ДЗ по математическому анализу 8 Смирнов Тимофей 236 ПМИ

Задача 8.11 Для дифференцируемых функций $y = y(x)$, заданных неявно, вычислите $y^{'}(x_0)$

а) $x^2 + y^2 - 6x + 10y - 2 = 0, y > -5, x_0 = 0$

Решение:

$(x^2 + y^2 - 6x + 10y - 2)' = 0 \iff 2x + 2yy' - 6 + 10y' = 0$

$y' = \frac{-6-2x}{2y+10} \Rightarrow y'(x_0) = -\frac{6}{2y+10}$

Найдем $y(0)$, подставив $x = 0$ в изначальную функцию. Имеем:

$$0 + y^2 - 6 \cdot 0 + 10y - 2 = 0$$

$$y^2 + 10y - 2 = 0$$

$D = 108 \Rightarrow y_1 = -5 + 3\sqrt{3}, \quad y_2 = -5 - 3\sqrt{3}$

По условию $y > -5 \Rightarrow$ будем подставлять только $y = -5 + 3\sqrt{3}$

$y'(x_0) = \frac{-6}{2y(x_0)+10} = \frac{-6}{-10+6\sqrt{3}+10} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

Ответ: $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

б) $e^y + xy = e, y > 0, x_0 = 0$

Решение:

$(e^y + xy)' = e' \iff e^y y' + y + xy' = 0$

$y' = \frac{-y}{e^y+x}$

Найдем $y(0)$, подставив $x = 0$ в изначальную функцию. Имеем:

$$e^y = e \Rightarrow y = 1$$

Подставим это в y': $\quad y'(x_0) = \frac{-y(x_0)}{e^{y(x_0)}+x_0} = \frac{-1}{1+0} = -1$

Ответ: $y'(x_0) = -1$

Задача 8.12 Найдите $y^{'}(x)$ для функции $y = y(x)$, заданной параметрически:

а) $x = \sin^2 t, y = \cos^2 t, 0 < t < \frac{\pi}{2}$

Решение:

Производная параметрически заданной функции y_x равна $\frac{y'}{x'}$.

Следовательно $y'_x = \frac{(\cos^2 t)'}{(\sin^2 t)'} = \frac{-2\cos t \sin t}{2 \sin t \cos t} = -1$

Ответ: -1

б) $x = e^{-t}, y = t^3, -\infty < t < +\infty$

Решение:

Производная параметрически заданной функции y_x равна $\frac{y'}{x'}$.

Следовательно $y'_x = \frac{(t^3)'}{(e^{-t})'} = \frac{3t^2}{e^{-t} \cdot (-1)} = -\frac{3t^2}{e^{-t}}$

Ответ: $y'_x = -\frac{3t^2}{e^{-t}}$

Задача 8.13 Найдите производную обратной к функции $y = e^x + x$, в точке $y_0 = 1$.
Решение:

$y_0 = e^{x_0} + x_0 \Rightarrow$ имеем уравнение $e^{x_0} + x_0 = 1 \iff e^{x_0} = e^{\ln 1 - x_0} \iff$
$x_0 = \ln 1 - x_0 \Rightarrow x_0 = 0$

$(y^{-1})' = \frac{1}{y'} = \frac{1}{e^x+1}$ Чтобы найти эту производную в точке y_0 достаточно подставить в нее найденный ранее x_0:

Ответ: $\frac{1}{e^{x_0}+x_0} = \frac{1}{1+0} = 1$

Задача 8.14 Для функции $y(x)$, заданной в полярной системе координат уравнением $r(\varphi) = e^{\varphi}, -\frac{\pi}{6} < \varphi < \frac{\pi}{6}$, вычислите $y^{'}(x_0)$ в точке $x_0 = 1$.

Решение:

$$\begin{cases} x = r(\varphi) \cdot \cos\varphi \\ y = r(\varphi) \cdot \sin\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = e^{\varphi} \cdot \cos\varphi \\ y = e^{\varphi} \cdot \sin\varphi \end{cases}$$

По сути это просто параметрическая функция, от которой нужно взять производную.

$$y'_x(x_0) = \frac{y'_\varphi(\varphi)}{x'_\varphi(\varphi)} = \frac{(e^\varphi \cdot \cos\varphi)'}{(e^\varphi \cdot \sin\varphi)'} = \frac{e^\varphi \cdot \cos\varphi - e^\varphi \cdot \sin\varphi}{e^\varphi \cdot \sin\varphi + e^\varphi \cdot \cos\varphi} = \frac{\cos\varphi - \sin\varphi}{\sin\varphi + \cos\varphi}$$

$x_0 = 1 \ \Rightarrow\ e^\varphi \cdot \cos\varphi = 1 \ \Rightarrow\ \varphi = 0$, так как $-\frac{\pi}{6} < \varphi < \frac{\pi}{6}$ по условию.

$$y'_x(0) = \frac{\cos 0 - \sin 0}{\sin 0 + \cos 0} = \frac{1}{1} = 1$$

Ответ: 1

Задача 8.15 Привидите пример функции, непрерывной на отрезке $[a;b]$, имеющей производную в каждой точке интервала $(a;b)$, но не имеющей производную в точке a.

