Санкт-Петербургский
Политехнический университет Петра Великого

Отчет по лабораторной работе №2

Решение транспортной задачи.

Студенты:	Ерошкин Иван Игоревич Губриенко Денис Дмитриевич Чибышев Тимофей Андреевич
Преподаватель:	Родионова Елена Александровна
Группа:	5030102/00401

Санкт-Петербург
2023

Содержание

1 Классическая постановка транспортной задачи

Определение.

Пусть имеются n пунктов хранения *одинакового* груза, и для каждого из них известно хранимое количество груза.

Пусть имеются m потребителей этого груза, и для каждого из них известна потребность в нём.

Пусть известна стоимость перевозки *единицы* груза из каждого пункта хранения каждому потребителю.

1. В случае, когда суммарное количество хранимого груза *равно* суммарной потребности в нём, классической транспортной задачей называется задача найти среди планов перевозок со свойствами:
   - из каждого пункта хранения был вывезен весь груз,
   - каждому потребителю пришло количество груза, равное его потребности

   тот, при котором суммарная стоимость перевозок наименьшая.
2. В случае, когда суммарное количество хранимого груза *больше* суммарной потребности в нём, классической транспортной задачей называется задача найти среди планов перевозок со свойствами:
   - каждому потребителю пришло количество груза, равное его потребности

   тот, при котором суммарная стоимость перевозок наименьшая.
3. В случае, когда суммарное количество хранимого груза *меньше* суммарной потребности в нём, классической транспортной задачей называется задача найти среди планов перевозок со свойствами:
   - из каждого пункта хранения потребителям был вывезен весь хранимый в нём груз

   тот, при котором суммарная стоимость перевозок наименьшая.

■

2 Формализация КТЗ

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — пункты хранения одинакового груза, в которых его количество соответственно $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Пусть $B_1, B_2, \ldots, B_m$ — потребители, и их потребность соответственно $b_1, b_2, \ldots, b_m$. Пусть $\forall\, i \in \overline{1,n},\ j \in \overline{1,m}$ c_{ij}, x_{ij} — соответственно стоимость перевозки единицы груза и количество перевезённого груза из i-того пункта хранения j-тому потребителю. Тогда суммарная стоимость перевозок равна

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} c_{ij}\cdot x_{ij}\right).$$

Обозначим

$$c = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1m} \mid c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2m} \mid \ldots \mid c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nm} \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^{nm},$$
$$x = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1m} \mid x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2m} \mid \ldots \mid x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nm} \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^{nm},$$

тогда суммарная стоимость всех перевозок равна $c^T x$. Ясно, что каждое значение переменной x — это один, конкретный план перевозок.

1. В случае $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = \sum\limits_{j=1}^{m} b_j$ нас интересуют лишь планы перевозок

$$x \in S = \left\{ x \in \mathbb{R}^{nm} \,\middle|\, \underbrace{\forall i \in \overline{1,n}\ \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i;}_{\text{т. е. из каждого пункта хранения должно быть вывезено всё, что в нём хранится}}\ \underbrace{\forall j \in \overline{1,m}\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j}_{\text{т. е. каждому потребителю должно быть доставлено ровно столько, сколько ему требуется}};\ x \geq 0 \right\}.$$

2. В случае $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i > \sum\limits_{j=1}^{m} b_j$ нас интересуют лишь планы перевозок

$$x \in S = \left\{ x \in \mathbb{R}^{nm} \,\middle|\, \underbrace{\forall i \in \overline{1,n}\ \sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq a_i;}_{\text{т. е. для каждого пункта хранения отсутствуют ограничения на вывоз из него, кроме физического ограничения}}\ \underbrace{\forall j \in \overline{1,m}\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j}_{\text{т. е. каждому потребителю должно быть доставлено ровно столько, сколько ему требуется}};\ x \geq 0 \right\}.$$

3. В случае $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i < \sum\limits_{j=1}^{m} b_j$ нас интересуют лишь планы перевозок

$$x \in S = \left\{ x \in \mathbb{R}^{nm} \middle| \underbrace{\forall i \in \overline{1,n}\ \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i;}_{\substack{\text{т. е. из каждого пункта}\\ \text{хранения должно быть}\\ \text{вывезено всё, что в нём}\\ \text{хранится}}}\ \underbrace{\forall j \in \overline{1,m}\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \le b_j;}_{\substack{\text{т. е. для каждого потре-}\\ \text{бителя отсутствуют огра-}\\ \text{ничения на поставку ему,}\\ \text{кроме физического огра-}\\ \text{ничения}}}\ x \ge 0 \right\}.$$

Пусть функция $\varphi_0(x) = c^T x$ определена на S. Тогда в каждом из перечисленных случаев наша задача — найти план перевозок $x_* \in S$:

$$\varphi_0(x_*) = \min_{x \in S} \varphi_0(x).$$

Определение.

