Lagrange Formalismus

Beschreibung der Mechanik allgemeiner, mit Betrachtung von Zwangsbedingungen. Nach Newton müsste man Zwangskräfte, wie den Pfaden eines Pendels erst einberechnen um dann am Ende wieder zu eliminieren.

Beschreibt man ein System mit n Freiheitsgeraden hingegen allgemein durch n generalisierte Koordinaten und ihre Geschwindigkeiten $q_1, \dot{q}_1 ... q_n, \dot{q}_n$, so kann man sich viele Koordinaten (nach Newton etwa 3 Dimensionen) sparen. Für ein Pendel z. B. seien die generalisierte Koordinate einfach die Auslenkung $\varphi, \dot{\varphi}$, da der Radius fest wäre und man braucht so nur eine. Die Koordinaten müssen also nicht kartesisch sein, man muss mit ihnen aber die kinetische und die potenzielle Energie definieren können.

Denn drückt man in Abhängigkeit von $q, \dot{q}$ nun die kinetische T und die potenzielle U Energie aus, so erhält man direkt die Lagrangefunktion definiert als:

Lagrangefunktion

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q)$$

Diese ist von hoher Bedeutung für uns da man unter verwendung dieser direkt die Differentialgleichungen der Bewegungsgleichungen für alle n Freiheitsgerade erhält. Herleitung und Beweis dieser **Euler-Lagrange Gleichung**ist im folgenden aufgeführt.

Euler-Lagrange Gleichung

$\forall\, i = 1, ... N:$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q_i} = 0$$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ wird dabei auch generalisierter Impuls p genannt. Damit gelte:

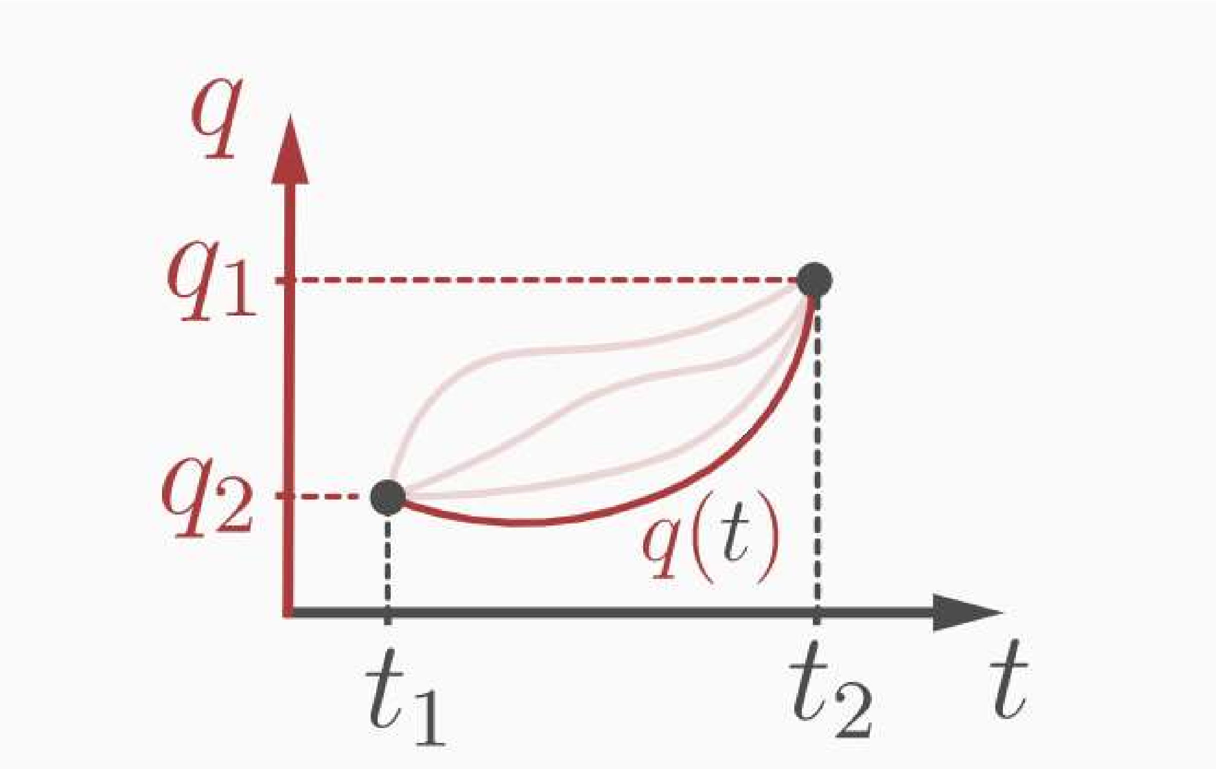
$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