Решение: $f(x) = \sqrt{\ln(x-a+1)}$ такая функция, она определена на луче $[a;+\infty)$. Проверим, что у нее нет производной в точке a:

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\ln(x-a+1)}(x-a+1)}$ В точке a производная не определена, так как имеет 0 в знаминателе.

Ответ: $f(x) = \sqrt{\ln(x-a+1)}$

Задача 8.16 Найдите вторую производную функции:

а) $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$

Решение:

$f'(x) = \sqrt{1+x^2} + \frac{2x^2}{2\sqrt{1+x^2}}$

$f''(x) = (f'(x))' = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} + \frac{4x\cdot 2\sqrt{1+x^2} - 2x^2 \cdot \frac{4x}{2\sqrt{1+x^2}}}{4(1+x^2)} = \frac{4x\sqrt{1+x^2}}{4(1+x^2)} + \frac{8x\sqrt{1+x^2} - \frac{8x^3}{2\sqrt{1+x^2}}}{4(1+x^2)} = \frac{4x\sqrt{1+x^2} + 8x\sqrt{1+x^2} - \frac{8x^3}{2\sqrt{1+x^2}}}{4(1+x^2)} =$

$= \frac{8x(1+x^2) + 16x(1+x^2) - 8x^3}{8(1+x^2)\cdot\sqrt{1+x^2}} = \frac{24x(1+x^2) - 8x^3}{8(1+x^2)\cdot\sqrt{1+x^2}}$

Ответ: $f''(x) = \frac{3x(1+x^2) - x^3}{(1+x^2)\cdot\sqrt{1+x^2}}$

б) $f(x) = (1+x^2)\operatorname{arctg} x$

Решение:

$f'(x) = 2x \cdot \operatorname{arctg} x + \frac{(1+x^2)}{1+x^2} = 2x \cdot \operatorname{arctg} x + 1$

$f''(x) = (f'(x))' = 2 \operatorname{arctg} x + \frac{2x}{1+x^2}$

Ответ: $f''(x) = 2 \operatorname{arctg} x + \frac{2x}{1+x^2}$

в) $f(x) = x[\sin(\ln x) + \cos(\ln x)]$

Решение:

$f'(x) = 1 \cdot [\sin(\ln x) + \cos(\ln x)] + x[\frac{\cos \ln x}{x} - \frac{\sin \ln x}{x}] =$

$= [\sin(\ln x) + \cos(\ln x)] + [\cos \ln x - \sin \ln x] = 2\cos(\ln x)$

$f''(x) = (f'(x))' = 2(\cos(\ln x))' = -\frac{2\sin(\ln x)}{x}$

Ответ: $f''(x) = 2(\cos(\ln x))' = -\frac{2\sin(\ln x)}{x}$

Задача 8.17 Найдите производные порядка n функции f:

а) $f(x) = \frac{1+2x}{3x-1}$

Решение:

$f'(x) = \left(\frac{1+2x}{3x-1}\right)' = \frac{2(3x-1)-3(1+2x)}{(3x-1)^2} = -5(3x-1)^{-2}$

$f''(x) = -5 \cdot (-2) \cdot (3x-1)^{-3} \cdot 3$

Предположим, что $f^{(n)}(x) = 5 \cdot (-1)^n \cdot n! \cdot 3^{n-1}(3x-1)^{-n-1}$

Докажем это по индукции:

База у нас верна: $f'(x) = -5(3x-1)^{-2} = 5 \cdot (-1) \cdot 3^0 \cdot (3x-1)^{-1-1}$

Шаг: пусть для $n-1$ верно, тогда $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))' =$
$= (5 \cdot (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot 3^{n-2}(3x-1)^{-n})' =$
$= 5 \cdot (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot 3^{n-2}(3x-1)^{-n} \cdot 3 \cdot \frac{1}{3x-1} \cdot (-n) = 5 \cdot (-1)^n \cdot n! \cdot 3^{n-1}(3x-1)^{-n-1}$

б) $f(x) = (x^2 + x + 1)e^{-3x}$

Решение:

По правилу Лейбцига $f^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k (x^2+x+1)^{(k)} \cdot (e^{-3x})^{(n-k)}$

$(x^2+x+1)'=2x+1$
$(x^2+x+1)''=2$
$(x^2+x+1)'''=0 \Rightarrow$ любая производная данной функции порядка больше 2 равна 0. Следовательно все слагаемые в правиле лейбцига с k $>$ 2 будут равны 0.

