hat{F})\Omega = 4\pi \int_D i(J)\Omega$ für jeden Raumschnitt D.

b) $\int_{\partial D} F = 0$ für jeden Raumschnitt D.

Außerdem gilt in diesem Fall: (Kontinuitätsgleichung)

c) $\operatorname{div} J = 0$ bzw. $\sum_{j=1}^{3} \int_{\Phi(B_j)} i(J)\Omega = 0$ für jede kausale Box

Bew.: a) $\operatorname{div}\hat{F} = 4\pi J \iff d(i(\hat{F})\Omega) = 4\pi\, i(J)\Omega$

$$\underset{\substack{\text{Stokes,}\\ \text{Raumschnitte genügen}}}{\iff} \int_{\partial D} i(\hat{F})\Omega = 4\pi \int_D i(J)\Omega \quad \forall D$$

b) klar, ist äquivalent zu $dF = 0$

c) $\operatorname{div} J = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \operatorname{div} \hat{F} = 0$, da $d^2 = 0$; die integrale Form folgt mit der entsprechenden Prop. über 3-Formen.

__Bsp.:__ Abschließend berechnen wir noch $\hat{E}$ für das Ebene-Wellen-Bsp. mit $\phi = u^3 - u^4$, $F = 2 \cdot f \circ \phi \, d\phi \wedge du^1$, also

$$(F_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -f\circ\phi & f\circ\phi \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ f\circ\phi & 0 & 0 & 0 \\ -f\circ\phi & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (F^{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -f\circ\phi & -f\circ\phi \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ f\circ\phi & 0 & 0 & 0 \\ f\circ\phi & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$g^{ij} = \operatorname{diag}(1,1,1,-1) \text{ und } (F^i{}_j) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -f\circ\phi & f\circ\phi \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ f\circ\phi & 0 & 0 & 0 \\ f\circ\phi & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{also } (E^{ij}) = \frac{1}{4\pi}\left(F^{im} F^j{}_m - \frac{1}{4} g^{ij} \underbrace{F^{mn} F_{mn}}_{=0}\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left(F^{im} F^j{}_m\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (f\circ\phi)^2 & (f\circ\phi)^2 \\ 0 & 0 & (f\circ\phi)^2 & (f\circ\phi)^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4\pi} \overbrace{(f\circ\phi)^2}^{\geq 0} \cdot Y \otimes Y$$

mit $Y = \underbrace{\partial_3 + \partial_4}_{\text{lichtartig}}$

entspricht EIT von Photonenstrahl.