Санкт-Петербургский
Политехнический университет Петра Великого

Отчет по лабораторной работе №1

Решение задачи линейного программирования. Симплекс-метод.

Студенты:	Ерошкин Иван Игоревич Губриенко Денис Дмитриевич Чибышев Тимофей Андреевич
Преподаватель:	Родионова Елена Александровна
Группа:	5030102/00401

Санкт-Петербург
2023

Содержание

1 Идея метода

Симплекс-метод позволяет эффективно решать канонические задачи ЛП, то есть избегая просто перебор всех возможных решений.
Основной принцип метода: вычисления начинаются с какого-то «стартового» базисного решения, а затем ведется поиск решений, «улучшающих» значение целевой функции.

Стоит отметить, что задачу ЛП в общей и симметричной форме можно легко свести к канонической форме и далее решить симплекс-методом.

Симплекс-метод позволяет решать канонические задачи ЛП. Поскольку в канонической задаче ЛП:

- в множестве точек глобального минимума ϕ_0 на S существует точка, являющаяся крайней для S
- количество крайних точек множества S не превосходит числа C_n^m

Для нахождения точки глобального минимума в канонической задаче ЛП достаточно:

- вычислить, в какой из крайних точек значение целевой функции наименьшее,
- при этом убедившись каким-либо способом в ограниченности ϕ_0 снизу на S.

Является ϕ_0 ограниченной снизу на S или нет, мы узнаем в процессе решения симплекс-методом.
Как он находит крайнюю точку, где значение ϕ_0 наименьшее?
Для этого мы каким-либо способом задаём начальную крайнюю точку x_1, а алгоритм, убедившись в существовании крайней точки x_2, где $\phi_0(x_2) < \phi_0(x_1)$, переходит в x_2. Затем, убедившись в существовании крайней точки x_3, где $\phi_0(x_3) < \phi_0(x_2)$,, он переходит в x_3 и т. д.

2 Постановка задачи

Рассмотрим постановку задачи линейного программирования в общем виде:

$$min\ c^T x,\ \forall x \in S \tag{1}$$

$$S = \{x|\ a_i^T x - b^{(i)} \geq 0,\ \forall i \in M_1,\ a_i^T x - b^{(i)} = 0,\ \forall i \in M_2,\ x^{(i)} \geq 0,\ \forall i \in N_1,\ x^{(i)} - \forall \text{ знака},\ \forall i \in N_2\} \tag{2}$$

$M_1 \cup M_2 = M = \{1, \dots m\}, \quad N_1 \cup N_2 = N = \{1, \dots n\}$

Функцию $c^T x$ называют также целевой функцией задачи.

Множество S множеством допустимых решений.

Ограничения, накладываемые на область допустимых решений S, имеют вид линейных неравенств или равенств.

Решить задачу линейного программирования – это значит найти значения управляющих переменных $x_i,\ i \in N$, удовлетворяющих ограничениям (2), при которых целевая функция (1) принимает минимальное или максимальное значение.
Допустимым решением задачи линейного программирования будем называть любую совокупность неотрицательных переменных, удовлетворяющих условиям (2):

$$x_i \geq 0, i \in N \tag{3}$$

(Условие неотрицательности)
Оптимальным решением $x_* = (x_1, \dots, x_n)$ будем называть то из допустимых решений, для которого линейная функция $c^T x$ из (1) обращается в максимум (минимум).

Соответственно задача заключается в вычислении такого оптимального решения.

