Министерство образования и науки Российской Федерации
Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б.Н. Ельцина

Р. М. Минькова

Функции комплексного переменного в примерах и задачах

*Рекомендовано методическим советом УрФУ
в качестве учебного пособия для студентов,
обучающихся по программе бакалавриата и специалитета
по направлениям подготовки
140800.62 – Ядерные физика и технологии;
141401.65 – Ядерные реакторы и материалы;
141405.65 – Технологии разделения изотопов и ядерное топливо;
140801.65 – Электроника и автоматика физических установок;
010900.62 – Прикладные математика и физика;
210100.62 – Электроника и наноэлектроника;
201000.62 –Биотехнические системы и технологии;
200100.62 –Приборостроение;
221700.62 – Стандартизация и метрология;
230100.62 – Информатика и вычислительная техника;
230400.62 –Информационные системы и технологии*

Екатеринбург
УрФУ
2013

УДК 517(075.8)
ББК 22.161я73
М62

Рецензенты:
кафедра прикладной математики Уральского государственного экономического университета
(зав. кафедрой, доц., канд. физ.-мат. наук Ю.Б. Мельников);
старший научный сотрудник Института математики и механики УрО РАН, проф., д-р физ.-мат. наук Е.Ф. Леликова;

Научный редактор − доц., канд. физ.-мат. наук Н.В. Чуксина

М62 **Минькова, Р.М.**
Функции комплексного переменного в примерах и задачах:
учебное пособие / Р.М. Минькова. Екатеринбург: УрФУ, 2013. 45 с.

ISBN

В данной работе разбирается решение типовых примеров и задач по следующим темам курса «Функции комплексного переменного»: функции комплексного переменного, их дифференцирование, интегрирование, разложение в ряды Тейлора и Лорана, вычеты и их применения, операционное исчисление.

Работа предназначена для студентов физико-технического факультета.

Библиогр.: 10 назв. Рис. 25.

УДК 517 (075.8)
ББК 22.161я73

ISBN

1. Комплексные числа

Кратко напомним понятие комплексных чисел и действий с ними.

1.1. Определение, изображение, формы записи комплексного числа

Комплексным числом z называют выражение вида $z = x + i\,y$, где x, y – действительные числа, i – так называемая мнимая единица, $i^2 = -1$.

Комплексное число $z = x + i\,y$ изображают точкой M плоскости с координатами x, y или ее радиус-вектором $\overrightarrow{OM}$ (рис. 1). Длину вектора $\overrightarrow{OM}$ называют модулем комплексного числа z и обозначают $|\,z\,|$ или r:

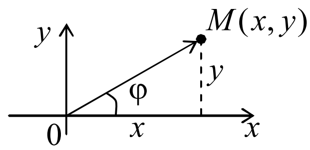

Рис. 1

$$|\,z\,| = r = \left|\,\overrightarrow{OM}\,\right| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Угол φ между радиус-вектором $\overrightarrow{OM}$ и положительным направлением оси ox называют аргументом комплексного числа z. Угол φ определяется неоднозначно, с точностью до слагаемого $2\pi k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$; то значение φ, которое заключено между $-\pi$ и π, обозначают $\arg z$ и называют главным значением аргумента.

Наряду с ***алгебраической формой*** $z = x + i\,y$ комплексного числа рассмотрим еще две формы записи.

Так как $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ (рис.1), то комплексное число $z = x + i\,y$ можно записать в ***тригонометрической форме***: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Введя функцию $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, комплексное число можно записать в ***показательной форме***: $z = r \cdot e^{i\varphi}$. Итак, имеем три формы записи комплексного числа

$$z = x + i\,y = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r \cdot e^{i\varphi}.$$

Пример 1.1. Записать комплексные числа $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = 1 - i$ в тригонометрической и показательной формах.

Решение. Найдем модули и аргументы этих чисел:

$$\left|1 + i\sqrt{3}\right| = 2, \ \arg\left(1 + i\sqrt{3}\right) = \operatorname{argtg}\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3};$$

$$|1 - i| = \sqrt{2}, \quad \arg(1 - i) = -\operatorname{argtg} 1 = \frac{-\pi}{4}.$$

Тогда $z_1 = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$, $z_2 = 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\,e^{\frac{-\pi}{4}i}$.

1.2. Действия с комплексными числами

1. ***При сложении (вычитании)*** двух комплексных чисел складываются (соответственно вычитаются) их действительные и мнимые части.
2. ***Умножение*** двух комплексных чисел в алгебраической форме определяется по правилам умножения двучленов с учетом равенства $i^2=-1$.

При умножении двух комплексных чисел в тригонометрической и показательной формах их модули умножаются, а аргументы складываются:

$$\boxed{|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|,\qquad \arg(z_1\cdot z_2)=\arg z_1+\arg z_2}.$$

3. ***При делении*** двух комплексных чисел в алгебраической форме нужно числитель и знаменатель дроби $\dfrac{z_1}{z_2}$ умножить на число, сопряженное знаменателю.

При делении двух комплексных чисел в тригонометрической и показательной формах их модули делятся, а аргументы вычитаются, т.е.

$$\boxed{|z|=\frac{|z_1|}{|z_2|},\qquad \arg z=\arg z_1-\arg z_2.}$$

4. ***Возведение в степень*** комплексного числа в алгебраической форме осуществляется по правилам возведения в степень двучлена с учетом того, что $i^2=-1,\ i^3=i^2\cdot i=-i,\quad i^4=i^2\cdot i^2=1$ и т.д.

При возведении комплексного числа z в большую степень удобно использовать его тригонометрическую или показательную формы:

$$\boxed{z^n=r^n(\cos n\varphi+i\,\sin n\varphi)=r^n e^{in\varphi}}.$$

5. ***При извлечении корня из комплексного числа*** z удобно использовать тригонометрическую форму записи комплексного числа $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$:

$$\boxed{\begin{gathered}\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\,\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)\\ k=0,1,2,\ldots,n-1.\end{gathered}}$$

Таким образом, корень степени n из комплексного числа z имеет n различных значений.

Пример 1.2. Вычислить 1) z^{40}, если $z=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}$, 2) $w=\sqrt{1+i\sqrt{3}}$, 3) $z=\sqrt{7-24i}$.

Решение. 1). Воспользуемся примером 1.1 и учтем, что

$$|z|=\left|\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right|=\frac{\left|1+i\sqrt{3}\right|}{|1-i|}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2},$$

$$\arg z=\arg\frac{1+3i}{1-i}=\arg(1+3i)-\arg(1-i)=\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{7\pi}{12}.$$

Тогда $\left|z^{40}\right| = \left(\sqrt{2}\right)^{40} = 2^{20}$, $\arg z^{40} = 40\arg z = \frac{7\pi}{12}\cdot 40 = \frac{70}{3}\pi$,

$$z^{40} = 2^{20}\left(\cos\frac{70\pi}{3} + i\sin\frac{70\pi}{3}\right) = 2^{20}\left(\cos\left(24\pi - \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(24\pi - \frac{2\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= 2^{20}\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2^{20}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2^{19}\left(1 + i\sqrt{3}\right).$$

2). Из примера 1.1 следует, что $1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$. Тогда

$$w = \sqrt{1 + i\sqrt{3}} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi/3 + 2\pi k}{2} + i\sin\frac{\pi/3 + 2\pi k}{2}\right).$$

При $k = 0$ и при $k = 1$ получим два значения корня:

$$w_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi/3}{2} + i\sin\frac{\pi/3}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3} + i\right),$$

$$w_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi/3 + 2\pi}{2} + i\sin\frac{\pi/3 + 2\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3} + i\right).$$

3). При извлечении корня из комплексного числа $7 - 24i$ использовать тригонометрическую форму записи комплексного числа нерационально. Воспользуемся другим способом. Учтем, что $7 - 24i = 16 - 9 - 24i = 4^2 + (3i)^2 - 2\cdot 4\cdot 3i = (4 - 3i)^2$. Тогда

$$z = \sqrt{7 - 24i} = \sqrt{(4 - 3i)^2} = \pm(4 - 3i).$$

Замечание. Если Вы не смогли выделить полный квадрат в подкоренном выражении, то вычислить $\sqrt{7 - 24i}$ можно по определению: $\sqrt{7 - 24i} = x + iy$, где x, y – действительные числа. Для их отыскания возведём в квадрат обе части равенства и приравняем действительные и мнимые части комплексных чисел:

$$7 - 24i = (x + iy)^2 = x^2 + 2xyi - y^2 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x^2 - y^2 = 7, \\ xy = -12. \end{cases}$$

Решим получившуюся систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 7, \\ xy = -12, \end{cases} \Rightarrow\; y = \frac{-12}{x},\; x^2 - \frac{144}{x^2} = 7 \;\Rightarrow x^4 - 7x^2 - 144 = 0 \;\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4, \\ x_2 = -4, \end{cases} \begin{cases} y_1 = -3, \\ y_2 = 3. \end{cases}$$

Таким образом, $\sqrt{7 - 24i}$ имеет два значения $(4 - 3i)$ и $(-4 + 3i)$.

Пример 1.3. Решить уравнение $z^2 - (2 + i)z + 7i - 1 = 0$.

Решение. Воспользуемся формулой для вычисления корней квадратного уравнения и результатом предыдущего примера:

$$z_{1,2}=\frac{(2+i)\pm\sqrt{(2+i)^2-28i+4}}{2}=\frac{(2+i)\pm\sqrt{7-24i}}{2}=\frac{(2+i)\pm\sqrt{(4-3i)^2}}{2}=\frac{(2+i)\pm(4-3i)}{2},$$

$$z_1=\frac{(2+i)+(4-3i)}{2}=3-i,\quad z_2=\frac{(2+i)-(4-3i)}{2}=-1+2i.$$

Пример 1.4. Решить систему уравнений $\begin{cases}(2+i)z_1+(3-i)z_2=4+2i,\\(5-2i)z_1+(2+3i)z_2=-5i.\end{cases}$

Решение. Воспользуемся при решении системы методом Крамера. Вычислим определители: $\Delta=\begin{vmatrix}2+i & 3-i\\5-2i & 2+3i\end{vmatrix}=(2+i)(2+3i)-(5-2i)(3-i)=-12+19i,$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}4+2i & 3-i\\-5i & 2+3i\end{vmatrix}=(4+2i)\cdot(2+3i)-(3-i)\cdot(-5i)=7+31i,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}2+i & 4+2i\\5-2i & -5i\end{vmatrix}=(2+i)\cdot(-5i)-(4+2i)\cdot(5-2i)=-19-12i\,.$$

Тогда

$$z_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{7+31i}{-12+19i}=\frac{(7+31i)\cdot(-12-19i)}{(-12+19i)\cdot(-12-19i)}=\frac{505-505i}{505}=1-i,$$

$$z_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-19-12i}{-12+19i}=\frac{19i^2-12i}{-12+19i}=\frac{i\,(-12+19i)}{-12+19i}=i.$$

Пример 1.5. Указать, какие линии определяются следующими уравнениями:
1) $\operatorname{Re} z^2=1$; 2) $z=z_0+Re^{i\varphi}$; 3) $|z-3+2i|=3$; 4) $|z-2i|+|z+2i|=6$, 5) $|z-3+2i|=|z|$.

Решение. 1). Выделим действительную часть функции z^2:

$$\operatorname{Re} z^2=\operatorname{Re}(x+iy)^2=\operatorname{Re}\left(x^2+2xyi-y^2\right)=x^2-y^2\,.$$

Тогда уравнение $\operatorname{Re} z^2=1$ примет вид $x^2-y^2=1$. Это уравнение определяет равностороннюю гиперболу ($a=b=1$) с центром в точке (0,0).

2). Запишем равенство $z=z_0+Re^{i\varphi}$ в виде: $x+iy=(x_0+iy_0)+R(\cos\varphi+i\sin\varphi)$.

Приравняем действительные и мнимые части: $\begin{cases}x=x_0+R\cos\varphi,\\y=y_0+R\sin\varphi.\end{cases}$

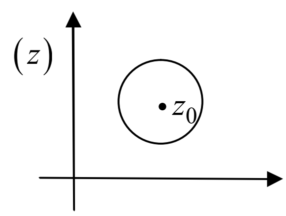

Рис.2

Если $\varphi \in [0,2\pi)$, то эти уравнения определяют окружность $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ с центром в точке (x_0,y_0) радиуса R (рис.2); если $\varphi \in [0,\pi]$, то уравнения определяют верхнюю половину окружности.

Так как $|z-z_0|$ есть расстояние точек z от точки z_0 и оно постоянно (равно R), то уравнение окружности с центром в точке z_0 радиуса R можно записать и в другом виде $|z-z_0|=R$.

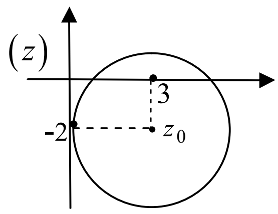

Рис.3

Итак, уравнение окружности с центром в точке z_0 радиуса R имеет вид

$$\boxed{z=z_0+R\,e^{i\varphi},\ \ \varphi\in[0,2\pi)\quad \text{или}\quad |z-z_0|=R.}$$

3). Уравнение $|z-3+2i|=3$ запишем в виде $|z-(3-2i)|=3$; следовательно, оно определяет окружность с центром в точке $z_0=3-2i$ радиуса $R=3$ (рис. 3).

4). В уравнении $|z-2i|+|z+2i|=6$ модуль $|z-2i|$ есть расстояние точки z от точки $z_0=2i$, а модуль $|z+2i|=|z-(-2i)|$ есть расстояние точки z от точки $z_1=-2i$. Следовательно, уравнение $|z-2i|+|z+2i|=6$ определяет множество точек z, сумма расстояний от которых до двух заданных точек $z_0=2i$ и $z_1=-2i$ есть величина постоянная, равная 6 и большая, чем расстояние между z_0 и z_1. Такое множество точек есть эллипс с фокусами в точках z_0, z_1, причем длина оси эллипса, на которой лежат фокусы, равна 6 (рис. 4).

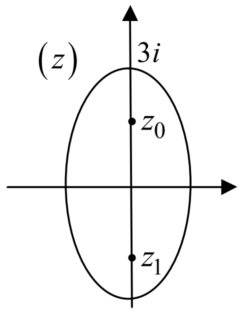

Рис. 4

5). В уравнении $|z-3+2i|=|z|$ модуль $|z-3+2i|$ есть расстояние точки z от точки $z_0=3-2i$, а модуль $|z|=|z-0|$ есть расстояние точки z от точки $z_1=0$. Поэтому уравнение $|z-3+2i|=|z|$ определяет множество точек z равноудаленных от точек $z_0=3-2i$ и $z_1=0$. Это множество точек есть серединный перпендикуляр к отрезку z_0z_1 (рис. 5).

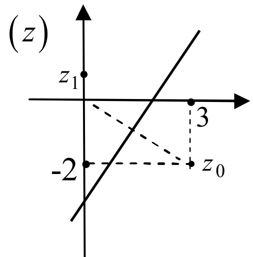

Рис.5

2. Элементарные функции комплексного переменного

Функции $e^z, \sin z, \cos z$

Функции $e^z, \sin z, \cos z$ для любого действительного z определяются как суммы следующих рядов:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots \qquad (2.1)$$

$$\sin z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots \qquad (2.2)$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots \qquad (2.3)$$

Связь между функциями e^z, $\sin z$, $\cos z$

$$\boxed{e^{iz} = \cos z + i \sin z}\,, \quad \boxed{\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}}\,, \quad \boxed{\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}}\,. \qquad (2.4)$$

Эти формулы называют ***формулами Эйлера.***

Свойства функций e^z, $\sin z$, $\cos z$

1). $e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$.

2). Функция e^z имеет период $\boxed{T = 2\pi i.}$

3). Функции $\sin z$, $\cos z$ имеют период $T = 2\pi$.

4). Функция $\sin z$ – нечетная, функция $\cos z$ – четная.

5). а) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$,

б) $\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cdot \cos z_2 \pm \cos z_1 \cdot \sin z_2$, г) $\sin 2z = 2 \sin z \cdot \cos z$,

в) $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cdot \cos z_2 \mp \sin z_1 \cdot \sin z_2$, д) $\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$.

6). Функции $\sin z$, $\cos z$ – не ограничены на комплексной плоскости.

