

CiS - Projekt

Micha von der Osten-Sacken

Timo Wacke

Numerische Berechnung von Planetenbahnen

Solarsystem

Um ein Solarsystem nach dem Vorbild des Unseren zu simulieren haben wir in der Datei Solar.py die Massen, Distanzen zur Sonne und Bahngeschwindigkeiten von den Planeten und unserem Mond definiert.

```
In [ ]: #verify that Solar.py and progressBar.py are in the same directory as this jupyter Notebook
import Solar as sol
import numpy as np
import matplotlib.animation as animation
import matplotlib.pyplot as plt
import progressBar
```

Verfahren

Die Bewegungsgleichung für 3 oder mehr Körper lässt sich im Allgemeinen nicht analytisch lösen.

Numerisch gibt es verschiedene Anstöße:

Trivial Euler Verfahren:

Zu einer Startposition $\vec{r}(0)$ mit gegebenem $\vec{v}(0)$ und einem gewählten Zeitschritt dt , berechnet man iterativ die Koordinaten für die folgenden Koordinaten nach der Vorschrift:

$$\vec{r}(t + dt) = \vec{r}(t) + dt \cdot \vec{v}(t)$$

wobei sich jeweils das neue $\vec{v}(t)$ für einen nächsten Schritt aus der Kraft $\vec{F}(r)$ welche bei $\text{vec}\{\mathbf{r}\}(t)$ auf den Körper wirkt berechnet.

$$\vec{a} = \vec{F}/m$$
$$\vec{v}(t + dt) = \vec{v}(t) + \vec{a}(t + dt) \cdot dt$$

Um die weiteren Zeitschritte zu berechnen, ist das erfahren zu Wiederholen bzw. $t = t + dt$ zu setzen.

Dieses Verfahren ist aber sehr instabil, denn selbst bei einer konstanten Beschleunigung ist die Geschwindigkeit mit der bei einem Zeitschritt gerechnet wird immer nur für den Anfangszeitpunkt des Zeitschrittes exakt und danach immer zu wenig in die beschleunigte Richtung. Für eine konstante Kraft kommt so in jedem Zeitschritt der gleiche Fehler hinzu und der summiert sich auf und wird immer größer. Beim Beispiel der Planetenbewegung ist die Kraft zwar nicht konstant, aber immer nach innen gerichtet, sodass der Planet bei dem Verfahren immer nicht weit genug nach innen beschleunigt wird, und immer weiter nach außen wegdriftet. Berechnet man zuerst $\vec{v}(t + dt)$ und mit dieser Geschwindigkeit dann

$\vec{r}(t + dt)$ so wird die Beschleunigung zu weit nach innen gerichtet sein, und der Planet immer weiter nach innen driften.

Durch möglichst kleine Zeitschritte lässt sich der Fehler und damit der Drift zwar minimieren aber nicht beseitigen. Vergleichbar mit der Unter und Obersumme beim Integrieren.

Besser Verlet Verfahren:

Vor dem ersten Schritt berechnet man die Kraft $\vec{F}(r)$ und die daraus resultierende Beschleunigung $\vec{a} = \vec{F}/m$ die auf den Körper an den entsprechenden Startkoordinaten wirkt.

Dann passt man die Geschwindigkeit nur um die Beschleunigung für einen halben Zeitschritt an:

$$\vec{v}(t + \frac{1}{2}dt) = \vec{v}(t) + \frac{1}{2}dt \cdot \vec{a}(t).$$

Wenn wir von nun an $\vec{r}(t + dt)$ berechnen machen wir das auf der Grundlage von $\vec{v}(t + \frac{1}{2} dt)$

Und wenn wir $\vec{v}(t + dt + \frac{1}{2} dt)$ berechnen machen wir das auf der Grundlage von $\vec{F}(t + dt)$.

Dann werden in jedem Zeitschritt die Koordinaten $\vec{r}(t + dt) = \vec{r}(t) + \vec{v}(t + \frac{1}{2} \cdot dt) \cdot dt$ anhand der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt in der Mitte des Zeitschrittes berechnet. Und die Geschwindigkeit $\vec{v}(t + 3/2 \cdot dt) = \vec{v}(t + \frac{1}{2} \cdot dt) + \vec{a}(t + dt) \cdot dt$ wird anhand der Beschleunigung aus der Kraft zu den Koordinaten von ganzzahligen Zeitschritten berechnet, wobei das wieder die Beschleunigung zu dem Zeitpunkt ist, der genau in der Mitte zwischen den Zeitpunkten liegt, für die die Geschwindigkeiten berechnet wurden. Also wäre die Rechnung schonmal für sich linear mit der Zeit ändernde Beschleunigungen und Geschwindigkeiten exakt und der Rechenaufwand ist kaum gestiegen. Das Verlet verfahren lässt sich auch über eine Taylorentwicklung zur 3. Ordnung von der Mitte in beide Richtungen herleiten, der Fehler liegt damit erst in 4. Ordnung. Die antisymmetrische Anordnung des 1. und 3. Terms lässt sich diese wegkürzen, sodass der Rechenaufwand niedrig bleibt. Da das Verlet-Verfahren ein symplektisches ist bleibt beim Verlet-Verfahren das Volumen des Phasenraums erhalten. Dies haben wir versucht zu demonstrieren im Laufe des Projekts.

Zeitschritte, Einheiten und Particle Class

Beim Verlet-Algorithmus werden für n Iterationen mit dem Zeitschritt h die Positionen \vec{r} und Geschwindigkeiten \vec{v} der Massenpunkte ("Particle") mit folgenden Zeitschritten ausgerechnet:

$$\vec{r}(t_0 + h \cdot i)$$

$$\vec{v}(t_0 - \frac{h}{2} + h \cdot i)$$

wobei

$$i \in 1, \dots, n$$

Die Werte für $\vec{r}(t)$ und $\vec{v}(t)$ eines Particle werden dabei in folgendermaßen berechnet:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t-h) + h \cdot \vec{v}(t - \frac{h}{2})$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t-h) + h \cdot \vec{a}(t - \frac{h}{2})$$

Dabei ist $\vec{a}(t)$ die Beschleunigung des Particle, die aus $\vec{r}(t)$ folgendermaßen berechnet wird:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

$$\vec{F} = G \cdot m \cdot \sum_{j=1}^p \frac{m_j}{|\vec{r}_j - r|^2}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = G \cdot \sum_{j=1}^p \frac{m_j}{|\vec{r}_j - r|^2}$$

Dabei sind m_j die Massen und \vec{r}_j die Ortsvektoren der p anderen Körper im System. Um das ständige Multiplizieren mit der Gravitationskonstante G während der Simulation zu vermeiden, können wir stattdessen einfach zu Beginn alle Massen jeweils mit ihr multiplizieren und diese Größe λ statt der Masse unter `particle.mass` speichern. Dann berechnet sich die Beschleunigung folgendermaßen:

$$\vec{a} = \sum_{j=1}^p \frac{\lambda_j}{|\vec{r}_j - r|^2}$$

mit

$$\lambda_j = m_j \cdot G$$

Dabei sind λ_j die mit der Gravitationskonstante multiplizierten massen `particle.mass`. Die Massen werden im Code aber auch für die Berechnung der kinetischen und potentiellen Energie verwendet, also muss bei diesen Berechnungen die Masse durch $\frac{\lambda}{G}$ ersetzt werden:

$$W_{pot} = G \frac{-m_1 \cdot m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = \frac{1}{G} \cdot \frac{-\lambda_1 \cdot \lambda_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

$$W_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{G} \cdot \lambda \cdot v^2$$

