Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана»
(МГТУ им. Н.Э.Баумана)
Мытищинский филиал

ФАКУЛЬТЕТ КОСМИЧЕСКИЙ

КАФЕДРА К-1 САУ

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №9

ПО ДИСЦИПЛИНЕ
“ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ”

НА ТЕМУ:

«Приближенное решение обыкновенных дифференциальных уравнений»

Студент К1-61Б (Группа) **21.05.24** (Подпись, дата) **Тимофеев К. А.** (ФИО)

Руководитель (Подпись, дата) **Чернова Т.В** (ФИО)

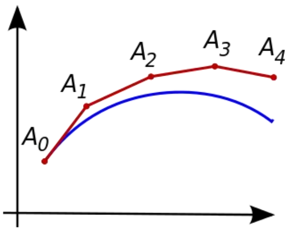
2024 г.

Теория

Метод Эйлера

Метод заключается в построении касательных к графику функции в точкам x_i *и* x_{i+1} .Каждая касательная при этом параллельно переносится до пересечения с предыдущей, так получается ломаный аналог графика исследуемой функции. Алгоритм метода можно описать следующим псевдокодом.

$$\begin{aligned}
&Function\ Eiler(x_i, y_i, h, n, \varepsilon):\\
&\quad y_{i+1} = y_i + h\ \ f(x_i, y_i)\\
&\quad if\ \max_{i=1,n}\left|y_i^{\,n} - y_i^{\,2n}\right|\ \ \ \varepsilon : Eiler(x_i, y_i, h, 2\ \ n, \varepsilon)\\
&\quad else : return\ \ y_{i+1}
\end{aligned}$$



Т.к. классический метод Эйлера не имеет высокой точности, в сложных вычислениях применяют другие методы.

Исправленный метод Эйлера

Здесь касательные не переносятся к концам предыдущих. Вместо этого между соседними касательными строят среднюю линию, и тогда в точке пересечения трёх прямых будут лежать узлы ломаной.

$$\begin{aligned}
&Function\ EmbeddedEiler(x_i, y_i, h, n, \varepsilon):\\
&\quad y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\ \left[f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + h\ \ f(x_i, y_i))\right]\\
&\quad if\ \max_{i=1,n}\left|y_i^{\,n} - y_i^{\,2n}\right|\ \ \ \varepsilon : Eiler(x_i, y_i, h, 2\ \ n, \varepsilon)\\
&\quad else : return\ \ y_{i+1}
\end{aligned}$$

Метод Рунге-Кутты 4-ого порядка

Является наиболее употребимым и точным среди рассматриваемых.

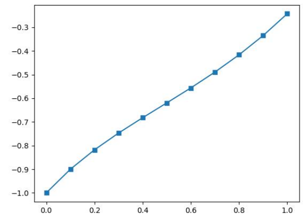
$$\begin{aligned}
&Function\ RK4(x_i, y_i, h, n, \varepsilon):\\
&\quad k_1 = f(x_i, y_i),\quad k_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}\ \ k_1)\\
&\quad k_3 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}\ \ k_2),\quad k_4 = f(x_i + h, y_i + h\ \ k_3)\\
&\quad y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}\ \left[k_1 + 2\ \ k_2 + 2\ \ k_3 + k_4\right]\\
&\quad if\ \max_{i=1,n}\left|y_i^{\,n} - y_i^{\,2n}\right|\ \ \ \varepsilon : RK4(x_i, y_i, h, 2\ \ n, \varepsilon)\\
&\quad else : return\ \ y_{i+1}
\end{aligned}$$

Задачи

1. Используя метод Эйлера решить дифференциальное уравнение
$$y' = x^2 + y^2,\ \ \textit{на отрезке}\ [0,1], \textit{при}\ \varepsilon = 0{,}001;\ y(x_0) = -1.$$
2. Используя метод Эйлера решить дифференциальное уравнение
$$y' = 0.5 \cdot x^{-2} - 2 \cdot y^2, \textit{на отрезке}\ [1, 2], \textit{при}\ \varepsilon = 0.001,\ y(x_0) = 1.$$
3. Используя исправленный метод Эйлера решить дифференциальное
$$y' = x^2 + y^2,\ \ \textit{на отрезке}\ [0,1], \textit{при}\ \varepsilon = 0{,}001;\ y(x_0) = -1.$$
4. Используя исправленный метод Эйлера решить дифференциальное
$$y' = 0.5 \cdot x^{-2} - 2 \cdot y^2, \textit{на отрезке}\ [1, 2], \textit{при}\ \varepsilon = 0.001,\ y(x_0) = 1.$$
5. Используя метод Рунге-Кутты 4-ого порядка решить дифференциальное уравнение
$$y' = x^2 + y^2,\ \ \textit{на отрезке}\ [0,1], \textit{при}\ \varepsilon = 0{,}001;\ y(x_0) = -1.$$
6. Используя метод Рунге-Кутты 4-ого порядка решить дифференциальное уравнение
$$y' = 0.5 \cdot x^{-2} - 2 \cdot y^2, \textit{на отрезке}\ [1, 2], \textit{при}\ \varepsilon = 0.001,\ y(x_0) = 1.$$
7. Составить сравнительную таблицу решений для дифференциального уравнения
$$y' = x^2 + y^2,\ \ \textit{на отрезке}\ [0,1], \textit{при}\ \varepsilon = 0{,}001;\ y(x_0) = -1.$$
8. Составить сравнительную таблицу решений для дифференциального уравнения
$$y' = 0.5 \cdot x^{-2} - 2 \cdot y^2, \textit{на отрезке}\ [1, 2], \textit{при}\ \varepsilon = 0.001,\ y(x_0) = 1.$$

