ДЗ по математическому анализу 7 Смирнов Тимофей 236 ПМИ

Задача 7.7 Найдите точки разрыва, установите их род и доопределите функцию по непрерывности в точках устранимого разрыва:

а). $y = \dfrac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}} = \dfrac{x(x-1)}{x(x+1)}$

$$\begin{cases} y = \dfrac{x-1}{x+1} \\ x \neq -1, 1, 0 \end{cases}$$

Посчитаем левый и правый пределы в каждой точке:

- Рассмотрим левый и правый пределы при $x \to -1$:

1.1 $\lim\limits_{x\to-1-0} \dfrac{x-1}{x+1} = \lim\limits_{x\to-1-0} 1 - \dfrac{2}{x+1} = 1 + \infty = \infty$

1.2 $\lim\limits_{x\to-1+0} 1 - \dfrac{2}{x+1} = 1 - \infty = -\infty$

В точке $x = -1$ мы имеем разрыв второго рода, так как нет левого и правого предела (они равны $+\infty$ и $-\infty$).

- Рассмотрим левый и правый пределы при $x \to 0$:

2.1 $\lim\limits_{x\to0-0} \dfrac{x-1}{x+1} = \lim\limits_{x\to0-0} 1 - \dfrac{2}{x+1} = 1 - 2 = -1$

2.2 $\lim\limits_{x\to0+0} \dfrac{x-1}{x+1} = \lim\limits_{x\to0+0} 1 - \dfrac{2}{x+1} = 1 - 2 = -1$

В точке $x = 0$ мы имеем устранимый разрыв, так как и левый и правый пределы в ней равны -1, то есть для устранения разрыва необходимо доопределить $y = -1$ при $x = 0$.

- Рассмотрим левый и правый пределы при $x \to 1$:

3.1 $\lim\limits_{x\to1-0} \dfrac{x-1}{x+1} = \lim\limits_{x\to1-0} 1 - \dfrac{2}{x+1} = 1 - 1 = 0$

3.2 $\lim\limits_{x\to1+0} \dfrac{x-1}{x+1} = \lim\limits_{x\to1+0} 1 - \dfrac{2}{x+1} = 1 - 1 = 0$

В точке $x = 1$ мы имеем устранимый разрыв, так как и левый и правый пределы в ней равны 0, следовательно для устранения разрыва необходимо доопределить $y = 0$ при $x = 1$.

Имеем:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x-1}{x+1}, \text{ если } x \neq -1, 1, 0 \\ x \neq -1, \ \text{(разрыв второго рода)} \\ y = -1, \ \text{если } x = 0 \\ y = 0, \ \text{если } x = 1 \end{cases}$$

б). $y = \dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$

$$\begin{cases} y = \dfrac{\sin 3x}{\sin 2x} \\ x \neq \dfrac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Наша функция является периодической, поэтому будет достаточно рассмотрим левый и правый пределы при $x = 0, \dfrac{\pi}{2}, \pi, \dfrac{3\pi}{2}$, то есть $x = \dfrac{\pi n}{2}, n = 0, 1, 2, 3$:

• Рассотрим левый и правый пределы при $x = 0$:

1.1 $\lim\limits_{x\to 0-0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 2x} = \lim\limits_{x\to 0-0} \dfrac{2x \cdot 3x \cdot \sin 3x}{3x \cdot 2x \cdot \sin 2x} = \dfrac{3}{2}$

1.2 $\lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 2x} = \lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{2x \cdot 3x \cdot \sin 3x}{3x \cdot 2x \cdot \sin 2x} = \dfrac{3}{2}$

В точке $x = 0$ мы имеем устранимый разрыв, так как и левый и правый пределы в ней равны $\dfrac{3}{2}$.

• Рассмотрим левый и правый пределы при $x = \dfrac{\pi}{2}$:

Пусть $y = x - \dfrac{\pi}{2}$, тогда получаем пределы:

2.1 $\lim\limits_{y\to -0} \dfrac{\sin(3y + \frac{3\pi}{2})}{\sin(2y + \pi)} = \lim\limits_{y\to -0} \dfrac{-\cos 3y}{-\sin 2y} = \lim\limits_{y\to -0} \dfrac{\cos 3y}{\sin 2y} = -\infty$

2.1 $\lim\limits_{y\to +0} \dfrac{\sin(3y + \frac{3\pi}{2})}{\sin(2y + \pi)} = \lim\limits_{y\to +0} \dfrac{-\cos 3y}{-\sin 2y} = \lim\limits_{y\to +0} \dfrac{\cos 3y}{\sin 2y} = \infty$

В точке $x = \dfrac{\pi}{2}$ мы имеем разрыв второго рода, так как нет ни левого ни правого предела.