Обратите внимание на то, что свойства I), 3), 4), 5) функций e^z, $\sin z$, $\cos z$ такие же, как для соответствующих функций действительной переменной. Свойства же 2) и 6) имеют место только для функций комплексной переменной.

Перечисленные свойства используются при вычислении значений функций e^z, $\sin z$, $\cos z$ и при решении уравнений, содержащих эти функции.

Пример 2.1. Вычислить $e^{\ln 5 + 3\pi i/2}$.

Решение. Воспользуемся свойством 1), основным логарифмическим тождеством и одной из формул (2.4):

$$e^{\ln 5 + 3\pi i/2} = e^{\ln 5} \cdot e^{3\pi i/2} = 5\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i \sin\frac{3\pi}{2}\right) = -5i \;.$$

Гиперболические функции

Для комплексного аргумента гиперболические синус и косинус вводятся так же, как для действительного аргумента, т.е.

$$\boxed{\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}}\,. \qquad (2.5)$$

Перечислим свойства функций $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$.

1). Функции $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ имеют период $2\pi i$ (так же, как функция e^z).

2). Для комплексного аргумента существует следующая связь между тригонометрическими и гиперболическими функциями:

$$\boxed{\begin{aligned}&\cos(iz)=\operatorname{ch}z, &&\sin(iz)=i\operatorname{sh}z,\\ &\operatorname{ch}(iz)=\cos z, &&\operatorname{sh}(iz)=i\sin z.\end{aligned}} \qquad (2.6)$$

3). Для комплексного аргумента (как и для действительного):

$$\operatorname{ch}^2 z-\operatorname{sh}^2 z=1,$$

$$\operatorname{sh}(z_1\pm z_2)=\operatorname{sh}z_1\cdot\operatorname{ch}z_2\pm\operatorname{ch}z_1\cdot\operatorname{sh}z_2,$$

$$\operatorname{ch}(z_1\pm z_2)=\operatorname{ch}z_1\cdot\operatorname{ch}z_2\pm\operatorname{sh}z_1\cdot\operatorname{sh}z_2,$$

$$\operatorname{sh}2z=2\operatorname{sh}z\operatorname{ch}z, \quad \operatorname{ch}2z=\operatorname{ch}^2 z+\operatorname{sh}^2 z.$$

Пример 2.2. Вычислить $\sin(\pi+i\ln 3)$, $\operatorname{ch}\left(1-\dfrac{\pi i}{2}\right)$.

Решение. Воспользуемся свойствами функций $\sin z, \cos z, \operatorname{sh}z, \operatorname{ch}z$:

$$\sin(\pi+i\ln 3)=\sin\pi\cdot\cos(i\ln 3)+\cos\pi\cdot\sin(i\ln 3)=-\sin(i\ln 3)=$$
$$=-i\cdot\operatorname{sh}(\ln 3)=-i\,\frac{e^{\ln 3}-e^{-\ln 3}}{2}=-i\,\frac{3-1/3}{2}=-\frac{4}{3}i;$$
$$\operatorname{ch}\left(1-\frac{\pi i}{2}\right)=\operatorname{ch}1\cdot\operatorname{ch}\frac{\pi i}{2}-\operatorname{sh}1\cdot\operatorname{sh}\frac{\pi i}{2}=\operatorname{ch}1\cdot\cos\frac{\pi}{2}-i\operatorname{sh}1\cdot\sin\frac{\pi}{2}=-i\operatorname{sh}1.$$

Логарифмическая функция

$$\boxed{\operatorname{Ln}z=\ln|z|+i(\arg z+2\pi k), \quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots} \qquad (2.7)$$

Значение этой многозначной функции при $k=0$ называют главным значением логарифма и обозначают $\ln z$.

На функцию $\operatorname{Ln}z$ распространяется ряд свойств логарифма действительного переменного:

$$\text{I)}\ \operatorname{Ln}(z_1\cdot z_2)=\operatorname{Ln}z_1+\operatorname{Ln}z_2, \quad 2)\ \operatorname{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\operatorname{Ln}z_1-\operatorname{Ln}z_2,$$

$$3)\ \operatorname{Ln}\left(z_1^{z_2}\right)=z_2\cdot\operatorname{Ln}z_1, \qquad 4)\ e^{\operatorname{Ln}z}=z.$$

Обобщенные степенная и показательная функции

Степенная функция $w=z^a$ с произвольным комплексным показателем $a=\alpha+i\beta$ определяется равенством

$$\boxed{w=z^a=e^{\operatorname{Ln}z^a}=e^{a\operatorname{Ln}z}}\,.$$

Показательная функция $w=a^z$ с произвольным комплексным основанием $a=\alpha+i\beta$ определяется равенством

$$\boxed{w=a^z=e^{\operatorname{Ln}a^z}=e^{z\operatorname{Ln}a}}\,.$$

Пример 2.3. Вычислить 1) $\operatorname{Ln}i$, 2) 1^i, 3) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2i}$.

Решение. 1). Вычислим модуль и аргумент для $z=i$: $|i|=1$, $\arg i=\pi/2$. Тогда

$$\operatorname{Ln}i=\ln 1+i(\pi/2+2\pi k)=\frac{\pi i}{2}(1+2k), \quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots.$$

Главное значение логарифма есть $\ln i = \pi i/2$.

2). Запишем $w = 1^i$ в виде $w = e^{\mathrm{Ln}1^i} = e^{i\,\mathrm{Ln}1} = e^{i(\ln 1 + 2\pi k i)} = e^{-2\pi k}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

3). Учитывая, что $\left|\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1, \ \arg\frac{1+i}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$, получим:

$$w = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2i} = e^{\mathrm{Ln}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2i}} = e^{2i\ln\frac{1+i}{\sqrt{2}}} = e^{2i\cdot\left(\ln 1 + i\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right)\right)} = e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 4\pi k\right)}, \text{ где } k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Пример 2.4. Решить уравнение $4\cos z + 5 = 0$.

Решение. Используя равенство $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, запишем уравнение в виде

$$2(e^{iz} + e^{-iz}) + 5 = 0.$$

Умножив это равенство на e^{iz}, получим $2e^{2iz} + 5e^{iz} + 2 = 0$ или $2w^2 + 5w + 2 = 0$, где $w = e^{iz}$. Решения этого квадратного уравнения $w_1 = -2, \ w_2 = -\frac{1}{2}$, т.е. $e^{iz_1} = -2$ и $e^{iz_2} = -\frac{1}{2}$. Прологарифмируем эти равенства и учтем, что $\frac{1}{i} = \frac{1\cdot i}{i\cdot i} = -i$:

$$iz_1 = \mathrm{Ln}(-2) = \ln 2 + i(\pi + 2\pi k), \qquad z_1 = \pi(1+2k) - i\ln 2, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;$$

$$iz_2 = \mathrm{Ln}\left(-\frac{1}{2}\right) = \ln\frac{1}{2} + i\,(\pi + 2\pi n) = -\ln 2 + i\,\pi(1+2n), \quad z_2 = \pi(1+2n) + i\ln 2, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Итак, можно решение уравнения записать в виде $z = (2k+1)\pi \pm i\ln 2, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

Обратные тригонометрические и гиперболические функции

По определению

$w = \mathrm{Arcsin}\, z$, если $\sin w = z$; $\qquad w = \mathrm{Arc}\cos z$, если $\cos w = z$;

$w = \mathrm{Arctg}\, z$, если $\mathrm{tg}\, w = z$; $\qquad w = \mathrm{Arcctg}\, z$, если $\mathrm{ctg}\, w = z$;

$w = \mathrm{Arcsh}\, z$, если $\mathrm{sh}\, w = z$; $\qquad w = \mathrm{Arcch}\, z$, если $\mathrm{ch}\, w = z$;

$w = \mathrm{Arcth}\, z$, если $\mathrm{th}\, w = z$; $\qquad w = \mathrm{Arccth}\, z$, если $\mathrm{cth}\, w = z$.

Пример 2.5. Вычислить $\mathrm{Arcsin}(i)$.

Решение. Из условия $\mathrm{Arcsin}(i) = z$ имеем:

$$\sin z = i \ \Rightarrow \ \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = i \ \Rightarrow \ e^{iz} - e^{-iz} = -2 \ .$$

Умножив последнее равенство на e^{iz}, получим

$$e^{2iz} + 2e^{iz} - 1 = 0 \ \Rightarrow \ e^{iz} = -1 \pm \sqrt{2} \ \Rightarrow \ iz = \mathrm{Ln}\left(-1 \pm \sqrt{2}\right).$$

Учтем, что

$$-1 + \sqrt{2} > 0 \quad \Rightarrow \quad \left|-1 + \sqrt{2}\right| = \sqrt{2} - 1, \quad \arg\left(-1 + \sqrt{2}\right) = 0;$$
$$-1 - \sqrt{2} < 0 \quad \Rightarrow \quad \left|-1 - \sqrt{2}\right| = \sqrt{2} + 1, \quad \arg\left(-1 - \sqrt{2}\right) = \pi.$$

Поэтому

$$iz_1 = \mathrm{Ln}\left(-1 + \sqrt{2}\right) = \ln\left|-1 + \sqrt{2}\right| + i\left(\arg\left(-1 + \sqrt{2}\right) + 2\pi k\right) = \ln\left(\sqrt{2} - 1\right) + 2\pi k i;$$
$$iz_2 = \mathrm{Ln}\left(-1 - \sqrt{2}\right) = \ln\left(\sqrt{2} + 1\right) + (\pi + 2\pi k)i, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Учитывая, что $\frac{1}{i}=-i$, получим решения уравнения

$$z_1=2\pi k-i\ln\left(\sqrt{2}-1\right),\quad z_2=\pi+2\pi k-i\ln\left(\sqrt{2}+1\right),\quad k=0,\pm1,\pm2,...$$

3. Дифференцируемые и аналитические функции

Функция $f(z)$ называется ***дифференцируемой*** в точке z_0, если она имеет в этой точке производную

$$\boxed{f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z}}$$

Для функций комплексного переменного справедливы правила дифференцирования суммы, произведения, частного, правила дифференцирования элементарных функций:

$$\boxed{(u+v)'=u'+v',\quad (u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v',\quad \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}};$$

$$\boxed{\left(z^n\right)'=n\,z^{n-1},\quad (\sin z)'=\cos z\;,\quad (\cos z)'=-\sin z\,,\quad \left(e^z\right)'=e^z\,,\quad (\ln z)'=\frac{1}{z}}.$$

Кроме элементарных функций, есть другие функции комплексного переменного, например, $\overline{z}$, $\operatorname{Re} z^2$, $\operatorname{Im}\left(\overline{z}-z^3\right)$ и т.д. Как проверить их дифференцируемость?

Функция $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ будет дифференцируемой тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия Коши-Римана:

$$\boxed{u'_x=v'_y,\quad u'_y=-v'_x}.$$

Пример 3.1. Выяснить, являются ли функции а) $f(z)=z\cdot e^{3z}$, б) $f(z)=5\overline{z}-3iz$ аналитическими в области определения. Если да, то найти их производные.

Решение.

а). Функция $f(z)=z\cdot e^{3z}$ является элементарной функцией, определенной на всей комплексной плоскости; следовательно она является аналитической на комплексной плоскости. Найдём ее производную

$$f'(z)=\left(z\cdot e^{3z}\right)'=e^{3z}+z\cdot e^{3z}\cdot 3=e^{3z}\cdot(3z+1).$$

б). Функция $f(z)=5\,\overline{z}-3\,i\,z$ не является элементарной функцией, поэтому следует проверить выполнение условий Коши-Римана. Для этого запишем функцию в виде

$$f(z)=5\overline{z}-3\,i\,z=5(x-i\,y)-3i(x+i\,y)=(5x+3y)+i(-5y-3x).$$

Отсюда действительная часть функции $u=5x+3y$, мнимая часть $v=-5y-3x$.

Найдем частные производные этих функций:

$$u'_x=5,\quad u_y{}'=3,\quad v_x{}'=-3,\quad v_y{}'=-5.$$

Так как $u_x{}'\neq v_y{}'$, то функция $f(z)=5\overline{z}-3iz$ не является аналитической ни в одной точке комплексной плоскости.

В теории функций комплексного переменного важную роль играет класс функций, называемых аналитическими. Однозначная функция $f(z)$ называется ***аналитической*** в области D, если она дифференцируема в каждой точке этой области.

Укажем ряд свойств аналитических функций.

1). Функция $f(z)$ является аналитической в области D тогда и только тогда, когда в этой области ее действительная и мнимая части удовлетворяют условиям Коши-Римана.

2). Сумма, разность, произведение, суперпозиция аналитических функций являются функциями аналитическими. Частное аналитических функций является аналитической функцией, если знаменатель не обращается в нуль.

3). Пусть функция $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ является аналитической в области D. Тогда в этой области функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ являются гармоническими, т.е. удовлетворяют уравнению Лапласа:

$$\boxed{u''_{xx}+u''_{yy}=0}\,,\quad \boxed{v''_{xx}+v''_{yy}=0}\,. \tag{3.1}$$

Отметим, что из гармоничности функций $u(x,y)$, $v(x,y)$ не следует аналитичность функции $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$. Например, для функции $f(z)=\overline{z}=x-i\,y$ ее действительная и мнимая части $u(x,y)=x,\ \ v(x,y)=-y$ являются функциями гармоническими, но не удовлетворяют условиям Коши-Римана, т.е. функция $f(z)=\overline{z}$ не является аналитической.

4). Если известна действительная или мнимая часть аналитической функции $f(z)$, то с точностью до постоянной может быть восстановлена сама функция $f(z)$.

Пусть, например, известна $\operatorname{Re} f(z)=u(x,y)$. Требуется найти $\operatorname{Im} f(z)=v(x,y)$. Воспользуемся условиями Коши-Римана:

$$v'_x=-u'_y\,,\quad v'_y=u'_x\,. \tag{3.2}$$

Первое из этих равенств проинтегрируем по x с точностью до константы $c(y)$, не зависящей от переменной интегрирования

$$v=-\int u'_y\,dx+c(y)\,.$$

Для отыскания $c(y)$ следует подставить найденную функцию $v(x,y)$ во второе из равенств (3.2).

Пример 3.2. Найти, если возможно, аналитическую функцию $f(z)$, у которой

$$\operatorname{Im} f(z)=v(x,y)=\operatorname{ch}x\cdot\sin y\,.$$

Решение. Проверим гармоничность функции $v(x,y)$:

$$v''_{xx}+v''_{yy}=\operatorname{ch}x\cdot\sin y-\operatorname{ch}x\cdot\sin y=0\,.$$

Из гармоничности функции $v(x,y)$ следует, что она является мнимой частью некоторой аналитической функции $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$. Для отыскания функции $f(z)$ найдем ее действительную часть из условий Коши-Римана:

$$u'_x = v'_y = \operatorname{ch} x \cdot \cos y, \quad u'_y = -v'_x = -\operatorname{sh} x \cdot \sin y\,. \tag{3.3}$$

Равенство $u'_x = \operatorname{ch} x \cdot \cos y$ проинтегрируем по x:

$$u = \int (\operatorname{ch} x \cdot \cos y)\,dx = \operatorname{sh} x \cdot \cos y + c(y)\,.$$

Для отыскания $c(y)$ подставим найденную функцию $u(x,y)$ во второе из равенств (3.3):

$$u'_y = -\operatorname{sh} x \cdot \sin y = -\operatorname{sh} x \cdot \sin y + c'(y) \;\Rightarrow\; c'(y) = 0 \Rightarrow c(y) = c \;\Rightarrow\; u = \operatorname{sh} x \cdot \cos y + c\,.$$

Подставим найденное $u(x,y)$ и заданное $v(x,y)$ в функцию $f(z) = u + iv$ и выразим ее через z, учитывая, что $\operatorname{ch}(iy) = \cos y,\ \operatorname{sh}(iy) = i \sin y$:

$$f(z) = u + iv = (\operatorname{sh} x \cdot \cos y + c\,) + i\operatorname{ch} x \cdot \sin y = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch}(iy) + \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh}(iy) = \operatorname{sh}(x + iy) + c = \operatorname{sh} z + c.$$

Следовательно, $f(z) = \operatorname{sh} z + c$.

