ДЗ по линейной алгебре 10 Смирнов Тимофей 236 ПМИ

1. Найти ФСР следующих однородных СЛУ.

1.1

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$$

Перепишем матрицу в виде расширенной и элементарными преобразованиями приведем ее к улучшенному ступенчатому виду.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & -7 & 0 \end{array}\right)_{+1(1)} \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 0 \end{array}\right)^{+1(2)} \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

Получаем выражение главных переменных через свободные:

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 + 3x_4 \\ x_3 = 5x_4 \\ x_2, x_4 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

ФСР данной матрицы будет выглядеть так:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.2

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 + x_6 = 0 \\ 3x_4 + 2x_5 + 17x_6 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 8x_3 + 2x_5 - 5x_6 = 0 \\ 3x_4 - 2x_5 - x_6 = 0 \end{cases}$$

Перепишем матрицу в виде расширенной и элементарными преобразованиями приведем ее к улучшенному ступенчатому виду.

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 17 & 0 \\ 2 & -4 & 8 & 0 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ -2(1) \\ \\ \end{array} \to \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 2 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ +2(2) \\ -1(2) \end{array} \to$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -18 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \\ +\frac{2}{3} \end{array} \to \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ :3 \\ \\ \end{array} \to$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 9 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -1(3) \\ \\ \end{array} \to \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 9 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ :3 \\ :2 \end{array} \to$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{8}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{9}{2} & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} -3(2) \\ \\ \\ \end{array} \to \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -2 & 4 & 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{8}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{9}{2} & 0 \end{array}\right)$$

Получаем выражение главных переменных через свободные:

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 - 4x_3 + 7x_6 \\ x_4 = -\frac{8}{3}x_6 \\ x_5 = -\frac{9}{2}x_6 \\ x_2, x_3, x_6 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

ФСР данной матрицы будет выглядеть так:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{8}{3} \\ -\frac{9}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.3

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Тут сразу можно выразить x_1 через x_2 и x_3:

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 - 3x_3 \end{cases}$$

ФСР данной матрицы выглядит так:

$$u_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.4

$$\begin{cases} x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 0 \\ 5x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Перепишем матрицу в виде расширенной и элементарными преобразованиями приведем ее к улучшенному ступенчатому виду.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} -1(2) \\ \end{matrix} \to \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ :5 \end{matrix} \to \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} & 0 \end{array}\right)$$

Теперь выразим главные переменные через свободные:

$$\begin{cases} x_2 = -3x_4 \\ x_3 = -\frac{2}{5}x_4 \\ x_1, x_4 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

ФСР данной матрицы будет выглядеть так:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -\frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.5

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

Перепишем матрицу в виде расширенной и элементарными преобразованиями приведем ее к улучшенному ступенчатому виду.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -2(1) \\ -1(1) \end{array} \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{array}\right) -1(3) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ +4(2) \end{array} \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} -3(2) \\ \\ \\ \end{array} \to$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Теперь выразим главные переменные через свободные:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

ФСР данной ОСЛУ пустое множество.

2. Найдите базис и размерность подпространства $\{f \in \mathbb{R}_{[x]\leq 3} | f(1) = f'(1) = 0\}$ в пространстве $\mathbb{R}_{[x]<3}$ многочленов степени не выше 3.

Решение: Пусть наше пространство многочленов задается множеством коэффициентов a_0, a_1, a_2, a_3, где каждый многочлен выглядит следующим образом: $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. При этом должно выпонляться условие равенства производной и функции в точке 1:

$$\begin{cases} f(1) = a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 0 \\ f'(1) = 3a_3 + 2a_2 + a_1 = 0 \end{cases}$$

Решим эту ОСЛУ и выпишем ее ФСР:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -3(1) \end{array} \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} +1(2) \\ \\ \end{array} \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \times(-1) \end{array} \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Теперь выразим главные переменные через свободные:

$$\begin{cases} a_0 = a_2 + 2a_3 \\ a_1 = -2a_2 - 3a_3 \\ a_2, a_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

ФСР данной ОСЛУ выглядит так:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Каждый многочлен степени не выше 4х задается вектором из $\mathbb{R}^4$, причем каждому вектору из $\mathbb{R}^4$ соответствует единственный многочлен. ФСР решенной выше СЛУ будет базисом подпространства из $\mathbb{R}^4$, удовлетворяющего условиям задачи. Следовательно эта система будет необходимым базисом.