Herleitung per Hamilton'schem Prinzip

Die Natur folgt "Extrema", und so können wir hier mithilfe des Variations-Prinzips argumentieren. Führen wir den Begriff Wirkung als Funktional S zu jeder denkbaren Trajektorie q ein

$$S[q(t)] = \int_a^b L(q, \dot{q})\; dt$$

so können wir formulieren, dass das System zwischen zwei Punkten $(t = a, q = q_a), (t = b, q = q_b)$ jene Trajektorie annimmt, längs der die Wirkung S stationär ist - die Wirkung also ein Extrema annimmt. Die Ableitung der Wirkung nach der Stärke der Varitation ist also null, das heißt eine infinitisimal kleine Änderung der Trajektorie q zu einer Variation q' verändert nicht die Wirkung.



Formalisieren wir die Variation einer Trajektorie q' können wir die obige forderung an die Wirkung mathematisch formulieren. Definieren wir unsere variierte Trajektorie mit

$$
\begin{aligned}
q'(t,\alpha) &= q(t) + \alpha \cdot \eta(t) & (1)\\
\Rightarrow \dot{q}'(t,\alpha) &= q(t) + \alpha \cdot \dot{\eta}(t) & (2)
\end{aligned}
$$

unter Zuhilfenahme einer beliebigen Funktion $\eta(t)$, wobei $\eta(a) = \eta(b) = 0$ damit Start und Endpunkt unverändert bleiben, so hängt die Stärke der Variation von α ab und um die Extrema-Bedingung zu erfüllen, fordern wir für $\alpha = 0$

$$\frac{\partial S[q'(t,\alpha)]}{\partial \alpha} \stackrel{!}{=} 0.$$

Dies erfordert direkt, die oben stehenden Differenzialgleichungen: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial q_i} = 0$ wie wir im Folgenden zeigen.

Nachweis

$L(q', \dot{q}') = L(q + \alpha\eta, \dot{q} + \alpha\dot{\eta})$ erhalten wir ungefähr aus der Taylorentwicklung um $\alpha = 0$ herum:

$$
\begin{aligned}
L(q+\alpha\eta, \dot{q}+\alpha\dot{\eta}) &= L(q + 0\cdot\eta, \dot{q} + 0\cdot\dot{\eta}) + \alpha \cdot \frac{\partial L(q+\alpha\eta, \dot{q}+\alpha\dot{\eta})}{\partial \alpha} + O(\alpha^2) & (3)\\
&= L(q,\dot{q}) + \alpha \cdot \frac{\partial L(q+\alpha\eta, \dot{q}+\alpha\dot{\eta})}{\partial \alpha} + O(\alpha^2) & (4)
\end{aligned}
$$

Um das totale Differenzial von $\frac{\partial L(q+\alpha\eta,\dot{q}+\alpha\dot{\eta})}{\partial \alpha}$ zu berechnen nutzen wir, dass für $(x,y) \mapsto f(x,y)$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

gilt. Wir erhalten:

$$\frac{\partial L(q+\alpha\eta,\dot{q}+\alpha\dot{\eta})}{\partial\alpha} = \frac{\partial L}{\partial(q+\alpha\eta)} + \frac{\partial L}{\partial(\dot{q}+\alpha\dot{\eta})}$$

Dies lösen wir mit der Kettenregel:

$$\frac{\partial L}{\partial(q+\alpha\eta)} + \frac{\partial L}{\partial(\dot{q}+\alpha\dot{\eta})} = \frac{\partial L}{\partial q}\cdot\frac{(\partial q+\alpha\eta)}{\partial\alpha} + \frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\cdot\frac{(\partial\dot{q}+\alpha\dot{\eta})}{\partial\alpha} \tag{5}$$

$$= \frac{\partial L}{\partial q}\cdot\eta + \frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\cdot\dot{\eta} \tag{6}$$

wir setzen die Ableitung in den Summanden der Taylor Entwicklung ein:

$$L(q,\dot{q}) + \alpha\cdot(\frac{\partial L}{\partial q}\cdot\eta + \frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\cdot\dot{\eta}) + O(\alpha^2)$$