4. Интегрирование функции комплексного переменного

Пусть $z = z(t)$ есть параметрическое уравнение дуги (AB), причём концам дуги A, B соответствуют значения параметров t_A, t_B. Тогда

$$\boxed{\int\limits_{(AB)} f(z)\,dz = \int\limits_{t_A}^{t_B} f(z(t))\,z'(t)\,dt}.$$

Пример 4.1. Вычислить интеграл $\int\limits_{(L)} \operatorname{Re} z\,dz$ по отрезку (L) с концами в точках $z_1 = 1 + 2i,\ z_2 = 2 + 3i$.

Решение. Уравнение отрезка (L) с концами в точках $z_1,\ z_2$ имеет вид:

$$\boxed{z - z_1 = t(z_2 - z_1), \quad 0 \le t \le 1}.$$

В нашем случае $z = (1 + 2i) + t(1 + i) \Rightarrow \operatorname{Re} z = 1 + t,\ dz = (1 + i)dt$,

$$\int\limits_{(L)} \operatorname{Re} z\,dz = \int\limits_0^1 (1 + t)(1 + i)\,dt = (1 + i)\left(t + \frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{2}(1 + i)\,.$$

Пример 4.2. Вычислить интеграл $\int\limits_{(L)} z \operatorname{Im} z^2 dz$, если контур (L) задан соотношениями $\operatorname{Re} z = 1,\ \ |\operatorname{Im} z| \le 2$.

Решение. Так как $\operatorname{Re} z = x,\ \ \operatorname{Im} z = y$, то уравнение контура (L) можно записать следующим образом: $x = 1,\ |y| \le 2$ или $x = 1,\ -2 \le y \le 2$. На линии (L) имеем:

$$z = x + iy = 1 + iy, \quad \operatorname{Im} z^2 = \operatorname{Im}(1 + iy)^2 = 2y, \quad dz = i\,dy.$$

Тогда $\int\limits_{(L)} z \operatorname{Im} z^2 dz = \int\limits_{-2}^{2} (1 + iy)\,2yi\,dy = \int\limits_{-2}^{2} 2i\left(y + iy^2\right)dy = -\frac{32}{3}.$

Пример 4.3. Вычислить интеграл $\oint\limits_{(L)} \frac{z}{\bar z} dz$ по границе (L) области (D): $\begin{cases} 2 < |z| < 3, \\ \operatorname{Re} z < 0, \\ \operatorname{Im} z < 0. \end{cases}$

Решение. Изобразим область (D) на плоскости (z) (рис.6). Граница области – линия (L) – состоит из двух дуг окружностей (дуги BC и FA) и двух отрезков (AB и CF), следовательно, интеграл по контуру (L) будет равен сумме четырёх интегралов. Выберем обход контура против часовой стрелки.

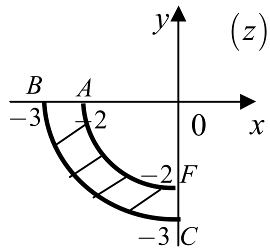

Рис. 6

Вычислим каждый из интегралов.

1). На отрезке (AB) имеем: $y=0,\ \ z=x,\ \ \overline{z}=x,\ \ dz=dx,$ и

$$\int\limits_{(AB)}\frac{z}{\overline{z}}dz=\int\limits_{-2}^{-3}\frac{x}{x}dx=-1.$$

2). На отрезке (CF) имеем: $x=0,\ \ z=i\,y,\ \ \overline{z}=-i\,y,\ \ dz=i\,dy,\ \ y\in[-3,-2]$ и

$$\int\limits_{(CF)}\frac{z}{\overline{z}}dz=\int\limits_{-3}^{-2}\frac{i\,y}{-i\,y}\,i\cdot dy=-i.$$

3). На дуге (BC) имеем: $|z|=3,\ \ z=3e^{i\varphi},\ \ \overline{z}=3e^{-i\varphi},\ \ dz=3i\,e^{i\varphi}d\varphi,\ \ \varphi\in[\pi,3\pi/2]$ и

$$\int\limits_{(BC)}\frac{z}{\overline{z}}dz=\int\limits_{\pi}^{3\pi/2}\frac{3e^{i\varphi}}{3e^{-i\varphi}}\cdot 3i\,e^{i\varphi}d\varphi=\int\limits_{\pi}^{3\pi/2}e^{3i\varphi}3i\,d\varphi=e^{3i\varphi}\Big|_{\pi}^{3\pi/2}=$$

$$=\left(\cos\frac{9\pi}{2}+i\sin\frac{9\pi}{2}\right)-\left(\cos 3\pi+i\,\sin 3\pi\right)=1+i.$$

4). На дуге (FA) имеем: $|z|=2,\ \ z=2e^{i\varphi},\ \ \overline{z}=2e^{-i\varphi},\ \ dz=2i\,e^{i\varphi}d\varphi$ и

$$\int\limits_{(FA)}\frac{z}{\overline{z}}dz=\int\limits_{3\pi/2}^{\pi}2i\,e^{3i\varphi}d\varphi=\frac{2}{3}e^{3i\varphi}\Big|_{3\pi/2}^{\pi}=\frac{2}{3}(-1-i).$$

Следовательно, $\displaystyle\int\limits_{(L)}\frac{z}{\overline{z}}dz=-1-i+1+i+\frac{2}{3}(-1-i)=-\frac{2}{3}(1+i).$

Интегральная теорема Коши

> Пусть функция $f(z)$ является ***аналитической*** в ***односвязной*** области D.
> Тогда интеграл от этой функции по любой замкнутой кривой L из области D равен нулю, т.е. $\displaystyle\oint\limits_{(L)}f(z)\,dz=0$.

Если функция является аналитической в односвязной области, но линия интегрирования незамкнута, то интеграл $\displaystyle\int\limits_{(AB)}f(z)dz$ не зависит от формы кривой. Такой интеграл обозначают $\displaystyle\int\limits_{A}^{B}f(z)\,dz$ и к нему применимы такие же методы вычисления, как при интегрировании функции действительной переменной, например, метод подведения под знак дифференциала, метод интегрирования по частям.

Пример 4.4. Вычислить интеграл $\int\limits_{(L)} z e^{z^2} dz$:

а) по дуге (L_1) параболы $y = x^2$ от точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = 1 + i$,

б) по отрезку (L_2) прямой, соединяющему эти точки.

Решение. Так как функция $f(z) = z e^{z^2}$ аналитична всюду на комплексной плоскости, то $\int\limits_{(L)} z e^{z^2} dz$ не зависит от формы пути интегрирования, т. е.

$$\int\limits_{(L_1)} z e^{z^2} dz = \int\limits_{(L_2)} z e^{z^2} dz = \int\limits_0^{1+i} z e^{z^2} dz = \frac{1}{2}\int\limits_0^{1+i} e^{z^2} d z^2 = \frac{1}{2} e^{z^2} \Bigg|_0^{1+i} = \frac{1}{2}\left(e^{(1+i)^2} - 1\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(e^{2i} - 1\right) = \frac{1}{2}(\cos 2 - 1) + \frac{i}{2}\sin 2.$$

Пример 4.5. Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z-3|=1} \frac{5 + z^2 + z\cdot\cos z}{\left(z^2+1\right)\cdot\left(z+3\right)^2} dz.$

Решение. Подынтегральная функция не определена в точках $z = \pm i,\ z = -3.$ Построим контур интегрирования $|z-3| = 1$. Это есть окружность с центром в точке $z = 3$ радиусом 1 (рис. 7). Особые точки функции $z = -3,\ z = i,\ z = -i$ лежат вне этой окружности. Поэтому внутри окружности функция $f(z) = \frac{5 + z^2 + z\cdot\cos z}{\left(z^2+1\right)\cdot\left(z+3\right)^2}$ является аналитической и по теореме Коши $\oint\limits_{|z-3|=1} \frac{5 + z^2 + z\cdot\cos z}{\left(z^2+1\right)\cdot\left(z+3\right)^2} dz = 0.$

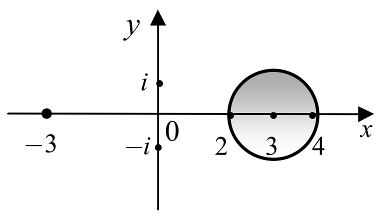

Рис. 7

Интегральные формулы Коши

Интегральные формулы Коши можно записать в виде

$$\boxed{\oint\limits_L \frac{f(z)dz}{z-a} = 2\pi i \cdot f(a), \qquad \oint\limits_L \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(a)} \qquad (4.1)$$

и использовать для вычисления соответствующих интегралов при условии, что точка a находится внутри контура L, функция $f(z)$ является аналитической внутри контура L.

Пример 4.5. Вычислить интегралы $I_1 = \int\limits_{|z-3|=1} \frac{\operatorname{ch} z}{z^2-1} dz,\ I_2 = \int\limits_{|z-1|=1} \frac{\operatorname{ch} z}{z^2-1} dz$.

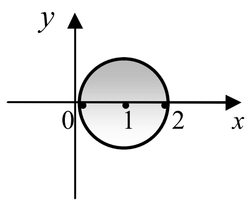

Рис. 8

Решение. В первом интеграле нули знаменателя $z = \pm 1$ функции $\frac{e^{iz}}{z^2-1}$ находится вне контура интегрирования $|z-3| = 1$ (рис. 7); поэтому внутри этого контура подынтегральная функция является аналитической и по теореме Коши интеграл I_1 равен нулю.

Во втором интеграле точка $z = 1$ находится внутри контура интегрирования

$|z-1|=1$ (рис. 8), поэтому по первой из формул (4.1) имеем

$$I_2=\int\limits_{|z-1|=1}\frac{\operatorname{ch}z}{z^2-1}dz=\int\limits_{|z-1|=1}\frac{\operatorname{ch}z}{(z-1)(z+1)}dz=\int\limits_{|z-1|=1}\frac{\frac{\operatorname{ch}z}{z+1}}{(z-1)}dz=2\pi i\left.\frac{\operatorname{ch}z}{z+1}\right|_{z=1}=\pi i\operatorname{ch}1.$$

Пример 4.6. Вычислить интеграл $I=\int\limits_{|z|=1}\frac{1}{z^2}\sin\frac{\pi}{z+3}dz$.

Решение. Внутри контура $|z|=1$ функция $\sin\frac{\pi}{z+3}$ является аналитической, так как особая точка $z=-3$ находится вне контура. Поэтому по второй из формул (4.1) при $n=1$ имеем

$$I=\int\limits_{|z|=1}\frac{1}{z^2}\sin\frac{\pi}{z+3}dz=\frac{2\pi i}{1!}\left.\left(\sin\frac{\pi}{z+3}\right)'\right|_{z=0}=2\pi i\cos\frac{\pi}{z+3}\cdot\left.\frac{-\pi}{(z+3)^2}\right|_{z=0}=2\pi i\cos\frac{\pi}{3}\cdot\frac{-\pi}{9}=\frac{-\pi^2 i}{9}.$$

Пример 4.7. Вычислить интеграл $I=\int\limits_{|z|=3}\frac{dz}{\left(z^2-(2+i)z+2i\right)^3}$.

Решение. Нули знаменателя $z_1=i,\ z_2=2$ легко находятся по теореме Виета. Поэтому функция разлагается на множители $\left(z^2-(2+i)z+2i\right)^3=(z-i)^3(z-2)^3$. Точки $z_1=i,\ z_2=2$ находятся внутри контура γ (рис. 9). Построим окружности $\gamma_1,\ \gamma_2$ с центрами в этих точках достаточно малых радиусов, таких, чтобы окружности не пересекались и целиком лежали внутри контура γ. В многосвязной области, ограниченной внешним контуром γ и внутренними контурами $\gamma_1,\ \gamma_2$, подынтегральная функция является аналитической (т. к. нули знаменателя не входят в эту область), поэтому по теореме Коши для многосвязной области интеграл по внешнему контуру равен сумме интегралов по внутренним контурам:

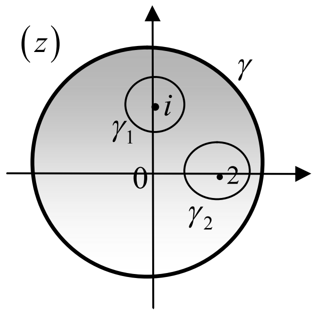

Рис. 9

$$I=\int\limits_{|z|=3}\frac{dz}{(z-i)^3(z-2)^3}=\int\limits_{\gamma_1}\frac{dz}{(z-i)^3(z-2)^3}+\int\limits_{\gamma_2}\frac{dz}{(z-i)^3(z-2)^3}$$

В интеграле по кривой γ_1, окружающей точку $z_1=i$, в знаменателе оставим $(z-i)^3$, а в интеграле по кривой γ_2, окружающей точку $z_2=2$, в знаменателе оставим $(z-2)^3$ и применим для каждого интеграла вторую из формул Коши (4.1) при $n=2$:

$$I=\int\limits_{\gamma_1}\frac{(z-2)^{-3}}{(z-i)^3}dz+\int\limits_{\gamma_2}\frac{(z-i)^{-3}}{(z-2)^3}dz=\frac{2\pi i}{2!}\left\{\left.\left[(z-2)^{-3}\right]''\right|_{z=i}+\left.\left[(z-i)^{-3}\right]''\right|_{z=2}\right\}=$$

$$=\pi i(-3)(-4)\left\{\left.(z-2)^{-5}\right|_{z=i}+\left.(z-i)^{-5}\right|_{z=2}\right\}=12\pi i\left\{\frac{1}{(i-2)^5}+\frac{1}{(2-i)^5}\right\}=0.$$

Примеры для самостоятельного решения

1. Вычислить интеграл $\int\limits_{(L)} |z|dz$, где (L): $|z|=1,\ -\frac{\pi}{2} \le \arg z \le \frac{\pi}{2}$. *Ответ*: $2i$.

2. Вычислить интеграл $\oint\limits_{(L)} |z| \cdot \bar{z}\, dz$ по границе (L) области $\begin{cases} |z|<1, \\ \pi/2 < \arg z < \pi \end{cases}$

(обход контура против часовой стрелки). *Ответ*: $\pi \cdot i/2$.

3. Вычислить $\int\limits_{(L)} (z-1)\cos z\, dz$ по отрезку $z_1 z_2$: $z_1 = -\pi/2,\ z_2 = \pi/2$. *Ответ*: -2.

4. Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{e^z \cos z + \sin z^2 - 5z + 3}{\left(z^2 - 5z - 6\right)^2} dz.$ *Ответ*: 0.

5. Ряды в комплексной области

5.1. Числовые ряды

Необходимый и достаточный признак сходимости ряда:

ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (x_n + i\, y_n)$ сходится $\Leftrightarrow$ ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ сходятся.

Пример 5.1. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{(2n)!} + \frac{i}{3^{n+1}} \right)$ на сходимость и найти его сумму.

Решение. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}$ является знакочередующимся и сходится по признаку Лейбница, так как его члены по абсолютной величине убывают и стремятся к нулю. Для вычисления его суммы запишем ряд Тейлора для функции $\cos x$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n!)} .$$

В частности, при $x=1$ получим $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} = \cos 1$.

Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}}$ является геометрической прогрессией с первым членом $b_1 = \frac{1}{3}$, знаменателем $q = \frac{1}{3}$ и суммой $\frac{b_1}{1-q} = \frac{1/3}{1-1/3} = \frac{1}{2}$. Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{(2n)!} + \frac{i}{3^{n+1}} \right)$ сходится и его сумма $S = \cos 1 + \frac{1}{2} i$.

Пример 5.2. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} + i \sqrt{\frac{27n^3+5}{3n^7-1}} \right)$ на сходимость.

Решение. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится как эталонный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ при $p>1$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{27n^3+5}{3n^7-1}}$ ведет себя также, как ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{27n^3}{3n^7}}=3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, т.е. сходится.

Следовательно, исходный ряд сходится.

Необходимый признак сходимости ряда*:* если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=0$.

Пример 5.3. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\ln n}+i\frac{3n^4+1}{10n^4-3}\right)$ на сходимость.

Решение. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\ln n}+i\frac{3n^4+1}{10n^4-3}\right)=i\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^4}{10n^4}=i\frac{3}{10}\neq 0$, то заданный ряд расходится.

Достаточный признак сходимости ряда: если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится и называется абсолютно сходящимся рядом.

Пример 5.4. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^{2n}}{\cos(in)}$ на сходимость.

