ДЗ по дискретной математике 12 Смирнов Тимофей 236 ПМИ

Д12.1 Докажите, что можно так занумеровать вершины связного неориентированного графа на n вершинах числами от 1 до n, что для каждого $1 \leq k \leq n$ связен подграф, индуцированный множеством вершин с номерами от 1 до k.

Решение: Занумеруем вершины. На первом шаге возьмем любую вершину графа (мы еще ни одной не зинумеровали) и присвоим ей номер 1. Так как граф связный, то у вершины как минимум один сосед, пусть таких соседей h, тогда пройдемся по ним и присвоим им номера от 2 до $h + 1$.

Далее для каждого из таких соседей запустим алгоритм: будем заходить в вершину и искать незанумерованных соседей в ней, если таковые имеются, то пусть их будет f, а уже занумерованных вершин всего l, тогда занумеруем этих соседей номерами от $l + 1$ до $l + f$. Если у вершины, в которую мы заходим все соседи занумерованы - то выходим из нее.

Обойдя всех соседей первой вершины обходим тем же алгоритмом всех ее соседей, где эти соседи теперь будут "стартовыми" вершинами.

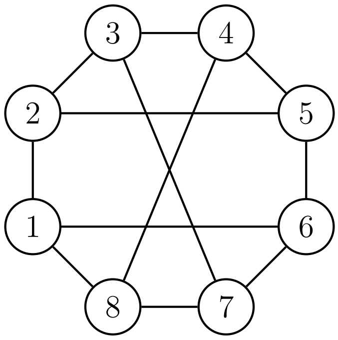
Таким образом мы сначала обойдем всех соседей вершины с номером 1 и занумеруем их. Затем всех ее соседей и всех соседей их соседей. После такого алгоритма каждая вершина кроме первой будет иметь соседа с меньшим номером. Следовательно из нее можно будет добраться до вершины с номером 1. А уже из первой вершины можно будет добраться в любую другую.

Таким образом индуцированный граф с множеством вершин от 1 до k будет так же связным, так как по построению алгоритма из каждой вершины можно будет попасть в первую, проходя только через вершины меньшего номера.

12.2 Найдите такой граф на 8 вершинах, что степень каждой вершина равна 3 и в этом графе нет независимого множества размера 4. (Напомним, что, как и во всех остальных задачах, ответ должен быть обоснован. Нужно доказать, что ваш пример удовлетворяет требуемым свойствам.)

Решение:

Приведем пример такого графа:



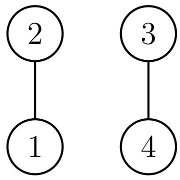
В этом графе 8 вершин и степень каждой вершины 3. Заметим, что две соседние вершины не могут лежать в независимом множестве, так как они соединены ребром.

Из вышесказанного получаем, что в одном независимом множестве из 4х вершин могут лежать либо вершины с номерами 1, 3, 5, 7 или вершины с номерами 2, 4, 6, 8. Но, по построению графа, между вершинами 3 и 7, а так же 4 и 8 существует ребро, следовательно они тоже не могут лежать в одном независимом множестве. Получается, что множества вершин с номерами 1, 3, 5, 7 не является независимым множеством и множество вершин с номерами 2, 4, 6, 8 тоже не является независимым множеством. Следовательно независимых множеств на 4х вершинах в графе нет.

Д12.3 Известно, что в простом неориентированном графе нечётное количество независимых множеств. Следует ли из этого, что граф связный? (Независимое множество — это подмножество вершин, в кото- ром каждая пара вершин не соединена ребром. Пустое множество и 1-элементные множества являются независимыми.)

Решение:

Приведем пример несвязного графа с нечетным количеством независимых множеств:



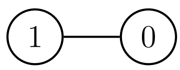
Перечислим независимые множества этого графа: $\{\varnothing\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}$.

Всего этих множеств 9 штук, то есть нечетное количество, но при этом граф не связный. **Следовательно, из нечетности количества независимых множеств не следует то, что граф связный.**

Д12.4 При каких n в булевом кубе Q_n существует остовное дерево, в котором все вершины кроме двух имеют степень 2?

Решение: Заметим, что дерево, в котором степени двух вершин равны 1, а степени всех остальных вершин равны 2 является в точности просто последовательностью вершин, где соседние вершины соединены ребрами. Рассмотрим индукцию по n в булевом кубе Q_n.

База индукции: $n = 1$. При таком n в кубе всего две вершины:



Из такого булева куба ничего не нужно удалять, он сам по себе является остовным деревом с двумя вершинами степени 1 и остальными вершинами степени 2 (таких в нем нет).

Шаг индукции: пусть для n в графе Q_n существует остовное дерево, описанное в задаче, докажем, что оно существует и для булевого куба Q_{n+1}.

По определению булева куба для n, кажда вершина в нем является двоичным словом длины n. Между вершинами есть ребро, если двоичные слова в этих вершинах отличаются ровно в одной позиции.

По условию шага индукции из Q_n можно выбросить часть ребер так, чтобы его вершины образовали дерево, требуемое в задаче. Это дерево задается такой последовательностью вершин

$$a_1 \to a_2 \to ... \to a_{2^n}$$

При увеличении n на 1 к каждой последовательности справа дописывается 0 или 1, то есть каждая вершина Q_n как бы раздваивается на две разные вершины, причем эти вершины связаны ребром. Преобразуем последовательность, которую мы строили для n так:

$$a_1 0 \to a_1 1 \to a_2 1 \to a_2 0 \to a_3 0 \to ... \to a_{2^n} 1 \to a_{2^n} 0$$

То есть чтобы попасть из вершины $a_n 0$ в $a_{n+1} 0$ пройдем через вершины с 1 на концах и префиксами a_n и a_{n+1}. В получившейся последовательности все элементы различны, так как они различаются префиксами, так как $a_k \neq a_m \; \forall (m \neq k) \in \{1, 2^n\}$, а если префиксы равны, то на концах стоят различные цифры. Так же в данной последовательности ровно $2^n \cdot 2 = 2^{n+1}$ вершина, так как мы проходим через все вершины с 0 и 1 на конце. Следовательно в данной последовательности 2^{n+1} различная вершина. Тогда эта последовательность и является остовным деревом (так как все вершины использованы) в булевом кубе Q_{n+1}.

По индукции мы доказали, что при любых n в булевом кубе Q_n существует остовное дерево, в котором все вершины кроме двух имеют степень 2.