Um nun mit dem Integral die Wirkung berechnen zu können:

$$S[q(t)] = \int_a^b L(q,\dot{q}) + \alpha\cdot\frac{\partial L}{\partial q}\cdot\eta + \alpha\cdot\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\cdot\dot{\eta}\; dt + O(\alpha^2)$$

Die Ableitung der Wirkung nach α soll für $\alpha = 0$ wie oben gefordert gegen null gehen. Wir stellen die Gleichung auf:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\partial\, S[q(t)]}{\partial\alpha} = \frac{\partial}{\partial\alpha}\int_a^b L(q,\dot{q}) + \alpha\cdot\frac{\partial L}{\partial q}\cdot\eta + \alpha\cdot\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\cdot\dot{\eta}\; dt \tag{7}$$

$$= \int_a^b \frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial\alpha} + \frac{\partial\alpha}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial L}{\partial q}\cdot\eta + \frac{\partial\alpha}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\cdot\dot{\eta}\; dt \tag{8}$$

$$= \int_a^b \frac{\partial L}{\partial q}\cdot\eta + \frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\cdot\dot{\eta}\; dt \tag{9}$$

Wir gehen im Weitere mit Partieller Integration vor. Beginnend mit dem zweiten Summanden:

$$\int_a^b \frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\cdot\dot{\eta}\; dt$$

Zur Erinnerung für Partielle Integration:

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx \tag{10}$$

wir können für unsere Anwendung einsetzen $u(x) = \frac{\partial L}{\partial\dot{q}}$ und $v'(x) = \cdot\dot{\eta}$, dann ist offensichtlich $v(x) = \eta$

so ergibt sich:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\partial\, S[q(t)]}{\partial\alpha} = \int_a^b \frac{\partial L}{\partial q}\cdot\eta + \frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\cdot\dot{\eta}\; dt \tag{11}$$

$$= \int_a^b \frac{\partial L}{\partial q}\cdot\eta\; dt + \Big[\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\cdot\eta\Big]_a^b - \int_a^b \frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\cdot\eta\,dt \tag{12}$$

$\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \eta\right]_a^b$ fällt weg, da $\eta(a) = \eta(b) = 0$ und wir können η im verbleibenden Therm ausklammern und, da $\lim_{\alpha \to 0} \frac{\partial\, S[q(t)]}{\partial \alpha}$ null ergibt die Gleichung gleich null setzen.

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\partial\, S[q(t)]}{\partial \alpha} = \eta \cdot \int_a^b \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\, dt \tag{13}$$

$$= \eta \cdot \int_a^b \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\, dt = 0 \tag{14}$$

Somit folgt wie oben angekündigt die Euler Lagrange Gleichung aus dem Hamilton'schen Prinzip in dem wir gezeigt haben, dass die Wirkung der Trajektorie, dann ein Extremum annimmt, wenn für L von der Trajektorie gilt:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

Hamilton Formalismus

Oben haben wir den Lagrangian kennengelernt. Die selbige Information ist handlicher und Symmetrische darstellbar als Hamiltonian, welche vom Lagrangian nur eine Legendre Transformation entfernt ist. Dafür würden wir gerne anstelle der Geschwindigkeit $\dot{q}$ den Impuls p verwenden, den wir oben bereits als $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ kennengelernt haben.

Die Legendre Transformation zu einer Funktion $f : x \mapsto y$ welche auf eine neue Funktion $f^* : \frac{df}{dx} \mapsto y$ abbildet ist gegeben durch:

$$f^*\Big(\frac{df}{dx}\Big) = \frac{df}{dx} x - f$$

Geometrisch bedeutet dies, dass wir zu einer gegebenen Funktion den y-Achsenabschnitt der Tangente an jedem Punkt von f berechnen bzw. die negation davon. So lässt sich bildlich vorstellen, dass dabei keine Information über die Funktion verloren geht, da man rückwärts die Funktion auch wieder herleiten kann.

