ИДЗ по линейной алгебре 4 Смирнов Тимофей 236 ПМИ

1. Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 10+5i & 4+3i \\ -24-18i & -10-10i \end{pmatrix} \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{C})$$

найдите все значения $x \in \mathbb{C}$, при которых матрица $A - xE$ необратима.

Решение: чтобы матрица была необратима, ее определитель должен быть равен 0. То есть $\det(A - xE) = 0$

Пусть $x = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$. Тогда $A - xE = \begin{pmatrix} 10+5i & 4+3i \\ -24-18i & -10-10i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a+bi & 0 \\ 0 & a+bi \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 10+5i-(a+bi) & 4+3i \\ -24-18i & -10-10i-(a+bi) \end{pmatrix}$$

Решим уравнение:

$\det(A - xE) = (10 + 5i - (a + bi)) \cdot (-10 - 10i - (a + bi)) - (4 + 3i) \cdot (-24 - 18i) = 0$

$((10 - a) + (5 - b)i) \cdot ((-10 - a) + (-10 - b)i) - (4 + 3i) \cdot (-24 - 18i) = 0$

$(-50 + a^2 - 5b - b^2) + (2ab - 150 + 5a)i = (4 + 3i) \cdot (-24 - 18i) = -42 - 144i$

Получаем систему уравнений от неизвестных a, b:

$$\begin{cases} -50 + a^2 - 5b - b^2 = -42 \\ 2ab - 150 + 5a = -144 \end{cases}$$

Если $a = 0$, то система не имеет решений, так как во втором уравнении получаем $-150 = -144$, следовательно дальше будем работать с $a \neq 0$

Выразим b через a из второго уравнения: $b = \dfrac{6 - 5a}{2a}$, подставим это в первое уравнение и решим его:

$$-50 + a^2 - \frac{30 - 25a}{2a} - \left(\frac{6 - 5a}{2a}\right)^2 = -42$$

$$\frac{4a^4 - 60a + 50a^2 - 36 + 60a - 25a^2}{4a^2} = 8$$

$4a^4 + 25a^2 - 36 = 32a^2$

$4a^4 - 7a^2 - 36 = 0$

$(a-2)(a+2)(4a^2+9) = 0 \;\Rightarrow\; a = 2, a = -2$

При $a = 2, b = -1$, при $a = -2, b = -4$

Ответ: $x = 2 - i; \quad x = -2 - 4i$

2. Вычислите

$$\sqrt[4]{-\frac{9}{2} + \frac{9\sqrt{3}}{2}i}$$

Решение:

Пусть $z = -\frac{9}{2} + \frac{9\sqrt{3}}{2}i = 9\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 9\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3}i\right) = |z|(\cos\phi + \sin\phi i)$

Пусть $W = \{w \mid w^4 = z, w \in \mathbb{C}\}$

$$w^4 = z \;\Rightarrow\; w = \sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{|z|}\cdot\left(\cos\frac{\phi + 2\pi k}{4} + \sin\frac{\phi + 2\pi k}{4}i\right) = \sqrt[4]{9}\cdot\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi k}{4} + \sin\frac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi k}{4}i\right)$$
$k \in \{0, 1, 2, 3\}$

Ответ:

Подставляя $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, получаем множество W:

При $k = 0$ имеем : $\sqrt[4]{z} = \sqrt{3}\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{12} + \sin\frac{2\pi}{12}i\right)$;

При $k = 1$ имеем: $\sqrt[4]{z} = \sqrt{3}\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3}i\right)$;

При $k = 2$ имеем: $\sqrt[4]{z} = \sqrt{3}\cdot\left(\cos\frac{7\pi}{6} + \sin\frac{7\pi}{6}i\right)$;

При $k = 3$ имеем: $\sqrt[4]{z} = \sqrt{3}\cdot\left(\cos\frac{5\pi}{3} + \sin\frac{5\pi}{3}i\right)$;

3. Докажите, что векторы

$$v_1 = \begin{pmatrix} -10 \\ -6 \\ 6 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -90 \\ -52 \\ 56 \\ 14 \\ -13 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 180 \\ 114 \\ -102 \\ a \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

линейно независимы при всех значениях параметра a, и для каждого значения a дополните эти векторы до базиса всего пространства $\mathbb{R}^5$.