3 Условия применимости метода

Для того, чтоб удостовериться в применимости симплекс-метода к конкретной задаче достаточно проверить, что

1. Количество строк m меньше количества столбцов n
2. Проверить, что ранг матрицы A равен m

Далее при рассмотрении тестового примера, мы проверим выполнимость этих условий для конкретной задачи линейного программирования

4 Алгоритм метода

Пусть x_k - опорный вектор множества S
Обозначим:

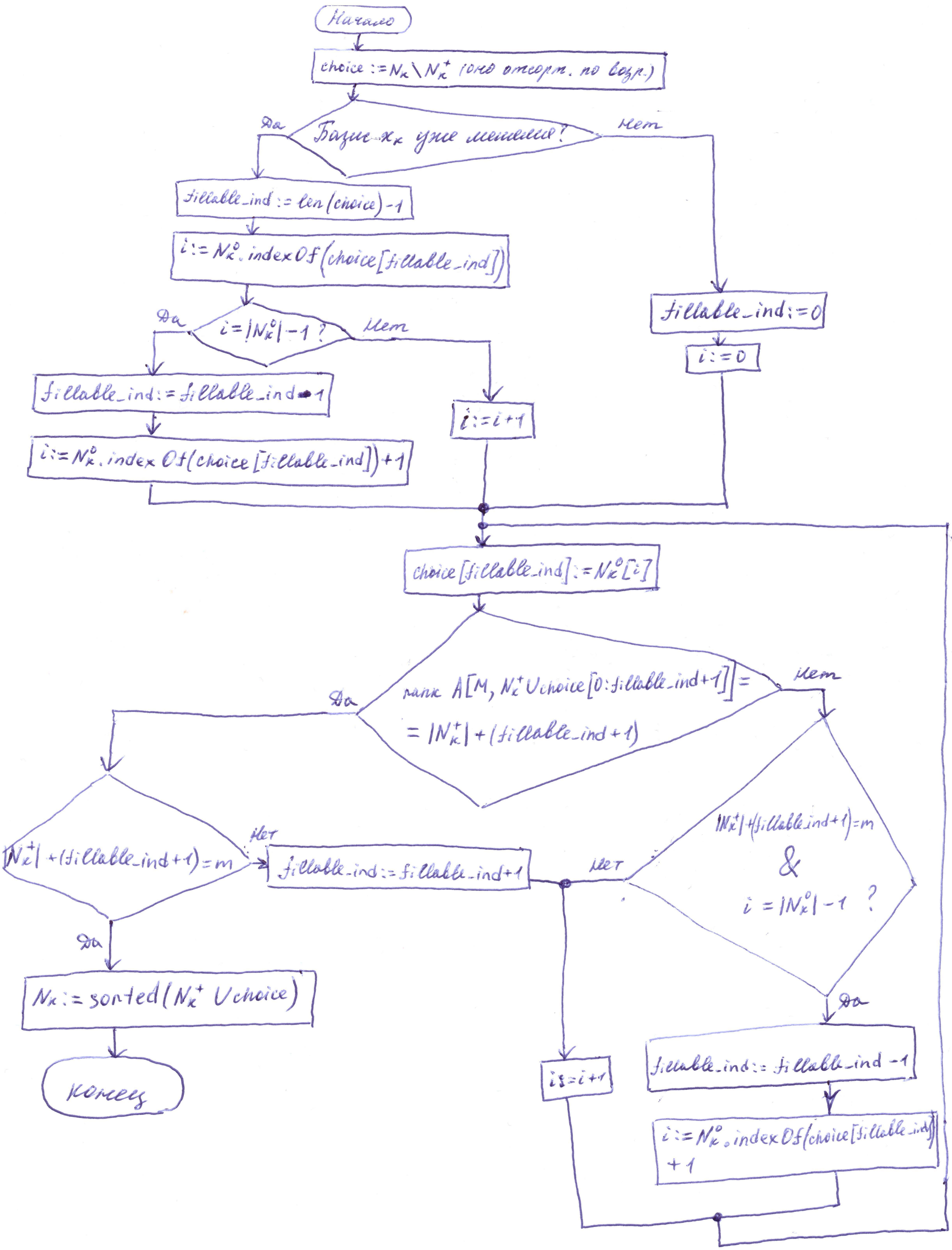
- $N_k^+ = \{i \in \overline{1,n} | x_k[i] > 0\}$
- $N_k^0 = \{i \in \overline{1,n} | x_k[i] = 0\}$
- N_k - множество индексов столбцов матрицы A, образующих базис опорного вектора x_k
- $B_k = A^{-1}[M, N_k]$
- $d_k = (c^T - c^T[N_k] \cdot B_k \cdot A)^T$