Wenden wir diese Legendre Transformation auf $L(q, \dot{q})$ an, so wollen wir $\dot{q}$ ersetzen durch $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$, um so den Impuls zu verwenden anstatt der Geschwindigkeit, da dieser leichter generalisiert werden kann. Dies

$$f^*\Big(q, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\Big) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L \tag{15}$$

$$= f^*(q, p) = p\dot{q} - L \tag{16}$$

$$= f^*(q, p) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L \tag{17}$$

Dies nennen wir den Hamiltonian H:

$$H(q, p) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$

daraus folgen mit einigen Umformungen die beiden Hamiltongleichungen

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

bemerkenswert ist die Symmetrie, und dass für die Newtonsche Mechanik $p = m \cdot \dot{q}$ sowie $F = -\frac{\partial V(q)}{\partial q}$ aus dem Hamiltonian für einen Massepunkt die Newtonschen Gesetze folgen:

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x) \tag{18}$$

$$\Rightarrow \dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i} = \frac{\partial V(q)}{\partial q} = F \tag{19}$$

$$\Rightarrow \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial}{\partial p_i}\frac{p^2}{2m} = \frac{p}{m} \Leftrightarrow \ddot{q} = \frac{\dot{p}}{m} \Leftrightarrow \ddot{q}m = F \tag{20}$$

Nachweis

Um im Folgenden die Umformung vorzuführen, stellen wir zunächst ein paar Gleichungen auf die trivialerweise gelten müssen allgemein für ein delta δ einer Funktion H oder L gegenüber einem delta ihrer Eingabe Parameter:

$$\delta H = \frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i \tag{21}$$

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial p_i}\delta p_i \tag{22}$$

Und speziell für H gleich dem Hamiltonian:

$$\delta H = \delta(p_i\dot{q}_i) - \delta L$$

und zuletzt, mithilfe der Produktregel:

$$\delta(p_i\dot{q}_i) = \dot{q}_i\delta p_i + p_i\delta\dot{q}_i$$

führen wir diese Gleichungen nun zusammen, können wir Formen:

$$\begin{aligned}
0 &= \delta H - \delta H && (23)\\
&= \Big(\frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i\Big) - \Big(\delta(p_i\dot{q}_i) - \delta L\Big) && (24)\\
&= \Big(\frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i\Big) - \Big(\delta(p_i\dot{q}_i) - (\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial p_i}\delta p_i)\Big) && (25)\\
&= \Big(\frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i\Big) - \Big(\dot{q}_i\delta p_i + p_i\delta\dot{q}_i - (\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial p_i}\delta p_i)\Big) && (26)
\end{aligned}$$

da wir definiert haben, dass $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$, können wir dabei nutzen, dass

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt}p_i = \dot{p}_i \tag{27}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i \tag{28}$$

gilt. Und damit vereinfachen:

$$0 = \Big(\frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i\Big) - \Big(\dot{q}_i\delta p_i + p_i\delta\dot{q}_i - \dot{p}_i\delta q_i - p_i\delta p_i\Big) \tag{29}$$

$$= \Big(\frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i\Big) - \Big(\dot{q}_i\delta p_i - \dot{p}_i\delta q_i\Big) \tag{30}$$

$$= \Big(\frac{\partial H}{\partial q_i} + \dot{p}_i\Big)\delta q_i + \Big(\frac{\partial H}{\partial p_i} - \dot{q}_i\Big)\delta p_i \tag{31}$$

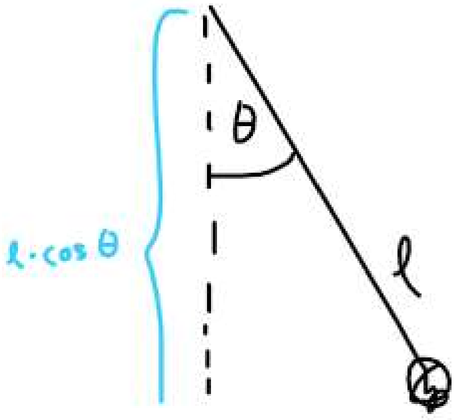
Die Lösung dieser Gleichung erfordert im Allgemeinen:

$$\Rightarrow 0 = \frac{\partial H}{\partial q_i} + \dot{p}_i \;\Rightarrow\; \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{32}$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{\partial H}{\partial p_i} - \dot{q}_i \;\Rightarrow\; \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{33}$$

Wir erhalten unsere Hamiltongleichungen also durch geschicktes Umformen aus dem Lagrangian und Hamiltonian.