Решение: Чтобы эти векторы были линейно независимыми при любых a, нам необходимо доказать, что единственным решением уравнения $x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + x_3 \cdot v_3 = 0$ были иксы: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Если записать эти иксы в столбец, то по сути получится ОСЛУ: $\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Запишем эту систему в виде расширенной матрицы и приведем ее к улучшенному ступенчатому виду при помощи элементарных преобразований:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -10 & -90 & 180 & 0 \\ -6 & -52 & 114 & 0 \\ 6 & 56 & -102 & 0 \\ 1 & 14 & a & 0 \\ -1 & -13 & \frac{7}{2} & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 14 & a & 0 \\ -10 & -90 & 180 & 0 \\ -6 & -52 & 114 & 0 \\ 6 & 56 & -102 & 0 \\ -1 & -13 & \frac{7}{2} & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +10(1) \\ +6(1) \\ -6(1) \\ +(1) \end{array} \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 14 & a & 0 \\ 0 & 50 & 180+10a & 0 \\ 0 & 32 & 114+6a & 0 \\ 0 & -28 & -102-6a & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{2}+a & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 14 & a & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{2}+a & 0 \\ 0 & 50 & 180+10a & 0 \\ 0 & 32 & 114+6a & 0 \\ 0 & -28 & -102-6a & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -50(2) \to \\ -32(2) \\ +28(2) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 14 & a & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{2}+a & 0 \\ 0 & 0 & 5-40a & 0 \\ 0 & 0 & 2-26a & 0 \\ 0 & 0 & 22a-4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ :5 \\ :2 \\ :2 \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 14 & a & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{2}+a & 0 \\ 0 & 0 & 1-9a & 0 \\ 0 & 0 & 1-13a & 0 \\ 0 & 0 & 11a-2 & 0 \end{array}\right)$$

Чтобы векторы были линейно зависимыми, данная система должна иметь ненулевое решение, для этого необходимо, чтобы в расширенной матрице были свободные переменные. Чтобы они были, нам необходимо, чтобы все три последние строки были нулевыми (1я и 2я строки нулевыми быть уже не смогут). То есть нам необходимо, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\begin{cases} 1-9a=0 \\ 1-13a=0 \\ 11a-2=0 \end{cases}$$

Но тогда a должно будет одновременно равняться трем числам $\frac{1}{9}, \frac{1}{13}, \frac{2}{11}$, а это невозможно, следовательно наша система векторов линейно независима при любых a.

Запишем наши векторы в матрицу $\begin{pmatrix} u_1^T \\ u_2^T \\ u_3^T \end{pmatrix}$ и приведем ее элементарными преобразованиями строк к ступенчатому виду, при этом заметим, что линейная оболочка данной системы векторов сохранится:

$$\begin{pmatrix} -10 & -6 & 6 & 1 & -1 \\ -90 & -52 & 56 & 14 & -13 \\ 180 & 114 & -102 & a & \frac{7}{2} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -9(1) \\ +18(1) \end{array} \to \begin{pmatrix} -10 & -6 & 6 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 5 & -4 \\ 0 & 6 & 6 & a+18 & -\frac{29}{2} \end{pmatrix} \begin{array}{l} :(-10) \\ \\ -3(2) \end{array} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ 0 & 2 & 2 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & a+3 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ :2 \\ \\ \end{array}$$

Транспонируем матрицу, чтобы наши векторы стали столбцами:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ 0 & 2 & 2 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & a+3 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}^T \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & 2 & 0 \\ -\frac{3}{5} & 2 & 0 \\ -\frac{1}{10} & 5 & a+3 \\ \frac{1}{10} & -4 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

1). Пусть $a \neq 3$. Дополним нашу систему векторами e_3, e_5 из стандартного базиса $\mathbb{R}^5$ и проверим ее на линейную зависимость. Для этого нужно понять, найдутся ли такие 5 коэффициентов, где хотя бы один не нулевой, что линейная комбинация векторов с этими коэффициентами равна 0. То есть достаточно решить СЛУ, где в расширенной матрице вместо строк будут наши 5 векторов:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a+3 & -\frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} -\frac{1}{10}(5) \\ +4(5) \\ \\ +\frac{5}{2}(5) \\ \\ \end{array} \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{10} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a+3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} +\frac{3}{5}(3) \\ -2(3) \\ \\ \\ \\ \end{array} \to$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & \frac{3}{5} & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a+3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ :2 \\ \\ \\ \\ \end{array} \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & \frac{3}{5} & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a+3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} -\frac{3}{5}(2) \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{8}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a+3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \\ :(a+3) \\ \\ \end{array} \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{8}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} +\frac{8}{5} \\ -\frac{5}{2} \\ \\ : \\ \\ \end{array} \to$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Получаем улучшенный ступенчатый вид, при котором матрица превращается в единичную, следовательно единственное ее решение нулевое (все это при $a \neq 3$).

