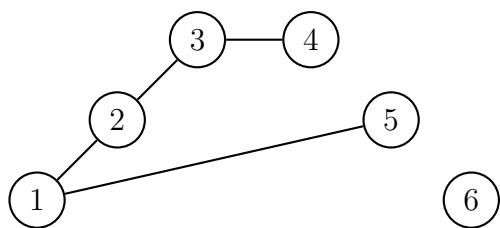


ДЗ по дискретной математике 11 Смирнов Тимофей 236 ПМИ

Д11.1 Сколько компонент связности в лесу на 6 вершинах с 4 рёбрами? Приведите пример такого леса.

Решение: Цикломатическое число леса равно 0. Так как количество вершин в нашем графе 6, а ребер 4, то чтобы цикломатическое число было равно нулю в нем должно быть ровно 2 компоненты связности.

Пример такого графа:



Д11.2 Сколько простых путей может быть в дереве на n вершинах? Укажите все возможные варианты. (Ответ, разумеется, должен быть обоснован.)

Решение: в дереве между любыми двумя вершинами существует единственный простой путь. Следовательно, в дереве столько же простых путей, сколько в нем упорядоченных пар вершин. То есть для дерева на n вершинах существует n^2 упорядоченных пар вершин (пары типа (x, x) тоже считаются, так как они тоже образуют путь), а, следовательно, и простых путей.

Ответ: n^2

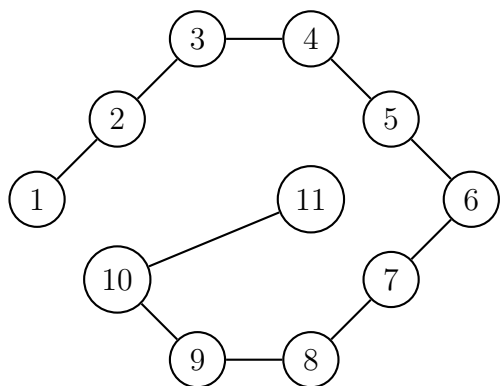
Д11.3 Найдите наибольшее количество вершин в связном графе, сумма степеней вершин в котором равна 20.

Решение:

Заметим, что при добавлении новой вершины в связный граф, его суммарная степень вершин увеличивается как минимум на 2, так как добавляется 1 к степени новой вершины и 1 к степени вершины, к которой присоединяется новая. Если в графе 1 вершина, то суммарная степень

вершин равна 0. Следовательно, чтобы получить суммарную степень вершин 20, мы можем добавить не более 10 ребер. Что в итоге даст 11.

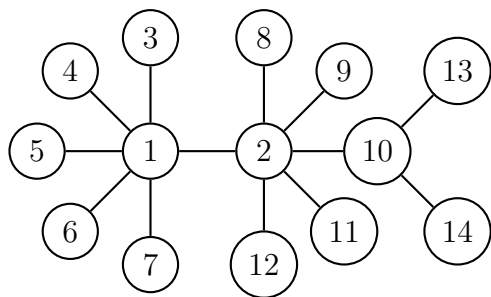
Тогда приведем пример графа с 11 вершинами:



Д11.4 а) Приведите пример дерева на 14 вершинах, в котором есть ровно две вершины степени 6 и нет ни одной вершины степени 2. б) В дереве на 13 вершинах есть ровно две вершины степени 6. Следует ли из этого, что в этом дереве есть вершина степени 2?

Решение:

а).



б). Если в дереве 13 вершин, то в нем $13 - 1 = 12$ ребер. Пусть d_1, \dots, d_{13} - это степени вершин, тогда:

$$d_1 + \dots + d_{13} = 2 \cdot 12 = 24$$

Но мы знаем, что две степени вершин равны 6, пусть это d_1, d_2 , тогда наше уравнение примет вид $d_3 + \dots + d_{13} = 12$

Так как мы работаем с деревом, то каждая вершина в нем имеет степень не менее 1, следовательно, так как в нашем уравнении осталось 11 слагаемых и все они как минимум 1. То есть минимум их сумма равна 11, чтобы получить 12 нужно прибавить 1 к одному из слагаемых, но в таком случае степень одной из вершин будет равна 2.

Ответ: да, следует.