Beispiel am Starren Pendel



Wir wählen den Auslenkungswinkel $\theta(t)$ als generalisierte Koordinate für unser Pendel mit der Kantenlänge ℓ. Dann ergibt sich als Hamiltonian

$$H(\theta, p_\theta) = p_\theta\dot{\theta} - L(\theta, \dot{\theta}),$$

welcher den generalisierten Impuls p_θ zugehörig zu θ verwendet mit dem Lagrangian

$$L(\theta, \dot{\theta}) = T(\theta, \dot{\theta}(p_\theta)) - U(\theta);\;\; T(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}m(\dot{\theta}\cdot\ell)^2;\;\; U(\theta) = mg\ell\cdot cos\,\theta$$

aus dem wir per Definition p_θ erhalten, und sehen, dass er ein Drehimpuls ist:
$Masse\ x\ Frequenz\ x\ Länge^2 = Länge\ x\ Masse\ x\ Geschwindigkeit$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{p}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{2}\frac{\partial(m\dot{\theta}^2\ell^2)}{\partial\dot{\theta}} = m\dot{\theta}\ell^2 \tag{34}$$

$$T(\theta, \dot{\theta}) = \frac{m^2\theta^2\ell^4}{2m\ell^2} \tag{35}$$

$$\Leftrightarrow T(\theta, p_\theta) = \frac{p_\theta^2}{2m\ell^2} \tag{36}$$

direkt

$$H(\theta, p_\theta) = p_\theta \cdot \dot{\theta} - \frac{p_\theta^2}{2m\ell^2} - mg\ell \cdot cos\,\theta \tag{37}$$

$$= \frac{p_\theta^2}{2m\ell^2} - mg\ell \cdot cos\,\theta. \tag{38}$$

Wir setzten den Hamiltonian $H(\theta, p)$ nun in die Hamiltongleichungen ein:

$$\dot{p}_\theta = - \quad \frac{\partial H}{\partial \theta} \Rightarrow \dot{p}_\theta \quad = -\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{p_\theta^2}{2m\ell^2} - mg\ell \cdot cos\,\theta\right) \tag{39}$$

$$\dot{\theta} = \quad \frac{\partial H}{\partial p} \Rightarrow \dot{\theta} \quad = \frac{\partial}{\partial p_\theta}\left(\frac{p_\theta^2}{2m\ell^2} - mg\ell \cdot cos\,\theta\right) \tag{40}$$

und erhalten

$$\dot{p}_\theta = -mg\ell \cdot sin\,\theta \tag{41}$$

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{m\ell^2} \tag{42}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{mg\ell \cdot sin\,\theta}{m\ell^2} = -g\ell \cdot sin\,\theta \tag{43}$$

Differenzialgleichungen. Mit diesen können wir nun zu einem Startzustand numerische Verfahren starten oder, da die Differenzialgleichung recht Simpel ist sie für einen gegebenen Startzustand lösen.

Die allgemeine Lösung wäre, wobei wir zur schmaleren Notation $g = \ell = m = \sqrt{g\ell} = \omega = 1$ setzen:

$$\theta(t) = a \cdot \cos(\omega t) + b \cdot sin(\omega t)$$

$$\dot{\theta}(t) = -a \cdot sin(t) + b \cdot cos(t)$$

für t = 0:

$$\theta(0) = a \cdot cos(0) + p_\theta(0) \cdot sin(0) = a = \theta_0$$

$$\dot{\theta}(0) = -a \cdot sin(0) + b \cdot cos(0) = b = p_\theta$$

$$\Rightarrow \theta(t) = \theta_0 \cdot \cos(\omega t) + p_\theta \cdot sin(\omega t)$$

Dimensionslose Darstellung

Merke, dass jetzt unter den gerade bestimmten Voraussetzungen $g = \ell = m = \sqrt{g\ell} = \omega = 1$ gilt:

$$\dot{\theta} = p_\theta$$

$$\dot{p}_\theta = -sin\,\theta$$

$$T(\theta, p_\theta) + U(\theta) = \frac{p_\theta^2}{2} - cos\,\theta$$

Diese Differenzialgleichungen wenden wir im folgenden auf ein Pendel Objekt an

Physikalischen Gesetze eines Pendels

Zunächst importieren wir 3 Klassen die uns helfen die physikalischen Gesetze zu implementieren. Beginnend mit "Arith", welche uns hilft arithmetische Therme aufzustellen, welche mit sich verändernden Variablen erhalten bleiben.