Bei diesen Formeln sieht man dann, dass man die Gravitationskonstante einfach weglassen kann, und alle Energien werden mit dem gleichen Faktor skaliert, sodass alle Verhältnisse noch stimmen.

```
In [ ]: class Particle:

    """
    Physics for a Particle and it's interaction with another
    """

    @params
        name      - Required : name of the particle set
        mass      - Required : mass
        coord     - Required : coordinates in dict {x: , y: , z: }
        velocity  - Required : velocity in dict {x: , y: , z: }
        color     - Required : HEX code, or Color name
    """

    def __init__(self, name, mass, coord, velocity, color):
```

```

    self.name = name
    self.mass = mass
    self.coord = np.array([coord["x"], coord["y"], coord["z"]])
    self.velocity = np.array([velocity["x"], velocity["y"], velocity["z"]])
    self.color = color

def move(self, dt):

    """
    Applies a movement with the particles currently set velocity
    for the timestep of dt to it.

    @params
        dt          - Required : time for which the velocity should be applied to t
    """

    delta = self.velocity * dt
    self.coord = self.coord + delta

def kineticEnergy(self):
    """
    returns the particles current kinetic energy
    """
    return self.mass / 2 * np.linalg.norm(self.velocity)**2

def momentum(self):
    """
    returns the particles current momentum vector
    """
    return self.mass * self.velocity

def phi(self):
    """
    returns the particles current angle in radian relative to the coordinate system
    """
    radianHalf = np.arccos(self.coord[0] / np.linalg.norm(np.array([self.coord[0], self.coord[1]])))
    if self.coord[1] < 0:
        return 2 * np.pi - radianHalf
    return radianHalf

def potEnergy(self, otherParticle):
    """
    returns the particles current potential energy in the gravity field of the other particle
    """
    @params
        otherParticle : the particle with the gravity field
    """
    diff = np.subtract(self.coord, otherParticle.coord)
    radius = np.linalg.norm(diff)
    return - self.mass * otherParticle.mass / radius

def accelerate(self, other, dt):
    """
    adjusts the velocity of two particles, based on the gravity force they apply to each other
    """
    @params
        otherParticle : the particle that's responsible for the acceleration
    """
    diff = np.subtract(other.coord, self.coord)
    radius = np.linalg.norm(diff)
    self.velocity = self.velocity + diff * other.mass * dt / (radius**3)
    other.velocity = other.velocity - diff * self.mass * dt / (radius**3)
    # return force that applies on self

```

Particle Factory

Im folgenden definieren wir einige Sets an Himmelskörpern -> "Particles" für die folgenden Simulationen und eine Methode um die Geschwindigkeiten von Particles in einer Liste so zu "shiften", dass der Schwerpunkt des Systems konstant ist.

CSS Colors

black	bisque	forestgreen	slategrey
dimgray	darkorange	limegreen	lightsteelblue
dimgrey	burlywood	darkgreen	cornflowerblue
gray	antiquewhite	green	royalblue
grey	tan	lime	ghostwhite
darkgray	navajowhite	seagreen	lavender
darkgrey	blanchedalmond	mediumseagreen	midnightblue
silver	papayawhip	springgreen	navy
lightgray	moccasin	mintcream	darkblue
lightgrey	orange	mediumspringgreen	mediumblue
gainsboro	wheat	mediumaquamarine	blue
whitesmoke	oldlace	aquamarine	slateblue
white	floralwhite	turquoise	darkslateblue
snow	darkgoldenrod	lightseagreen	mediumslateblue
rosybrown	goldenrod	mediumturquoise	mediumpurple
lightcoral	cornsilk	azure	rebeccapurple
indianred	gold	lightcyan	blueviolet
brown	lemonchiffon	paleturquoise	indigo
firebrick	khaki	darkslategray	darkorchid
maroon	palegoldenrod	darkslategrey	darkviolet
darkred	darkkhaki	teal	mediumorchid
red	ivory	darkcyan	thistle
mistyrose	beige	aqua	plum
salmon	lightyellow	cyan	violet
tomato	lightgoldenrodyellow	darkturquoise	purple
darksalmon	olive	cadetblue	darkmagenta
coral	yellow	powderblue	fuchsia
orangered	olivedrab	lightblue	magenta
lightsalmon	yellowgreen	deepskyblue	orchid
sienna	darkolivegreen	skyblue	mediumvioletred
seashell	greenyellow	lightskyblue	deppink
chocolate	chartreuse	steelblue	hotpink
saddlebrown	lawngreen	aliceblue	lavenderblush
sandybrown	honeydew	dodgerblue	palevioletred
peachpuff	darkseagreen	lightslategray	crimson
peru	palegreen	lightslategrey	pink
linen	lightgreen	slategray	lightpink

```
In [ ]: class ParticleFactory:  
  
    """  
        Class to handle a set of particle and use it in a simulation  
  
    @params  
        name      - Required : name of the predefined particle set  
    """  
  
    def __init__(self, name):  
        self.name = name  
        self.particleList = []  
        self.setParticles()  
        self.setSizeAndColor()  
  
    def setSizeAndColor(self):  
        try:  
            self.colors = [p.color for p in self.particleList]  
            self.masses = [p.mass for p in self.particleList]
```

```

        maxsize = max(self.masses) ** (1/8)
        self.sizes = list(map(lambda x: x**(1/8) / maxsize * 69, self.masses))
    except:
        self.sizes = [1] * len(self.particleList)
        self.colors = ["black"] * len(self.particleList)

    def importParticles(self, particles):
        self.particleList = particles
        self.setSizeAndColor()

    def setParticles(self):
        if self.name == "Solar":
            star = Particle("Sun", sol.mass_sun, {"x": 0, "y": 0, "z": 0}, {
                "x": 0, "y": 0, "z": 0}, "yellow")
            # star = Particle("sun", 1000, {"x": 0, "y": 0, "z": 0}, {"x": -0.001, "y": 0, "z": 0}, "#DDCC44")
            mercury = Particle("Mercury", sol.mass_mercury, {"x": 0, "y": sol.distance_mercury, "z": 0}, {"x": sol.velocity_mercury, "y": 0, "z": 0}, "#DDCC44")
            venus = Particle("Venus", sol.mass_venus, {"x": 0, "y": sol.distance_venus, "z": 0}, {"x": sol.velocity_venus, "y": 0, "z": 0}, "#884400")
            earth = Particle("Earth", sol.mass_earth, {"x": 0, "y": sol.distance_earth, "z": 0}, {"x": sol.velocity_earth, "y": 0, "z": 0}, "steelblue")
            mars = Particle("Mars", sol.mass_mars, {"x": 0, "y": sol.distance_mars, "z": 0}, {"x": sol.velocity_mars, "y": 0, "z": 0}, "#EE1111")
            jupiter = Particle("Jupiter", sol.mass_jupiter, {"x": 0, "y": sol.distance_jupiter, "z": 0}, {"x": sol.velocity_jupiter, "y": 0, "z": 0}, "chocolate")
            saturn = Particle("Saturn", sol.mass_saturn, {"x": 0, "y": sol.distance_saturn, "z": 0}, {"x": sol.velocity_saturn, "y": 0, "z": 0}, "goldenrod")
            uranus = Particle("Uranus", sol.mass_uranus, {"x": 0, "y": sol.distance_uranus, "z": 0}, {"x": sol.velocity_uranus, "y": 0, "z": 0}, "lightseagreen")
            neptune = Particle("Neptune", sol.mass_neptune, {"x": 0, "y": sol.distance_neptune, "z": 0}, {"x": sol.velocity_neptune, "y": 0, "z": 0}, "cornflowerblue")
            moon = Particle("Moon", sol.mass_moon, {"x": sol.distance_moon, "y": sol.distance_moon, "z": 0}, {"x": sol.velocity_earth, "y": sol.velocity_moon, "z": 0}, "black")
            self.particleList = [star, mercury, venus, earth, mars, jupiter, saturn, uranus, neptune, moon]

        if self.name == "Tatoo":
            sun1 = Particle("Tatoo I", 50, {"x": 0, "y": 10, "z": 0}, {"x": -1, "y": 0, "z": 0}, "peachpuff")
            sun2 = Particle("Tatoo II", 50, {"x": 0, "y": -10, "z": 0}, {"x": 1, "y": 0, "z": 0}, "cadetblue")
            planet = Particle("Planet", 1, {"x": 100, "y": 0, "z": 0}, {"x": 0, "y": 1, "z": 0}, "cadetblue")

            #self.particleList = [sun1, sun2]
            self.particleList = [sun1, sun2, planet]

        if self.name == "Ellipse":
            star = Particle("Star", 1000, {"x": 0, "y": 0, "z": 0}, {"x": 0, "y": 0, "z": 0}, "orange")
            planet = Particle("Pluto", 1, {"x": 100, "y": 0, "z": 0}, {"x": 0, "y": 1.3, "z": 0}, "cadetblue")

            self.particleList = [star, planet]

        if self.name == "Moon System":
            star = Particle("Star", 1000, {"x": 0, "y": 0, "z": 0}, {"x": 0, "y": 0, "z": 0}, "orange")
            planet = Particle("Planet", 10, {"x": 100, "y": 0, "z": 0}, {"x": 0, "y": 3, "z": 0}, "cadetblue")
            moon = Particle("Moon", 1, {"x": 100, "y": 4, "z": 0}, {"x": 1, "y": 3, "z": 0}, "black")
            self.particleList = [star, planet, moon]

        if self.name == "Lagrangepoints":

