ИДЗ по линейной алгебре 1 Смирнов Тимофей 236 ПМИ

№ 1

$$tr(B^TB)AA^TD+tr((6AB^T+2BA^T)D+D(-2AB^T+4BA^T))\cdot(A+B)(A^T-B^T)+9C^2+18CD+9D^2$$

Разобьем выражение на мелкие части и вычислим их:

$$tr(B^TB)=tr(\begin{pmatrix}2&5\\-4&7\\2&-5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&-4&2\\5&7&-5\end{pmatrix})=tr(\begin{pmatrix}29&27&-21\\27&65&-43\\-21&-43&29\end{pmatrix})=123$$

$$AA^TD=\begin{pmatrix}1&-2&1\\6&7&-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&6\\-2&7\\1&-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}13&9\\9&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-11\\-11&94\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}13&9\\9&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-21&-45\\703&747\end{pmatrix}$$

$$AB^T=\begin{pmatrix}1&-2&1\\6&7&-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&5\\-4&7\\2&-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12&-14\\-22&94\end{pmatrix}$$

$$BA^T=\begin{pmatrix}2&-4&2\\5&7&-5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&6\\-2&7\\1&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12&-22\\-14&94\end{pmatrix}$$

$$C^2=\begin{pmatrix}-2&-2\\-1&-5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2&-2\\-1&-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&14\\7&27\end{pmatrix}$$

$$CD=\begin{pmatrix}-2&-2\\-1&-5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}13&9\\9&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-44&-36\\-58&-54\end{pmatrix}$$

$$D^2=\begin{pmatrix}13&9\\9&9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}13&9\\9&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}250&198\\198&162\end{pmatrix}$$

Теперь уже разобьем выражение на более крупные части:

$$tr(B^TB)AA^TD=123\cdot\begin{pmatrix}-21&-45\\703&747\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2583&-5535\\86469&91881\end{pmatrix}$$

$$(6AB^T+2BA^T)D=(6\cdot\begin{pmatrix}12&-14\\-22&94\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}12&-22\\-14&94\end{pmatrix})\cdot\begin{pmatrix}13&9\\9&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}96&-128\\-160&752\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}13&9\\9&9\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} 96 & -288 \\ 4688 & 5328 \end{pmatrix}$$

$$D(-2AB^T+4BA^T) = \begin{pmatrix} 13 & 9 \\ 9 & 9 \end{pmatrix} \cdot (-2 \cdot \begin{pmatrix} 12 & -14 \\ -22 & 94 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 12 & -22 \\ -14 & 94 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 13 & 9 \\ 9 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 24 & -60 \\ -12 & 188 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 204 & 912 \\ 108 & 1152 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 6 & 7 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 5 & 7 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ 11 & 14 & -8 \end{pmatrix}$$

$$A^T - B^T = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 7 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$9C^2 = 9 \cdot \begin{pmatrix} 6 & 14 \\ 7 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54 & 126 \\ 63 & 243 \end{pmatrix}$$

$$18CD = 18 \cdot \begin{pmatrix} -44 & -36 \\ -58 & -54 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -792 & -648 \\ -1044 & -972 \end{pmatrix}$$

$$9D^2 = 9 \cdot \begin{pmatrix} 250 & 198 \\ 198 & 162 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2250 & 1782 \\ 1782 & 1458 \end{pmatrix}$$

Самое время все соединить:

$$tr(B^TB)AA^TD + tr((6AB^T+2BA^T)D + D(-2AB^T+4BA^T)) \cdot (A+B)(A^T-B^T) + 9C^2 + 18CD + 9D^2 =$$

$$\begin{pmatrix} -2583 & -5535 \\ 86469 & 91881 \end{pmatrix} + tr(\begin{pmatrix} 96 & -288 \\ 4688 & 5328 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 204 & 912 \\ 108 & 1152 \end{pmatrix}) \cdot \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ 11 & 14 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 54 & 126 \\ 63 & 243 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} -792 & -648 \\ -1044 & -972 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2250 & 1782 \\ 1782 & 1458 \end{pmatrix}$$

И снова считаем по частям:

$$tr(\begin{pmatrix} 96 & -288 \\ 4688 & 5328 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 204 & 912 \\ 108 & 1152 \end{pmatrix}) = 96 + 5328 + 204 + 1152 = 6780$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ 11 & 14 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & 9 \\ 25 & -5 \end{pmatrix}$$

Ура, соединяем все:

$$\begin{pmatrix} -2583 & -5535 \\ 86469 & 91881 \end{pmatrix} + 6780 \cdot \begin{pmatrix} -18 & 9 \\ 25 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 54 & 126 \\ 63 & 243 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -792 & -648 \\ -1044 & -972 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2250 & 1782 \\ 1782 & 1458 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -123111 & 56745 \\ 256770 & 58710 \end{pmatrix}$$

УРА, УРА, ОТВЕТ: $\begin{pmatrix} -123111 & 56745 \\ 256770 & 58710 \end{pmatrix}$

№ 2

Так как матрица A симетрическая, а матрица B кососимметрическая, то $(A+B)^T = A^T + B^T = A - B$.