Если $d[N \backslash N_k] \geq 0$:
  x_k - ответ
Иначе:
$\exists j_k \in N \backslash N_k : d[j_k] < 0$
Построим вектор $u_k[N_k] = B_k \cdot A[M, j_k]$
Если $u_k[N_k] \leq 0$, то делаем вывод об неограниченности целевой функции на S
Иначе:
Если $x_k[N]$ - невырожденный или ($x_k[N]$- вырожденный и $u_k[N_k \backslash N_k^+] \leq 0$):
  $\theta = min(\dfrac{x_k[i]}{u_k[i]}), i \in N_k^+ : u_k[i] > 0$
$x_{k+1}[N] = x_k - \theta u_k[N]$
Если $\exists i \in N_k \backslash N_k^+ : u_k[i] > 0$:
  Сменить базис

4.1 Смена базиса

Упорядочим по возрастанию множество N_k^0
Поочерёдно будем рассматривать наборы, состоящие из $l = |N_k| - |N_k^+|$ индексов из множества N_k^0.
Различными мы считаем только те наборы, которые отличаются составом, поэтому количество всех таких наборов равно $C^l_{|N_k^0|}$
Эти наборы будем записывать в массив *choice* размера l по алгоритму на блок-схеме

- $fillable_ind$ — индекс в массиве choice, в элемент массива *choice* с этим индексом будет производиться запись
- i - индекс элемента в массиве N_k^0, который будет записан в *choice*


Начало
choice := N_k \ N_k^+ (отсорт. по возр.)
Базис x_k уже менялся?
Да
Нет
fillable_ind := len(choice) - 1
i := N_k^0.indexOf(choice[fillable_ind])
i = |N_k^0| - 1 ?
fillable_ind := fillable_ind - 1
i := N_k^0.indexOf(choice[fillable_ind]) + 1
i := i + 1
fillable_ind := 0
i := 0
choice[fillable_ind] := N_k^0[i]
rank A[M, N_k^+ ∪ choice[0:fillable_ind+1]] = = |N_k^+| + (fillable_ind + 1)
|N_k^+| + (fillable_ind + 1) = m
fillable_ind := fillable_ind + 1
|N_k^+| + (fillable_ind + 1) = m
&
i = |N_k^0| - 1 ?
N_k := sorted(N_k^+ ∪ choice)
Конец
fillable_ind := fillable_ind - 1
i := N_k^0.indexOf(choice[fillable_ind]) + 1

4.2 Выбор начальной точки

Будем решать данную задачу методом искусственного базиса
c - вектор целевой функции, состоящий из n нулей и m единиц
A - матрица ограничений, которой присоединена единичная матрица $m \times m$
b - вектор правой части
Если $b[i] < 0$:
    Умножить все коэффициенты i-й строки A и $b[i]$ на -1
x_1 - вектор, состоящий из n нулей + вектор b - начальное приближение
Далее решаем полученную каноническую задачу ЛП при помощи симплекс метода, получим решение x_*
Если $x*$ - ненулевой вектор:
    Тогда исходная задача не имеент решения
Если $x*$ вырожден:
    меняем базис
Иначе:
    $x*$ - начальное приближение.