```

```

star = Particle("Star", 1000, {"x": 0, "y": 0, "z": 0}, {
                 "x": 0, "y": 0, "z": 0}, "yellow")
planet = Particle("Planet", 7, {"x": 100, "y": 0, "z": 0}, {
                  "x": 0, "y": 3, "z": 0}, "green")
# L1 = Particle("L1", 0.01, {"x": 100/(sqrt(50)+1)*sqrt(50), "y": 0, "z": 0}
#                  "x": 0, "y": 3/(sqrt(50)+1)*sqrt(50), "z": 0}, "black")
# L2 = Particle("L2", 0.01, {"x": 100, "y": 0, "z": 0}, {
#                  "x": 0, "y": 3, "z": 0}, "black")
l3 = Particle("L3", 0.01, {"x": -100, "y": 0, "z": 0}, {
               "x": 0, "y": -3, "z": 0}, "black")
l4 = Particle("L4", 0.01, {"x": 100*np.cos(np.pi/3), "y": -100*np.sin(np.pi/
                  "x": 3*np.sin(np.pi/3), "y": 3*np.cos(np.pi/3), "z": 0}, "black")
l5 = Particle("L5", 0.01, {"x": 100*np.cos(np.pi/3), "y": 100*np.sin(np.pi/3)
                  "x": -3*np.sin(np.pi/3), "y": 3*np.cos(np.pi/3), "z": 0}, "black")
self.particleList = [star, planet, l3, l4, l5]

if self.name == "Phase Room":
    parts = [Particle("Star", 100000, {"x": 0, "y": 0, "z": 0}, {
                      "x": 0, "y": 0, "z": 0}, "yellow")]

    for i in range(10):
        parts.append(Particle("Planet {}".format(i), 1, {"x": 0, "y": (
            i+1)*500, "z": 0}, {"x": 10-i, "y": 0, "z": 0}, '#' + str(i)*6))
    self.particleList = parts

def removeOffsetSpeed(self):
    """
    Determines the velocity of the center of mass of the particle set.
    Offsets all particles velocity by the negative of this velocity.
    This sets the total momentum of the particle set to zero.
    """
    totalMomentum = np.array([float(0), float(0), float(0)])
    totalMass = 0
    for p in self.particleList:
        totalMomentum = np.add(totalMomentum, p.momentum())
        totalMass += p.mass
    totalVelocity = totalMomentum / totalMass
    for p in self.particleList:
        p.velocity = np.subtract(p.velocity, totalVelocity)

```

Exkurs Phasenraum

Um zu demonstrieren, dass das Verlet Verfahren wie oben angegeben symplektisch ist und damit das Volumen erhalten bleibt, simulieren wir ein einfaches Beispiel mit 10 Pendeln und zeichnen diese in einen zwei dimensionalen Phasenraum.

Beispiel Pendel:

Wir wählen Erdbeschleunigungskonstante = 1 Und als Energie Einheit wählen wir J / kg

```
In [ ]: #set True to show at the bottom of the file on animate
showPendulums = False

class Pendulum:

    def __init__(self, name, length, phi0, color):
        self.name = name
        self.length = length
        self.phi = phi0
        self.v = 0
        self.color = color
```

```

def move(self, dt):
    dphi = self.v / self.length
    self.phi += dphi * dt

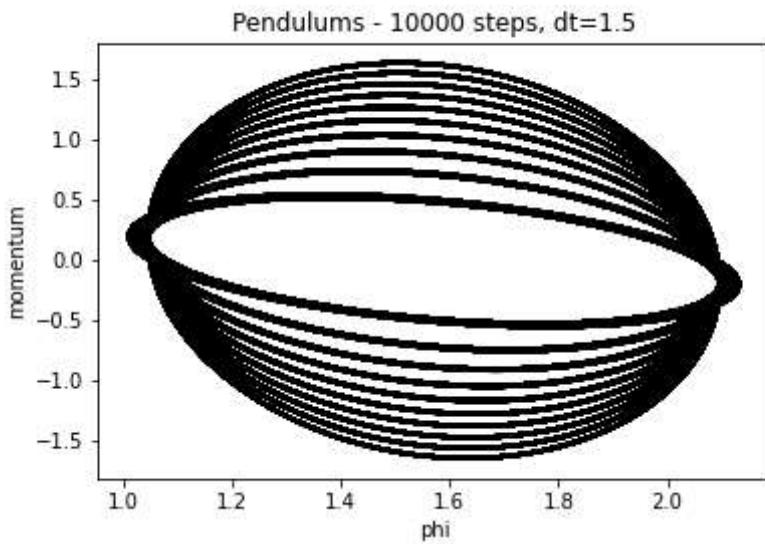
def accelerate(self, dt):
    a = np.cos(self.phi) # * self.mass / self.mass
    self.v += a * dt

def energy(self):
    return self.v**2 - np.sin(self.phi)

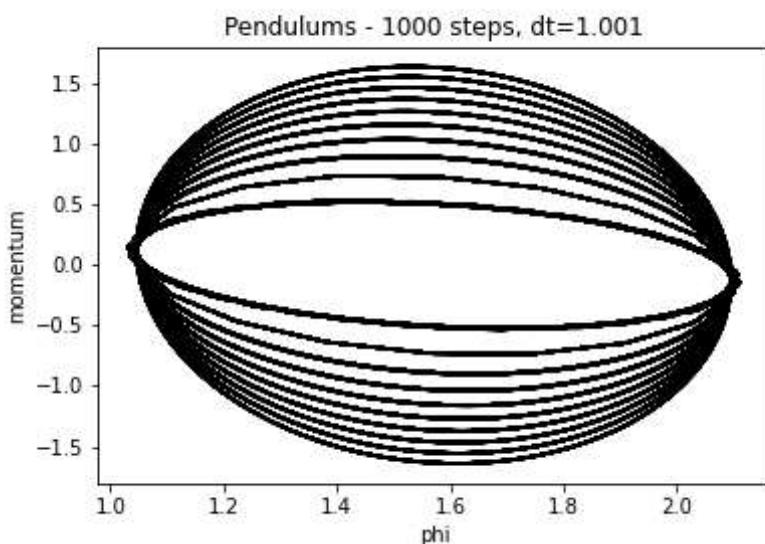
```

Es ist gut zu erkennen wie das Volumen des Phasenraums erhalten bleibt und er lediglich verzehrt wird. Dies ist leider bei den Planetenbahnen sehr schwer darzustellen, da es mind. 4 generalisierte Koordinaten gibt.

