ИДЗ по линейной алгебре 3 Смирнов Тимофей 236 ПМИ

№ 1 Найдите матрицу, обратную к данной матрице A:

$$\begin{pmatrix} -3 & -4 & -4 & -2 \\ 1 & 5 & 4 & 7 \\ -2 & -6 & -5 & -8 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Чтобы найти обратную матрицу, запишем матрицу A и матрицу E так (A|E). Затем проведем элементарные преобразования, пока слева не появится единичная марица, тогда справа будет наша матрица U, при умножении на которую матрица A будет превращаться в единичную.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -3 & -4 & -4 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 4 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -6 & -5 & -8 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Поменяем местами первую и вторую строки ———————————————————————

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 5 & 4 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -4 & -4 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -6 & -5 & -8 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ +3(1) \\ +2(1) \\ +1(1) \end{matrix} \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 5 & 4 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 8 & 19 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 6 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 7 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ :11 \\ \\ \\ \end{matrix} \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 5 & 4 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{8}{11} & \frac{19}{11} & \frac{1}{11} & \frac{3}{11} & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 6 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 7 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ \\ -4(2) \\ -4(2) \end{matrix} \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 5 & 4 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{8}{11} & \frac{19}{11} & \frac{1}{11} & \frac{3}{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{11} & -\frac{10}{11} & -\frac{4}{11} & \frac{10}{11} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & -\frac{4}{11} & -\frac{1}{11} & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ \\ \times 11 \\ \times 11 \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 5 & 4 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{8}{11} & \frac{19}{11} & \frac{1}{11} & \frac{3}{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -10 & -4 & 10 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4 & -1 & 0 & 11 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ \\ \\ -1(3) \end{matrix} \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 5 & 4 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{8}{11} & \frac{19}{11} & \frac{1}{11} & \frac{3}{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -10 & -4 & 10 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & 0 & -11 & -11 & 11 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ \\ \\ :11 \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 5 & 4 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{8}{11} & \frac{19}{11} & \frac{1}{11} & \frac{3}{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -10 & -4 & 10 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ +10(4) \\ \\ \end{matrix} \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 5 & 4 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{8}{11} & \frac{19}{11} & \frac{1}{11} & \frac{3}{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -\frac{19}{11}(4) \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 5 & 4 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{8}{11} & 0 & \frac{1}{11} & 2 & \frac{19}{11} & -\frac{19}{11} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -\frac{8}{11}(4) \\ \\ \\ \end{matrix} \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 5 & 4 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} -7(4) \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 5 & 4 & 0 & 0 & 8 & 7 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} -4(3) \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 5 & 0 & 0 & 16 & 8 & 3 & -47 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} -5(4) \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Вот мы и получили обратную к A матрицу, проверим:

$$\begin{pmatrix} -3 & -4 & -4 & -2 \\ 1 & 5 & 4 & 7 \\ -2 & -6 & -5 & -8 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & -9 \\ -4 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & -9 \\ -4 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

№ 2 Решите уравнение относительно неизвестной перестановки X:

$$\left(\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\8&6&4&2&7&1&5&3\end{pmatrix}^{12}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&3&8&4&7&5&1&6\end{pmatrix}^{-1}\right)^{112}\cdot X=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&6&7&1&8&4&5&3\end{pmatrix}$$

1). $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\8&6&4&2&7&1&5&3\end{pmatrix}=(183426)(57)$

НОК длин циклов этой перестановки перестановки равен 6.

12 делится на 6 нацело, следовательно $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\8&6&4&2&7&1&5&3\end{pmatrix}^{12}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\8&6&4&2&7&1&5&3\end{pmatrix}$

2). $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&3&8&4&7&5&1&6\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\7&1&2&4&6&8&5&3\end{pmatrix}$

3). $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\8&6&4&2&7&1&5&3\end{pmatrix}^{12}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&3&8&4&7&5&1&6\end{pmatrix}^{-1}$

$=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\8&6&4&2&7&1&5&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&3&8&4&7&5&1&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&4&3&2&5&7&8&1\end{pmatrix}$

4). $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&4&3&2&5&7&8&1\end{pmatrix}=(1678)(24)(3)(5)$

НОК длин циклов перестановки равен 4. 112 делится на 4 нацело, следовательно $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&4&3&2&5&7&8&1\end{pmatrix}^{112}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&4&3&2&5&7&8&1\end{pmatrix}$

5). Получаем уравнение $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&4&3&2&5&7&8&1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&6&7&1&8&4&5&3\end{pmatrix}$