In [ ]:
```
from ArithmeticFunction import Arith

# Damit können wir einen Therm c definieren, der von a und b abhängt und auf deren Änder

a = Arith(2)
b = Arith(1)

c = a * b
print(c)
b.value += 1
c.refresh()
print(c)

# die Arith Objekte (Atome des Therms und Verkettungen dieser) können wir dabei mit alle
```

```
2.000
4.000
```

Dies ist sehr hilfreich um Differenzialgleichungen zu definieren. Welche wir mit der Klasse "diffEq" formalisieren:

In [ ]:
```
from DifferentialEquation import diffEq

a = Arith(2)
b = Arith(0)
print(f't0: a={a}, b={b}')
# wir können nun zB deffinieren, dass d/dt a = b sei:
diff1 = diffEq(a, b)

# und d/dt b = - a sei:
diff2 = diffEq(b, Arith(-1) * a)


# dann können wir d/dt a, d/dt b berechnen lassen, das Ergebnis wird in myDiffEq gespeic
diff1.calculate()
diff2.calculate()

# und zu einem beliebigeren späteren Zeitpunkt die Differential für einen Zeitraum dt an
# Wichtig ist, dass wir mit .calculate und .apply die Berechnung und Anwendung Zeitlich
# so beeinflussen sich die Differenzialgleichungen nicht ungewohlt und nur zu gewünschte
dt = 0.5
diff1.apply(dt)
diff2.apply(dt)
print(f't1: a={a}, b={b}')

# über ein paar weitere Zeitschritte können wir eine zu erwartende Bewegung beobachten.
# diese ist unabhängig von einem Physikalischen Kontext, kann aber ggf einen bestimmten
# sie ist jedenfalls wie man auch leicht an den Zahlen erkennt kein harmonischer Oszilla

for i in range(2, 10):
    diff1.calculate()
    diff2.calculate()
    diff1.apply(dt)
```

```
    diff2.apply(dt)
    print(f't{i}: a={a}, b={b}')
```

```
t0: a=2.000, b=0.000
t1: a=2.000, b=-1.000
t2: a=1.500, b=-2.000
t3: a=0.500, b=-2.750
t4: a=-0.875, b=-3.000
t5: a=-2.375, b=-2.562
t6: a=-3.656, b=-1.375
t7: a=-4.344, b=0.453
t8: a=-4.117, b=2.625
t9: a=-2.805, b=4.684
```

Um nun einen spezifischen realen physikalischen Kontext definieren zu können, bedienen wir uns der "Body" Klasse und legen eine Sub-Klasse "Pendulum" an.

Jedes Body Objekt, hat Eigenschaften "props" und speziell für "Pendulum", definieren wir diese als Winkel "theta", und Impuls "p", sowie Energie "energy".
Wir Implementieren direkt die beiden oben aufgestellten differential Gleichungen und speichern, diese in jedem Pendel, leicht darauf zu greifbar für weiteres Vorgehen.

In [ ]:
```
from PhysicalBody import Body

class Pendulum(Body):

    params = ["theta", "p", "energy"]
    units = ["radians", "mass * length^2 * Omega", "mass * g * length"]
    timeUnit = "1/Omega"

    def __init__(self, name, theta0, p0):
        #memorize initial for id
        self.th0 = theta0
        self.p0 = p0

        theta = Arith(theta0, self.params[0])
        p = Arith(p0, self.params[1])

        # Energy of Pendulum
        energy = p * p / Arith(2) + (theta.cos() * Arith(-1))
        energy.name = self.params[2]

        Body.__init__(self, name, [theta, p])

        self.addDifferential(diffEq(target=p,term=theta.sin() * Arith(-1)))
        self.addDifferential(diffEq(target=theta,term=p))

    def __str__(self):
        return f'th0={self.th0},p0={self.p0}'
```