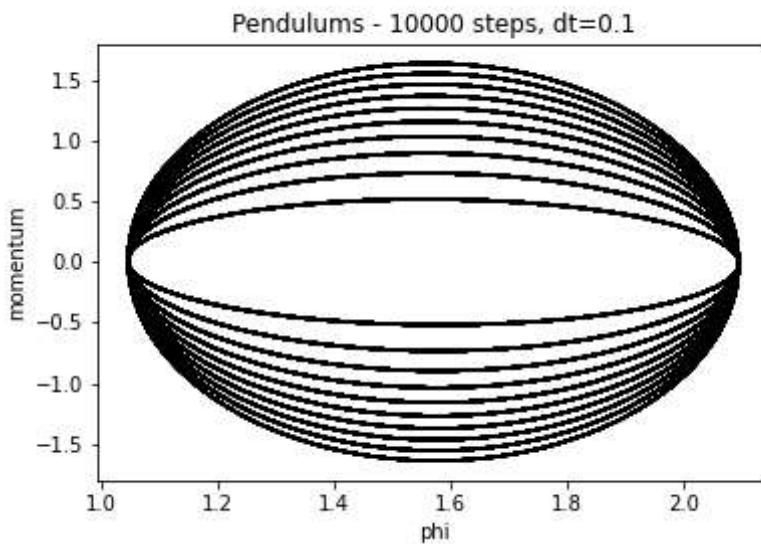
Sehr ungenau berechnet mit $h=1.5$



auch ungenau berechnet mit $h=1$



Genauer berechnet mit $h=0.1$



Simulate

Wie oben erklärt berechnen wir zuerst die Geschwindigkeiten aller Partikel bei $t_0 + \frac{1}{2}dt$. Dafür wenden wir auf jeden Partikel die Beschleunigung die er durch jeweils jeden anderen Partikel erfährt an.

Für die Wechselwirkung zwischen einem Partikel `pti` mit einem Partikel `ptj` können wir dafür `pti.accelerate(ptj, self.dt/2)` nutzen.

Bei den Partikeln a, b, c, d müssen wir also folgende Methoden Aufrufe tätigen:

oder anders herum:

- `b.accelerate(a, self.dt/2)`
- `c.accelerate(a, self.dt/2)`
 - `c.accelerate(b, self.dt/2)`
- `d.accelerate(a, self.dt/2)`
 - `d.accelerate(b, self.dt/2)`
 - `d.accelerate(c, self.dt/2)`

dies wird mit der Schleife

```
`for pti in particles:
    for ptj in particles:
        if ptj == pti:
            break
        pti.accelerate(ptj, self.dt/2)`
```

erreicht.

Darauf folgend wird bei jeder Iteration der neue Ort mit der zuvor gesetzten Geschwindigkeit berechnet und danach auf Basis dieses neuen Ortes auf die neue Geschwindigkeit beschleunigt.

```
In [ ]: class Simulate:
    """
    Class for Simulations

    @params
```

```

h           - Required : size of timestep (float)
n           - Required : number of timesteps (int)
"""

def __init__(self, h: float, n: int ):

    self.dt = h
    self.n = n

def verlet(self, particles: list[Particle]):

    """
    Calculates the movement of particles with Verlet algorithm
    Returns positions in multidimensional array [particle p][dimension 0-2][timestep]
    Returns maximum and minimum of the coordinates too
    """

    mmin = np.amin(particles[0].coord)
    mmax = np.amax(particles[0].coord)
    t_axis = np.linspace(0, self.n*self.dt, num=self.n) # a list for each timestep t
    energy = np.zeros(self.n) # a list for each timestep to fill in with the total
    p_axes = [] # for every particle a list of dimensions. And for each dimension a
    p_momentum = [] # for every particle a list with all timesteps to fill in with the
    p_radius = [] # for every particle a list with all timesteps to fill in with the
    p_phi = [] # for every particle a list with all timesteps to fill in with the a

    # complete the initailisation of the variables and calculate the center of gravity
    center = np.array([float(0), float(0), float(0)])
    masssum = 0
    for p in particles:
        p_axes.append([np.zeros(self.n), np.zeros(self.n), np.zeros(self.n)])
        masssum += p.mass
        center += p.coord * p.mass
        p_momentum.append(np.zeros(self.n))
        p_phi.append(np.zeros(self.n))
        p_radius.append(np.zeros(self.n))
    center *= (1/masssum)

    # Before the first full iteration apply acceleration to every particle for a duration of one timestep
    for pti in particles:
        for ptj in particles:
            if ptj == pti:
                break
            pti.accelerate(ptj, self.dt/2)

    # Iterate for each timestep
    for i in range(self.n):

        # apply velocity to coordinates for each particle and the duration of one timestep
        for pt in particles:
            pt.move(self.dt)
        # apply acceleration to velocitys for the interaction of each particle pair
        # and sum up the potEnergy between each particles
        for pti in particles:
            for ptj in particles:
                if pti == ptj:
                    break
                energy[i] += pti.potEnergy(ptj)
                pti.accelerate(ptj, self.dt)

        # put the new data on the record
        for p, pt in enumerate(particles):
            energy[i] += pt.kineticEnergy()

```

```

        p_momentum[p][i] = np.linalg.norm(pt.momentum())
        p_radius[p][i] = np.linalg.norm(np.subtract(pt.coord, center) )
        p_phi[p][i] = pt.phi()
        p_axes[p][0][i] = pt.coord[0]
        p_axes[p][1][i] = pt.coord[1]
        p_axes[p][2][i] = pt.coord[2]
        mmin = min(mmin, np.amin(pt.coord))
        mmax = max(mmax, np.amax(pt.coord))

    # update the progress bar after every 5% progress
    if (i+1)/self.n*100%5 == 0:
        progressBar.draw(i, self.n, "Verlet", "Complete", length=50)

    return (p_axes, p_momentum, p_radius, p_phi, energy, t_axis, mmin, mmax)

def verletPendulum(self, pendulumList: list[Pendulum]):

    """
    Calculates the movement of pendulums with Verlet algorithm
    Returns positions in multidimensional array [particle p][dimension 0-2][timestep]
    Returns maximum and minimum of the coordinates too
    """

    mmin = pendulumList[0].phi
    mmax = pendulumList[0].phi
    t_axis = np.linspace(0, self.n*self.dt, num=self.n) # a list for each timestep to store time
    energy = np.zeros(self.n) # a list for each timestep to fill in with the total energy
    p_axes = [] # for every particle a list of dimensions. And for each dimension a list for each timestep
    p_momentum = [] # for every particle a list with all timesteps to fill in with the momentum
    p_radius = [] # for every particle a list with all timesteps to fill in with the radius
    p_phi = [] # for every particle a list with all timesteps to fill in with the angle

    for p in pendulumList:
        p_axes.append(np.zeros(self.n))
        p_momentum.append(np.zeros(self.n))
        p_phi.append(np.zeros(self.n))
        p_radius.append(np.zeros(self.n))

    for p in pendulumList:
        p.accelerate(self.dt/2)

    # Iterate for each timestep
    for i in range(self.n):

        for p in pendulumList:
            p.move(self.dt)
            p.accelerate(self.dt/2)

        # put the new data on the record
        for p, pl in enumerate(pendulumList):
            energy[i] += pl.energy()
            p_momentum[p][i] = pl.v
            p_radius[p][i] = pl.length
            p_phi[p][i] = pl.phi
            p_axes[p][i] = pl.phi
            mmin = min(mmin,pl.phi)
            mmax = max(mmax, pl.phi)

    # update the progress bar after every 5% progress
    if (i+1)/self.n*100%5 == 0:

```

```

    progressBar.draw(i, self.n, "Pendulum", "Complete", length=50)
    return (p_axes, p_momentum, p_radius, p_phi, energy, t_axis, mmin, mmax)

```

Animate Class

Diese Klasse bekommt eine particleFactory übergeben, aus dieser werden die Particle, deren Farben und Größen gewonnen.

Bekommt eine simulator Funktion wie etwa verlet() aus der Simulate class übergeben. Das zu ihr gehörige simulator Objekt, kennt die Anzahl und Größe der Zeitschritte n und h, so dass die simulator Funktion nur die particeList übergeben bekommen muss.