• Рассмотрим левый и правый пределы при $x = \pi$:

3.1 $\lim\limits_{x\to \pi-0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 2x} = \lim\limits_{x\to \pi-0} \dfrac{2x \cdot 3x \cdot \sin 3x}{3x \cdot 2x \cdot \sin 2x} = \dfrac{3}{2}$

3.2 $\lim\limits_{x\to \pi+0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 2x} = \lim\limits_{x\to \pi+0} \dfrac{2x \cdot 3x \cdot \sin 3x}{3x \cdot 2x \cdot \sin 2x} = \dfrac{3}{2}$

В точке $x = \pi$ мы имеем устранимый разрыв, так как и левый и правый пределы в ней равны $\dfrac{3}{2}$.

- Рассмотрим левый и правый пределы при $x = \dfrac{3\pi}{2}$:

Пусть $y = x - \dfrac{3\pi}{2}$, тогда получаем пределы:

4.1 $\lim\limits_{y\to -0} \dfrac{\sin(3y + \frac{9\pi}{2})}{\sin(2y + \frac{6\pi}{2})} = \lim\limits_{y\to -0} \dfrac{\sin(3y + \frac{\pi}{2})}{\sin(2y + \pi)} = \lim\limits_{y\to -0} \dfrac{\sin(3y + \frac{\pi}{2})}{\sin(2y + \pi)} = \lim\limits_{y\to -0} \dfrac{\cos 3y}{-\sin 2y} = \infty$

4.2 $\lim\limits_{y\to +0} \dfrac{\sin(3y + \frac{9\pi}{2})}{\sin(2y + \frac{6\pi}{2})} = \lim\limits_{y\to +0} \dfrac{\sin(3y + \frac{\pi}{2})}{\sin(2y + \pi)} = \lim\limits_{y\to +0} \dfrac{\sin(3y + \frac{\pi}{2})}{\sin(2y + \pi)} = \lim\limits_{y\to +0} \dfrac{\cos 3y}{-\sin 2y} = -\infty$

В точке $x = \dfrac{3\pi}{2}$ мы имеем разрыв второго рода, так как нет ни левого ни правого предела.

Имеем:

$$\begin{cases} y = \dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}\textbf{, если } x \neq \dfrac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z} \\ y = \dfrac{3}{2}, \text{ если } x = \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ y \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Задача 7.8 Найдите значение a, при котором функция $f(x)$ будет непрерывна, если:

а).

$$\begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x}, \ x \neq 0 \\ a, \ x = 0 \end{cases}$$

Посчитаем левый и правый пределы нашей функции при $x \to 0$:

1.1 $\lim\limits_{x\to -0} \dfrac{e^x - 1}{x} = \lim\limits_{x\to -0} \dfrac{x + o(x)}{x} = \dfrac{1 + o(1)}{1} = 1$

1.2 $\lim\limits_{x\to +0} \dfrac{e^x - 1}{x} = \lim\limits_{x\to +0} \dfrac{x + o(x)}{x} = \dfrac{1 + o(1)}{1} = 1$

Мы получили, что в этой точке левый предел равен правому, следовательно это устранимый разрыв, следовательно, чтобы его устранить a должно быть равно значению левого и правого пределов, то есть 1.

Ответ: 1

б).

$$\begin{cases} (\arcsin x)\operatorname{ctg} x, \ \ x \neq 0 \\ a, \ \ x = 0 \end{cases}$$

Посчитаем левый и правый предел функции в точке $x = 0$:

1.1 $\lim\limits_{x\to-0}(\arcsin x)\operatorname{ctg} x = \lim\limits_{x\to-0}\dfrac{x\cdot\cos x}{\sin x} = \lim\limits_{x\to-0}\dfrac{x\cdot 1}{\sin x} = 1$

1.2 $\lim\limits_{x\to+0}(\arcsin x)\operatorname{ctg} x = \lim\limits_{x\to+0}\dfrac{x\cdot\cos x}{\sin x} = \lim\limits_{x\to+0}\dfrac{x\cdot 1}{\sin x} = 1$

Мы получили, что в этой точке левый предел равен правому, следовательно это устранимый разрыв, следовательно, чтобы его устранить a должно быть равно значению левого и правого пределов, то есть 1.