Получаем $X=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\4&1&6&8&7&2&5&3\end{pmatrix}$

Ответ: $X=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\4&1&6&8&7&2&5&3\end{pmatrix}$

№ 3 Определите чётность перестановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 97 & 98 & \dots & 327 & 328 & \dots & 470 \\ 374 & 375 & \dots & 470 & 144 & \dots & 373 & 1 & \dots & 143 \end{pmatrix}$$

1). Для каждого из чисел от 374 до 470 мы имеем инверсии с числами от 1 до 373. Всего таких перестановок будет $(470 - 374 + 1) \cdot 373 = 36181$

2). Для каждого из чисел от 144 до 373 мы имеем инверсии с числами от 1 до 143 (инверсии с числами от 374 до 470 мы уже посчитали). Всего таких перестановок будет $(373-144+1) \cdot 143 = 32890$

3). Число $36181 + 32890 = 69071$ нечетно, следовательно перестановка нечетна.

Ответ: Перестановка нечетна.

№ 4 Вычислите определитель матрицы А

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & x & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 7 & 6 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 7 & 5 \\ 1 & 2 & x & 0 & x & 7 \\ x & 1 & 3 & x & x & 6 \\ 0 & 4 & 8 & 6 & 9 & 5 \end{vmatrix}$$

Разложим определитель матрицы по первой строке:

$\det A = 0 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{12} + x \cdot A_{13} + 0 \cdot A_{14} + 0 \cdot A_{15} + 8 \cdot A_{16} = x \cdot A_{13} + 8 \cdot A_{16}$

1). $x \cdot A_{13} = x \cdot M = x \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 6 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & 7 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & x & 7 \\ x & 1 & x & x & 6 \\ 0 & 4 & 6 & 9 & 5 \end{vmatrix} = x \cdot (6 \cdot M_{13} + 5 \cdot M_{15})$

$$M_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & 7 & 5 \\ 1 & 2 & x & 7 \\ x & 1 & x & 6 \\ 0 & 4 & 9 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & x & 7 \\ x & x & 6 \\ 0 & 9 & 5 \end{vmatrix} + 7 \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ x & 1 & 6 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ x & 1 & x \\ 0 & 4 & 9 \end{vmatrix} =$$

Посчитаем определители матриц 3 на 3 мы можем просто по правилу "снежинки", что делается вполне устно.

$$(-3) \cdot (-5x^2 + 68x - 54) + 7 \cdot (18x - 19) + (-5) \cdot (4x^2 - 22x + 9) = -5x^2 + 32x - 16$$

$$M_{15} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 0 & x \\ x & 1 & x & x \\ 0 & 4 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ x & x & x \\ 0 & 6 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ x & 1 & x \\ 0 & 4 & 9 \end{vmatrix} + 7 \cdot (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ x & 1 & x \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$(-3) \cdot (3x(2x + 1)) + 3 \cdot (4x^2 - 22x + 9) + (-7) \cdot (6 - 16x) = -6x^2 + 37x - 15$$

$$x \cdot A_{13} = x \cdot (6 \cdot (-5x^2 + 32x - 16) + 5 \cdot (-6x^2 + 37x - 15)) = -60x^3 + 377x^2 - 171x$$

---

2). $8 \cdot A_{16} = 8 \cdot (-1)^7 \cdot H = 8 \cdot (-1)^7 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 7 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & x & 0 & x \\ x & 1 & 3 & x & x \\ 0 & 4 & 8 & 6 & 9 \end{vmatrix} = -8 \cdot (7 \cdot H_{13} + 6 \cdot H_{14})$

$$H_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 0 & x \\ x & 1 & x & x \\ 0 & 4 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ x & x & x \\ 0 & 6 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ x & 1 & x \\ 0 & 4 & 9 \end{vmatrix} + 7 \cdot (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ x & 1 & x \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$(-3)\cdot(6x^2+3x)+3\cdot(4x^2-22x+9)-7\cdot(6-16x)=-6x^2+37x-15$$

$$H_{14}=(-1)^5\cdot\begin{vmatrix}0&3&0&7\\1&2&x&x\\x&1&3&x\\0&4&8&9\end{vmatrix}=(-1)\cdot(3\cdot(-1)^3\cdot\begin{vmatrix}1&x&x\\x&3&x\\0&8&9\end{vmatrix}+7\cdot(-1)^5\cdot\begin{vmatrix}1&2&x\\x&1&3\\0&4&8\end{vmatrix})=$$

$$(-1)\cdot(-3\cdot(-x^2-8x+27)-7\cdot(4x^2-16x-4))=25x^2-136x+53$$

$$8\cdot A_{16}=-8\cdot(7\cdot(-6x^2+37x-15)+6\cdot(25x^2-136x+53))=-864x^2+4456x-1704$$