2). При $a = 3$ мы дополним нашу систему векторов $u_1 u_2 u_3$ векторами e_3, e_4 из стандартного базиса $\mathbb{R}^5$. Так же проверим, что эта система линейно независима:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +4(5) \\ \\ \\ \times(-\frac{5}{2}) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +4(5)-5(4)-2(3) \\ \\ \\ \\ \end{array} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ :2 \\ \\ \\ \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} -\frac{3}{5}(2)+\frac{3}{5}(3)+\frac{1}{10}(4)-\frac{1}{10}(5) \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Матрица опять единичная, следовательно опять только нулевое ршеение. Ура, в зависимости от a мы дополнили нашу систему векторов до базиса!

Ответ:

1). При $a \neq 3$ дополним нашу систему из векторов $u_1 u_2 u_3$ до базиса $\mathbb{R}^5$ векторами $e_3 e_5$ из стандартного базиса $\mathbb{R}^5$.

2). При $a = 3$ дополним нашу систему из векторов $u_1 u_2 u_3$ до базиса $\mathbb{R}^5$ векторами $e_3 e_4$ из стандартного базиса $\mathbb{R}^5$.

4. Подпространство $U \subseteq \mathbb{R}^5$ задано как линейная оболочка векторов

$$v_1 = \begin{pmatrix} 13 \\ 11 \\ 9 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 26 \\ 17 \\ 9 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 9 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}, \; v_4 = \begin{pmatrix} -12 \\ -9 \\ -1 \\ -1 \\ -10 \end{pmatrix}$$

(а) Выберите среди данных векторов базис подпространства U.

(б) Среди векторов

$$v_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \\ -9 \\ -7 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} -10 \\ -6 \\ -4 \\ -7 \\ -7 \end{pmatrix}$$

выберите те, которые лежат в U, и найдите их выражение через найденный в пункте (а) базис.

(а) **Решение:** из любого конечного набора векторов можно выбрать базис его линейной оболочки, сделаем это.

1). Первым вектором в базисе будет v_1 (он не нулевой, а следовательно линейно независим), проверим, будет ли система векторов v_1, v_2 линейно независимой. Пусть найдутся α_1, α_2, где $\alpha_1 \neq 0$ или $\alpha_2 \neq 0$ и $\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 = 0$, тогда такая система должна иметь ненулевое решение:

$$\begin{cases} 13\alpha_1 + 26\alpha_2 = 0 \\ 11\alpha_1 + 17\alpha_2 = 0 \\ 9\alpha_1 + 9\alpha_2 = 0 \\ 6\alpha_1 + 15\alpha_2 = 0 \\ 6\alpha_1 + 20\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Из трейтьей строки следует, что $\alpha_1 = -\alpha_2$, но подставив это в первую строку мы поулчаем уравнение $13\alpha_2 = 0 \;\Rightarrow\; \alpha_2 = 0 \;\Rightarrow\; \alpha_1 = 0$.

Получается, что единственным решением данной системы уравнений может быть нулевое решение.

Следовательно векторы v_1, v_2 линейно независимы

2). Добавим в эту систему трией вектор и проверим, останется ли она линейно независимой. Если она будет линейно зависимой, то найдется набор скаляров $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, что $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \alpha_3 v_3 = 0$ и $\exists \alpha_i \neq 0, i \in \{1, 2, 3\}$.

Решим данную систему:

$$\begin{cases} 13\alpha_1 + 26\alpha_2 + 5\alpha_3 = 0 \\ 11\alpha_1 + 17\alpha_2 + 5\alpha_3 = 0 \\ 9\alpha_1 + 9\alpha_2 + 9\alpha_3 = 0 \\ 6\alpha_1 + 15\alpha_2 + 6\alpha_3 = 0 \\ 6\alpha_1 + 20\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Перепишем это в виде расширенной матрицы и приведем ее к УСВ элементарными преобразованиями:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 13 & 26 & 5 & 0 \\ 11 & 17 & 5 & 0 \\ 9 & 9 & 9 & 0 \\ 6 & 15 & 6 & 0 \\ 6 & 20 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 9 & 9 & 9 & 0 \\ 13 & 26 & 5 & 0 \\ 11 & 17 & 5 & 0 \\ 6 & 15 & 6 & 0 \\ 6 & 20 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} :9 \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 13 & 26 & 5 & 0 \\ 11 & 17 & 5 & 0 \\ 6 & 15 & 6 & 0 \\ 6 & 20 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -13(1) \\ -11(1) \\ -6(1) \\ -6(1) \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 13 & -8 & 0 \\ 0 & 6 & -6 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & -7 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \times(-\frac{1}{6}) \\ :9 \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 13 & -8 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & -7 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +1(4) \\ \\ \\ \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 13 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & -7 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 13 & -8 & 0 \\ 0 & 14 & -7 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} -1(2) - 1(3) \\ \\ \\ -13(2) + 8(3) \\ -14(2) + 7(3) \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Получаем, что единственным решением данной системы будет нулевое решение. Следовательно векторы v_1, v_2, v_3 линейно независимы.