Решение. Рассмотрим ряд из модулей

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(1+i)^{2n}}{\cos(in)}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|1+i|^{2n}}{\operatorname{ch} n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\left(\sqrt{2}\right)^{2n}}{e^n+e^{-n}}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{e^n+e^{-n}}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{e^n+e^{-n}}$ ведет себя также, как ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{e^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{e}\right)^n$. Последний ряд сходится, как геометрическая прогрессия со знаменателем $q=\frac{2}{e}$ меньшим единицы. Поэтому исходный ряд сходится абсолютно.

5.2. Степенные ряды

Степенной ряд в комплексной области есть ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\ldots ,$$

где a_n $(n=0,1,2,3,\ldots)$, z, z_0 – комплексные числа.

Степенной ряд в комплексной области обладает следующими свойствами.

1). Областью сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ является круг $|z - z_0| < R$.

2). Сумма степенного ряда внутри круга сходимости является функцией аналитической.

3). Степенной ряд внутри круга сходимости можно почленно дифференцировать любое число раз и почленно интегрировать.

Пример 5.5. Найти и построить область сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-2}{4-3i} \right)^n$.

Решение. Ряд является геометрической прогрессией со знаменателем $q = \frac{z-2}{4-3i}$.

Поэтому ряд сходится, если $|q| < 1$, т.е.

$$|q| = \left| \frac{z-2}{4-3i} \right| = \frac{|z-2|}{|4-3i|} = \frac{|z-2|}{5} < 1 \quad \Rightarrow \quad |z-2| < 5.$$

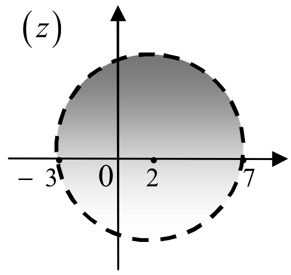

Рис. 10

Областью сходимости ряда является круг с центром в точке $z_0 = 2$ и радиусом $R = 5$ (рис. 10).

Пример 5.6. Найти и построить область сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n} (z - i)^n$.

Решение. Применим признак Даламбера для ряда из модулей:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)|z-i|^{n+1}}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n|z-i|^n} = \frac{|z-i|}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \frac{|z-i|}{3}.$$

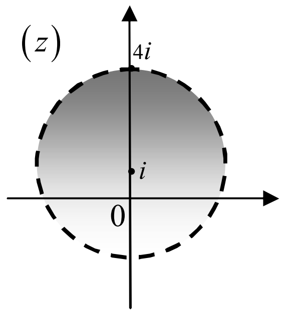

Рис. 11

Если $|z - i| > 3$, то ряд расходится; если $|z - i| < 3$, то ряд сходится, т.е. областью сходимости ряда является круг с центром в точке $z_0 = i$ и радиусом $R = 3$ (рис. 11). На границе круга, т.е. при $|z - i| = 3$ нужны дополнительные исследования, которые проводить не будем.

5.3. Ряды Тейлора и Лорана

Функция $f(z)$, ***аналитическая в круге*** $|z - z_0| < R$, разлагается в этом круге ***в ряд Тейлора*** по степеням $(z - z_0)$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n .$$

Функция $f(z)$, ***аналитическая в кольце*** $r < |z - z_0| < R$, разлагается в этом кольце ***в ряд Лорана*** по степеням $(z - z_0)$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n (z - z_0)^n .$$

Ряды Лорана и Тейлора внутри их области сходимости можно почленно интегрировать и дифференцировать, при этом область сходимости вновь полученных рядов не изменится.

При разложении функции в ряд сначала нужно найти область сходимости; для этого не надо использовать признак Даламбера (в отличие от функции действительного переменного); достаточно найти круг или кольцо аналитичности функции.

Пример 5.7. Функцию $f(z)=e^{z^2-2z}$ разложить в ряд в окрестности точки $z_0=1$. Указать область сходимости полученного ряда.

Решение. Функция $f(z)=e^{z^2-2z}$ является аналитической на всей комплексной плоскости, следовательно, её можно разложить в ряд Тейлора по степеням $z-z_0$ в круге $|z-z_0|<\infty$. Преобразуем функцию $f(z)=e^{z^2-2z}=e^{(z-1)^2-1}=e^{-1}\cdot e^{(z-1)^2}$ и воспользуемся известным разложением функции $e^z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!};\quad |z|<\infty$. Получим

$$f(z)=\frac{1}{e}\cdot e^{(z-1)^2}=\frac{1}{e}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^{2n}}{n!},\quad |z-1|<\infty.$$

Пример 5.8. Разложить в ряд по степеням $(z+3)$ функцию $f(z)=\ln\left(z^2+6z+13\right)$; указать область сходимости ряда.

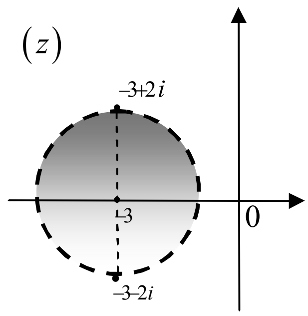

Рис. 12

Решение. 1). Найдем сначала точки, где функция не определена:

$$z^2+6z+13=0\ \Rightarrow\ z=-3\pm\sqrt{9-13}=-3\pm 2i$$

Расстояние от этих точек до точки $z_0=-3$ равно 2 (рис. 12). Поэтому функция $f(z)$ аналитична в круге $|z+3|<2$ и разлагается в этом круге в ряд по степеням $(z+3)$.

2). Преобразуем функцию

$$f(z)=\ln\left(z^2+6z+13\right)=\ln\left((z+3)^2+4\right)=\ln\left[4\left(1+\frac{(z+3)^2}{4}\right)\right]=\ln 4+\ln\left(1+\frac{(z+3)^2}{4}\right).$$

Известно, что $\ln(1+z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{z^n}{n}$. Тогда

$$f(z)=\ln 4+\ln\left(1+\frac{(z+3)^2}{4}\right)=\ln 4+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{(z+3)^{2n}}{4^n\cdot n},\ \text{если } |z+3|<2.$$

Пример 5.9. Функцию $f(z)=\frac{z-2}{z+3}$ разложить в ряд по степеням z.

Решение. Функция $f(z)$ имеет особую точку $z=-3$, следовательно, является аналитической а) в круге $|z|<3$, б) в кольце $3<|z|<\infty$. Найдём ряды для функции $f(z)$ в каждой из этих областей, выделив сначала целую часть функции:

$$f(z)=\frac{z-2}{z+3}=\frac{(z+3)-5}{z+3}=1-\frac{5}{z+3}.$$

а). Для разложения в круге $|z|<3$ в знаменателе из двух величин z и 3 вынесем за скобку большую по модулю, т.е. 3 (рис. 13):

$$f(z)=1-\frac{5}{z+3}=1-\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{1+z/3}=1-\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{1-(-z/3)}.$$

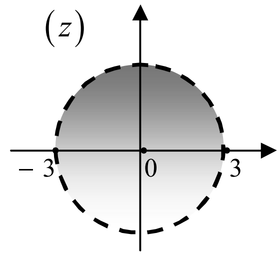

Рис. 13

Получившуюся дробь $\frac{1}{1-(-z/3)}$ можно рассматривать как сумму $\frac{b_1}{1-q}$ бесконечно убывающей геометрической прогрессии, где $b_1=1,\ q=-z/3$, причем $|q|=|-z/3|=|z|/3<1$. Учтем, что $\frac{b_1}{1-q}=b_1+b_1q+b_1q^2+...=\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_1q^n$, если $|q|<1$.

Тогда

$$f(z)=1-\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{1-(-z/3)}=1-\frac{5}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-z/3)^n=1-\frac{5}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{3^n}\qquad(|z|<3).$$

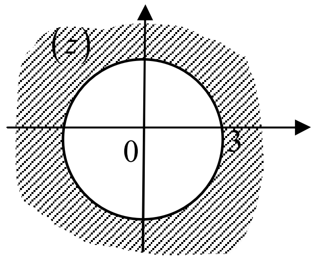

Рис. 14

б). Для разложения в кольце $3<|z|<\infty$ (рис. 14) в знаменателе дроби $\frac{5}{z+3}$ из двух величин z и 3 вынесем за скобку большую по модулю, теперь это z:

$$f(z)=1-\frac{5}{z+3}=1-\frac{5}{z}\cdot\frac{1}{1+3/z}=1-\frac{5}{z}\cdot\frac{1}{1-(-3/z)}$$

Дробь $\frac{1}{1-(-3/z)}$ можно рассматривать как сумму $\frac{b_1}{1-q}$ бесконечно убывающей геометрической прогрессии, где $b_1=1,\quad q=-3/z$, причем $|q|=|-3/z|=3/|z|<1$. Учтем, что $\frac{b_1}{1-q}=b_1+b_1q+b_1q^2+...=\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_1q^n$, если $|q|<1$. Тогда

$$f(z)=1-\frac{5}{z}\cdot\frac{1}{1-(-3/z)}=1-\frac{5}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-3/z)^n=1-5\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 3^n}{z^{n+1}}\qquad(3<|z|<\infty).$$

Пример 5.10. Разложить функцию $f(z)=\frac{1}{(z^2-4)^2}$ в ряд:

1) в окрестности точки $z_0=-2$, 2) в кольце $4<|z+2|<\infty$.

Решение. 1). Функция не определена в точках $z_1=2,\ z_2=-2$. Расстояние от первой из этих точек до точки $z_0=-2$ равно 4; вторая из этих точек совпадает с z_0. Поэтому функция $f(z)$ аналитична в кольце $0<|z+2|<4$ и разлагается в этом кольце (рис. 15) в ряд Лорана по степеням $(z+2)$. Представим функцию в виде:

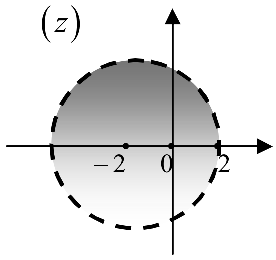

Рис. 15

$$f(z)=\frac{1}{(z^2-4)^2}=\frac{1}{(z+2)^2}\cdot\frac{1}{(z-2)^2},\qquad \frac{1}{(z-2)^2}=-\left(\frac{1}{z-2}\right)'.$$

Преобразуем дробь $\frac{1}{z-2}$, выделив в ее знаменателе $(z+2)$: $\frac{1}{z-2}=\frac{1}{(z+2)-4}$.

В знаменателе из двух величин $(z+2)$ и (-4) вынесем за скобку большую по модулю в кольце $0<|z+2|<4$, т.е. (-4)

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{(z+2)-4}=\frac{1}{-4}\cdot\frac{1}{1-(z+2)/4}.$$

Тогда дробь $\frac{1}{1-(z+2)/4}$ можно рассматривать как сумму $\frac{b_1}{1-q}$ бесконечно убывающей геометрической прогрессии, $b_1=1,\quad q=(z+2)/4$, причем $|q|=|z+2|/4<1$. Учтем, что $\frac{b_1}{1-q}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_1q^n$, если $|q|<1$. Тогда

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{(z+2)-4}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{z+2}{4}}=-\frac{1}{4}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+2}{4}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2)^n}{4^{n+1}}\qquad \left(0<|z+2|<4\right).$$

$$\frac{1}{(z-2)^2}=-\left(\frac{1}{z-2}\right)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2)^n}{4^{n+1}}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\,(z+2)^{n-1}}{4^{n+1}};$$

$$f(z)=\frac{1}{(z^2-4)^2}=\frac{1}{(z+2)^2}\cdot\frac{1}{(z-2)^2}=\frac{1}{(z+2)^2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\,(z+2)^{n-1}}{4^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\,(z+2)^{n-3}}{4^{n+1}}.$$

2). В кольце $4<|z+2|<\infty$ (рис. 16) преобразуем дробь $\frac{1}{z-2}=\frac{1}{(z+2)-4}$, вынося в ее знаменателе из двух величин $(z+2)$ и (-4) большую по модулю, т.е. теперь $(z+2)$:

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{(z+2)-4}=\frac{1}{(z+2)}\cdot\frac{1}{1-4/(z+2)}$$

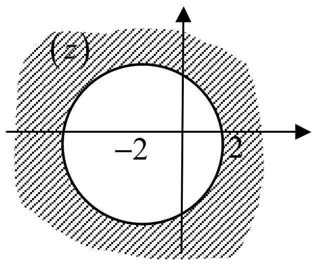

Рис. 16

Дробь $\frac{1}{1-4/(z+2)}$ можно рассматривать как сумму $\frac{b_1}{1-q}$ бесконечно убывающей геометрической прогрессии, $b_1=1,\quad q=4/(z+2)$, причем $|q|=4/|z+2|<1$. Учтем, что $\frac{b_1}{1-q}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_1q^n$, если $|q|<1$. Тогда

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{(z+2)-4}=\frac{1}{(z+2)}\cdot\frac{1}{1-4/(z+2)}=\frac{1}{z+2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(4/(z+2)\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{(z+2)^{n+1}};$$

$$\frac{1}{(z-2)^2}=-\left(\frac{1}{z-2}\right)'=-\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{(z+2)^{n+1}}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n(n+1)}{(z+2)^{n+2}};$$

$$f(z)=\frac{1}{(z^2-4)^2}=\frac{1}{(z+2)^2}\cdot\frac{1}{(z-2)^2}=\frac{1}{(z+2)^2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n(n+1)}{(z+2)^{n+2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n(n+1)}{(z+2)^{n+4}}.$$

Примеры для самостоятельного решения

1. Разложить функцию $f(z)=\sin(2z+1)$ в ряд по степеням $(z+1)$, указать область сходимости ряда.

2. Разложить функцию $f(z)=\frac{1}{z^2+z}$ в ряд и указать область сходимости ряда:
 а) в окрестности точки $z_0=0$, б) в окрестности бесконечности.

3. Разложить функцию $f(z)=f(z)=\dfrac{z+2}{z^2-4z+3}$ в ряд в кольце $2<|z-1|<\infty$.

Ответы: 1) $f(z)=\cos 1\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 2^{2n+1}(z+1)^{2n+1}}{(2n+1)!}-\sin 1\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 2^{2n}(z+1)^{2n}}{(2n)!}$, $|z+1|<\infty$;

2а) $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{n-1}$, $0<|z|<1$; 2б) $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{z^{n+2}}$, $1<|z|<\infty$;

3) $f(z)=-\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{z-1}+5\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^{n-1}}{(z-1)^{n+1}}=\dfrac{1}{z-1}+5\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{n-1}}{(z-1)^{n+1}}$.

6. Вычеты функции и их применения

6.1. Нули функции

Точка $z=a$ является нулем функции $f(z)$ порядка k, если функцию $f(z)$ можно представить в виде

$$f(z)=(z-a)^k\varphi(z),\ \text{где}\ \varphi(a)\neq 0. \qquad (6.1)$$

Теорема 6.1 (о порядке нуля).
Точка $z=a$ является нулем аналитической функции $f(z)$ порядка k тогда и только тогда, когда

$$f(a)=f'(a)=\ldots=f^{(k-1)}(a)=0,\ f^{(k)}(a)\neq 0, \qquad (6.2)$$

т.е. порядок нуля равен порядку первой отличной от нуля производной.

Пример 6.1. Найти нули функции $f(z)=\left(z^2+4\right)^3(z-1)$ и определить их порядок.

Решение. Функция $f(z)=\left(z^2+4\right)^3(z-1)$ имеет три нуля: $z=2i,\ z=-2i,\ z=1$.

Разложим функцию $f(z)$ на множители:

$$f(z)=(z-2i)^3(z+2i)^3(z-1).$$

Запишем функцию $f(z)$ в виде (6.1) тремя способами:

$$f(z)=(z-2i)^3\varphi_1(z),\ \text{где}\ \varphi_1(z)=(z+2i)^3(z-1),\ \varphi_1(2i)\neq 0;$$

$$f(z)=(z+2i)^3\varphi_2(z),\ \text{где}\ \varphi_2(z)=(z-2i)^3(z-1),\ \varphi_2(-2i)\neq 0;$$

$$f(z)=(z-1)\varphi_3(z),\quad \text{где}\ \varphi_3(z)=(z+2i)^3(z-2i)^3,\ \varphi_3(1i)\neq 0.$$

Отсюда следует, что $z=2i$, $z=-2i$ нули третьего порядка, а $z=1$ нуль первого порядка.

Пример 6.2. Найти нули функции $f(z)=\left(e^{iz}-1\right)^4$ и определить их порядок.