Die Simulator Methode Verlet in der Simulat class gibt wie oben gesehen allerlei Werte zurück, die für das Plotten relevant sind.

```

In [ ]: from collections.abc import Callable

class Animate:
    """Animated scatter plot and charts using matplotlib.animations.FuncAnimation.

    @params
        particleFactory - Required : array of Objects from Particle Class (Particle)
        simulator       - Required : method like Simulate.verlet(), that returns d
    """

    def __init__(self, particleFactory: ParticleFactory, simulator: Callable[[list], tuple],
                 self.p_axes, self.p_momentum, self.p_radius, self.p_phi, self.energy, self.t_axis,
                 particleFactory.particleList)
    self.n = len(self.t_axis)
    self.h = np.round((self.t_axis[self.n-1]-self.t_axis[0])/self.n, 2)
    self.mmin -= (self.mmax - self.mmin) * 0.05
    self.mmax += (self.mmax - self.mmin) * 0.05

    def scatterVideo(self):
        # Setup the figure and axes...
        self.fig, self.ax = plt.subplots()
        self.fig.set_figheight(10)
        self.fig.set_figwidth(10)
        plt.xlim([self.mmin, self.mmax])
        plt.ylim([self.mmin, self.mmax])
        # Then setup FuncAnimation.
        self.frames = 500
        self.fps = 25
        self.skip = int(self.n / self.frames)
        self.ani = animation.FuncAnimation(self.fig, self.update, interval=int(1000/self.fps),
                                           init_func=self.setup_plot, blit=True)

        # avoid plotting a spare static plot

    def setup_plot(self):
        """Initial drawing of the scatter plot."""
        xs = []
        ys = []
        for p in self.p_axes:
            xs.append(p[0][0])
            ys.append(p[1][0])
        self.scat = self.ax.scatter(xs, ys, s=particleFactory.sizes, c=particleFactory.colors)
        return self.scat,

```

```

def update(self, i):
    """Update the scatter plot."""
    xy = []
    progressBar.draw(
        i+1, self.frames, prefix='Rendering', suffix='Complete', length=50)
    for p in self.p_axes:
        xy.append([p[0][i*self.skip], p[1][i*self.skip]])
    # Set x and y data...
    self.scat.set_offsets(xy)

    return self.scat,

def pathPlot(self):

    fig, ax = plt.subplots()

    for p, pt in enumerate(self.particleFactory.particleList):
        ax.plot(self.p_axes[p][0], self.p_axes[p]
                [1], c=pt.color, linewidth=2, label=pt.name)
    fig.set_figwidth(10)
    fig.set_figheight(10)
    plt.xlim([self.mmin, self.mmax])
    plt.ylim([self.mmin, self.mmax])
    plt.legend()

    plt.title(
        '{} - {} steps, dt={}'.format(self.particleFactory.name, self.n, self.h))
    plt.draw()
    plt.savefig(
        'images/{} - {} steps, dt={}.png'.format(self.particleFactory.name, self.n, self.h))

def energyPlot(self):
    fig2, ax2 = plt.subplots()
    ax2.plot(self.t_axis, self.energy, 'r-', label='energy')
    plt.xlabel("time")
    plt.ylabel("total energy in system")
    plt.title(
        '{} - {} steps, dt={}'.format(self.particleFactory.name, self.n, self.h))
    plt.draw()
    plt.savefig(
        'images/{} - {} steps, dt={}_energy.png'.format(self.particleFactory.name, self.n, self.h))

def save_video(self):
    print("\n")
    print("Saving Video")
    self.ani.save('scatter.mp4', writer='ffmpeg', fps=self.fps,
                  dpi=100, metadata={'title': 'test'})

def phaseSpace(self, is3d):
    if (is3d):
        fig3 = plt.figure()
        ax3 = fig3.add_subplot(projection='3d')

        for p, pt in enumerate(self.particleFactory.particleList):
            ax3.scatter(self.p_radius[p], self.p_phi[p],
                        self.p_momentum[p], c=pt.color, s=4, label=pt.name)

        ax3.set_xlabel("radius")
        ax3.set_ylabel("phi")
        # ax3.set_zLabel("phi")
        plt.title(
            '{} - {} steps, dt={}'.format(self.particleFactory.name, self.n, self.h))
        plt.legend()

```

```

        plt.draw()
        plt.savefig(
            'images/{} - {} steps, dt={}{}_phase.png'.format(self.particleFactory.name,
        else:
            fig3, ax3 = plt.subplots()
            for p, pt in enumerate(self.particleFactory.particleList):
                ax3.plot(self.p_phi[p], self.p_momentum[p],
                          c=pt.color, label=pt.name)

            plt.xlabel("phi")
            plt.ylabel("momentum")
            plt.title(
                '{} - {} steps, dt={}'.format(self.particleFactory.name, self.n, self.h))
            plt.draw()
            plt.savefig(
                'images/{} - {} steps, dt={}{}_phase.png'.format(self.particleFactory.name,
            return (self.p_axes, self.mmin, self.mmax)

    def closePlot(self):
        plt.show()
        plt.close()

```

Execute

1. Erstelle eine ParticleFactory mit einer Particle List
2. Stelle sicher, dass diese keinen gesamt Impuls hat
3. Erstelle eine Simulate umgebung und definiere hierbei die Schrittgrößen und Anzahl an Schritten
4. Übergebe die ParticleFactory und Simulate umgebung an animate, so dass die Berechnung und danach das Plotten gestartet wird

zum Pendel Exkurs

```
In [ ]: if(showPendulums):
    myPendulums = []

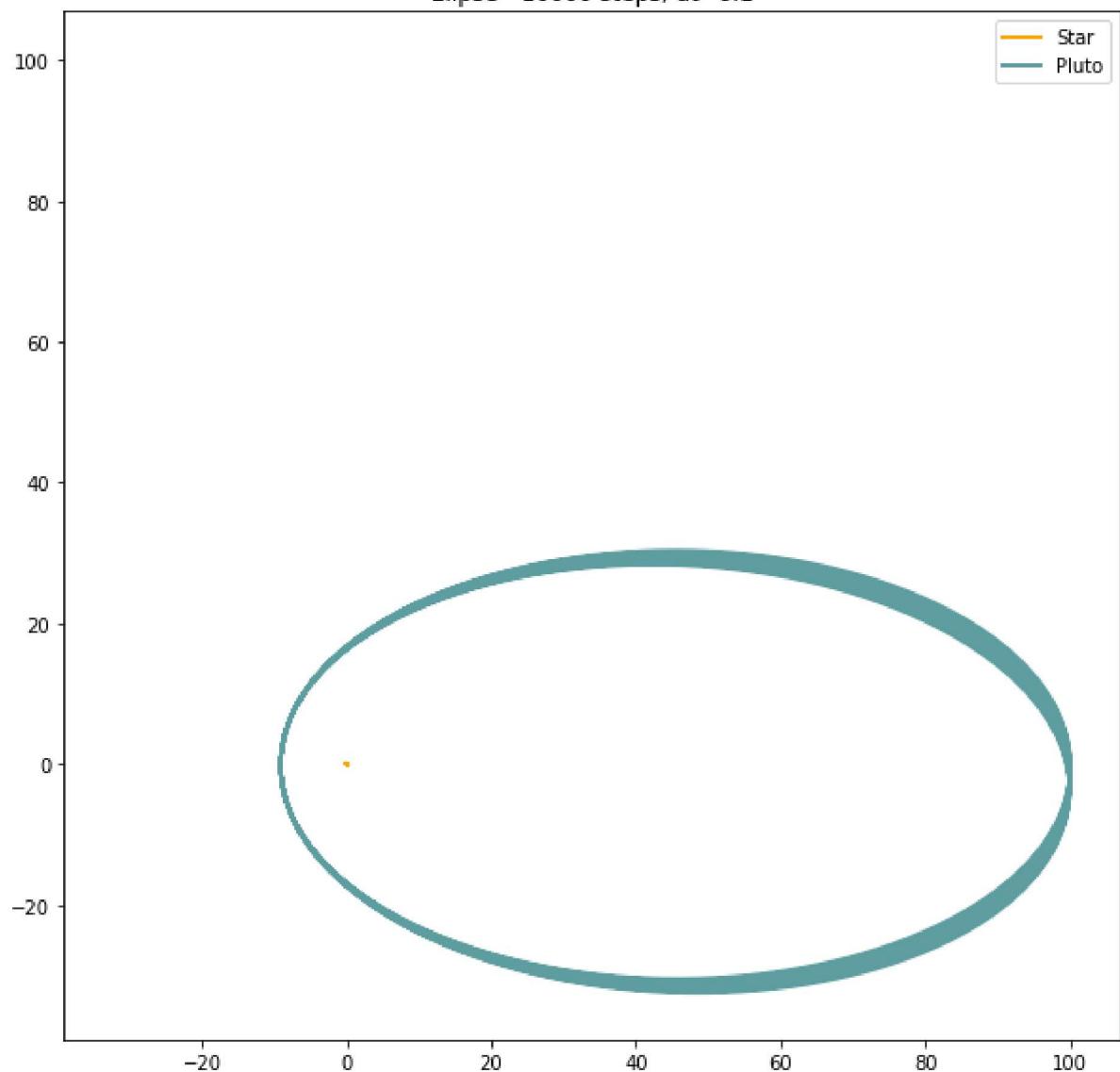
    for i in range(10):
        myPendulums.append(Pendulum("Pendulum {}".format(i+1), i*2+2, np.pi / 3, "black"))
    p = ParticleFactory("Pendulums")
    p.importParticles(myPendulums)
    s = Simulate(h=1.5, n=10000)
    a = Animate(p, s.verletPendulum)
    a.energyPlot()
    a.phaseSpace(False)
```