3). Теперь добавим к нашей системе последние вектор v_4, проверим, будет ли эта система линейно независима, решив данную систему уравнений (пусть опять набором скаляров будет $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ при соответствующих векторах):

$$\begin{cases} 13\alpha_1 + 26\alpha_2 + 5\alpha_3 - 12\alpha_4 = 0 \\ 11\alpha_1 + 17\alpha_2 + 5\alpha_3 - 9\alpha_4 = 0 \\ 9\alpha_1 + 9\alpha_2 + 9\alpha_3 - \alpha_4 = 0 \\ 6\alpha_1 + 15\alpha_2 + 6\alpha_3 - \alpha_4 = 0 \\ 6\alpha_1 + 20\alpha_2 - \alpha_3 - 10\alpha_4 = 0 \end{cases}$$

Перепишем это в виде расширенной матрицы и приведем ее к УСВ элементарными преобразованиями:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 13 & 26 & 5 & -12 & 0 \\ 11 & 17 & 5 & -9 & 0 \\ 9 & 9 & 9 & -1 & 0 \\ 6 & 15 & 6 & -1 & 0 \\ 6 & 20 & -1 & -10 & 0 \end{array}\right) : 9 \to \begin{array}{l} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -\frac{1}{9} & 0 \\ 13 & 26 & 5 & -12 & 0 \\ 11 & 17 & 5 & -9 & 0 \\ 6 & 15 & 6 & -1 & 0 \\ 6 & 20 & -1 & -10 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ -13(1) \\ -11(1) \\ -6(1) \\ -6(1) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -\frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 13 & -8 & -\frac{95}{9} & 0 \\ 0 & 6 & -6 & -\frac{70}{9} & 0 \\ 0 & 9 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 14 & -7 & -\frac{28}{3} & 0 \end{array}\right) : 6 \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -\frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{70}{54} & 0 \\ 0 & 13 & -8 & -\frac{95}{9} & 0 \\ 0 & 9 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 14 & -7 & -\frac{28}{3} & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -13(2) \to \\ -9(2) \\ -14(2) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -\frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{70}{54} & 0 \\ 0 & 0 & 5 & \frac{170}{27} & 0 \\ 0 & 0 & 9 & \frac{34}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 7 & \frac{238}{27} & 0 \end{array}\right) : 5 \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -\frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{70}{54} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{34}{27} & 0 \\ 0 & 0 & 9 & \frac{34}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 7 & \frac{238}{27} & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \\ -9(3) \\ -7(3) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -\frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{70}{54} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{34}{27} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ +1(3) \\ \\ \\ \\ \end{array} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -\frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{27} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{34}{27} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} -1(2) - 1(3) \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{27} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{34}{27} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Мы видим, что данная система имеет ненулевое решение, так как в ней есть свободные неизвестные, следовательно система векторов (v_1, v_2, v_3, v_4) линейно зависимы. То есть v_4 лежит в линейной оболочке (v_1, v_2, v_3).

Линейная оболочка векторов $v_1 v_2 v_3$ равна линейной оболочке тех же векторов вместе с вектором v_4, так как он выражается через них.

Итак, мы нашли базис данной системы векторов. В него входят векторы v_1, v_2, v_3.

(б) Чтобы проверить, что вектор лежит в пространстве с некоторым базисом, достаточно понять, можно ли этот вектор выразить через линейную комбинацию векторов этого базиса. Проверим это для векторов u_1, u_2.