Наконец-то посчитаем $\det A=x\cdot A_{13}+8\cdot A_{16}=-60x^3+377x^2-171x-864x^2+4456x-1704=$
$=-60x^3-487x^2+4285x-1704$

Ответ: $\det A=-60x^3-487x^2+4285x-1704$

№ 5 Найдите коэффициент при x^5 в выражении определителя

$$\begin{vmatrix}3&9&x&1&7&4&3\\9&x&8&2&8&4&2\\x&8&3&10&1&8&x\\1&2&10&5&3&x&7\\7&8&1&3&x&10&5\\4&4&8&x&10&9&6\\3&2&x&7&5&6&10\end{vmatrix}$$

Если к строке или столбцу матрицы прибавить другой столбец или строку той же матрицы, умноженный на скаляр, то определитель не изменится.

Добавим к 7му столбцу нашей стрицы первый столбец, множенный на -1 и получим это (этот определитель равен предыдущем по свойству определителей):

$$\begin{vmatrix} 3 & 9 & x & 1 & 7 & 4 & 0 \\ 9 & x & 8 & 2 & 8 & 4 & -7 \\ x & 8 & 3 & 10 & 1 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & 10 & 5 & 3 & x & 6 \\ 7 & 8 & 1 & 3 & x & 10 & -2 \\ 4 & 4 & 8 & x & 10 & 9 & 2 \\ 3 & 2 & x & 7 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

Теперь к 7й строке матрицы прибавим первую, тоже умноженную на -1:

$$\begin{vmatrix} 3 & 9 & x & 1 & 7 & 4 & 0 \\ 9 & x & 8 & 2 & 8 & 4 & -7 \\ x & 8 & 3 & 10 & 1 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & 10 & 5 & 3 & x & 6 \\ 7 & 8 & 1 & 3 & x & 10 & -2 \\ 4 & 4 & 8 & x & 10 & 9 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 6 & -2 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

У днанной матрицы тоже тот же самый определитель, а, следовательно, и коэффициент при x^5 у него тот же самый.

В каждом слагаемом в формуле определителя мы берем ровно по одному элементу из каждой строки и столбца. У нас осталось всего 6 иксов, тогда x^5 получается выбором 5 из них (или НЕ выбором одного из 6), то есть 6ю способами. Рассмотрим эти способы и просуммируем их:

1). Пусть мы не возьмем икс из первой строки, тогда мы получим такую формулу слагаемого: $sgn(S_1) \cdot 0 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot 0 = 0$; ($S_1$ здесь это перестановка, которой соответствует такой выбор в данной ситуации она такова: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$).

2). Пусть мы не возьмем икс из 2й строки, $S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 1 & 6 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, наше слагаемое примет такой вид: $sgn(S_2) \cdot x \cdot (-7) \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot (-7); sgn(S_2) = -1 \Rightarrow$ (так как в перестановке 13 инверсий) получаем $(-1) \cdot x^5 \cdot 49 = -49x^5$

3). Пусть мы не возьмем икс из 3й строки, тогда $S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 7 & 6 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, в этой перестановке 10 инверсий, но нам это не важно, так как из 3й строки будет взят 0, который занулит нам все слагаемое.

4). Пусть мы не возьмем икс из 4й строки, тогда $S_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 7 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, в этой перестановке 7 инверсий $\Rightarrow sgn(S_4) = -1 \Rightarrow sgn(S_4) \cdot x^3 \cdot 6 \cdot x^2 \cdot 2 = -12x^5$.

5). Пусть мы не возьмем икс из 5й строки, тогда $S_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, в этой перестановке 7 инверский $\Rightarrow sgb(S_5) = -1 \Rightarrow sgn(S_5) \cdot x^4 \cdot (-2) \cdot x \cdot (-2) = -4x^5$

6). Пусть мы не возьмем икс из 6й строки, тогда $S_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 7 & 4 \end{pmatrix}$, в этой перестановке 7 инверсий $\Rightarrow sgn(S_6) = -1 \Rightarrow sgn(S_6)x^5 \cdot 2 \cdot 6 = -12x^5$

Сумма коэффициентов при x^5 равна $0 - 49 + 0 - 12 - 4 - 12 = -77$

Ответ: -77