Решение. Найдем нули функции, учитывая, что период функции e^{iz} равен $2\pi i$:

$$f(z)=\left(e^{iz}-1\right)^4=0 \;\Rightarrow\; e^{iz}=1 \;\Rightarrow\; i z_k=0+2\pi k i \;\Rightarrow\; z_k=2\pi k \;\; (k=0,\pm 1,\pm 2\ldots).$$

Определим порядок нуля сначала для функции $g(z)=e^{iz}-1$. Функцию $g(z)$ записать в виде (6.1) здесь не удается, но зато легко воспользоваться теоремой 6.1. Так как $g'(z_k)=e^{iz_k}=1\neq 0$, то точки $z_k=2\pi k$ являются нулями первого порядка для функции $g(z)=e^{iz}-1$, т.е. эту функцию можно представить в виде $g(z)=e^{iz}-1=(z-z_k)\cdot\varphi(z)$, $\varphi(z_k)\neq 0$. Тогда

$$f(z)=\left(e^{iz}-1\right)^4=(z-z_k)^4\cdot\varphi^4(z),\;\; \varphi^4(z_k)\neq 0.$$

Поэтому точки $z_k=2\pi k$ являются нулями четвертого порядка для функции $f(z)$.

Пример 6.3. Определить порядок нуля $z_0=0$ для функции $f(z)=2\cos z^3+z^6-2$.

Решение. Воспользуемся разложением в ряд функции $\cos z$:

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\ldots \;\Rightarrow$$

$$f(z)=2\cos z^3+z^6-2=2\left(1-\frac{z^6}{2!}+\frac{z^{12}}{4!}-\frac{z^{18}}{6!}+\ldots\right)+z^6-2=z^{12}\left(\frac{1}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\ldots\right).$$

Таким образом, функция представима в виде (6.1):

$$f(z)=z^{12}\varphi(z),\quad где\;\; \varphi(0)=\left.\left(\frac{1}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\ldots\right)\right|_{z=0}=\frac{1}{4!}\neq 0.$$

Поэтому $z_0=0$ является для функции $f(z)=2\cos z^3+z^6-2$ нулем порядка $k=12$.

Отметим, что для отыскания порядка нуля по порядку первой отличной от нуля производной (по теореме 6.1) пришлось бы дифференцировать функцию 12 раз.

6.2. Особые точки функции

Особые точки функции – это точки, в которых нарушается ее аналитичность. Различают три типа изолированных особых точек.

1). Если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ – конечен, то z_0 называют ***устранимой*** особой точкой.

2). Если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$, то z_0 называют ***полюсом***.

3). Если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ не существует, то z_0 называют ***существенно особой*** точкой.

Порядок полюса – это натуральное число k, такое, что $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)(z-z_0)^k$ отличен от нуля и бесконечности. Более удобно определять порядок полюса, используя связь полюса с нулями.

Теорема 6.2. Пусть z_0 есть нуль порядка k функции $\varphi(z)$ и нуль порядка n функции $\psi(z)$; тогда для функции $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ точка z_0 есть полюс порядка $n-k$, если $k<n$, и устранимая особая точка, если $k\geq n$.

Замечание

Если $\varphi(z_0)\neq 0$, то можно записать $\varphi(z)=(z-z_0)^0\cdot\varphi(z)$ и считать z_0 нулем функции $\varphi(z)$ порядка $k=0$. Теорема 6.2 остается справедливой и в этом случае.

Пример 6.4. Определить типы особых точек функций

$$1)\ f(z)=\frac{\left(e^{iz}-1\right)^4}{z^4},\quad 2)\ f(z)=\frac{\left(e^{iz}-1\right)^4}{(z-2\pi)^5},\quad 3)\ f(z)=\frac{1}{\left(e^{iz}-1\right)^4}.$$

Решение.

1). Нуль знаменателя $z_0=0$ функции $f(z)=\dfrac{\left(e^{iz}-1\right)^4}{z^4}$ является для числителя нулем порядка $k=4$ (см. пример 6.2), и для знаменателя нулем порядка $n=4$. Так как $k=n$, то по теореме 6.2 точка $z_0=0$ является устранимой особой точкой для функции $f(z)$.

2). Нуль знаменателя $z_0=2\pi$ функции $f(z)=\dfrac{\left(e^{iz}-1\right)^4}{(z-2\pi)^5}$ является для числителя нулем порядка $k=4$ (пример 6.2), а для знаменателя нулем порядка $n=5$. Так как $n>k$, то по теореме 6.2 точка $z_0=2\pi$ является полюсом порядка $n-k=5-4=1$ для функции $f(z)$.

3). Нули знаменателя $z_k=2\pi k$ функции $f(z)=\dfrac{1}{\left(e^{iz}-1\right)^4}$ для числителя равного $1=(z-z_k)^0$ являются нулями порядка $k=0$, а для знаменателя нулями порядка $n=4$. Так как $n>k$, то по теореме 6.2 точки $z_k=2\pi k$ являются полюсами порядка $n-k=4-0=4$ для функции $f(z)$.

Тип особой точки можно также охарактеризовать через разложение функции в ряд Лорана в окрестности этой точки.

Теорема 6.3. 1). Если в разложении функции в ряд Лорана в окрестности точки z_0 ***нет отрицательных степеней*** $(z-z_0)$, т.е. $f(z)=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\ldots$, то z_0 является ***устранимой*** особой точкой;

2) если ряд Лорана содержит ***конечное число отрицательных степеней***, т.е. $f(z)=\dfrac{c_{-k}}{(z-z_0)^k}+\ldots+\dfrac{c_{-1}}{(z-z_0)}+c_0+c_1(z-z_0)+\ldots\ (c_{-k}\neq 0)$, то z_0 является ***полюсом*** порядка k;

3) если ряд Лорана содержит ***бесконечно много отрицательных степеней*** $(z-z_0)$, то z_0 является ***существенно особой*** точкой.

Пример 6.5. Определить тип особой точки функции $f(z)=z^5\sin\dfrac{1}{z^2}$.

Решение. Точка $z=0$ является особой точкой для функции $f(z)=z^5\sin\dfrac{1}{z^2}$.
Ряд Лорана этой функции в окрестности точки $z=0$ имеет вид

$$f(z)=z^5\sin\frac{1}{z^2}=z^5\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{3!z^6}+\frac{1}{5!z^{10}}-.....\right)=z^3-\frac{1}{3!z}+\frac{1}{5!z^5}-....,$$

т.е. содержит бесконечно много отрицательных степеней z; поэтому точка $z=0$ является существенно особой точкой данной функции.

6.3. Вычеты функции в ее особых точках

Вычет функции $f(z)$ ***в ее особой точке*** z_0 есть число, равное коэффициенту c_{-1} разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0:

$$\boxed{\underset{z=z_0}{\text{Выч}}\, f(z)=c_{-1}}. \tag{6.3}$$

В устранимой особой точке

$$\boxed{\underset{z=z_0}{\text{Выч}}\, f(z)=0}. \tag{6.4}$$

В полюсе первого порядка

$$\boxed{\underset{z=z_0}{\text{Выч}}\, f(z)=\lim_{z\to z_0}\left(f(z)\cdot(z-z_0)\right)}; \tag{6.5}$$

$$\boxed{\underset{z=z_0}{\text{Выч}}\,\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}},\ \text{если}\ \begin{array}{c}\varphi(z_0)\neq 0,\\ \psi(z_0)=0,\ \psi'(z_0)=0.\end{array} \tag{6.6}$$

В полюсе к-го порядка

$$\boxed{\underset{z=z_0}{\text{Выч}}\, f(z)=\frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left[f(z)\cdot(z-z_0)^k\right]}. \tag{6.7}$$

Пример 6.6. Найти вычеты в особых точках для функций:

$$1)\ f(z)=\frac{\left(e^{iz}-1\right)^4}{z^4},\ \ 2)\ f(z)=\frac{\left(e^{iz}-1\right)^4}{(z-2\pi)^5},\ \ 3)\ f(z)=z^5\cdot\sin\frac{1}{z^2},\ \ 4)\ f(z)=z^2\cdot\sin^6\frac{1}{z}.$$

Решение. 1). Особая точка $z_0=0$ является устранимой особой точкой для функции $f(z)=\dfrac{\left(e^{iz}-1\right)^4}{z^4}$ (см. пример 6.4). Поэтому $\underset{z=z_0}{\text{Выч}}\, f(z)=0$.

2). Особая точка $z_0=2\pi$ является полюсом первого порядка для функции $f(z)=\dfrac{\left(e^{iz}-1\right)^4}{(z-2\pi)^5}$ (см. пример 6.4). Формула (6.6) здесь неприменима, так как $\varphi(z_0)=\left(e^{iz}-1\right)^4\Big|_{z_0=2\pi}=0$. Поэтому применим формулу (6.5):

$$\underset{z=2\pi}{\text{Выч}} f(z) = \lim_{z\to 2\pi}\left(f(z)\cdot(z-2\pi)\right) = \lim_{z\to 2\pi}\frac{\left(e^{iz}-1\right)^4}{(z-2\pi)^5}\cdot(z-2\pi) = \left(\lim_{z\to 2\pi}\frac{e^{iz}-1}{z-2\pi}\right)^4 =$$

$$= \left(\lim_{z\to 2\pi}\frac{\left(e^{iz}-1\right)'}{(z-2\pi)'}\right)^4 = \left(\lim_{z\to 2\pi}\frac{ie^{iz}}{1}\right)^4 = e^{8\pi i} = e^0 = 1.$$

3). Точка $z=0$ является особой точкой для функции $f(z) = z^5\sin\frac{1}{z^2}$.

Ряд Лорана этой функции в окрестности точки $z=0$ имеет вид (см. пример 6.5):

$$f(z) = z^5\sin\frac{1}{z^2} = z^3 - \frac{1}{3!z} + \frac{1}{5!z^5} - \ldots.$$

Поэтому $\underset{z=0}{\text{Выч}} f(z) = c_{-1} = -\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6}$.

4). Точка $z=0$ является особой точкой для функции $f(z) = z^2\cdot\sin^6\frac{1}{z}$.

Так как функция четная, то ряд Лорана этой функции в окрестности точки $z=0$ не содержит нечетных степеней z, в частности, не содержит $\frac{1}{z}$; поэтому коэффициент c_{-1} при $\frac{1}{z}$ равен нулю и, значит, $\underset{z=0}{\text{Выч}} f(z) = c_{-1} = 0$.

Пример 6.7. Найти вычеты в особых точках для функций:

$$1)\ f(z) = \operatorname{ctg} z,\quad 2)\ f(z) = \frac{z^3}{1+z^2}$$

Решение. 1). Для функции $f(z) = \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$ найдем особые точки:

$$\sin z = 0 \ \Rightarrow z_k = \pi k \ \ (k = 0, \pm 1, \pm 2\ldots).$$

Так как $\cos z_k \neq 0,\ \sin z_k = 0,\ \left(\sin z_k\right)' \neq 0$, то выгодно применить формулу (6.5):

$$\underset{z=z_k}{\text{Выч}} f(z) = \underset{z=z_k}{\text{Выч}}\frac{\cos z}{\sin z} = \left.\frac{\cos z}{(\sin z)'}\right|_{z=z_k} = 1.$$

2). Для функции $f(z) = \frac{z^3}{1+z^2}$ найдем особые точки:

$$z^2+1 = 0 \ \Rightarrow z^2 = -1 \Rightarrow z = \pm i.$$

Так как $\left. z^3\right|_{z=\pm i} \neq 0,\ \left.\left(1+z^2\right)\right|_{z=\pm i} = 0,\ \left.\left(1+z^2\right)'\right|_{z=\pm i} \neq 0$, то выгодно применить формулу (6.5):

$$\underset{z=\pm i}{\text{Выч}} f(z) = \underset{z=\pm i}{\text{Выч}}\frac{z^3}{1+z^2} = \left.\frac{z^3}{\left(1+z^2\right)'}\right|_{z=\pm i} = \left.\frac{z^2}{2}\right|_{z=\pm i} = -\frac{1}{2}.$$

Пример 6.8. Найти вычеты в особых точках для функции $f(z) = \frac{1}{z\left(e^{2z}-1\right)}$.

Решение. Найдем особые точки функции, учитывая период $T = 2\pi i$ функции e^z:

$$z\left(e^{2z}-1\right)=0 \;\Rightarrow\; z_0=0,\; 2z_k=0+2\pi k\,i \;\;\Rightarrow\; z_0=0,\; z_k=\pi k\,i \;\; \left(k=\pm1,\pm2,\ldots\right).$$

1). Исследуем особые точки $z_k = \pi k\,i$ $\left(k=\pm1,\pm2,\ldots\right)$. Функцию выгодно записать в виде $f(z)=\dfrac{1/z}{e^{2z}-1}$. Так как в точках z_k имеем $1/z\neq 0,\; e^{2z}-1=0,\; \left(e^{2z}-1\right)'\neq 0$, то применима формула (6.6):

$$\underset{z=z_k}{\text{Выч}}\, f(z) = \underset{z=z_k}{\text{Выч}}\frac{1/z}{e^{2z}-1} = \left.\frac{1/z}{\left(e^{2z}-1\right)'}\right|_{z=z_k} = \frac{1}{2z_k e^{2z_k}} = \frac{1}{2\pi k\,i}.$$

2). Исследуем особую точку $z_0=0$ функции $f(z)=\dfrac{1}{z\left(e^{2z}-1\right)}$.

Эта точка для функции $e^{2z}-1$ является нулем первого порядка, так как $\left(e^{2z}-1\right)' = \left.2e^{2z}\right|_{z=0}\neq 0$; поэтому $e^{2z}-1=(z-0)\cdot\varphi(z)=z\cdot\varphi(z)$, где $\varphi(0)\neq 0 \;\Rightarrow$

$$z\left(e^{2z}-1\right)=z^2\cdot\varphi(z),\text{ где } \varphi(0)\neq 0.$$

Отсюда следует, что $z_0=0$ является для знаменателя нулем порядка $n=2$. Для числителя равного $1=(z-z_0)^0$ точка $z_0=0$ является нулем порядка $k=0$. Поэтому по теореме 6.2 точка $z_0=0$ является полюсом порядка $n-k=2-0=2$ для функции $f(z)$. Вычет функции в этой точке вычислим по формуле (6.7):

$$\underset{z=z_0}{\text{Выч}}\, f(z) = \frac{1}{1!}\lim_{z\to z_0}\left(f(z)\cdot(z-z_0)^2\right)' = \lim_{z\to 0}\left(\frac{z^2}{z\left(e^{2z}-1\right)}\right)' = \lim_{z\to 0}\left(\frac{z}{e^{2z}-1}\right)' = \lim_{z\to 0}\frac{\left(e^{2z}-1\right)-z\cdot 2e^{2z}}{\left(e^{2z}-1\right)^2}.$$

Получили неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Для ее раскрытия учтем, что

$$e^{2z}=1+\frac{2z}{1!}+\frac{(2z)^2}{2!}+\frac{(2z)^3}{3!}+\ldots \;\Rightarrow\; e^{2z}-1=2z+o(z),\quad e^{2z}-1\sim 2z.$$

Под знаком предела знаменатель $\left(e^{2z}-1\right)^2$ заменим на эквивалентную бесконечно малую $4z^2$. Тогда

$$\underset{z=0}{\text{Выч}}\, f(z) = \lim_{z\to 0}\frac{\left(e^{2z}-1\right)-z\cdot 2e^{2z}}{\left(e^{2z}-1\right)^2} = \lim_{z\to 0}\frac{\left(2z+2z^2+4z^3/3+\ldots\right)-2z\cdot\left(1+2z+2z^2+\ldots\right)}{(2z)^2} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{-2z^2-8z^3/3+\ldots}{4z^2} = -\frac{1}{2}.$$

Примеры для самостоятельного решения

Определить тип особых точек следующих функций и найти вычеты в этих точках:

1) $f(z)=\dfrac{z}{z^5+2z^4+z^3}$; 2) $f(z)=z\cos\dfrac{1}{z+\pi}$; 3) $f(z)=\dfrac{\operatorname{sh} z^2}{z}$.

Ответы: 1) $z=0,\ z=-1$ – полюсы второго порядка, $\underset{z=0}{\text{Выч}}\, f(z)=-2$, $\underset{z=-1}{\text{Выч}}\, f(z)=2$;

2) $z=-\pi$ – существенно особая точка, $\underset{z=-\pi}{\text{Выч}}\, f(z)=-\dfrac{1}{2}$;

3) $z=0$ – устранимая особая точка, $\underset{z=0}{\text{Выч}}\, f(z)=0$.