1). Проверим, найдется ли такая линейная комбинация, что $\alpha_1 v_2 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = u_1$, для этого решим следующую систему:

$$\begin{cases} 13\alpha_1 + 26\alpha_2 + 5\alpha_3 = -5 \\ 11\alpha_1 + 17\alpha_2 + 5\alpha_3 = 0 \\ 9\alpha_1 + 9\alpha_2 + 9\alpha_3 = 0 \\ 6\alpha_1 + 15\alpha_2 + 6\alpha_3 = -9 \\ 6\alpha_1 + 20\alpha_2 - \alpha_3 = -7 \end{cases}$$

Запишем это в виде расширенной матрицы и приведем ее к УСВ при помощи ЭП:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 13 & 26 & 5 & -5 \\ 11 & 17 & 5 & 0 \\ 9 & 9 & 9 & 0 \\ 6 & 15 & 6 & -9 \\ 6 & 20 & -1 & -7 \end{array}\right) : 9 \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 13 & 26 & 5 & -5 \\ 11 & 17 & 5 & 0 \\ 6 & 15 & 6 & -9 \\ 6 & 20 & -1 & -7 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -13(1) \\ -11(1) \to \\ -6(1) \\ -6(1) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 13 & -8 & -5 \\ 0 & 6 & -6 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & -9 \\ 0 & 14 & -7 & -7 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ : 9 \\ \\ \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 13 & -8 & -5 \\ 0 & 6 & -6 & 0 \\ 0 & 14 & -7 & -7 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -13(2) \\ -6(2) \\ -14(2) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & -7 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ : (-6) \\ \\ \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & -7 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ +8(3) \\ +7(3) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & -7 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{l} -1(2) - 1(3) \\ \\ \\ +8(3) \\ +7(3) \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Получаем коэффициенты $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = -1, \alpha_3 = -1$ такие, что $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = u_1$.

Следовательно вектор $u_1 \in \langle v_1 v_2 v_3 \rangle$

2). Проверим, найдется ли такая линейная комбинация, что $\alpha_1 v_2 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = u_2$, для этого решим следующую систему:

$$\begin{cases} 13\alpha_1 + 26\alpha_2 + 5\alpha_3 = -10 \\ 11\alpha_1 + 17\alpha_2 + 5\alpha_3 = -6 \\ 9\alpha_1 + 9\alpha_2 + 9\alpha_3 = -4 \\ 6\alpha_1 + 15\alpha_2 + 6\alpha_3 = -7 \\ 6\alpha_1 + 20\alpha_2 - \alpha_3 = -7 \end{cases}$$

Запишем это в виде расширенной матрицы и приведем ее к УСВ при помощи ЭП:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 13 & 26 & 5 & -10 \\ 11 & 17 & 5 & -6 \\ 9 & 9 & 9 & -4 \\ 6 & 15 & 6 & -7 \\ 6 & 20 & -1 & -7 \end{array}\right) : 9 \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -\frac{4}{9} \\ 13 & 26 & 5 & -10 \\ 11 & 17 & 5 & -6 \\ 6 & 15 & 6 & -7 \\ 6 & 20 & -1 & -7 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -13(1) \\ -11(1) \to \\ -6(1) \\ -6(1) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -\frac{4}{9} \\ 0 & 13 & -8 & -\frac{38}{9} \\ 0 & 6 & -6 & -\frac{10}{9} \\ 0 & 9 & 0 & -\frac{13}{3} \\ 0 & 14 & -7 & -\frac{13}{3} \end{array}\right) : 6 \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -\frac{4}{9} \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{10}{54} \\ 0 & 13 & -8 & -\frac{38}{9} \\ 0 & 9 & 0 & -\frac{13}{3} \\ 0 & 14 & -7 & -\frac{13}{3} \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -13(2) \to \\ -9(2) \\ -14(2) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -\frac{4}{9} \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{10}{54} \\ 0 & 0 & 5 & -\frac{49}{27} \\ 0 & 0 & -9 & -\frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 7 & -\frac{47}{27} \end{array}\right) : 5$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -\frac{4}{9} \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{10}{54} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{49}{135} \\ 0 & 0 & -9 & -\frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 7 & -\frac{47}{27} \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ +9(3) \\ -7(3) \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -\frac{4}{9} \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{10}{54} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{49}{135} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{89}{15} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{5} \end{array}\right)$$

Справа в матрице в последних двух строках не нули, а слева все элементы нулевые, следовательно у данной системы нет решений, следовательно нельзя найти линейную комбинацию векторов $v_1v_2v_3$ такую, что она равна вектору u_2. **То есть он не лежит в их линейной оболочке.**