einfache Ellipse

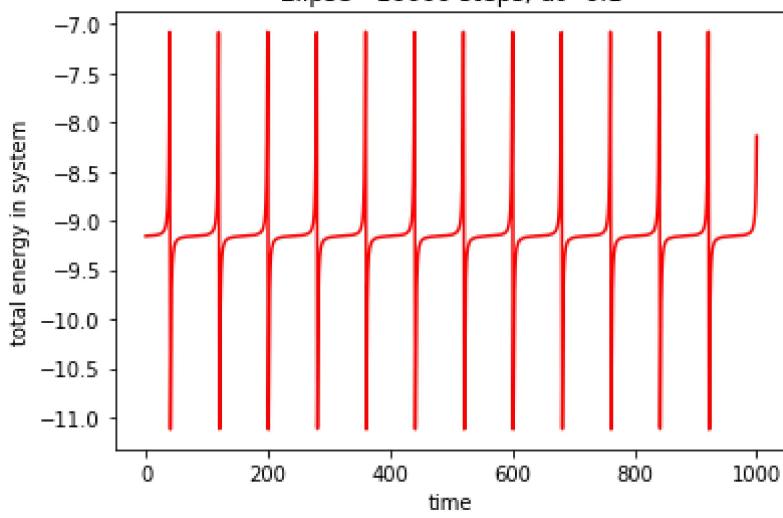
```
In [ ]: p = ParticleFactory("Ellipse")
p.removeOffsetSpeed()
s = Simulate(h=0.1, n=10000)
a = Animate(p, s.verlet)

a.pathPlot()
a.energyPlot()
a.phaseSpace(True) #True to show 3d, False to show 2d
a.closePlot()
```