6.4. Применение вычетов к вычислению интегралов

Вычисление интегралов $\oint\limits_{(L)} f(z)dz$

Пусть функция $f(z)$ является аналитической в замкнутой области D с границей (L) за исключением особых точек $z_1,\ z_2,\ \ldots, z_n$, лежащих внутри D. Тогда

$$\boxed{\oint\limits_{(L)} f(z)dz = 2\pi i\cdot\left[\underset{z=z_1}{\text{Выч}}\, f(z)+\underset{z=z_2}{\text{Выч}}\, f(z)+\ldots+\underset{z=z_n}{\text{Выч}}\, f(z)\right]}. \tag{6.8}$$

Пример 6.9. Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z|=2}\dfrac{\operatorname{tg} z}{z}dz$.

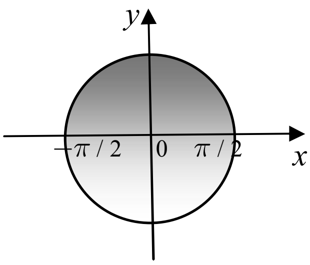

Рис.17

Решение. Построим контур интегрирования $|z|=2$. Это – окружность с центром в начале координат радиусом $R=2$. (рис.17). В области $D: |z|<2$ функция $f(z)=\dfrac{\operatorname{tg} z}{z}$ аналитична всюду, кроме точек $z=0,\ z=\dfrac{\pi}{2},\ z=-\dfrac{\pi}{2}$; другие особые точки $z_k=\dfrac{\pi}{2}(2k+1)$, $k=1,\pm2,\pm3\ldots$ лежат вне области и поэтому не учитываются. Точка $z=0$ является устранимой особой точкой, т.к. $\lim\limits_{z\to0}\dfrac{\operatorname{tg} z}{z}=1$. Поэтому $\underset{z=0}{\text{Выч}}\, f(z)=0$.

Для вычисления вычета в точках $z=\dfrac{\pi}{2},\ z=-\dfrac{\pi}{2}$ воспользуемся тем, что

$$\underset{z=z_0}{\text{Выч}}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)} \quad \text{в случае, когда } \varphi(z_0)\neq0,\ \psi(z_0)=0,\ \psi'(z_0)\neq0.$$

Поэтому представим функцию в виде $\dfrac{\operatorname{tg} z}{z}=\dfrac{(\sin z)/z}{\cos z}=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, проверим выполнение условий $\varphi\left(\pm\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\sin(\pm\pi/2)}{\pm\pi/2}\neq0$, $\psi\left(\pm\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\pm\dfrac{\pi}{2}\right)=0$, $\psi'(z_0)=-\sin\left(\pm\dfrac{\pi}{2}\right)\neq0$ и вычислим вычет

$$\underset{z=\pm\pi/2}{\text{Выч}}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\frac{\varphi(\pm\pi/2)}{\psi'(\pm\pi/2)}=\left.\frac{(\sin z)/z}{(\cos z)'}\right|_{z=\pm\pi/2}=\left.\frac{\sin z}{-z\cdot\sin z}\right|_{z=\pm\pi/2}=\mp\frac{2}{\pi}.$$

Тогда $\oint\limits_{|z|=2}\dfrac{\operatorname{tg} z}{z}dz=2\pi i\left(\underset{z=0}{\text{Выч}}\, f(z)+\underset{z=\pi/2}{\text{Выч}}\, f(z)+\underset{z=-\pi/2}{\text{Выч}}\, f(z)\right)=0.$

Пример 6.10. Вычислить интеграл $\oint\limits_{(L)}\dfrac{z^2+1}{z-i}\operatorname{sh}\dfrac{1}{z}\,dz$, если $(L): z=1+4e^{it},\ t\in[0,2\pi]$.

Решение. Построим контур (L) – окружность с центром в точке $z_0 = 1$ и радиусом 4 (рис.18). Найдем особые точки функции $f(z) = \dfrac{z^2+1}{z-i}\operatorname{sh}\dfrac{1}{z}$. Это точки $z = 0$, $z = i$; они расположены внутри области (D): $|z| < 4$, поэтому

$$\oint\limits_{(L)} f(z)dz = 2\pi i\left(\underset{z=0}{\text{Выч}}\, f(z) + \underset{z=i}{\text{Выч}}\, f(z)\right).$$

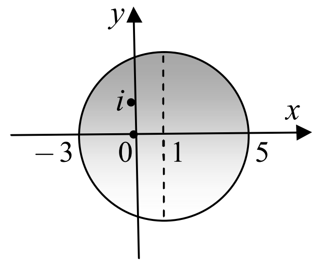

Рис.18

Для вычисления вычета функции $f(z)$ в точке $z = 0$ разложим функцию в ряд в окрестности этой точки:

$$f(z) = \frac{z^2+1}{z-i}\operatorname{sh}\frac{1}{z} = \frac{(z-i)\cdot(z+i)}{z-i}\operatorname{sh}\frac{1}{z} = (z+i)\cdot\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} + \ldots..\right) = 1 + \frac{i}{z} + \frac{1}{3!z^2} + \frac{i}{3!z^3} + \ldots$$

Следовательно, $\underset{z=0}{\text{Выч}}\, f(z) = c_{-1} = i$.

Для вычисления вычета функции $f(z)$ в точке $z = i$ определим тип особой точки. Точка $z = i$ является устранимой особой точкой, так как

$$\lim_{z\to i} f(z) = \lim_{z\to i}\frac{(z-i)\cdot(z+i)}{z-i}\operatorname{sh}\frac{1}{z} = \lim_{z\to i}\left[(z+i)\cdot\operatorname{sh}\frac{1}{z}\right] = 2i\cdot\operatorname{sh}\left(\frac{1}{i}\right) = 2i\cdot\operatorname{sh}(-i) = -2i^2\cdot\sin 1 = 2\sin 1.$$

Поэтому $\underset{z=i}{\text{Выч}}\, f(z) = 0$ и $\oint\limits_{(L)} f(z)dz = 2\pi i\left(\underset{z=0}{\text{Выч}}\, f(z) + \underset{z=i}{\text{Выч}}\, f(z)\right) = 2\pi i\cdot(i+0) = -2\pi$.

Пример 6.11. Вычислить интеграл $\oint\limits_{(L)} \dfrac{z\,dz}{\left(z^2 - (1+3i)z + 3i\right)^2}$, где (L): $\dfrac{(x-1)^2}{1} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

Решение. Контур (L) есть эллипс с центром в точке $(1;0)$ и полуосями $a = 1$, $b = 3$ (рис.19). Найдем особые точки подынтегральной функции $f(z)$, решив уравнение $z^2 - (1+3i)z + 3i = 0$. По теореме Виета корни уравнения равны $z = 1$, $z = 3i$. Внутрь контура попадает только одна особая точка $z = 1$. Это – полюс второго порядка, т.к $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)^2\cdot(z-3i)^2}$. Поэтому по формуле (6.7) при $k = 2$ имеем

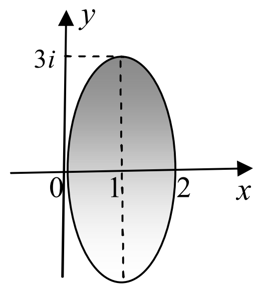

Рис.19

$$\underset{z=1}{\text{Выч}}\, f(z) = \lim_{z\to 1}\left(\frac{z\cdot(z-1)^2}{(z-1)^2\cdot(z-3i)^2}\right)' = \lim_{z\to 1}\left(\frac{z}{(z-3i)^2}\right)' = \lim_{z\to 1}\frac{-3i-z}{(z-3i)^3} = \frac{-7+24i}{250}.$$

Следовательно, $\oint\limits_{(L)} \dfrac{z\,dz}{\left(z^2 - (1+3i)z + 3i\right)^2} = 2\pi i\,\underset{z=1}{\text{Выч}}\, f(z) = 2\pi i\cdot\dfrac{-7+24i}{250} = -\dfrac{\pi(24+7i)}{125}$.

Примеры для самостоятельного решения

Вычислить интегралы: $\oint\limits_{|z+i|=3} \dfrac{e^z dz}{z^3 - \pi i z^2}$, $\oint\limits_{|z-\pi|=4} \dfrac{z\,dz}{\sin z}$, $\oint\limits_{(L)} z^2 \sin\dfrac{1}{z}\,dz$, (L): $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

Ответы: $\dfrac{2+\pi i}{\pi^2}$; $2\pi^2 i$; $-\dfrac{\pi i}{3}$.

Вычисление интегралов $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$

Пусть функция $f(z)=\dfrac{P_k(z)}{Q_n(z)}$ есть отношение двух многочленов, где $n-k>1$ и $z_1, z_2, \ \ldots, z_N$ есть нули знаменателя $Q_n(z)$, лежащие в верхней полуплоскости. Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{N}\operatorname{Res} f(z_k). \tag{6.9}$$

Пример 6.12. Вычислить интеграл $I=\int\limits_{0}^{+\infty}\dfrac{x^2\,dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$.

Решение. Так как подынтегральная функция является четной, то

$$I=\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{x^2\,dx}{(x^2+1)(x^2+4)}=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2\,dx}{(x^2+1)(x^2+4)}.$$

Функция $f(z)=\dfrac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)}$ есть отношение многочлена степени $k=2$ к многочлену степени $n=4$, т.е. условие $n-k>1$ выполняется. Функция $f(z)$ в верхней полуплоскости имеет две особые точки $z=i$, $z=2i$, поэтому по формуле (6.9)

$$I=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2\,dx}{(x^2+1)(x^2+4)}=\frac{1}{2}\cdot 2\pi i\left[\operatorname*{Res}_{z=i}\frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)}+\operatorname*{Res}_{z=2i}\frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)}\right].$$

Для функции $f(z)=\dfrac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)}=\dfrac{z^2}{(z+i)(z-i)(z+2i)(z-2i)}$ точки $z=i,\ z=2i$ являются полюсами первого порядка. Поэтому для вычисления вычетов воспользуемся формулой (6.5):

$$I=\pi i\left[\operatorname*{Res}_{z=i}\frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)}+\operatorname*{Res}_{z=2i}\frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)}\right]=\pi i\left[\lim_{z\to i}\frac{z^2\cdot(z-i)}{(z^2+1)(z^2+4)}+\lim_{z\to 2i}\frac{z^2\cdot(z-2i)}{(z^2+1)(z^2+4)}\right]=$$

$$=\pi i\left[\lim_{z\to i}\frac{z^2}{(z+i)(z^2+4)}+\lim_{z\to 2i}\frac{z^2}{(z^2+1)(z+2i)}\right]=\pi i\left[\frac{-1}{2i\cdot 3}+\frac{-4}{-3\cdot 4i}\right]=\frac{\pi}{6}.$$

Вычисление интегралов $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iax}\,dx,\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos ax\,dx,\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin ax\,dx$

Пусть функция $f(z)=\dfrac{P_k(z)}{Q_n(z)}$ есть отношение двух многочленов, где $k<n$ и $z_1, z_2, \ \ldots, z_N$ есть нули знаменателя $Q_n(z)$, лежащие в верхней полуплоскости. Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iax}dx = 2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{N}\operatorname*{Res}_{z=z_k}\left[f(z)e^{iaz}\right],\quad a>0. \tag{6.10}$$

Отметим, что $e^{iax} = \cos ax + i\sin ax$. Поэтому

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iax}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos ax\,dx + i\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin ax\,dx .$$

Следовательно, можно записать

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos ax\,dx = \operatorname{Re}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iax}\,dx\right], \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin ax\,dx = \operatorname{Im}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iax}\,dx\right]. \tag{6.11}$$

и воспользоваться формулой (6.10) и для этих типов интегралов.

Пример 6.13. Вычислить интеграл $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)\cos x}{x^2-2x+5}\,dx$.

Решение. Воспользуемся первой из формул (6.11):

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)\cos x}{x^2-2x+5}\,dx = \operatorname{Re}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)e^{ix}}{x^2-2x+5}\,dx .$$

Функция $f(z) = \frac{(z-1)}{z^2-2z+5}$ есть отношение многочлена степени $k=1$ к многочлену степени $n=2$, т.е. условие $k<n$, необходимое для применения формулы (6.10), выполняется. Найдем нули знаменателя z^2-2z+5 функции $f(z)$: это точки $z_1 = 1+2i$, $z_2 = 1-2i$; в верхней полуплоскости находится первая из них. Поэтому применяя формулу (6.10), получим

$$I = \operatorname{Re}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)e^{ix}}{x^2-2x+5}\,dx\right] = \operatorname{Re}\left[2\pi i \operatorname*{Выч}_{z=z_1} \frac{(z-1)e^{iz}}{z^2-2z+5}\right].$$

Вычет в точке $z=z_1$ для функции вида $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ в случае, когда $\varphi(z_1)\neq 0,\ \psi(z_1)=0,\ \psi'(z_1)\neq 0$, можно вычислить по формуле $\operatorname*{Выч}_{z=z_1}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(z_1)}{\psi'(z_1)}$.

Поэтому

$$I = \operatorname{Re}\left[2\pi i \operatorname*{Выч}_{z=z_1} \frac{(z-1)e^{iz}}{z^2-2z+5}\right] = \operatorname{Re}\left[2\pi i \left.\frac{(z-1)e^{iz}}{\left(z^2-2z+5\right)'}\right|_{z=z_1}\right] = \operatorname{Re}\left[2\pi i \left.\frac{(z-1)e^{iz}}{2z-2}\right|_{z=z_1}\right] =$$

$$= \operatorname{Re}\left[\pi i\, e^{i(1+2i)}\right] = \operatorname{Re}\left[\pi i\, e^{-2}e^{i}\right] = \operatorname{Re}\left[\pi i\, e^{-2}(\cos 1 + i\sin 1)\right] = -\pi\, e^{-2}\sin 1.$$

Примеры для самостоятельного решения

Вычислить: $\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\left(x^2+4x+13\right)^2}dx$, $\int_0^{+\infty} \frac{x^3\sin x}{\left(x^2+1\right)^2}dx$, $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)}dx$.

Ответы: $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$, $\frac{-\pi}{27}$, $\frac{\pi}{4e}$, $\frac{\pi}{12e^2}(2e-1)$.

7. Элементы операционного исчисления

7.1. Оригинал и его изображение

Комплекснозначная функция $f(t)=u(t)+i\,v(t)$ вещественного аргумента t называется ***оригиналом***, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) функция $f(t)$ кусочно-непрерывна;

2) $f(t)=0$ при $t<0$;

3) $|f(t)|\le M\cdot e^{s_0 t}$ (число s_0 называют показателем роста функции $f(t)$).