5. Найдите базис и размерность подпространства $U \subseteq \mathbb{R}^5$, являющегося множеством решений системы

$$\begin{cases} x_1 - 12x_2 + 15x_3 + 7x_4 + 27x_5 = 0 \\ -7x_1 - 5x_2 + 9x_3 + 5x_4 + 11x_5 = 0 \\ -4x_1 - 5x_2 + 6x_3 + 2x_4 + 20x_5 = 0 \\ 6x_1 - 8x_2 + 7x_3 + 2x_4 + 23x_5 = 0 \end{cases}$$

Решение: решим эту систему, записав ее расширенную матрицу и приведя ее элементарными преобразованиями строк к улечшенному ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -12 & 15 & 7 & 27 & 0 \\ -7 & -5 & 9 & 5 & 11 & 0 \\ -4 & -5 & 6 & 2 & 20 & 0 \\ 6 & -8 & 7 & 2 & 23 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ +7(1) \\ +4(1) \\ -6(1) \end{array} \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -12 & 15 & 7 & 27 & 0 \\ 0 & -89 & 114 & 54 & 200 & 0 \\ 0 & -53 & 66 & 30 & 128 & 0 \\ 0 & 64 & -83 & -40 & -139 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ :(-89) \\ \\ \\ \end{array} \to$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -12 & 15 & 7 & 27 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{114}{89} & -\frac{54}{98} & -\frac{200}{89} & 0 \\ 0 & -53 & 66 & 30 & 128 & 0 \\ 10 & 64 & -83 & -40 & -139 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ +53(2) \\ -64(2) \end{array} \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -12 & 15 & 7 & 27 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{114}{89} & -\frac{54}{98} & -\frac{200}{89} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{168}{89} & -\frac{192}{89} & \frac{792}{89} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{91}{89} & -\frac{104}{89} & \frac{429}{89} & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -12 & 15 & 7 & 27 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{114}{89} & -\frac{54}{98} & -\frac{200}{89} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{168}{89} & -\frac{192}{89} & \frac{792}{89} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{91}{89} & -\frac{104}{89} & \frac{429}{89} & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \\ -\frac{13}{24}(3) \end{array} \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -12 & 15 & 7 & 27 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{114}{89} & -\frac{54}{98} & -\frac{200}{89} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{168}{89} & -\frac{192}{89} & \frac{792}{89} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -12 & 15 & 7 & 27 & \bigg| & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{114}{89} & -\frac{54}{98} & -\frac{200}{89} & \bigg| & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{168}{89} & -\frac{192}{89} & \frac{792}{89} & \bigg| & 0 \end{pmatrix} \times (-\frac{89}{168}) \to \begin{pmatrix} 1 & -12 & 15 & 7 & 27 & \bigg| & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{114}{89} & -\frac{54}{89} & -\frac{200}{89} & \bigg| & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{7} & -\frac{33}{7} & \bigg| & 0 \end{pmatrix} \to$$

Пулучаем три главные переменные x_1, x_2, x_3 и две свободные переменные x_4, x_5. Выразим через них все остальные переменные (я не стал доводить матрицу до УСВ, потому что там получались ужасные цифры и я не очень понял почему).

$x_3 = -\frac{8}{7}x_4 + \frac{33}{7}x_5$

$x_2 = \frac{114}{89}x_3 + \frac{54}{89}x_4 + \frac{200}{89}x_5 = \frac{114}{89} \cdot (-\frac{8}{7}x_4 + \frac{33}{7}x_5) + \frac{54}{89}x_4 + \frac{200}{89}x_5 = -\frac{6}{7}x_4 + \frac{58}{7}x_5$

$x_1 = 12 \cdot x_2 - 15 \cdot x_3 - 7x_4 - 27x_5 = 12 \cdot (-\frac{6}{7}x_4 + \frac{58}{7}x_5) - 15 \cdot (-\frac{8}{7}x_4 + \frac{33}{7}x_5) - 7x_4 - 27x_5 = -\frac{1}{7}x_4 + \frac{12}{7}x_5$

Получаем столбец решений: $u = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7}x_4 + \frac{12}{7}x_5 \\ -\frac{6}{7}x_4 + \frac{58}{7}x_5 \\ -\frac{8}{7}x_4 + \frac{33}{7}x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$

По методу построения фундаментальной системы решений мы получим следующую систему решений:

$$u_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} \\ -\frac{6}{7} \\ -\frac{8}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} \frac{12}{7} \\ \frac{58}{7} \\ \frac{33}{7} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Эта система векторов будет базисом множества решений данной ОСЛУ. В базисе находится 2 вектора, следовательно размерность подпространства $U \in \mathbb{R}^5$ равна 2.