ДЗ по линейной алгебре 8 Смирнов Тимофей 236 ПМИ

1. Пусть V - векторное пространство функций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1.1 Представима ли функция x^{10} в виде линейной комбинации фукнций

$$1, x-1, (x-1)^2, ..., (x-1)^{10}$$

Решение: да, представима. Для получения x^{10} нам необходимо взять $(x-1)^{10}$ с коэффициентом 1, затем при его раскрытии нам нужно взять $(x-1)^9$ с коэффициентом 2, затем мы сложим кожффициента при x^8 из этих двух многочленов и возьмем $(x-1)^8$ с противоположным знаком. Такую последовательность действий мы будем предпринимать до того, пока все иксы не сократятся, а затем оставшиеся единицы сократим нашей 1 с некоторым коэффициентом. Так как нашем многочлене никогда не встретится ничего, кроме 1 и $x^n, n < 11, n \in \mathbb{N}$ с знаком + или -, то все иксы мы сможем сократить.

1.2 Лежит ли функция x в линейной оболочке функций

$$1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x.$$

Решение: функции синуса и косинуса являются периодичекими и нелинейными функциями, следовательно их линейные комбинации тоже являются периодическими и нелинайными функцими. Функция 1 же, при умножении ее на любой коэффициент, только однимет или опустит нашу линейную комбинацию по оси y. Следовательно линейную функцию x нельзя представить в виде линейной комбинации данных функций.

2. Пусть столбцы $a_1, ..., a_k$ линейно независимы, а столбцы a_1, a_k, b линейно зависимы. Докажите, что столбец b представляется в виде линейной комбинации столбцов $a_1, ..., a_k$.

Решение: если столбцы $a_1, ...a_k, b$ линейно независимые, следовательно найдется такой набор ненулевых скаляров $\alpha_1, ..., \alpha_k, \beta$, что $\alpha_1 a_1 + ... + \alpha_k a_k + \beta b = 0$. При это заметим, что $\beta \neq 0$, так как, если бы она равнялась 0, то мы бы имели равенство $\alpha_1 a_1 + ... + \alpha_k a_k = 0$, что невозможно, так как $a_1, ..., a_k$ линейно независимы и $\alpha_1, ..., \alpha_k$ не могут равняться 0 (иначе это была бы тривиальная комбинация векторов).

Теперь, зная, что $\beta \neq 0$, мы можем выразить $b = -\frac{\alpha_1}{\beta} a_1 - \frac{\alpha_2}{\beta} a_2 - ... - \frac{\alpha_k}{\beta} a_k$. ЧТД.

3. Пусть векторы a_1, a_2, a_3, a_4 линейно независимы. Являются ли линейно независимыми векторы $b_1 = 3a_1 + 2a_2 + a_3 + a_4, b_2 = 2a_1 + 5a_2 + 3a_3 + 2a_4, b_3 = 3a_1 + 4a_2 + 2a_3 + 3a_4$

Решение: Пусть существует такая линейная комбинация $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, где хотя бы один элемент не равен 0, что $\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \beta_3 b_3 = 0$.

$\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \beta_3 b_3 =$
$= \beta_1(3a_1 + 2a_2 + a_3 + a_4) + \beta_2(2a_1 + 5a_2 + 3a_3 + 2a_4) + \beta_3(3a_1 + 4a_2 + 2a_3 + 3a_4) =$
$= (3\beta_1 + 2\beta_2 + 3\beta_3)a_1 + (2\beta_1 + 5\beta_2 + 4\beta_3)a_2 + (\beta_1 + 3\beta_2 + 2\beta_3)a_3 + (\beta_1 + 2\beta_2 + 3\beta_3)a_4 = 0$

Но мы знаем, что a_1, a_2, a_3, a_4 линейно независимы, и что хотя бы один из множителей $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ не равен 0. Мы получаем противоречие: a_1, a_2, a_3, a_4 линейно независимы и можно найти их линейную комбинацию, равную 0 с ненулевыми коэффициентами. Следовательно b_1, b_2, b_3 линейно независимы.

4. Докажите линейную независимость следующих систем функций:

4.1∘ $\sin 2x, \cos x, \sin x$

Если система линейно зависима, то для любых x найдется набор скаляров $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (где как минимум один не нулевой), что $\alpha_1 \sin 2x + \alpha_2 \cos x + \alpha_3 \sin x = 0$.

Подставим в это выражение $x = 0, x = \dfrac{\pi}{2}, x = \dfrac{\pi}{4}$ и получим систему:

$$\begin{cases} \alpha_2 \cdot 1 = 0 \quad (x = 0) \\ \alpha_3 \cdot 1 = 0 \quad (x = \dfrac{\pi}{2}) \\ \alpha_1 + \alpha_2 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \alpha_3 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad (x = \dfrac{pi}{4}) \end{cases}$$

Из этой системы следует, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.
Следовательно данная система функций линейно независима.

5. Какие из следующих векторов являются базисом векторного пространства $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ многочленов не выше 2?

5.1

• Система векторов $1, x, x^2$ является базисом $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$, так как она линейно независима (через 1 и x^2 нельзя выразить x, через 1 и x нельзя выразить x^2 и через x^2, x нельзя выразить 1). Так же этими тремя функциями можно однозначно задать необходимый многочлен степени меньше 2.

• Данная система векторов не является базисом пространства $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$, так как через их линейную комбинацию нельзя выразить 1.

• Данный вектор не является базисом, так как $1+x+x^2$ является линейной комбинацией $1, x, x^2$, следовательно данная система векторов линейно зависима.

5.2

• Данная система векторов являтеся линейной комбинацией, так как она линейно независима (так как по сути она похожа на систему векторов из первого пункта 5.1), а так же через ее линейную комбинацию можно выразить любой многочлен степени 2, так как у нас имеется x^2, x и 1, остальные "ненужные коэффициенты" можно легко убрать, умножив 1 на соответствующий коэффициент с минусом.

• Из данной системы векторов невозможно получить x^2, умножая их просто на скаляры, следовательно эта система не является базсом.