Ответ: 1

Задача 7.9 Найдите производные и дифференциалы функций:

а). $f(x) = \dfrac{2+x^2}{\sqrt{1+x^4}}$

$$f'(x) = \frac{(2+x^2)'\cdot\sqrt{1+x^4} - (\sqrt{1+x^4})'\cdot(2+x^2)}{1+x^4} = \frac{2x\cdot\sqrt{1+x^4} - \frac{4x^3}{2\sqrt{1+x^4}}\cdot(2+x^2)}{1+x^4} =$$
$$= \frac{4x\cdot(1+x^4) - 4x^3\cdot(2+x^2)}{2(1+x^4)\sqrt{1+x^4}} = \frac{4x-8x^3}{2(1+x^4)\sqrt{1+x^4}} = \frac{2x-4x^3}{(1+x^4)\sqrt{1+x^4}}$$

Ответ:

$$f'(x) = \frac{2x-4x^3}{(1+x^4)\sqrt{1+x^4}}$$
$$df = f'(x)dx = \frac{(2x-4x^3)dx}{(1+x^4)\sqrt{1+x^4}}$$

б). $f(x) = e^{3x}(x+3)$

$$f'(x) = (e^{3x})'(x+3) + (x+3)'(e^{3x}) = 3e^{3x}(x+3) + e^{3x} = e^{3x}(3x+10)$$

Ответ:

$$f'(x) = e^{3x}(3x+10)$$
$$df = f'(x)dx = e^{3x}(3x+10)dx$$

в). $f(x) = x^2 2^x + x^3 3^x$

$$f'(x) = (x^2)'2^x + (2^x)'x^2 + (x^3)'3^x + (3^x)'x^3 = 2x2^x + 3x^2 3^x + x^2\cdot 2^x\cdot\ln 2 + x^3\cdot 3^x\cdot\ln 3 =$$
$$= 2^x(2x + x^2\ln 2) + 3^x(3x^2 + x^3\ln 3)$$

Ответ:

$$f'(x) = 2^x(2x + x^2\ln 2) + 3^x(3x^2 + x^3\ln 3)$$
$$df = f'(x)dx = (2^x(2x + x^2\ln 2) + 3^x(3x^2 + x^3\ln 3))dx$$

г). $f(x) = \sin x \cdot \cos^2 3x$

$f'(x) = (\sin x)' \cdot \cos^2 3x + (\sin x) \cdot (\cos^2 3x)' = \cos x \cdot \cos^2 3x + \sin x \cdot (2\cos 3x \cdot (-\sin 3x) \cdot 3) =$

$= \cos 3x(\cos x \cdot \cos 3x - 6\sin x \cdot \sin 3x)$

Ответ:

$f'(x) = \cos 3x(\cos x \cdot \cos 3x - 6\sin x \cdot \sin 3x)$

$df = f'(x)dx = \cos 3x(\cos x \cdot \cos 3x - 6\sin x \cdot \sin 3x)dx$

д). $f(x) = e^{2x}(3\cos 3x - 2\sin 3x)$

$f'(x) = (e^{2x})'(3\cos 3x - 2\sin 3x) + (3\cos 3x - 2\sin 3x)'(e^{2x}) =$

$= 2e^{2x}(3\cos 3x - 2\sin 3x) + e^{2x}(-9\sin 3x - 6\cos 3x) = e^{2x}(6\cos 3x - 4\sin 3x - 9\sin 3x - 6\cos 3x) =$

$= -13e^{2x}\sin 3x$

Ответ:

$f'(x) = -13e^{2x}\sin 3x$

$df = f'(x)dx = -13e^{2x}(\sin 3x)dx$

е). $f(x) = x^{a^a} + a^{x^a} + a^{a^x}$

$f'(x) = (x^{a^a})' + (a^{x^a})' + (a^{a^x})' = (a^a)x^{a^a-1} + a^{x^a} \cdot \ln(a) \cdot a \cdot x^{a-1} + a^{a^x} \cdot \ln(a) \cdot a^x \cdot \ln a$

Ответ:

$f'(x) = (a^a)x^{a^a-1} + a^{x^a} \cdot \ln(a) \cdot a \cdot x^{a-1} + a^{a^x} \cdot \ln(a) \cdot a^x \cdot \ln a$

$df = f'(x)dx = ((a^a)x^{a^a-1} + a^{x^a} \cdot \ln(a) \cdot a \cdot x^{a-1} + a^{a^x} \cdot \ln(a) \cdot a^x \cdot \ln a)dx$

ж). $f(x) = \arccos \dfrac{1-x^3}{1+x^3}$

$$f'(x) = (\arccos \frac{1-x^3}{1+x^3})' = -\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{1-x^3}{1+x^3})^2}} \cdot \left(\frac{(1-x^3)'(1+x^3)-(1+x^3)'(1-x^3)}{(1+x^3)^2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{1-x^3}{1+x^3})^2}} \cdot \left(\frac{-3x^2(1+x^3)-3x^2(1-x^3)}{(1+x^3)^2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{1-x^3}{1+x^3})^2}} \cdot \left(\frac{-6x^2}{(1+x^3)^2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{1-2x^3+x^6}{1+2x^3+x^6})}} \cdot \left(\frac{-6x^2}{(1+x^3)^2}\right) = \frac{3x^2}{(1+x^3)^2\sqrt{\frac{x^3}{(1+x^3)^2}}} = \frac{3x^2}{(1+x^3)\sqrt{x^3}}$$

