ДЗ по линейной алгебре 4 Смирнов Тимофей 236 ПМИ

№ 1

1). Найдем число инверсий в перестановке $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 6 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

Рассмотрим каждую пару в перестановке: $(4,2),(4,6),(4,3),(4,5),(4,1),(2,6),(2,3),(2,5),(2,1),(6,3),$ $(6,5),(6,1),(3,5),(3,1),(5,1)$.

Из этих паринверсиями являются пары $(4,2),(4,3),(4,1),(2,1),(6,3),(6,5),(6,1),(3,1),(5,1)$.

Ответ: число инверсий: 9, знак перестановки $(-1)^9 = -1 \Rightarrow$ перестановка нечетна.

2). Найдем число инверсий в перестановке $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n & n+1 & n+2 & ... & 2n \\ 2 & 4 & ... & 2n & 1 & 3 & ... & 2n-1 \end{pmatrix}$

Инверсиями с первым членом 2 будут пары из 2 и числа 1 их всего 1.

Инверсиями с первым членом 4 будут пары из 4 и чисел 1, 3 их всего 2 и тд.

...

Инверский с числом $2n$ уже не будет n.

В итоге, для нахождения всех инверсий нам необходимо просуммировать все такие пары, получим сумму $S = 1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Ответ: Всего инверсий в перестановке $\dfrac{(n+1)(n)}{2}$; $sgn(\sigma) = (-1)^{\frac{(n+1)(n)}{2}}$. Если $sgn(\sigma) = 1$, то перестановка четна, иначе нечетна.

№ 2

1). $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 8 & 9 & 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} = (15)(2\ 8\ 6\ 4)(3\ 9\ 7) \in S_9$

2). $a = (153)(24) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in S_5,\ a^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

3). $a = (14)(365) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 6 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \in S_6;\ a^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 5 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix} = (1\ 4)(3\ 5\ 6)$

№ 3

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 5\ 4) \in S_5$$

$$\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} = (2\ 4\ 5\ 3) \in S_5$$

№ 4

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 8 & 10 & 6 & 7 & 5 & 9 & 3 & 2 & 11 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (1\ 8\ 2\ 10)(3\ 6\ 9\ 11\ 4\ 7) \in S_{11}$$

Наименьшим N таким, что $\sigma^N = id$ будет $N = 12$, так как $12 =$ НОК длин всех циклов в перестановке.

1). $\sigma^{36} = \sigma^0$ (так как 36 нацело делится на НОК длины циклов, из которых состоит перестановка) $\sigma^0 = id$

Ответ: id

2). $\sigma^{37} = \sigma^{(37\ mod\ 12)} = \sigma^1 = \sigma$

Ответ: σ

3). $\sigma^5 = \sigma^{(5 mod 12)} = \sigma^5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 8 & 10 & 7 & 11 & 5 & 3 & 4 & 2 & 6 & 1 & 9 \end{pmatrix}$

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 8 & 10 & 7 & 11 & 5 & 3 & 4 & 2 & 6 & 1 & 9 \end{pmatrix}$

№ 5

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}; \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma X \tau = \rho \;\Leftrightarrow\; \sigma^{-1}\sigma X \tau\tau^{-1} = \sigma^{-1}\rho\tau^{-1} \;\Leftrightarrow\; X = \sigma^{-1}\rho\tau^{-1}$$

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}; \quad \tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$X = \sigma^{-1}\rho\tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

№ 6

1). Имеем перестановку $(3\ 5\ ...\ 99)(2\ 4\ ...\ 98) \in S_n$, легко понять, что $n = 99$, так как максимальный элемент перестановки 99. Получаем декремент перестановки, равный $n - 3 = 99 - 3 = 96$, так как в перестановке всего 3 цикла (2 из них написаны выше и один цикл из длины один: (1)). $96 mod 2 = 0 \;\Rightarrow\; sgn(\sigma) = 1$. Заданная перестановка является четной.

Ответ: перестановка σ является четной.

2). Нашу перестановку сигма можно представить в таком виде:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & 96 & 97 & 98 & 99 \\ 1 & 4 & 5 & ... & 98 & 99 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Для 1 мы не имеем инверсий. Для 4 у нас 2 инверсии. Для 5 у нс тоже 2 инверсии, получаем всего $96 \cdot 2 = 192$ инверсии. $sgn(\sigma) = (-1)^{192} = 1$.

Ответ: перестановка σ является четной.

№ 7 Найти все $X \in S_5$, что $X^2 = (12345)$.

Тогда $X \cdot X$ получается так $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

1). Пусть $1 \to 1$, тогда получаем $x_1 = 1$, но $x_1 \to 2$, то есть $1 \to 2$, получаем противоречие.

2). Пусть $1 \to 2$, тогда $(x_1 = 2) \to 2$, тогда получается, что $2 \to 2$, но у нас уже $1 \to 2$, получаем противоречие.

3). Пусть $1 \to 3$, тогда $(x_1 = 3) \to 2$, тогда $(x_3 = 2) \to 4$, тогда $(x_2 = 4) \to 3$, то есть $4 \to 3$, но у нас уже $1 \to 3$, получаем противоречие.

4). Пусть $1 \to 4$, тогда $(x_1 = 4) \to 2$, тогда $(x_4 = 2) \to 5$, тогда $(x_2 = 5) \to 3$, тогда $(x_5 = 3) \to 1$, тогда $(x_3 = 1) \to 4$, получаем перестановку $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = X$, которая в квадрате дает $(1\ 2\ 3\ 4\ 5) \in S_5$.

5). Пусть $1 \to 5$, тогда $(x_1 = 5) \to 2)$, тогда $(x_5 = 2) \to 1$, тогда $(x_2 = 1) \to 3$, но у нас $1 \to 5$, получаем противоречие.

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in S_5$

№ 8 Доказать теорему про декремент.

Заметим, что, каждый элемент перестановки попадет в свой цикл (циклы длины 1 тоже считаются), то есть суммарная длины всех m циклов перестановки равна n. Каждый цикл длины k можно разложить на $k-1$ транспозицию, следовательно всю перестановку суммарно можно разложить на $n-m$ транспозиций. А мы знаем, что транспозиции меняют четность перестановки, следовательно, если $n - m$ четно, то знак перестановки 1, иначе (-1).