В виде многочленов это выглядит так:

$$\begin{cases} f_1(x) = x^3 - 2x^2 + x \\ f_2(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1 \end{cases}$$

Ответ: базисом такого подпространства будет множество $\{f_1(x), f_2(x)\}$

3. Найдите какой-нибудь базис в пространстве $U = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle \subseteq \mathbb{R}^5$, где $v_1 = (1, 0, 0, -1, 0)^T$, $v_2 = (2, 1, 1, 0, 1)^T$, $v_3 = (1, 1, 1, 1, 1)^T$, $v_4 = (0, 1, 1, 3, 4)^T$.

Решение: чтобы найти базис, нам необходимо выбрать систему линейно независимых векторов $u_1, u_2, u_3.u_4$. Для этого запишем векторы в матрицу в виде строк и элементарными преобразованиями строк приеведем матрицу к улучшенному ступенчатому виду.

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -2(1) \\ -1(1) \\ \\ \end{array} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ -1(2) \\ -1(2) \end{array} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Мы привели матрицу к ступенчатому виду, при этом обнулилась 3я строка, следовательно вектор u_3 лежит в линейной оболочке векторов u_1, u_2, u_4, а эти вектора линейно независимы.

Ответ: базисом будут вектора u_1, u_2, u_4.

4. Пусть $U = \langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$, где $v_1 = (1,0,-1)^T$, $v_2 = (1,1,1)^T$, $v_3 = (0,-1,-2)^T$, $v_4 = (3,3,3)^T$, $v_5 = (5{,}2,-1)^T$. Выберите из системы векторов v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 базис U и найдите линейные выражения остальных векторов системы через этот базис.

Решение: запишем этим веторы вместо в строк в матрицу и проведем с ними серию элементарных преобразований строк, приведя матрицу к УСВ. После этого линейная оболочка этих векторов не поменяется, а мы найдем векторы, выражающиеся через остальные.

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -3(2) \\ \\ \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -1(1) \\ \\ \\ -5(1) \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +1(2) \\ \\ -2(2) \end{matrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Мы получили, что векторы v_3, v_4, v_5 выражаются через линейную комбинацию векторов v_1, v_2. Теперь уже без всяких уравнений легко уидеть, как они выражаются:

Ответ:

$$\begin{cases} v_3 = v_1 - v_2 \\ v_4 = 3v_2 \\ v_5 = 3v_1 + 2v_2 \end{cases}$$

5. Пусть $v_1 = (-2{,}1,-3{,}2{,}3)^T$, $v_2 = (-2{,}3,-5{,}7{,}4)^T$, $v_3 = (2{,}1{,}1{,}3,-2)^T$, $v_4 = (9,-2{,}4,-3,-8)^T$ — векторы в $\mathbb{R}^5$. Выберите линейно независимую систему из векторов v_1, v_2, v_3, v_4 и дополните её до базиса $\mathbb{R}^5$.

Решение: запишем векторы в качестве строк в матрицу и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & -5 & 7 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & -2 \\ 9 & -2 & 4 & -3 & -8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -1(1) \\ +1(1) \\ +\frac{9}{2} \end{matrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{19}{2} & 6 & \frac{11}{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \times 2 \end{matrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & 5 & -19 & 12 & 11 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -1(2) \\ -\frac{5}{2} \end{matrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & -\frac{1}{2} & \frac{17}{2} \end{pmatrix} \to$$

Мы выяснили, что векторы v_1, v_2, v_4 линейно независимы, чтобы дополнить их до базиса, необходимо добавить к ним векторы из стандартного базиса, которые дополнят свободные столбцы, эти векторы будут e_4, e_5.

Ответ: базис будет иметь вид v_1, v_2, v_4, e_4, e_5.