5 Пример решения общей задачи ЛП с использованием симплекс-метода

Рассмотрим применение симплекс-метода для решения общей задачи линейного программирования. Например, такой: $\phi_0(x) = c^T x$ определена на S, где:

$$c = (8,\ -4,\ 5,\ -6,\ -6)^T,\ S = \left\{ x \in \mathbb{R}^5 \,\middle|\, A[M_1, N] \cdot x \geq b[M_1],\ A[M_2, N] \cdot x = b[M_2];\ x[N_1] \geq 0 \right\},$$

$$\text{где } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix},\quad b = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ -3 \\ 6 \\ 38 \end{pmatrix},$$

$$M_1 = \{1,2\},\ \ M_2 = \{3,4,5\},\ \ N_1 = \{1,2,3,4\},\ \ N_2 = \{5\}$$

и **необходимо** найти точку глобального минимума x_* функции ϕ_0 на S

5.1 Приведение к каноническому виду

Сведём решение исходной задачи к решению канонической задачи ЛП:
$\tilde{\phi}_0(z) = \tilde{c}^T z$ определена на $\tilde{S}$, где

$$\tilde{c} = (8,\ -4,\ 5,\ -6,\ -6,\ 6,\ 0,\ 0)^T,\ \tilde{S} = \left\{ x \in \mathbb{R}^8 \,\middle|\, \tilde{A} \cdot x = \tilde{b};\ z \geq 0 \right\},$$

$$\text{где } \tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ -3 \\ 6 \\ 38 \end{pmatrix},$$

$$M_1 = \{\emptyset\},\ \ M_2 = \{1,2,3,4,5\},\ \ N_1 = \{1,2,3,4,5\},\ \ N_2 = \{\emptyset\}$$

Преобразование к канонической форме произошло так:
1) переменная x_5 не имела ограничения на знак, в следствие чего была заменена на рзность двух неотрицательных переменных: $x_5 = u - v,\ u \geq 0,\ v \geq 0$
2) для получения знака равенства в строках 1 и 2 были добавлены переменные
$x_7 \geq 0,\ x_8 \geq 0$, такие что коэффициент при x_7 равен -1 в первой строке в остальных 0, а коэффициент при x_8 равен -1 во второй строке в остальных 0.

и **необходимо** найти точку глобального минимума z_* функции $\tilde{\phi_0}$ на $\tilde{S}$. Решение общей задачи связано с решением канонической задачи следующим образом

$x_*[N_1] = z_*[1, ..., |N_1|]$
$x_*[N_2] = z_*[|N_1| + 1, ..., |N_1| + |N_2|] - z_*[|N_1| + |N_2| + 1, ..., |N_1| + |N_2| + |N_2|]$

5.2 Проверка условий применимости

1) Можем заметить, что первое условие выполняется, так как количество строк в матрице меньше количества столбцов.

2) Для проверки того, что ранг матрицы А равен колчичеству строк приведем матрицу к ступенчатому виду элементарными преобразованиями между строками матрицы. Итого, получим:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Можем заметить, что количество независимых строк равно количеству строк, следовательно, второе условие тоже выполнено.

5.3 Вычисление начального приближения методом искусственного базиса

Для вычисления начального приближения z_1 для канонической задачи воспользуемся методом искусственного базиса. Как мы сказали, этот метод предполагает построение вспомогательной канонической задачи и её решение симплекс-методом. Посредством таблицы продемонстрируем, как симплекс-метод решал эту вспомогательную задачу

Номер точки k $\in \mathbb{N}$	Точка	Замен базиса	Значение функции
1	$(0, 0, 0, 0, 0, 0, 8, 3, 3, 6, 38)^T$	0	58
2	$(3, 0, 0, 0, 0, 0, 8, 0, 6, 0, 35)^T$	0	49
3	$(3, 0, 0, 3, 0, 0, 8, 0, 0, 0, 32)^T$	2	40
4	$(3, 0, 8, 3, 8, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$	1	0

Таким образом, $\tilde{S} \neq \emptyset, \quad z_1 = (3, 0, 8, 3, 8, 0, 0, 0)^T$.

