ДЗ по дискретной математике 6 Смирнов Тимофей 236 ПМИ

№ 6.1 Найдите количество сюръективных неубывающих функций из [10] в [7]. Функция f неубывающая, если $x \leq y$ влечёт $f(x) \leq f(y)$.

Решение: В сюрьективной функции из [10] в [7] $f : [10] \to [7]$ каждому элементу множества [7] найдется соответствующий элемент из множества [10], по определению сюрьективные функции тотальны, то есть все элементы [10] использованы.

Упорядочим элементы множеств [10] и [7] по возрастанию и получим последовательности X = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) и Y = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6), чтобы функция была неубывающей, первому элементу из Y дложно соответствовать первые $\alpha_0 > 0$ членов из множества X, второму элементу из Y должны соответствовать $\alpha_1 > 0$ элементов последовательности X, начиная с α_0-го элемента и тд. При этом, по определению функции, множества прообразов элементов из Y не могут пересекаться, следовательно последовательность соотетствующих элементов для i-го элемента из Y начинается именно с $\alpha_0 + ... + \alpha_{i-1}$. Так как у всех элементов из множества Y должны быть соответствующие элементы в множестве X, то мы получаем уравнение $\alpha_0 + \alpha_1 + ... + \alpha_6 = 10$ и $\forall i \ \alpha_i > 0$.

То есть мы должны найти количество решений уравнения $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 = 10$, где $\forall n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \hookrightarrow \alpha_n \geq 1$.

Количество решений такого уравнения равно $\binom{n-1}{k-1} = \binom{9}{6} = 84$, так как количество решений такого уравнения можно сопоставить с задачей по нахождению монотонных путей из 0 в n, с k шагами, которую мы решали на семинаре.

Ответ: 84

№ 6.2 Докажите, что $\sum\limits_{j=0}^{k} \binom{n+j-1}{j} = \binom{n+k}{k}$.

Решение: Заметим, что $\sum\limits_{j=0}^{k} \binom{n+j-1}{j} = \sum\limits_{j=0}^{k} \left(\binom{n}{j}\right)$ и $\binom{n+k}{k} = \left(\binom{n+1}{k}\right)$ То есть нам достаточно доказать, что $\sum\limits_{j=0}^{k} \left(\binom{n}{j}\right) = \left(\binom{n+1}{k}\right)$.

Пусть у нас было множество A длины n, в которое мы добавили еще один элемент, в итоге получится множество B размера $n+1$. На каждом шаге суммы $\sum\limits_{j=0}^{k}\left(\!\binom{n}{j}\!\right)$ по j (j = 0, 1, ... k) мы выбираем j элементов с повторениями среди множества $A \cap B$, остальные k - j раз мы просто берем не содержащийся в A (n + 1)-й элемент из B. Итого у нас посчитаются все варианты выбора (n + 1)-го элемента из множества B (0, 1, 2, ... k раз), и при этом посчитаются все варианты перебрать оставшиеся n элементов из $A \cap B$. Получается, что мы просто получили количество сочетаний с повторениями из множества размера $(n+1)$ по k. ЧТД.

№ 6.3 Сколько различных слов (не обязательно осмысленных) можно получить, переставляя буквы в слове ABRACADABRA так, чтобы никакие две буквы A не стояли рядом? Ответом должно быть число в десятичной записи.

Решение: Представим задачу в виде шариков и перегородок. Пусть все элементы не равные A будут шариками, а элементы A будут перегородками. Всего элементов не равных A имеется 6, а элементов равных A всего 5. "A" не могут стоять рядом, поэтому между двумя шариками нельзя поставить 2 и более перегородки. Позиций для постановки перегородок всего 6 + 1 = 7, так как места слева и справа от ряда шариков тоже считаются. Тогда просто между 6-ю шариками выберем места для перегородок, это можно сделать $C_7^5 = 21$ способами. Так же, так как почти все эти шарики у нас разные числа (только B и R повторятся по 2 раза), то их мы можем переставить $\dfrac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!} = 180$ способами. В итоге получаем формулу $C_7^5 \cdot 180 = 21 \cdot 180 = 3780$.

№ 6.4 Сравните числа (равны ли; если нет, то какое больше):

$$\sum_{i=0}^{512} 2^{2i} \cdot \binom{1024}{2i} \ \vee \ \sum_{i=0}^{511} 2^{2i+1} \cdot \binom{1024}{2i+1}$$

Решение: $(2-1)^{1024} = \sum\limits_{k=0}^{1024} \binom{1024}{k} \cdot 2^k \cdot (-1)^{1024-k}$

$$= \sum_{i=0}^{512} \binom{1024}{2i} \cdot a^{2i} \cdot (-1)^{2i} + \sum_{i=0}^{511} \binom{1024}{2i+1} \cdot a^{2i+1} \cdot (-1)^{2i+1} =$$

$$= \sum_{i=0}^{512} \binom{1024}{2i} \cdot a^{2i} - \sum_{i=0}^{511} \binom{1024}{2i+1} \cdot a^{2i+1} = (2-1)^{1024} = 1^{1024} = 1.$$

Разность мы получили, так как в правой сумме -1 возводился в нечетную степень.

Получаем, что $\sum\limits_{i=0}^{512} \left(2^{2i} \cdot \binom{1024}{2i}\right) = \sum\limits_{i=0}^{511} \left(2^{2i+1} \cdot \binom{1024}{2i+1}\right) + 1 \ \Rightarrow$

$$\sum_{i=0}^{512}\left(2^{2i}\cdot\binom{1024}{2i}\right) \;>\; \sum_{i=0}^{511}\left(2^{2i+1}\cdot\binom{1024}{2i+1}\right).$$

Ответ: первое число больше на 1.