Изображением оригинала $f(t)$ называется функция

$$\boxed{F(p)=\int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt}.$$

Основные свойства изображений удобно свести в следующую таблицу:

№	Оригинал	Изображение
1	$\lambda f(t)+\mu g(t)$	$\lambda F(p)+\mu G(p)$
2	$f'(t)$	$pF(p)-f(0)$
3	$f''(t)$	$p^2F(p)-pf(0)-f'(0)$
4	$\int\limits_0^t f(t)dt$	$\frac{F(p)}{p}$
5	$(-t)^n f(t)$	$F^{(n)}(p)$
6	$\frac{f(t)}{t}$	$\int\limits_p^{+\infty} F(p)dp$
7	$f(t-\alpha)\cdot\eta(t-\alpha)$	$F(p)\cdot e^{-\alpha p}$
8	$f(t)\cdot e^{\alpha t}$	$F(p-\alpha)$
9	$f(t)*g(t)=\int\limits_0^t f(\tau)\cdot g(t-\tau)d\tau$	$F(p)\cdot G(p)$
10	$f(t)*g'(t)+f(t)\cdot g(0)$	$p\cdot F(p)\cdot G(p)$
11	$f(t)$ с периодом T	$\frac{1}{1-e^{-pT}}\int\limits_0^T f(t)\cdot e^{-pt}dt$
12	1	$\frac{1}{p}$
13	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
14	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$
15	$\sin\alpha t$	$\frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$
16	$\cos\alpha t$	$\frac{p}{p^2+\alpha^2}$
17	$\mathrm{sh}\,\alpha t$	$\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$
18	$\mathrm{ch}\,\alpha t$	$\frac{p}{p^2-\alpha^2}$
19	$t\cdot\sin\alpha t$	$\frac{2p\alpha}{(p^2+\alpha^2)^2}$
20	$t\cdot\cos\alpha t$	$\frac{p^2-\alpha^2}{(p^2+\alpha^2)^2}$
21	$t\cdot\mathrm{sh}\,\alpha t$	$\frac{2p\alpha}{(p^2-\alpha^2)^2}$
22	$t\cdot\mathrm{ch}\,\alpha t$	$\frac{p^2+\alpha^2}{(p^2-\alpha^2)^2}$

Более подробные таблицы приведены, например, в [2], [6], [7].
Тот факт, что $F(p)$ есть изображение для $f(t)$, записывают кратко так:

$$F(p) \doteqdot f(t) \text{ или } f(t) \doteqdot F(p).$$

Пример 7.1. Найти изображения следующих оригиналов:

$$1)\ \frac{1-\cos t}{t},\quad 2)\ \int_0^t \frac{\sin\tau}{\tau}d\tau,\quad 3)\ t^2\cos t.$$

Решение. 1). Из таблицы изображений (см. формулы 12, 16 и 6) получим:

$$1-\cos t \doteqdot \frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+1},$$

$$\frac{1-\cos t}{t} \doteqdot \int_p^\infty\left(\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+1}\right)dp = \left(\ln p-\frac{1}{2}\ln\left(p^2+1\right)\right)\Bigg|_p^\infty = \ln\frac{p}{\sqrt{p^2+1}}\Bigg|_p^\infty = \ln 1-\ln\frac{p}{\sqrt{p^2+1}} = \ln\frac{\sqrt{p^2+1}}{p}.$$

2). Из таблицы изображений (см. формулы 15, 6 и 4) получим:

$$\sin t \doteqdot \frac{1}{p^2+1},\qquad \frac{\sin t}{t} \doteqdot \int_p^\infty \frac{dp}{p^2+1} = \operatorname{arctg} p\Big|_p^\infty = \frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} p = \operatorname{arcctg} p,\qquad \int_0^t \frac{\sin\tau}{\tau}d\tau \doteqdot \frac{\operatorname{arcctg} p}{p}.$$

3). Из таблицы изображений (см. формулы 20 и 5) получим:

$$t\cos t \doteqdot \frac{p^2-1}{\left(p^2+1\right)^2},\qquad t^2\cos t \doteqdot -\left(\frac{p^2-1}{\left(p^2+1\right)^2}\right)' = \frac{2p\left(p^2-3\right)}{\left(p^2+1\right)^3}.$$

Важную роль в приложениях играют функции

$$\eta(t)=\begin{cases}1, & t\ge 0,\\ 0, & t<0,\end{cases}\qquad \eta_{[a,b]}(t)=\begin{cases}1, & t\in[a,b],\\ 0, & t\notin[a,b],\end{cases}$$

называемые соответственно функцией Хэвисайда и единичной функцией отрезка $[a,b]$.

Единичная функция $\eta_{[a,b]}(t)$ отрезка $[a,b]$ представима в виде

$\eta_{[a,b]}(t)=\eta(t-a)-\eta(t-b)$ и имеет изображение $\eta_{[a,b]}(t)\doteqdot \frac{1}{p}e^{-pa}-\frac{1}{p}e^{-pb}$.

Пример 7.2. Найти изображение функции $f(t)$, заданной графически (рис. 20).

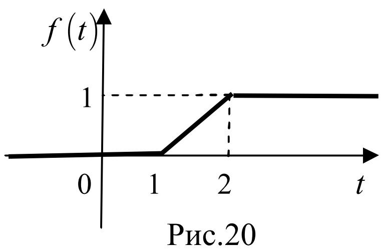

Рис.20

Решение. Функция $f(t)$ равна сумме двух вспомогательных функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ (рис.21, рис.22). Так как $f_1(t)=(t-1)\cdot\eta_{[1,2]}(t)=(t-1)[\eta(t-1)-\eta(t-2)]$, $f_2(t)=\eta(t-2)$, то

$$f(t)=(t-1)\cdot\eta_{[1,2]}(t)+\eta(t-2)=(t-1)\cdot[\eta(t-1)-\eta(t-2)]+\eta(t-2)=(t-1)\cdot\eta(t-1)-(t-2)\cdot\eta(t-2).$$

По таблице изображений (см. формулы 13 и 7) имеем:

$$t\cdot\eta(t)\doteqdot\frac{1}{p^2},\quad (t-1)\cdot\eta(t-1)\doteqdot\frac{e^{-p}}{p^2},\quad (t-2)\cdot\eta(t-2)\doteqdot\frac{e^{-2p}}{p^2}.$$

Для функции $f(t)$ получим изображение:

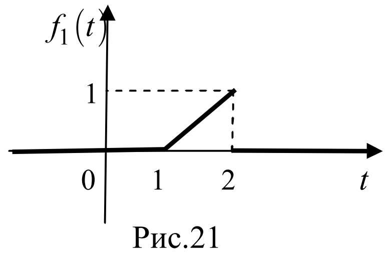

Рис.21

$$f(t) \doteqdot \frac{e^{-p}}{p^2} - \frac{e^{-2p}}{p^2} = \frac{e^{-p} - e^{-2p}}{p^2}.$$

Пример 7.3. Найти оригинал по заданному изображению:

$$1)\ F(p) = \frac{2p-3}{p^2+4p+13};\quad 2)\ F(p) = \frac{p+2}{(p+1)(p-2)\left(p^2+4\right)};\quad 3)\ F(p) = \frac{e^{-3p}}{(p+1)^2}.$$

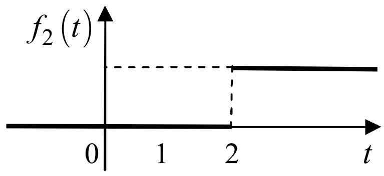

Рис.22

Решение. 1). Выделим в знаменателе полный квадрат $p^2+4p+13 = (p+2)^2+9$ и преобразуем функцию

$$F(p) = \frac{2p-3}{p^2+4p+13} = \frac{2(p+2)-7}{(p+2)^2+9} = 2\frac{(p+2)}{(p+2)^2+9} - 7\frac{1}{(p+2)^2+9};$$

По таблице изображений (формулы 16 и 15) имеем:

$$\frac{p}{p^2+9} \doteqdot \cos 3t,\quad \frac{1}{p^2+9} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{p^2+9} \doteqdot \frac{1}{3}\sin 3t \quad \Rightarrow 2\frac{p}{p^2+9} - 7\frac{1}{p^2+9} \doteqdot 2\cos 3t - \frac{7}{3}\sin 3t.$$

Тогда, используя формулу 8 из таблицы изображений, получим

$$f(t) = 2e^{-2t}\cos 3t - \frac{7}{3}e^{-2t}\sin 3t.$$

2). Разложим функцию $F(p) = \dfrac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+4)}$ на простейшие дроби:

$$\frac{p+2}{(p+1)(p-2)\left(p^2+4\right)} = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{p-2} + \frac{Cp+D}{p^2+4}.$$

Приведя к общему знаменателю, получим:

$$p+2 = A(p-2)\left(p^2+4\right) + B(p+1)\left(p^2+4\right) + \left(Cp + D\right)(p+1)(p-2).$$

Равенство верно при любом p:

при $p=2$ имеем $4 = 24B \Rightarrow B = 1/6$,

при $p=-1$ имеем $1 = -15A \Rightarrow A = -1/15$,

при $p=0$ имеем $2 = -8A + 4B - 2D \Rightarrow D = -2/5$;

сравним коэффициенты при p^3: $0 = A + B + C \Rightarrow C = -1/10$.

Итак,

$$F(p) = -\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{p+1} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{p-2} + \frac{-p/10 - 2/5}{p^2+4} = -\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{p+1} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{p-2} - \frac{1}{10}\cdot\frac{p}{p^2+4} - \frac{1}{5}\cdot\frac{2}{p^2+4}.$$

Тогда, используя таблицу изображений (формулы 14, 15, 16), получим:

$$f(t) = -\frac{1}{15}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{2t} - \frac{1}{10}\cos 2t - \frac{1}{5}\sin 2t.$$

3). Запишем $F(p)$ в виде $F(p) = e^{-3p}\dfrac{1}{(p+1)^2}$ и найдем сначала оригинал для функции $\dfrac{1}{(p+1)^2}$, используя формулы 13 и 8 из таблицы:

$$\frac{1}{p^2} \doteqdot t,\quad \frac{1}{(p+1)^2} \doteqdot t\cdot e^{-t} = t\cdot e^{-t}\cdot\eta(t).$$

Тогда, применяя формулу 7 таблицы изображений, получим:

$$F(p)=e^{-3p}\cdot\frac{1}{(p+1)^2}\doteqdot(t-3)\cdot e^{-(t-3)}\cdot\eta(t-3).$$

Примеры для самостоятельного решения

1. Найти изображения следующих оригиналов:

а) $\int\limits_0^t \operatorname{sh} t\,dt$; б) $\sin^2 t$; в) $f(t)$ (рис.23).

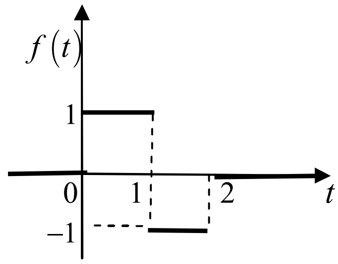

Рис.23

2. Найти оригинал по данному изображению:

а) $F(p)=\dfrac{1}{(p-1)^2(p+2)}$; б) $F(p)=\dfrac{e^{-p}}{p(p-1)}$; в) $F(p)=\dfrac{1}{7-p+p^2}$.

Ответы: 1. а) $\dfrac{1}{p(p^2-1)}$; б) $\dfrac{2}{p(p^2+4)}$; в) $\dfrac{(1-e^{-p})^2}{p}$.

2. а) $\frac{1}{9}\left(e^{-2t}-e^t+3te^t\right)$; б) $e^{t-1}\eta(t-1)-\eta(t-1)$; в) $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}e^{t/2}\cdot\sin\dfrac{3\sqrt{3}}{2}t$.

7.2. Применение операционного исчисления

Использование операционного метода основано на том, что при переходе от оригинала к изображению операции дифференцирования и интегрирования заменяются более простыми операциями умножения и деления. Поэтому операционный метод удобно применять для решения дифференциальных и интегральных уравнений. Для этого следует:

1) перейти от оригиналов к их изображениям (при этом дифференциальные и интегральные уравнения перейдут в алгебраические);
2) из алгебраических уравнений найти изображения;
3) по изображениям восстановить оригиналы.

Решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Пример 7.4. Решить задачу Коши для дифференциального уравнения:

$$\begin{cases} x''+x=2\,te^t+4\sin t,\\ x(0)=x'(0)=0.\end{cases}$$

Решение. Перейдем в уравнении от оригиналов к изображениям:

$$x(t)\doteqdot X(p)\ \Rightarrow\ x''(t)\doteqdot p^2X-px(0)-x'(0)=p^2X,\ te^t\doteqdot\frac{1}{(p-1)^2},\ \sin t\doteqdot\frac{1}{p^2+1}.$$

Используя свойство линейности, получим уравнение относительно изображения $X(p)$: $p^2X+X=\dfrac{2}{(p-1)^2}+\dfrac{4}{p^2+1}$. Отсюда $X(p)=\dfrac{2}{(p-1)^2\left(p^2+1\right)}+\dfrac{4}{\left(p^2+1\right)^2}$.

По изображению восстановим оригинал. Рассмотрим каждое из слагаемых.

1). Слагаемое $\dfrac{2}{(p-1)^2\left(p^2+1\right)}$ разложим на простейшие дроби:

$$\frac{2}{(p-1)^2\left(p^2+1\right)}=\frac{A}{p-1}+\frac{B}{(p-1)^2}+\frac{C\,p+D}{p^2+1}.$$

Приведя к общему знаменателю, получим:

$$2=A(p-1)\left(p^2+1\right)+B\left(p^2+1\right)+(Cp+D)(p-1)^2.$$

Равенство верно при любом p:

при $p=1$ имеем $2=2B \;\Rightarrow\; B=1;$ при $p=0$ имеем $2=-A+B+D.$

Сравним коэффициенты при p^3 и p^2: $0=A+C,\;\; 0=-A+B+D-2C$.

Решим систему $\begin{cases} B=1, \\ -A+B+D=2, \\ A+C=0, \\ -A+B+D-2C=0. \end{cases}$ Получим: $C=1,\;\; A=-1,\;\; D=0,\;\; B=1.$

Тогда $\quad \dfrac{2}{(p-1)^2(p^2+1)}=-\dfrac{1}{p-1}+\dfrac{1}{(p-1)^2}+\dfrac{p}{p^2+1}\risingdotseq -e^t+t\,e^t+\cos t$.

2). Слагаемое $\dfrac{4}{(p^2+1)^2}$ можно рассматривать как произведение изображений $\dfrac{4}{p^2+1}\cdot\dfrac{1}{p^2+1}$. По свойству об изображении свёртки (формула 9 из таблицы изображений) получим

$$\frac{4}{p^2+1}\cdot\frac{1}{p^2+1}\doteq 4\sin t*\sin t=4\int_0^t\sin\tau\cdot\sin(t-\tau)d\tau=2\int_0^t(\cos(2\tau-t)-\cos t)d\tau=$$

$$=\sin(2\tau-t)\Big|_0^t-2\tau\cos t\Big|_0^t=2\sin t-2t\cos t.$$

Окончательно имеем $x(t)=-e^t+t\,e^t+\cos t+2\sin t-2t\cos t$.

Пример 7.5. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} x''+x=f(t), \\ x(0)=1,\;\; x'(0)=0, \end{cases} \quad \text{(см. рис.24).}$$

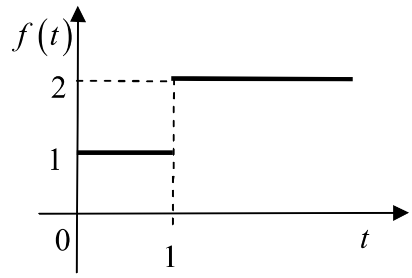

Рис.24

Решение. Пусть $x(t)\risingdotseq X(p)$, тогда

$$x''(t)\risingdotseq p^2X-p\,x(0)-x'(0)=p^2X-p\;.$$

Найдём изображение функции $f(t)$, представив её в виде суммы $\eta(t)$ и $\eta(t-1)$: $\;f(t)=\eta(t)+\eta(t-1)\risingdotseq\dfrac{1}{p}+\dfrac{e^{-p}}{p}$.

Перейдём в исходном уравнении к изображениям и найдём $X(p)$:

$$p^2X-p+X=\frac{1}{p}+\frac{e^{-p}}{p}\;\Rightarrow\; X\left(p^2+1\right)=\frac{p^2+1}{p}+\frac{e^{-p}}{p}\;\Rightarrow\; X=\frac{1}{p}+\frac{e^{-p}}{p\left(p^2+1\right)}.$$

Восстановим оригиналы, используя таблицу изображений (формулы 12, 15, 4, 7):

$$\frac{1}{p} \doteqdot 1 = 1\cdot\eta(t), \quad \frac{1}{(p^2+1)} \doteqdot \sin t, \quad \frac{1}{p(p^2+1)} \doteqdot \int_0^t \sin\tau\, d\tau = -\cos\tau \,\Big|_0^t = 1-\cos t = (1-\cos t)\cdot\eta(t),$$

$$\frac{e^{-p}}{p\left(p^2+1\right)} \doteqdot \left(1-\cos(t-1)\right)\cdot\eta(t-1).$$

Тогда $x(t) = \eta(t) + \left(1-\cos(t-1)\right)\cdot\eta(t-1)$.

Решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами методом Дюамеля

Метод Дюамеля выгодно применять при решении уравнения со сложной правой частью $f(t)$ или при решении нескольких уравнений с одинаковыми левыми и различными правыми частями.