5.4 Симплекс-метод

Также с помощью таблицы покажем, как происходил процесс решения задачи

Номер точки k ∈ ℕ	z_k	Замен базиса	$\tilde{\phi_0}(z_k)$
1	$(3.0, 0.0, 8.0, 3.0, 8.0, 0.0, 0.0, 0.0)^T$	0	-2
2	$(0.0, 4.5, 3.5, 1.5, 9.5, 0.0, 0.0, 0.0)^T$	1	-66.5

Таким образом, $z_* = (0.0, 4.5, 3.5, 1.5, 9.5, 0.0, 0.0, 0.0)^T$

5.5 Получение решения исходной задачи

$x_*[N_1] = (0.0, 4.5, 3.5, 1.5)^T, x_*[N_2] = (9.5)^T - (0.0)^T = (9.5)^T, \implies x_* = (0.0, 4.5, 3.5, 1.5, 9.5)^T$,
Значение функции цели при этом равно $\phi_0(x_*) = -66.5$

5.6 Проверка достоверности результата

Исходная задача решалась при условии минимизации функции цели. Тогда для проверки достоверности результата, чтобы убедиться в том, что x_* - точка глобального минимума, составим двойственную к исходной задаче с условием максимизации целевой функции. Для того, чтобы убедиться в достоверности результата мы должны получить в качестве решения двойственной задачи $\phi_0(x_*)$.

Доказательство:

Построим двойственную к исходной задачу: $\tilde{\phi_0}(y) = \tilde{c}^T y$, которая определена на $\tilde{S}$, где

$$\tilde{c} = (-8,\ 3,\ -3,\ 6,\ 38)^T,\ \ \tilde{S} = \left\{ y \in \mathbf{R}^5 \middle| \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \le \\ \le \\ \le \\ \le \\ = \end{matrix} \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 5 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix} \right\}$$

$M_1 = \{1, 2, 3, 4\},\ \ M_2 = \{5\},\ \ N_1 = \{1, 2\},\ \ N_2 = \{3, 4, 5\}$

нужно найти точку глобального максимума $\tilde{\phi_0}$ на $\tilde{S}$.

Далее переведем полученную задачу в канонический вид(для дальнейшего применения симплекс-метода):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -2 & -1 & 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 3 & 0 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 5 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$M_1 = \{\emptyset\},\ \ M_2 = \{1, 2, 3, 4, 5\},\ \ N_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\},\ \ N_2 = \{\emptyset\}$

$\tilde{c} = (-8.0,\ 3.0,\ -3.0,\ 6.0,\ 38.0,\ 3.0,\ -6.0,\ -38.0,\ 0.0,\ 0.0,\ 0.0,\ 0.0)^T$

Применив симплекс-метод получим:

$z_* = (5.0,\ 0.0,\ 3.5,\ 0.0,\ 1.0,\ 0.0,\ 9.0,\ 0.0,\ 21.5,\ 0.0,\ 0.0,\ 0.0)^T$

$y_* = (5.0,\ 0.0,\ 3.5,\ -9.0,\ 1.0)^T$

(не утверждаем, что это точка глобального максимума $\tilde{\phi_0}$ на $\tilde{S}$. Но $y_* \in \mathbf{R}^5$ и таков, что:

$y_*[M_1] = (5.0,\ 0.0) \geq 0$

$(c[N_1])^T - y_*^T \cdot A[M][N_1] = (21.5,\ 0.0,\ 0.0,\ 0.0) \geq 0$

$(c[N_2])^T - y_*^T \cdot A[M][N_2] = -6 + 6 = 0$

$(y_*[M_1])^T \cdot (A[M][N_1] \cdot x_* - b[M_1]) = (5.0,\ 0.0) \cdot (0.0,\ 0.0)^T = 0$

$((c[N_1])^T - y_*^T \cdot A[M][N_1]) \cdot x_*[N_1] = (21.5,\ 0.0,\ 0.0,\ 0.0) \cdot (0.0,\ 4.5,\ 3.5,\ 1.5)^T = 0$

Следовательно, можем сделать вывод, что x_* является точкой глобального минимума на ϕ_0 на S

Заметим, что $\tilde{\phi_0}(y_*) = \phi_0(x_*) = -66.5$.