Тогда $A + B + (A+B)^T = A + B + A - B = 2A$, $B = A + B - A$.

Считаем:

$$A - B = (A+B)^T = \begin{pmatrix} 46 & -4 & -38 & -34 \\ -14 & -16 & -4 & 50 \\ 4 & -50 & 24 & -38 \\ -6 & 56 & 10 & 10 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 46 & -14 & 4 & -6 \\ -4 & -16 & -50 & 56 \\ -38 & -4 & 24 & 10 \\ -34 & 50 & -38 & 10 \end{pmatrix}$$

$$A = 0.5 \cdot (\begin{pmatrix} 46 & -4 & -38 & -34 \\ -14 & -16 & -4 & 50 \\ 4 & -50 & 24 & -38 \\ -6 & 56 & 10 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 46 & -14 & 4 & -6 \\ -4 & -16 & -50 & 56 \\ -38 & -4 & 24 & 10 \\ -34 & 50 & -38 & 10 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 46 & -9 & -17 & -20 \\ -9 & -16 & -27 & 53 \\ -17 & -27 & 24 & -14 \\ -20 & 53 & -14 & 10 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 46 & -4 & -38 & -34 \\ -14 & -16 & -4 & 50 \\ 4 & -50 & 24 & -38 \\ -6 & 56 & 10 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 46 & -9 & -17 & -20 \\ -9 & -16 & -27 & 53 \\ -17 & -27 & 24 & -14 \\ -20 & 53 & -14 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -21 & -14 \\ -5 & 0 & 23 & -3 \\ 21 & -23 & 0 & -24 \\ 14 & 3 & 24 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 46 & -9 & -17 & -20 \\ -9 & -16 & -27 & 53 \\ -17 & -27 & 24 & -14 \\ -20 & 53 & -14 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 5 & -21 & -14 \\ -5 & 0 & 23 & -3 \\ 21 & -23 & 0 & -24 \\ 14 & 3 & 24 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -592 & 561 & -1653 & -209 \\ 255 & 735 & 1093 & 822 \\ 443 & -679 & -600 & -257 \\ -419 & 252 & 1879 & 457 \end{pmatrix}$$

Ответ: $AB = \begin{pmatrix} -592 & 561 & -1653 & -209 \\ 255 & 735 & 1093 & 822 \\ 443 & -679 & -600 & -257 \\ -419 & 252 & 1879 & 457 \end{pmatrix}$

№ 3

$$DC = \begin{pmatrix} 1 & -9 & -43 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 9 & 7 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

$A^n = CJDCJDCJDCJDCJDCJD...CJD$, где CJD повторяется n раз. Но мы знаем, что $DC = E$, значит все пары DC можно убрать из произведения, они ничего не изменят. Получаем $A^n = C \cdot J^n \cdot D$.

Зная, что $A^n = C \cdot J^n \cdot D$, имеем: $S = E + A^1 + A^2 + ... + A^{2021} = E + C \cdot (J^1 + J^2 + ... + J^{2021}) \cdot D$

$$J^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$J^3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$J^4 = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$J^5 = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -10 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Заметим, что $J^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & (-1)^n(-n) & (-1)^n \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & (-1)^n & (-1)^n(-n) \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$.

Докажем, что это выражение верно по индукции:

БАЗА: Для $n = 2$ плучаем $J^2 = \begin{pmatrix} (-1)^2 & (-1)^2(-2) & (-1)^2 \frac{2}{2} \\ 0 & (-1)^2 & (-1)^2(-2) \\ 0 & 0 & (-1)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ШАГ: Пусть для n выполняется $J^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & (-1)^n(-n) & (-1)^n \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & (-1)^n & (-1)^n(-n) \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$

Проверим для $n+1$: $J^{n+1} = J^n \cdot J = \begin{pmatrix} (-1)^n & (-1)^n(-n) & (-1)^n \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & (-1)^n & (-1)^n(-n) \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} (-1)^n \cdot (-1) & (-1)^n \cdot 1 + (-1)^n(-n) \cdot (-1) & (-1)^n(-n) \cdot 1 + (-1)^n \frac{n(n-1)}{2} \cdot (-1) \\ 0 & (-1)^n \cdot (-1) & (-1)^n \cdot 1 + (-1)^n(-n) \cdot (-1) \\ 0 & 0 & (-1)^n \cdot (-1) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (-1)^{n+1} & (-1)^{n+1}(-(n+1)) & (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & (-1)^{n+1} & (-1)^{n+1}(-(n+1)) \\ 0 & 0 & (-1)^{n+1} \end{pmatrix}$$

Мы доказали наше выражение по индукции, **УРА**.