Numerische Verfahren

In [ ]:
```
import numpy as np
from Simulation import Simulation
```

Eulerverfahren

zu gegebenem θ_t, p_t ergibt sich θ_{t+dt}, p_{t+dt} nach der Vorschrift.

$$\theta_{t+dt} = \theta_t + \dot{\theta}(p_t) \cdot dt$$

$$p_{t+dt} = p_t + \dot{p}(\theta_t) \cdot dt$$

Mit dieser und einem θ_0, p_0 können wir dann numerisch für n Zeitschritte alle Auslenkwinkel und Impulse bis $\theta_{t+n \cdot dt}, p_{t+n \cdot dt}$ berechnen.

In [ ]:
```
class EulerSimulation(Simulation):
    def __init__(self, bodys:list[Body], endtime, n):
        Simulation.__init__(self, bodys, "Euler", endtime/ n, n)

    def simulate(self):
        for i in range(self.n):
            for b1 in self.bodys:
                for p in b1.props:
                    b1.props[p].refresh()
                    self.plotBodys[b1.name][p][i] = b1.props[p].value
                for d1 in b1.differentials:
                    d1.calculate()
            for b2 in self.bodys:
                for d2 in b2.differentials:
                    d2.apply(self.dt)
```

Verlet Verfahren

ähnlich zum Euler Verfahren, allerdings verschieben wir eine Achse um $dt/2$:

Zu gegebenem $\theta_t, p_{t+dt/2}$ ergibt sich $\theta_{t+dt}, p_{t+dt+dt/2}$ nach der Vorschrift.

$$\theta_{t+dt} = \theta_t + \dot{\theta}(p_{t+dt/2}) \cdot dt$$

$$p_{t+dt+dt/2} = p_{t+dt/2} + \dot{p}(\theta_t) \cdot dt$$

Um initial $p_{t_0+dt/2}$ zu erhalten, berechnen wir zu Beginn des Verfahrens:

$$p_{0+dt/2} = p_0 + \dot{p}(\theta_0) \cdot dt$$

So können wir nun mit einem θ_0, p_0 können wir dann numerisch für n Zeitschritte alle Auslenkwinkel und Impulse bis $\theta_{t+n \cdot dt}, p_{t+n \cdot dt}$ berechnen, wobei wir $p_{t+n \cdot dt+dt/2}$ $p_{t+n \cdot dt}$ nennen

In [ ]:
```
class VerletSimulation(Simulation):

    def __init__(self, bodys:list[Body], endtime, n):
        Simulation.__init__(self, bodys, "Verlet", endtime/ n, n)

    def simulate(self):
        for b in self.bodys:
            # #for all bodys calculating first differential
            b.differentials[0].calculate()
        #special  Verlet step:
        for b in self.bodys:
            #offset all first differentials for half step after calculations have been m
            b.differentials[0].apply(self.dt/2)
        #continue like euler
        for i in range(self.n):
```

```
            for b in self.bodys:
                for p in b.props:
                    b.props[p].refresh()
                    self.plotBodys[b.name][p][i] = b.props[p].value

            for b in self.bodys:
                for d in b.differentials:
                    d.calculate()
                    d.apply(self.dt)
```

Plotter Class

In [ ]:
```
import matplotlib
from matplotlib import pyplot as plt

class Plotter:
    def __init__(self, simulations: list[Simulation]):
        self.sims = simulations

    def plotProp(self, idx=0):
        fig , ax = plt.subplots()
        for s in self.sims:
            for b in s.bodys:
                ax.plot(s.time, s.plotBodys[b.name][b.params[idx]], label=f'{b} - {s.typ
        ax.set_xlabel(f'time [{s.bodys[0].timeUnit}]')
        ax.set_ylabel(f'{s.bodys[0].params[idx]} [{s.bodys[0].units[idx]}]')
        ax.legend()
        plt.show()

    def plot2DPhase(self):
        fig , ax = plt.subplots()
        for s in self.sims:
            for b in s.bodys:
                ax.plot(s.plotBodys[b.name][b.params[0]], s.plotBodys[b.name][b.params[1
        ax.set_xlabel(f'{s.bodys[0].params[0]} [{s.bodys[0].units[0]}]')
        ax.set_ylabel(f'{s.bodys[0].params[1]} [{s.bodys[0].units[1]}]')
        ax.legend()
        plt.show()
```