6 Влияние возмущений в коэффициентах b на решение

Будем прибавлять к каждому коэффициенту b одно и то же число ϵ и в каждом случае вычислять точку глобального минимума $\tilde{x_*}$. Для оценки погрешности результата будем использовать бесконечную норму. То есть $||x|| = max(|x_i|),\ \forall x \in \mathbf{R}^n,\ i \in \{1, \cdots, n\}$. Результаты представлены в таблице и на графике. Видим, что зависимость нормы разности от возмущения приближённо можно считать прямой пропорциональной. То есть при внесении возмущения 10^{-N} в правую часть(вектор b) наблюдается отклонение от точного результата порядка 10^{-N}(N $\in \{1, \cdots, 10\}$)

$x_* = (0.0\ 0.0\ 0.7\ 0.0\ 5.8\ 8.1)^T$

ϵ	$\tilde{x_*}$	$\|\|x_* - \tilde{x_*}\|\|$
10^{-1}	$(0.0\ 0.0\ 0.7\ 0.0\ 5.7\ 8.1)^T$	0.1
10^{-2}	$(0.00\ 0.00\ 0.70\ 0.00\ 5.79\ 8.10)^T$	0.01
10^{-3}	$(0.000\ 0.000\ 0.700\ 0.000\ 5.799\ 8.100)^T$	0.001
10^{-4}	$(0.0000\ 0.0000\ 0.7000\ 0.0000\ 5.7999\ 8.1000)^T$	0.0001
10^{-5}	$(0.00000\ 0.00000\ 0.70000\ 0.00000\ 5.79999\ 8.10000)^T$	0.00001
10^{-6}	$(0.000000\ 0.000000\ 0.700000\ 0.000000\ 5.799999\ 8.100000)^T$	0.000001
10^{-7}	$(0.0000000\ 0.0000000\ 0.7000000\ 0.0000000\ 5.7999999\ 8.1000000)^T$	0.0000001
10^{-8}	$(0.00000000\ 0.00000000\ 0.70000000\ 0.00000000\ 5.79999999\ 8.10000000)^T$	0.00000001
10^{-9}	$(0.000000000\ 0.000000000\ 0.700000000\ 0.000000000\ 5.799999999\ 8.100000000)^T$	0.000000001
10^{-10}	$(0.0000000000\ 0.0000000000\ 0.7000000000\ 0.0000000000\ 5.7999999999\ 8.1000000000)^T$	0.0000000001