Вернемся к $S = E + A^1 + A^2 + ... + A^{2021} = E + C \cdot (J^1 + J^2 + ... + J^{2021}) \cdot D$.

$$J^n + J^{n+1} = \begin{pmatrix} (-1)^n & (-1)^n(-n) & (-1)^n \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & (-1)^n & (-1)^n(-n) \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (-1)^{n+1} & (-1)^{n+1}(-(n+1)) & (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & (-1)^{n+1} & (-1)^{n+1}(-(n+1)) \\ 0 & 0 & (-1)^{n+1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & (-1)^n & (-1)^{n+1} n \\ 0 & 0 & (-1)^n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S = E + C \cdot ((J^1 + J^2) + (J^3 + J^4) + ... + (J^{2019} + J^{2020}) + J^{2021}) \cdot D =$$

$$= E + C \cdot (\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + ... + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2019 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + J^{2021}) \cdot D =$$

$$= E + C \cdot (\begin{pmatrix} 0 & -1010 & \frac{1+2019}{2} \cdot 1010 \\ 0 & 0 & -1010 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + J^{2021}) \cdot D =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + C \cdot (\begin{pmatrix} 0 & -1010 & \frac{1+2019}{2} \cdot 1010 \\ 0 & 0 & -1010 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2021 & (-1) \cdot \frac{2021 \cdot 2020}{2} \\ 0 & -1 & 2021 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}) \cdot D =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + C \cdot (\begin{pmatrix} 0 & -1010 & 1020100 \\ 0 & 0 & -1010 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2021 & -2041210 \\ 0 & -1 & 2021 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}) \cdot D =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -9 & -43 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1011 & -1021110 \\ 0 & -1 & 1011 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 9 & 7 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1011 & -1034253 \\ 0 & 0 & 1011 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ответ: $S = \begin{pmatrix} 0 & 1011 & -1034253 \\ 0 & 0 & 1011 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

№ 4

Заметим, что $S = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -12 & -14 \\ 12 & 36 & 42 \\ -8 & -24 & -28 \end{pmatrix}$

$$tr(S^{10}) = tr(uv^T \cdot uv^T \cdot uv^T \cdot uv^T \cdot uv^T \cdot uv^T \cdot uv^T \cdot uv^T \cdot uv^T \cdot uv^T) =$$

$tr(v^T u \cdot v^T u \cdot v^T u \cdot v^T u \cdot v^T u \cdot v^T u \cdot v^T u \cdot v^T u \cdot v^T u \cdot v^T u)$ по свойству следа.

$$v^T u = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} = 4$$

Тогда $tr(S^{10}) = 4^1 0 = 1048576$

Ответ: 1048576

№ 5

а).

$$\begin{cases} 6x_1 - 4x_2 - 18x_3 + 8x_4 = 7 \\ x_1 - 2x_2 - 7x_3 = -8 \\ -9x_1 + 6x_2 + 27x_3 - 12x_4 = -4 \\ -6x_1 - 9x_2 - 21x_3 - 21x_4 = 5 \end{cases}$$

В виде расширенной матрицы это будет выглядеть так:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & -4 & -18 & 8 & 7 \\ 1 & -2 & -7 & 0 & -8 \\ -9 & 6 & 27 & -12 & -4 \\ -6 & -9 & -21 & -21 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} :6 \\ \\ \\ \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & -3 & \frac{4}{3} & \frac{7}{6} \\ 1 & -2 & -7 & 0 & -8 \\ -9 & 6 & 27 & -12 & -4 \\ -6 & -9 & -21 & -21 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -1(1) \\ +9(1) \\ \\ \end{array} \rightarrow$$
$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & -3 & \frac{4}{3} & \frac{7}{6} \\ 0 & -\frac{4}{3} & -4 & -\frac{4}{3} & -\frac{55}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{39}{6} \\ -6 & -9 & -21 & -21 & 5 \end{array}\right)$$

Мы получаем нулевую строку, которой соответствует ненулеваое значение, следовательно данная система не имеет решений:

Ответ: у данной системы решений нет.

б).

$$\begin{cases} 6x_1 - 4x_2 - 18x_3 + 8x_4 = -8 \\ x_1 - 2x_2 - 7x_3 = 0 \\ -9x_1 + 6x_2 + 27x_3 - 12x_4 = 12 \\ -6x_1 - 9x_2 - 21x_3 - 21x_4 = 21 \end{cases}$$

В виде расширенной матрицы это будет выглядеть так:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & -4 & -18 & 8 & -8 \\ 1 & -2 & -7 & 0 & 0 \\ -9 & 6 & 27 & -12 & 12 \\ -6 & -9 & -21 & -21 & 21 \end{array}\right) : 6 \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & -3 & \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} \\ 1 & -2 & -7 & 0 & 0 \\ -9 & 6 & 27 & -12 & 12 \\ -6 & -9 & -21 & -21 & 21 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -1(1) \\ +9(1) \\ +6(1) \end{array} \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & -3 & \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & -\frac{4}{3} & -4 & -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -13 & -39 & -13 & 13 \end{array}\right) : (-\frac{4}{3}) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & -3 & \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -13 & -39 & -13 & 13 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ +13(2) \end{array} \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & -3 & \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} +\frac{2}{3}(2) \\ \\ \\ \\ \end{array} \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Получаем столбец решений:

$$\begin{pmatrix} -2 + x_3 - 2x_4 \\ -1 - 3x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Ответ: $x_1 = -2 + x_3 - 2x_4, x_2 = -1 - 3x_3 - x_4$ и x_3, x_4 - любые числа.