Получаем:

$$f^{(n)}(x)=1\cdot(x^2+x+1)\cdot(e^{-3x})^{(n)}+n\cdot(x^2+x+1)'\cdot(e^{-3x})^{(n-1)}+C_n^2\cdot(x^2+x+1)'''\cdot(e^{-3x})^{(n-2)}=$$
$$=(x^2+x+1)\cdot(e^{-3x})^{(n)}+n\cdot(2x+1)\cdot(e^{-3x})^{(n-1)}+n\cdot(n-1)\cdot(e^{-3x})^{(n-2)}=$$
$$=(x^2+x+1)\cdot(e^{-3x})\cdot(-3)^n+n\cdot(2x+1)\cdot(e^{-3x})\cdot(-3)^{n-1}+n\cdot(n-1)\cdot(e^{-3x})\cdot(-3)^{n-2}$$

Ответ: $f^{(n)}(x)=(e^{-3x})\cdot((x^2+x+1)\cdot(-3)^n+n\cdot(2x+1)\cdot(-3)^{n-1}+n\cdot(n-1)\cdot(-3)^{n-2})$

в) $f(x)=\sin x\cdot\cos^2 2x=\frac{\sin x\cdot(\cos 4x-1)}{2}$

Решение: воспользуемся формулой Лейбница:

$f^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k (\sin x)^{(k)}(\cos 4x)^{(n-k)}$

На семинаре мы доказывали, что $(\sin ax)^{(n)} = a^n\cdot\sin(ax+\frac{\pi n}{2})$ и что $(\cos ax)^{(n)} = a^n\cdot\cos\left(ax+\frac{\pi n}{2}\right)$

Получаем: $f^{(n)}(x)=\frac{1}{2}\cdot\sum_{k=0}^{n} C_n^k(\sin x)^{(k)}(\cos 4x-1)^{(n-k)}=f^{(n)}(x)=\frac{1}{2}\cdot\sum_{k=0}^{n} C_n^k(\sin\left(x+\frac{\pi k}{2}\right))\cdot(4^{n-k})\cdot\cos\left(4x+\frac{\pi(n-k)}{2}\right)$

Ответ: $f^{(n)}(x)=\frac{1}{2}\cdot\sum_{k=0}^{n} C_n^k\sin\left(x+\frac{\pi k}{2}\right)\cdot(4^{n-k})\cdot\cos\left(4x+\frac{\pi(n-k)}{2}\right)$

Задача 8.18 Применяя правило Лопиталя, вычислите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x^3}$

Решение:

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{0-0}{0}=\frac{0}{0}$
Мы имеем неопределенность $\frac{0}{0}$, следовательно, можно воспользоваться правилом Лапиталя:

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\arcsin 2x-2\arcsin x)'}{(x^3)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2}$

Все равно получаем неопределенность вида $\frac{0}{0}$, поэтому давайте-ка снова используем

Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}})'-(\frac{2}{\sqrt{1-x^2}})'}{(3x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{8x(1-4x^2)^{-\frac{3}{2}}-2x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{8(1-4x^2)^{-\frac{3}{2}}}{6}-\lim_{x\to 0}\frac{2(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}}{6}=\frac{4}{3}-\frac{1}{3}=1$$

Ответ: 1

б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^x-x}{1-x+\ln x}$

Решение:

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^x-x}{1-x+\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-1}{1-1+0}=\frac{0}{0}$.

Мы имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$, следовательно можено использовать правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^x-x}{1-x+\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{(e^{x\ln x}-x)'}{(1-x+\ln x)'}=\lim_{x\to 1}\frac{e^{x\ln x}\cdot(\ln x+1)-1}{-1+\frac{1}{x}}=\frac{1-1}{-1+1}=\frac{0}{0}$$

Снова используем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^{x\ln x}\cdot(\ln x+1)-1}{-1+\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{(x\cdot e^{x\ln x}\cdot(\ln x+1)-x)'}{(1-x)'}=\lim_{x\to 1}\frac{(x\cdot e^{x\ln x}\cdot(\ln x+1)+e^{x\ln x})\cdot(\ln x+1)+x\cdot e^{x\ln x}\cdot\frac{1}{x}-1}{-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{e^{x\ln x}\cdot(\ln x+1)+x\cdot e^{x\ln x}\cdot(\ln x+1)^2+\cdot e^{x\ln x}-1}{-1}=\lim_{x\to 1}-e^{x\ln x}\cdot((\ln x+1)+x\cdot(\ln x+1)^2+1)+1=$$

$$=\lim_{x\to 1}(-1\cdot(1+1+1)+1)=-2$$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)^{1/x}}{e}\right)^{1/x}$