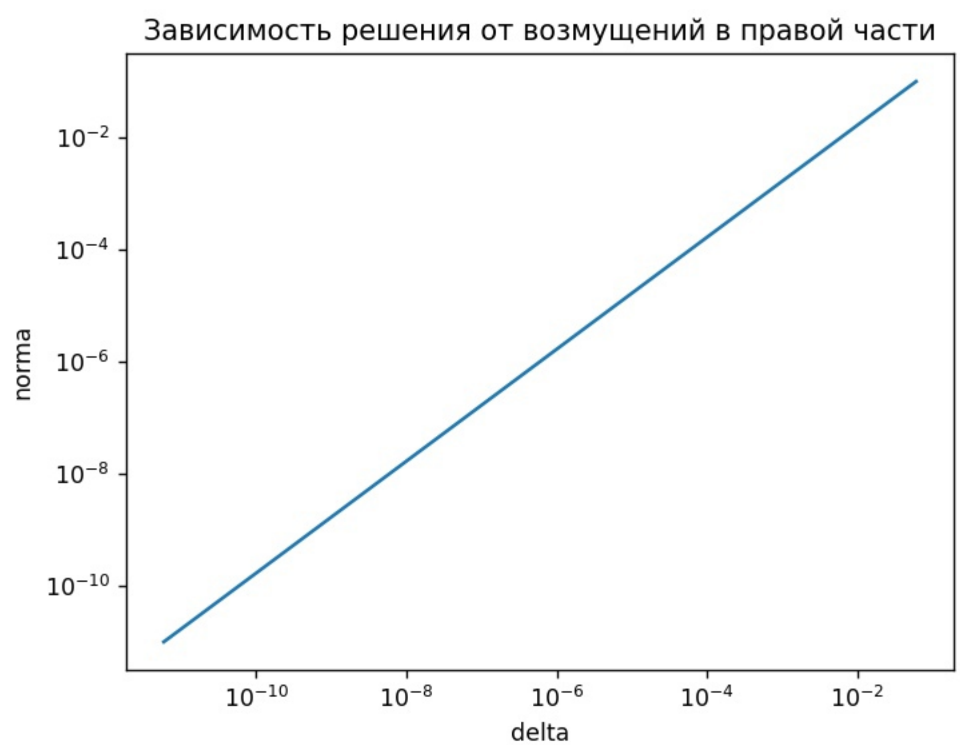


График изменения решения от возмущения будет иметь линейный вид, так как изменение правой части ограничений приводит к изменению значений базисных переменных, которые зависят линейно от правой части ограничений.

Мы вносили в правую часть достаточно малые возмущения, однако большие возмущения могут привести к нестабильности и даже неспособности алгоритма сходиться к оптимальному решению. Если возмущение невелико, новое базовое допустимое решение может быть близко к предыдущему, и алгоритм может продолжать продвигаться к оптимальному решению.

Однако, если возмущение велико, алгоритму может потребоваться переход к совершенно другому базовому допустимому решению, и это может потребовать большого числа итераций для достижения оптимального решения. В некоторых случаях алгоритм может даже бесконечно переключаться между различными базовыми допустимыми решениями и не сходиться к оптимальному решению.

7 Формализация задачи

Для изготовления книжной полки требуется 3 листа древесной плиты размером 80x20 см и 2 листа размером 65x25 см.Мастерская может закупить не более 20 листов древесной плиты размером 1x1 м по цене 400 рублей за лист. Книжная полка продается по цене 1000 руб. Дополнительные затраты на вспомогательные материалы и оплату работы оборудования составляют 200 руб. на каждую книжную полку.

Составляем варианты раскроя листа 1x1 м. Всего 6 вариантов.

1 вариант – 5 листов 65x25.
2 вариант – 4 листа 65x25 + 1 лист 80x20.
3 вариант – 3 листа 65x25 + 2 листа 80x20.
4 вариант – 2 листа 65x25 + 3 листа 80x20.
5 вариант – 1 лист 65x25 + 4 листа 80x20.
6 вариант – 6 листов 80x20.

Вводим переменные:

x1 – число раскроев по 1 варианту
x2 – число раскроев по 2 варианту
x3 – число раскроев по 3 варианту
x4 – число раскроев по 4 варианту
x5 – число раскроев по 5 варианту
x6 – число раскроев по 6 варианту
Тогда количество листов размером 65x25 см:

$$5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 1x_5 + 0x_6 \tag{4}$$

Тогда количество листов размером 80x20 см:

$$0x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 6x_6 \tag{5}$$

Количество полок:

$$min\{\frac{5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5}{2}, \frac{x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 6x_6}{3}\} \tag{6}$$

Выручка:

$$R = min\{\frac{5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5}{2}, \frac{x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 6x_6}{3}\} * (1000 - 200) \tag{7}$$

Затраты:

$$C = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6) * 400 \tag{8}$$

Математическая модель задачи:

$$P = R - C \to max \tag{9}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 20 \\ R = min\{\dfrac{5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5}{2}, \dfrac{x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 6x_6}{3}\} * 800 \\ C = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6) * 400 \end{cases}$$