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} a\,x''(t) + b\,x'(t) + c\,x(t) = f(t), \\ x(0) = 0,\ x'(0) = 0. \end{cases} \tag{7.1}$$

Метод Дюамеля решения этой задачи состоит в следующем:

1) рассмотреть вспомогательную задачу с правой частью, равной единице

$$\begin{cases} a\,x_1''(t) + b\,x_1'(t) + c\,x_1(t) = 1, \\ x_1(0) = 0,\ x_1'(0) = 0; \end{cases} \tag{7.2}$$

2) в задаче (7.2) перейти к изображениям $X_1(p)\left(ap^2+bp+c\right) = \frac{1}{p}$ и восстановить оригинал $x_1'(t)$ по его изображению $p\,X_1(p) = \frac{1}{a\,p^2+bp+c}$;

3) решение исходной задачи (7.1) найти по формуле

$$x(t) = f(t) * x_1'(t) = \int_0^t f(\tau)\cdot x_1'(t-\tau)\,d\tau .$$

Пример 7.6. Решить задачу Коши $\begin{cases} x''(t) + x'(t) = \dfrac{e^t}{\left(e^t+1\right)^2}, \\ x(0) = 0,\ x'(0) = 0. \end{cases}$

Решение. Для функции $f(t) = \frac{e^t}{\left(e^t+1\right)^2}$ изображение найти сложно. Поэтому применим метод Дюамеля. Для этого запишем вспомогательную задачу с правой частью, равной единице:

$$\begin{cases} x_1''(t)+x_1'(t)=1, \\ x_1(0)=0,\ x_1'(0)=0. \end{cases}$$

Перейдем от оригиналов к их изображениям, полагая $x_1(t)\risingdotseq X_1(p)$ и учитывая, что $x_1'(t)\risingdotseq pX_1(p),\ x_1''(t)\risingdotseq p^2X_1(p),\ 1\risingdotseq\dfrac{1}{p}$. Получим:

$$X_1(p)\left(p^2+p\right)=\frac{1}{p} \quad\Rightarrow\quad p\,X_1(p)=\frac{1}{p^2+p}=\frac{1}{p(p+1)}=\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1} \;\Rightarrow\; x_1'(t)=1-e^{-t}.$$

Решение исходной задачи найдем по формуле

$$x(t)=f(t)*x_1'(t)=\int_0^t f(\tau)\cdot x_1'(t-\tau)d\tau=\int_0^t \frac{e^\tau}{\left(e^\tau+1\right)^2}\cdot\left(1-e^{-(t-\tau)}\right)d\tau=$$

$$=\int_0^t \frac{d\left(e^\tau+1\right)}{\left(e^\tau+1\right)^2}-e^{-t}\int_0^t\frac{\left(e^\tau+1\right)-1}{\left(e^\tau+1\right)^2}d\left(e^\tau+1\right)=\left(1+e^{-t}\right)\int_0^t\frac{d\left(e^\tau+1\right)}{\left(e^\tau+1\right)^2}-e^{-t}\int_0^t\frac{d\left(e^\tau+1\right)}{\left(e^\tau+1\right)}=$$

$$=\left[\left(1+e^{-t}\right)\cdot\frac{-1}{\left(e^\tau+1\right)}-e^{-t}\ln\left(e^\tau+1\right)\right]_{\tau=0}^{\tau=t}=\left(1+e^{-t}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{e^t+1}\right)-e^{-t}\ln\frac{e^t+1}{2}.$$

Решение систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Операционный метод решения системы линейных дифференциальных уравнений аналогичен методу решения одного линейного дифференциального уравнения. Переходя от оригиналов к изображениям, получим систему линейных алгебраических уравнений; решим ее одним из известных способов, например, методом Гаусса, или по формулам Крамера; затем по найденным изображениям восстановим оригиналы.

***Пример* 7.7.** Решить задачу Коши для системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x'+y'-y=e^t, \\ 2x'+y'+2y=\cos t, \\ x(0)=y(0)=0. \end{cases}$$

Перейдём от оригиналов к изображениям. Пусть $x(t)\risingdotseq X(p),\ \ y(t)\risingdotseq Y(p)$. Тогда

$$x'(t)\risingdotseq p\,X-x(0)=p\,X,\quad y'(t)\risingdotseq p\,Y,\quad e^t\risingdotseq\frac{1}{p-1},\quad \cos t\risingdotseq\frac{p}{p^2+1}.$$

Дифференциальные уравнения для оригиналов перейдут в алгебраические уравнения для изображений:

$$\begin{cases} p\,X+p\,Y-Y=\dfrac{1}{p-1}, \\ 2p\,X+p\,Y+2Y=\dfrac{p}{p^2+1}. \end{cases}$$

Умножив первое уравнение на (-2) и сложив его со вторым, получим

$$Y\cdot(4-p)=\frac{p}{p^2+1}-\frac{2}{p-1} \quad \text{или} \quad Y(p)=-\frac{p}{(p^2+1)(p-4)}+\frac{2}{(p-1)(p-4)}.$$

Из первого уравнения

$$p\,X=\frac{1}{p-1}-(p-1)Y \quad \text{или} \quad X(p)=\frac{1}{p(p-1)}+\frac{(p-1)}{(p^2+1)(p-4)}-\frac{2}{p(p-4)}.$$

По изображениям восстановим оригиналы:

$$\frac{1}{p(p-1)}\risingdotseq\int_0^t e^{\tau}d\tau=e^t-1; \qquad \frac{-2}{p(p-4)}\risingdotseq-2\int_0^t e^{4\tau}d\tau=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{4t}.$$

Разложим функцию $\dfrac{p-1}{\left(p^2+1\right)\left(p-4\right)}$ на простейшие дроби

$$\frac{p-1}{(p^2+1)(p-4)}=\frac{A}{p-4}+\frac{B\,p+C}{p^2+1}; \quad \text{тогда} \quad p-1=A(p^2+1)+(Bp+C)(p-4).$$

При $p=4$ имеем $3=17A \Rightarrow A=3/17;$ при $p=0$ имеем $-1=A-4C \Rightarrow C=5/17.$

Приравняем коэффициенты при p^2: $0=A+B \Rightarrow B=-3/17.$ Тогда

$$\frac{p-1}{(p^2+1)(p-4)}=\frac{3}{17}\cdot\frac{1}{p-4}-\frac{3}{17}\cdot\frac{p}{p^2+1}+\frac{5}{17}\cdot\frac{1}{p^2+1}\risingdotseq\frac{3}{17}e^{4t}-\frac{3}{17}\cos t+\frac{5}{17}\sin t.$$

Окончательно получим

$$x(t)=e^t-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{4t}+\frac{3}{17}e^{4t}-\frac{3}{17}\cos t+\frac{5}{17}\sin t \quad \text{или} \quad x(t)=e^t-\frac{1}{2}-\frac{11}{34}e^{4t}-\frac{3}{17}\cos t+\frac{5}{17}\sin t.$$

Восстановим $y(t)$ по его изображению $Y(p)=-\dfrac{p}{\left(p^2+1\right)\left(p-4\right)}+\dfrac{2}{\left(p-1\right)\left(p-4\right)}.$

Разложим каждое слагаемое на простейшие дроби:

$$\frac{-p}{(p^2+1)(p-4)}=\frac{A_1}{p-4}+\frac{B_1p+C_1}{p^2+1}; \qquad \frac{2}{(p-1)\,(p-4)}=\frac{D_1}{p-1}+\frac{D_2}{p-4}.$$

Получим: $-p=A_1(p^2+1)+(B_1p+C_1)(p-4)$ и $D_1(p-4)+D_2(p-1)=2.$

При $p=4$ имеем $-4=17A_1 \Rightarrow A_1=-\dfrac{4}{17}$, $3D_2=2 \Rightarrow D_2=\dfrac{2}{3};$

При $p=0$ имеем $0=A_1-4C_1 \Rightarrow C_1=-\dfrac{1}{17}$, $-4D_1-D_2=2 \Rightarrow D_1=-\dfrac{2}{3}.$

Сравним коэффициенты при p^2: $0=A_1+B_1 \Rightarrow B_1=-A_1=\dfrac{4}{17}.$ Тогда

$$Y(p)=\frac{-p}{(p^2+1)(p-4)}+\frac{2}{(p-1)(p-4)}=-\frac{4}{17}\cdot\frac{1}{p-4}+\frac{4}{17}\cdot\frac{p}{p^2+1}-\frac{1}{17}\cdot\frac{1}{p^2+1}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{p-1}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{p-4}=$$

$$=\frac{22}{51}\cdot\frac{1}{p-4}+\frac{4}{17}\cdot\frac{p}{p^2+1}-\frac{1}{17}\cdot\frac{1}{p^2+1}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{p-1};$$

$$y(t)=\frac{22}{51}e^{4t}-\frac{2}{3}e^t+\frac{4}{17}\cos t-\frac{1}{17}\sin t.$$

Запишем решение системы: $\begin{cases} x(t) = e^t - \dfrac{1}{2} - \dfrac{11}{34}e^{4t} - \dfrac{3}{17}\cos t + \dfrac{5}{17}\sin t, \\ y(t) = \dfrac{22}{51}e^{4t} - \dfrac{2}{3}e^t + \dfrac{4}{17}\cos t - \dfrac{1}{17}\sin t. \end{cases}$

Решение интегрального уравнения типа свертки

Интегральным уравнением называют уравнение, в котором неизвестная функция входит под знак интеграла. Мы рассмотрим лишь интегральное уравнение типа свертки, т.е. уравнение вида

$$x(t) = f(t) + \int_0^t g(t-\tau)x(\tau)d\tau .$$

В этом уравнении интеграл является сверткой функций $g(t)$ и $x(t)$ (см. формулу 9 в таблице изображений) и уравнение может быть записано в виде

$$x(t) = f(t) + g(t) * x(t).$$

Переходя к изображениям получим простейшее уравнение

$$X(p) = F(p) + G(p) \cdot X(p).$$

Из этого уравнения следует найти изображение $X(p)$ и по изображению восстановить оригинал $x(t)$.

Пример 7.8. Найти функцию $x(t)$ из уравнения $x(t) = \sin t + 2\int_0^t \cos(t-\tau)x(\tau)d\tau$.

Решение. Интеграл в данном уравнении является сверткой функций $\cos t$ и $x(t)$, поэтому уравнение можно записать в виде

$$x(t) = \sin t + 2\cos t * x(t).$$

Перейдём от оригиналов к изображениям, учитывая, что

$$x(t) \doteqdot X(p), \quad \sin t \doteqdot \frac{1}{p^2+1}, \quad \cos t \doteqdot \frac{p}{p^2+1}, \quad \cos t * x(t) \doteqdot \frac{p}{p^2+1} \cdot X(p).$$

Тогда интегральное уравнение для оригинала перейдёт в алгебраическое уравнение для изображения

$$X(p) = \frac{1}{p^2+1} + \frac{2p}{p^2+1} \cdot X(p) \quad \text{или} \quad X(p) = \frac{1}{(p-1)^2}.$$

По изображению $X(p)$ найдём оригинал. Так как $\dfrac{1}{p^2} \doteqdot t$, то $\dfrac{1}{(p-1)^2} \doteqdot t e^t$ (по формуле 8 в таблице изображений). Таким образом, $x(t) = t e^t$.

Вычисление несобственных интегралов

Пусть оригинал $f(t)$ имеет изображение $F(p)$. Тогда из определения изображения следует, что

$$\boxed{\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt = F(p)}$$

Пример 7.9. Вычислить интегралы 1) $\int\limits_0^{+\infty} t^4\cdot e^{-2t}dt$, 2) $\int\limits_0^{+\infty} t\cos 2t\cdot e^{-3t}dt$.

Решение. 1). Интеграл $\int\limits_0^{+\infty} t^4\cdot e^{-2t}dt$ есть изображение оригинала t^4 при $p=2$, т.е.

$$\int\limits_0^{+\infty} t^4\cdot e^{-2t}dt=\left.\frac{4!}{p^5}\right|_{p=2}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{2\cdot 4\cdot 4}=\frac{3}{4}.$$

Здесь использована формула №13 из таблицы изображений.

2). Интеграл $\int\limits_0^{+\infty} t\cos 2t\cdot e^{-3t}dt$ есть изображение оригинала $t\cos 2t$ при $p=3$, т.е.

$$\int\limits_0^{+\infty} t\cos 2t\cdot e^{-3t}dt=\left.\frac{p^2-2^2}{\left(p^2+2^2\right)^2}\right|_{p=3}=\frac{5}{169}.$$

Здесь использована формула №20 из таблицы изображений.

Пример 7.10. Вычислить интегралы 1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t}\cdot e^{-2t}dt$, 2) $\int\limits_0^{+\infty} t^2\cos t\cdot e^{-t}dt$.

Решение. 1). Интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t}\cdot e^{-2t}dt$ есть изображение оригинала $\frac{1-\cos t}{t}$ при $p=2$. Изображение этого оригинала было найдено в примере 7.1:

$$\frac{1-\cos t}{t}\risingdotseq\ln\frac{\sqrt{p^2+1}}{p}.$$

Поэтому $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t}\cdot e^{-2t}dt=\left.\ln\frac{\sqrt{p^2+1}}{p}\right|_{p=2}=\ln\frac{\sqrt{5}}{2}.$

2). Интеграл $\int\limits_0^{+\infty} t^2\cos t\cdot e^{-t}dt$ есть изображение оригинала $t^2\cos t$ при $p=1$. Изображение этого оригинала было найдено в примере 7.1: $t^2\cos t\risingdotseq\frac{2p\left(p^2-3\right)}{\left(p^2+1\right)^3}$. Поэтому

$$\int\limits_0^{+\infty} t^2\cos t\cdot e^{-t}dt=\left.\frac{2p\left(p^2-3\right)}{\left(p^2+1\right)^3}\right|_{p=1}=-\frac{1}{2}.$$

Примеры для самостоятельного решения

1. Решить задачу Коши $\begin{cases} x''+x=f(t),\\ x(0)=x'(0)=0,\end{cases}$ (см. рис. 25).

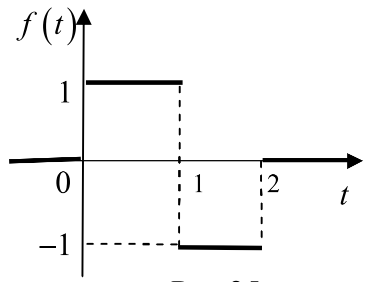

Рис.25

2. Решить задачу Коши $\begin{cases} x'=-y,\\ y'=2x+2y,\end{cases}$ $x(0)=y(0)=1$.

3. Найти функцию $x(t)$ из уравнения

$$x(t)=e^t-2\int\limits_0^t\cos(t-\tau)\,x(\tau)d\tau.$$

Ответы: 1) $x(t)=2\left[\sin^2\frac{t}{2}\cdot\eta(t)-2\sin^2\frac{t-1}{2}\cdot\eta(t-1)+\sin^2\frac{t-2}{2}\cdot\eta(t-2)\right]$;

2) $x(t)=e^t(\cos t-2\sin t)$, $y(t)=e^t(\cos t+3\sin t)$; 3) $x(t)=\operatorname{ch}t-t\cdot e^{-t}$.

Библиографический список

1. Краснов М.Л. Вся высшая математика / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. М.: Эдиториал УРСС, 2005. Т.4. 352 с.
2. Пчелин Б.К. Специальные разделы высшей математики / Б.К. Пчелин. М.: Высшая школа, 1972. 462 с.
3. Сидоров В.Ю. Лекции по теории функций комплексного переменного / В.Ю. Сидоров, М.В. Федорюк, М.И. Шабунин. М.: Наука, 1982. 488 с.
4. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике /Д.Т. Письменный. М.: Айрис-пресс, 2004. 603 с.
5. Мышкис А.Д. Математика для технических вузов. Специальные курсы /А.Д. Мышкис. СПб.: Изд-во «Лань», 2002. 640 с.
6. Бронштейн И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. М.: Наука, 1980. 946 с.
7. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. М.: Наука, 1977. 831 с.
8. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / под ред. Б.П. Демидовича. М.: «Изд-во Астрель», 2003. 495 с.
9. Сборник задач по математике для втузов: В 4 ч. Ч.4 / под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. М.: Наука, 2000. 464 с.
10. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. М.: Наука, 1977. 831 с.

Оглавление

Учебное издание

Ревекка Максовна Минькова

**Функции комплексного переменного
в примерах и задачах**

Редактор *И.В. Коршунова*
Компьютерная верстка *Р.М. Миньковой*

Подписано в печать   Формат 60×84 1/16
Бумага типографская   Плоская печать   Усл. печ.л.
Уч.-изд. л.   Тираж   Заказ

Редакционно-издательский отдел УрФУ
620002, Екатеринбург, Мира, 19