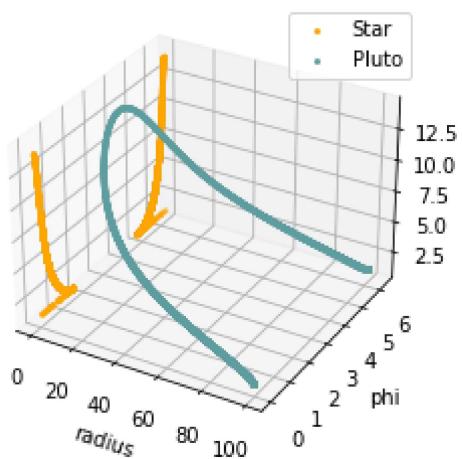
Elipse - 10000 steps, dt=0.1



Elipse - 10000 steps, dt=0.1



Ellipse - 10000 steps, dt=0.1



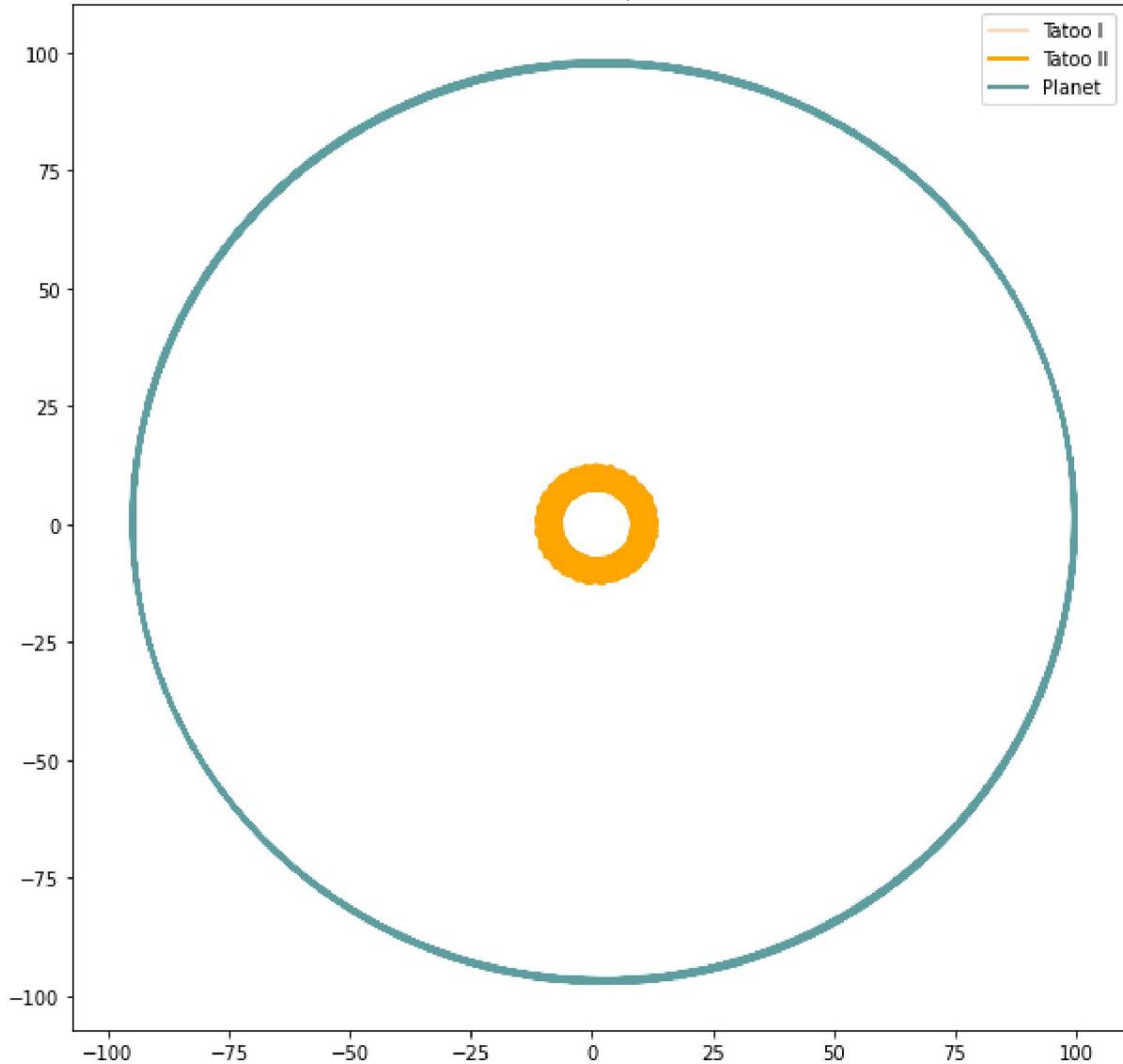
2 Sonnen System

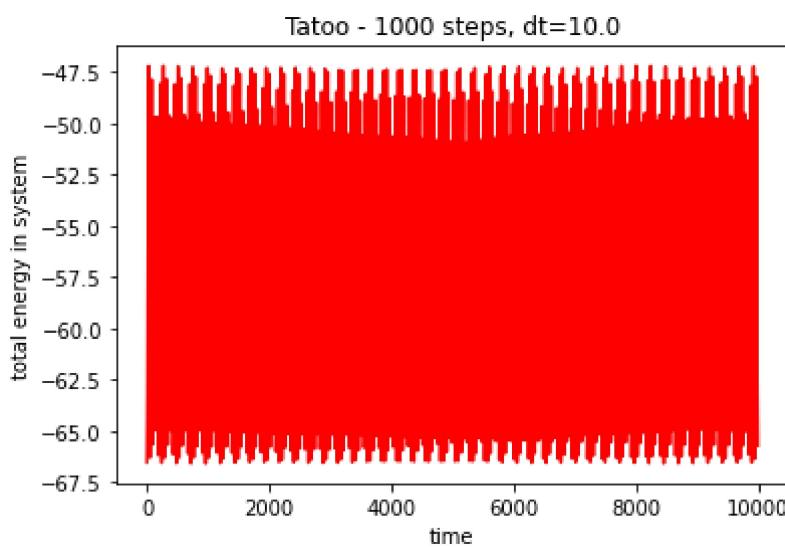
```
In [ ]: p = ParticleFactory("Tatoo")
p.removeOffsetSpeed()
s = Simulate(h=10, n=1000)
a = Animate(p, s.verlet)

a.pathPlot()
a.energyPlot()
a.phaseSpace(True) #True to show 3d, False to show 2d
a.closePlot()
```

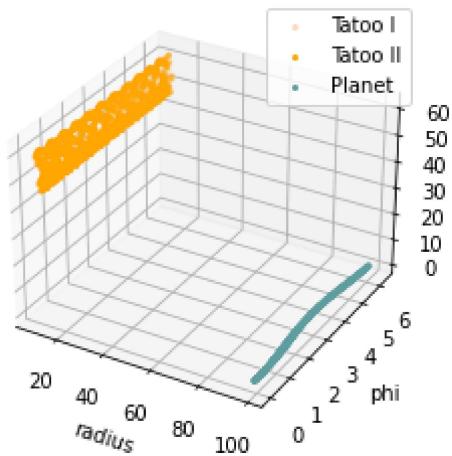
Verlet | - | 99.9% Complete

Tatoo - 1000 steps, dt=10.0





Tatoo - 1000 steps, dt=10.0



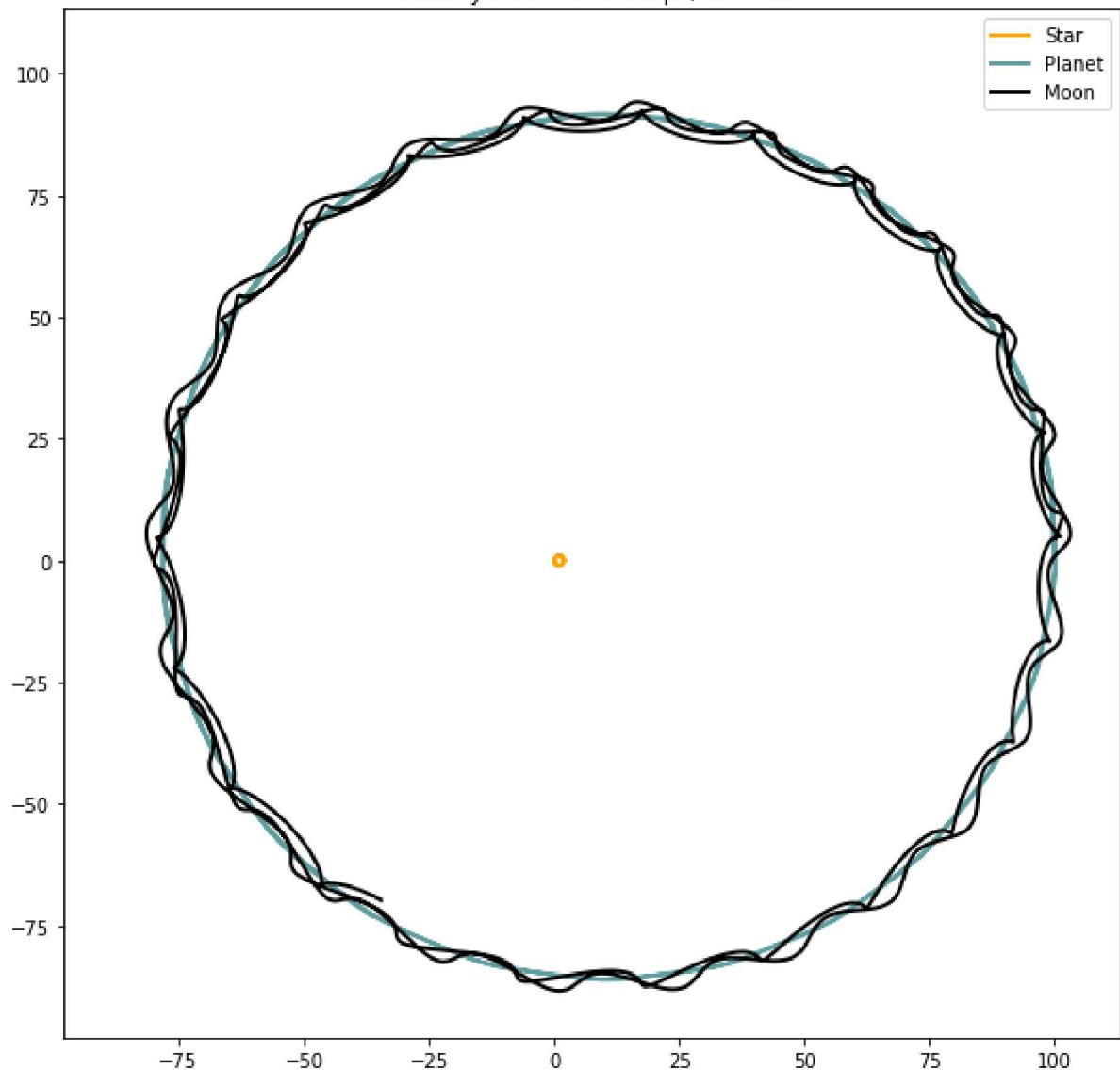
Moon System

```
In [ ]: p = ParticleFactory("Moon System")
p.removeOffsetSpeed()
s = Simulate(h=0.15, n=3000)
a = Animate(p, s.verlet)

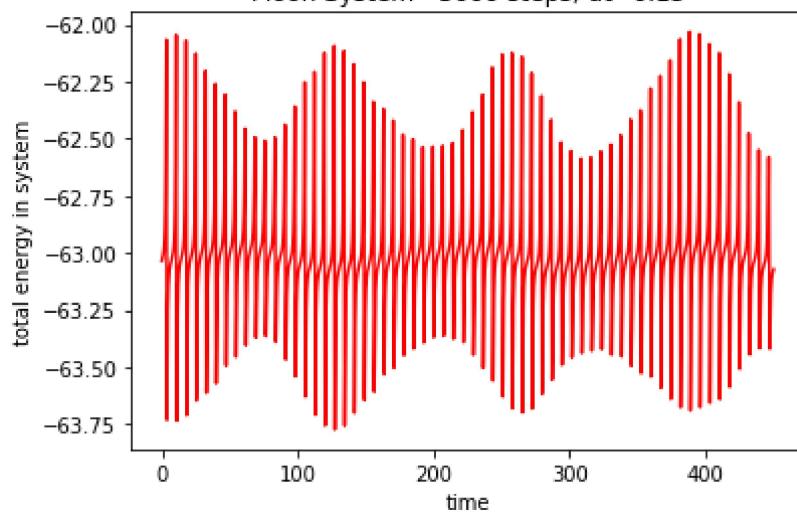
a.pathPlot()
a.energyPlot()
a.phaseSpace(True) #True to show 3d, False to show 2d
a.closePlot()
```