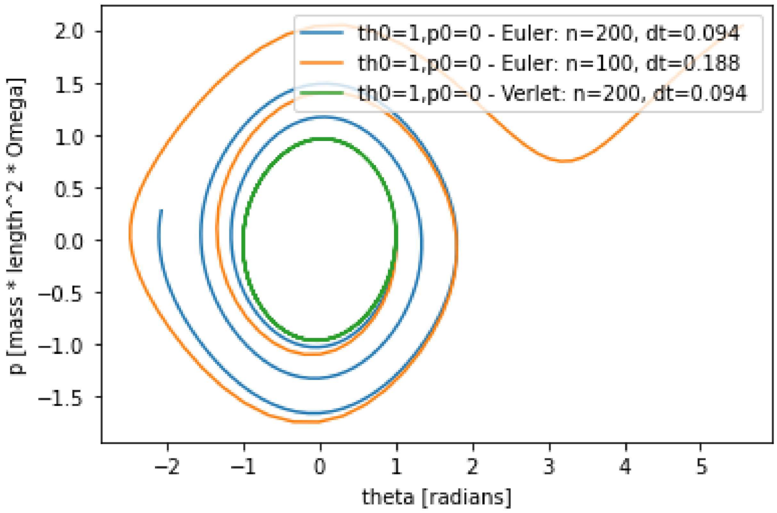
Euler - Verlet - Vergleich

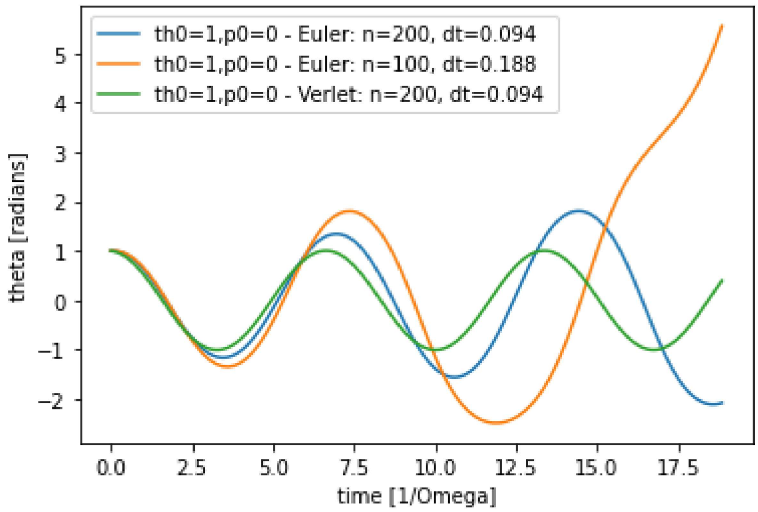
In [ ]:
```
myEuler1 = EulerSimulation([Pendulum("Pendel", 1, 0)], 6*np.pi, 200)
myEuler1.simulate()

myEuler2 = EulerSimulation([Pendulum("Pendel", 1, 0)], 6*np.pi, 100)
myEuler2.simulate()

myVerlet = VerletSimulation([Pendulum("Pendel", 1, 0)], 6*np.pi, 200)
myVerlet.simulate()


myPlotter = Plotter([myEuler1, myEuler2, myVerlet])
myPlotter.plot2DPhase()
myPlotter.plotProp()
```


th0=1,p0=0 - Euler: n=200, dt=0.094
th0=1,p0=0 - Euler: n=100, dt=0.188
th0=1,p0=0 - Verlet: n=200, dt=0.094
p [mass * length^2 * Omega]
theta [radians]
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
−2
−1
0
1
2
3
4
5


th0=1,p0=0 - Euler: n=200, dt=0.094
th0=1,p0=0 - Euler: n=100, dt=0.188
th0=1,p0=0 - Verlet: n=200, dt=0.094
theta [radians]
time [1/Omega]
5
4
3
2
1
0
−1
−2
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0
12.5
15.0
17.5