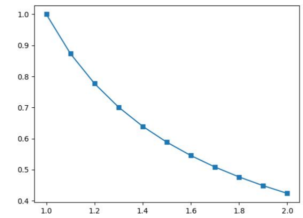
Ход работы

Задание 1



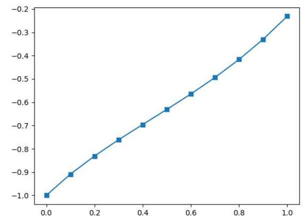
'X value': array([0. , 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.])
'Y value': array([-1. , -0.9 , -0.818 , -0.7471, -0.6823, -0.6197, -0.5563, -0.4894, -0.4164, -0.3351, -0.2429])

Задание 2



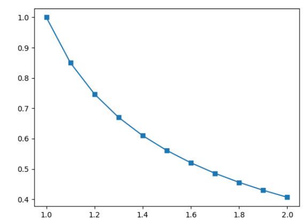
'X value': array([1. , 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 2.])
'Y value': array([1. , 0.85 , 0.7468, 0.67 , 0.6098, 0.5609, 0.5202, 0.4856, 0.4558, 0.4297, 0.4066])

Задание 3



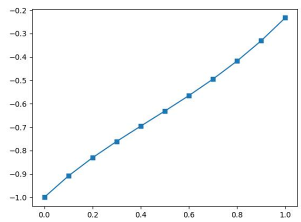
'X value': array([0. , 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.])
'Y value': array([-1. , -0.909 , -0.8311, -0.7614, -0.6958, -0.6311, -0.5647, -0.4939, -0.4164, -0.3296, -0.2308])

Задание 4



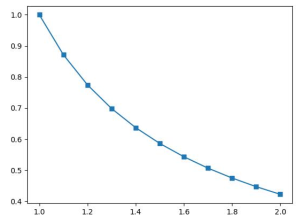
'X value': array([1. , 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 2.])
'Y value': array([1. , 0.8734, 0.7771, 0.7011, 0.6395, 0.5884, 0.5454, 0.5085, 0.4765, 0.4485, 0.4238])

Задание 5



'X value': array([0. , 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.])
'Y value': array([-1. , -0.9088, -0.8309, -0.7612, -0.6958, -0.6314, -0.5652, -0.4947, -0.4174, -0.331 , -0.2326])

Задание 6



'X value': array([1. , 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 2.])
'Y value': array([1. , 0.8713, 0.7743, 0.6983, 0.6368, 0.586 , 0.5432, 0.5066, 0.4748, 0.447 , 0.4224])

Задание 7

#-----------Оценка погрешности численного решения-----------
-----------обыкновенного дифференциального уравнения----------#

	$Y^{10}n$	$\Delta(Y^{10}n)$	$\delta(Y^{10}n)$	$Y^{20}n$	$\Delta(Y^{20}n)$	$\delta(Y^{20}n)$
Eiler	-0.242852	0.0103	4.2413%	-0.238007	0.0054	2.2688%
Embedded Eiler	-0.23082	0.0017	0.7365%	-0.232122	0.0004	0.1723%
RK4	-0.232567	#--#	#--#	-0.232567	#--#	#--#

Задание 8

#-----------Оценка погрешности численного решения-----------
-----------обыкновенного дифференциального уравнения----------#

	$Y^{10}n$	$\Delta(Y^{10}n)$	$\delta(Y^{10}n)$	$Y^{20}n$	$\Delta(Y^{20}n)$	$\delta(Y^{20}n)$
Eiler	0.406585	0.0158	3.886%	0.414575	0.0078	1.8814%
Embedded Eiler	0.423769	0.0014	0.3304%	0.422697	0.0003	0.071%
RK4	0.422377	#--#	#--#	0.422374	#--#	#--#