Verlet | - | 100.0% Complete

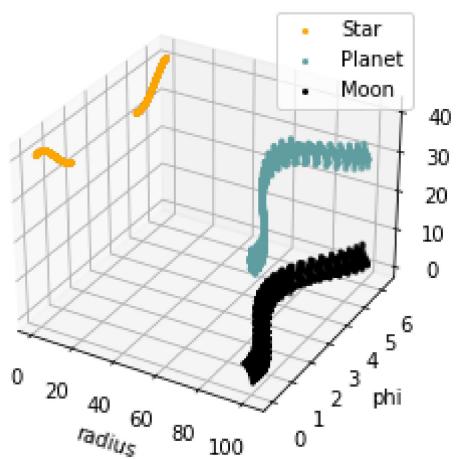
Moon System - 3000 steps, dt=0.15



Moon System - 3000 steps, dt=0.15



Moon System - 3000 steps, dt=0.15



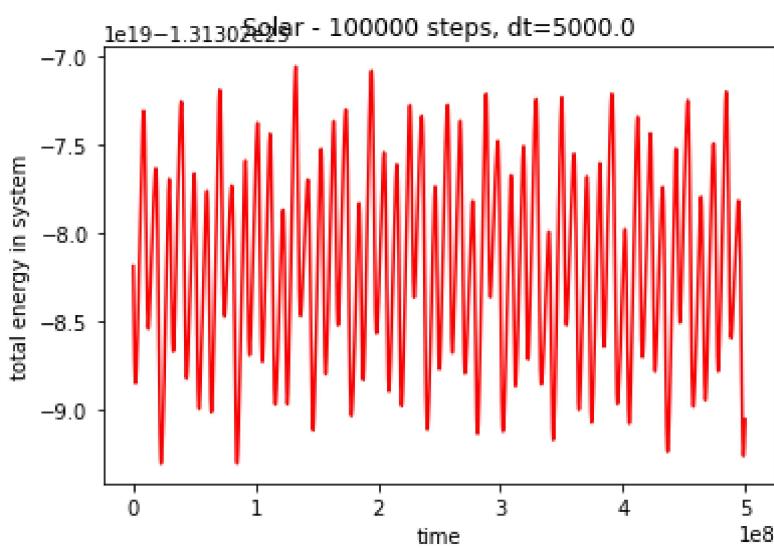
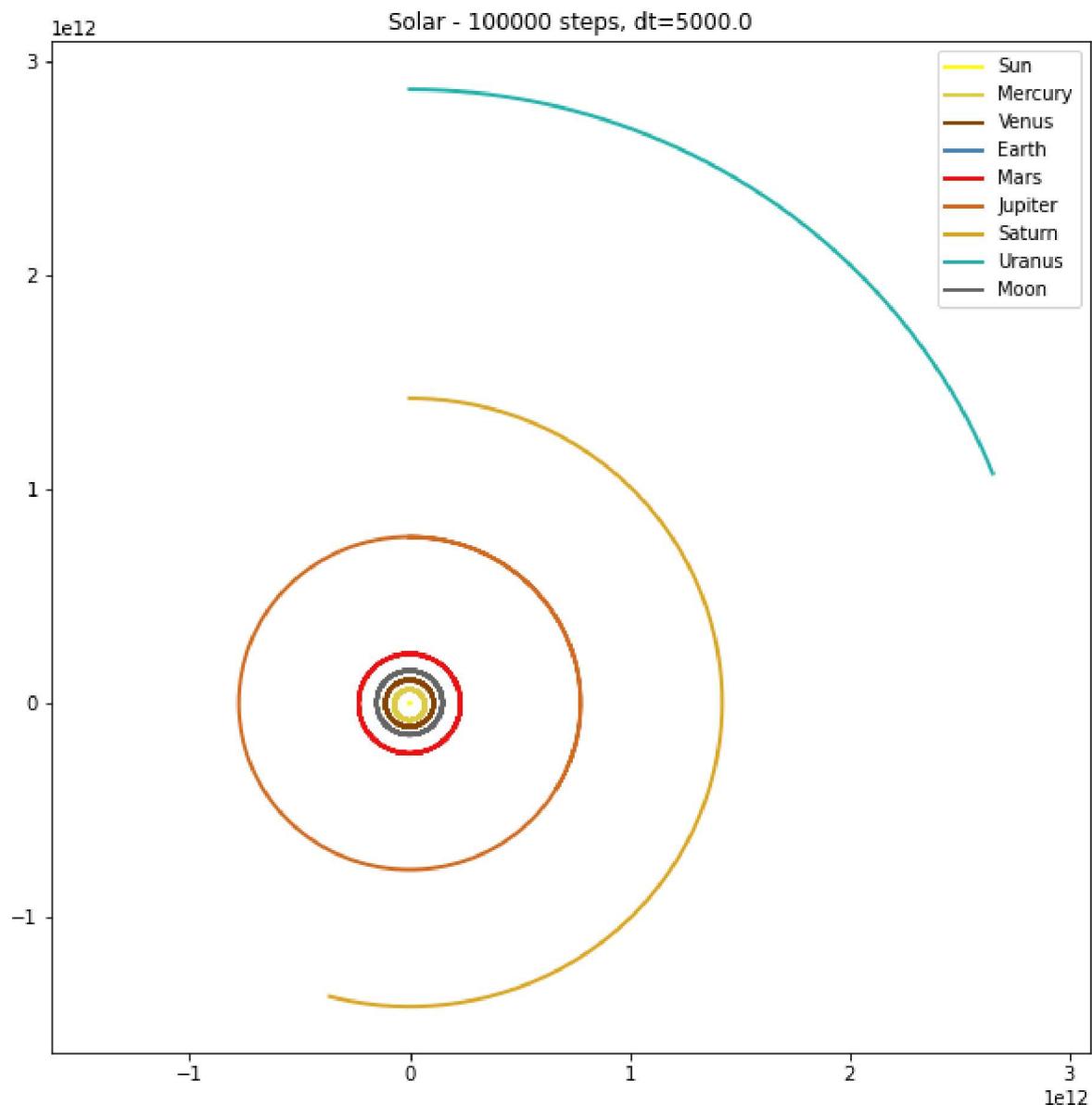
Solarsystem

```
In [ ]: p = ParticleFactory("Solar")
p.removeOffsetSpeed()
s = Simulate(h=5000, n=100000)
a = Animate(p, s.verlet)

a.pathPlot()
a.energyPlot()
a.phaseSpace(True) #True to show 3d, False to show 2d
a.closePlot()
```

Verlet | - | 100.0% Complete

```
C:\Users\twacke\AppData\Local\Temp\ipykernel_27988\4005257838.py:111: UserWarning: Creating legend with loc="best" can be slow with large amounts of data.
    plt.draw()
C:\Users\twacke\AppData\Local\Temp\ipykernel_27988\4005257838.py:112: UserWarning: Creating legend with loc="best" can be slow with large amounts of data.
    plt.savefig()
```



```
c:\Users\twacke\AppData\Local\Programs\Python\Python39\lib\site-packages\IPython\core\pylabtools.py:151: UserWarning: Creating legend with loc="best" can be slow with large amounts of data.
```

```
fig.canvas.print_figure(bytes_io, **kw)
```

Solar - 100000 steps, dt=5000.0