Ответ:

$$f'(x) = \frac{3x^2}{(1+x^3)\sqrt{x^3}}$$
$$df = f'(x)dx = \frac{3x^2}{(1+x^3)\sqrt{x^3}}dx$$

з). $f(x) = 2^{arctg\sqrt{1+x^2}}$

$$f'(x) = (2^{arctg\sqrt{1+x^2}})' = 2^{arctg\sqrt{1+x^2}} \cdot \ln(2) \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1}{1+1+x^2} \cdot 2x =$$
$$= \frac{2^{arctg\sqrt{1+x^2}} \cdot \ln(2)}{2\sqrt{1+x^2}(2+x^2)} \cdot 2x = \frac{x \cdot 2^{arctg\sqrt{1+x^2}} \cdot \ln(2)}{\sqrt{1+x^2}(2+x^2)}$$

Ответ:

$$f'(x) = \frac{x \cdot 2^{arctg\sqrt{1+x^2}} \cdot \ln(2)}{\sqrt{1+x^2}(2+x^2)}$$
$$df = f'(x)dx = \frac{x \cdot 2^{arctg\sqrt{1+x^2}} \cdot \ln(2)}{\sqrt{1+x^2}(2+x^2)}dx$$

и). $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$

$$f'(x) = \left(e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}\right)' = \left(e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}\right) \cdot \left(\frac{1}{x}\ln(1+x)\right)' = \left(e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}\right)\left(-\frac{\ln(1+x)}{x^2} + \frac{1}{x(1+x)}\right) =$$
$$= ((1+x)^{\frac{1}{x}})\left(\frac{1}{x(1+x)} - \frac{\ln(1+x)}{x^2}\right)$$

Ответ:

$$f'(x) = ((1+x)^{\frac{1}{x}})\left(\frac{1}{x(1+x)} - \frac{\ln(1+x)}{x^2}\right)$$
$$df = f'(x)dx = ((1+x)^{\frac{1}{x}})\left(\frac{1}{x(1+x)} - \frac{\ln(1+x)}{x^2}\right)dx$$

к). $f(x) = (\arccos x)^2\left[\ln^2(\arccos x) - \ln(\arccos x) + \frac{1}{2}\right]$

$$f'(x) = \left((\arccos x)^2\right)' \cdot \left[\ln^2(\arccos x) - \ln(\arccos x) + \frac{1}{2}\right] + (\arccos x)^2 \cdot \left[\ln^2(\arccos x) - \ln(\arccos x) + \frac{1}{2}\right]' =$$
$$= -\frac{2\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \left[\ln^2(\arccos x) - \ln(\arccos x) + \frac{1}{2}\right] + (\arccos x)^2 \cdot \left[-\frac{2\ln(\arccos x)}{(\arccos x)\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{(\arccos x)\sqrt{1-x^2}}\right] =$$
$$= -\frac{2\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \left[\ln^2(\arccos x) - \ln(\arccos x) + \frac{1}{2}\right] + (\arccos x) \cdot \left[\frac{1 - 2\ln(\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}\right] =$$
$$= \frac{\arccos x(-2\ln^2(\arccos x) + 2\ln(\arccos x) - 1 - 2\ln(\arccos x) + 1)}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$= -\dfrac{2\arccos x(\ln^2(\arccos x))}{\sqrt{1-x^2}}$

Ответ:

$$f'(x) = -\frac{2\arccos x(\ln^2(\arccos x))}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$df = f'(x)dx = \left(-\frac{2\arccos x(\ln^2(\arccos x))}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$$

Задание 7.10

а). $f = \dfrac{u}{v^2}$

$$df = d\frac{u}{v^2} = \frac{v^2du - udv^2}{v^4} = \frac{v^2du - 2uvdv}{v^4}$$

б). $f = arctg\dfrac{u}{v}$

$$df = d(arctg\frac{u}{v}) = \frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{1+\left(\frac{u}{v}\right)^2} = \frac{vdu - udv}{(1+\left(\frac{u}{v}\right)^2)v^2} = \frac{vdu - udv}{v^2+u^2}$$

в). $f = \dfrac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}$

$$df = d\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}} = -\frac{du^2+dv^2}{2\sqrt{(u^2+v^2)^3}} = -\frac{2udu+2vdv}{2\sqrt{(u^2+v^2)^3}} = -\frac{udu+vdv}{\sqrt{(u^2+v^2)^3}}$$