КТЗ, в которых $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = \sum\limits_{j=1}^{m} b_j$, назовём закрытыми. Остальные КТЗ назовём открытыми.

■

Определение.

В КТЗ будем понимать под таблицей тарифов таблицу, представленную слева, а под таблицей перевозок, соответствующей плану $x \in S$, — таблицу, представленную справа.

	B_1	B_2	$\dots$	B_m
A_1	c_{11}	c_{12}	$\dots$	c_{1m}
A_2	c_{21}	c_{22}	$\dots$	c_{2m}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
A_n	c_{n1}	c_{n2}	$\dots$	c_{nm}

	B_1	B_2	$\dots$	B_m
A_1	x_{11}	x_{12}	$\dots$	x_{1m}
A_2	x_{21}	x_{22}	$\dots$	x_{2m}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
A_n	x_{n1}	x_{n2}	$\dots$	x_{nm}

■

Замечание.

Условие КТЗ удобно задавать посредством следующей таблицы.

	B_1	B_2	B_3	$\dots$	B_m	
A_1	c_{11}	c_{12}	c_{13}	$\dots$	c_{1m}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	c_{23}	$\dots$	c_{2m}	a_2
A_3	c_{31}	c_{32}	c_{33}	$\dots$	c_{3m}	a_3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
A_n	c_{n1}	c_{n2}	c_{n3}	$\dots$	c_{nm}	a_n
	b_1	b_2	b_3	$\dots$	b_m	

■

3 Существование точки глобального минимума в КТЗ

Утверждение.

В каждом из трёх случаев КТЗ $S \neq \varnothing$, замкнуто, ограничено.

Доказательство.

- **Не пустота.**

  Для закрытой КТЗ доказывается с помощью алгоритма метода северо-западного угла.
- **Замкнутость.**

  Рассмотрим лишь случай $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i > \sum\limits_{j=1}^{m} b_j$, ибо для остальных доказательство аналогично. В этом случае, напомним,

  $$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^{nm} \middle| \forall i \in \overline{1,n}\ \sum_{j=1}^{m} x_{ij} \le a_i;\ \forall j \in \overline{1,m}\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j;\ x \ge 0 \right\}.$$

  Возьмём произвольную предельную точку p множества S. $\exists \left\{p^k\right\}_{k \in \mathbb{N}} \subset S : \lim\limits_{k \to \infty} p^k = p$ (k обозначен номер вектора в последовательности). Покажем $p \in S$.

– Возьмём любые $t \in \overline{1,n},\ d \in \overline{1,m}$. Поскольку

$$\lim_{k\to\infty} p^k_{td} = p_{td},\ \lim_{k\to\infty} 0 = 0,\ \forall k \in \mathbb{N}\ p^k_{td} \geq 0,$$

то по теореме о предельном переходе в неравенстве $p_{td} \geq 0$. Тогда $p \geq 0$.

– Возьмём любое $t \in \overline{1,n}$. Обозначим

$$s_t = \sum_{j=1}^{m} p_{tj}, \forall k \in \mathbb{N}\ s^k_t = \sum_{j=1}^{m} p^k_{tj}.$$

Поскольку

$$\lim_{k\to\infty} s^k_t = s_t,\ \lim_{k\to\infty} a_t = a_t,\ \forall k \in \mathbb{N}\ s^k_t \leq a_t,$$

то по теореме о предельном переходе в неравенстве $s_t \leq a_t$. Тогда $\forall i \in \overline{1,n}\ \sum\limits_{j=1}^{m} p_{ij} \leq a_i$.

– Возьмём любое $t \in \overline{1,m}$. Обозначим

$$s_t = \sum_{i=1}^{n} p_{it},\ \forall k \in \mathbb{N}\ s^k_t = \sum_{i=1}^{n} p^k_{it}.$$

Поскольку

$$\lim_{k\to\infty} s^k_t = s_t,\ \lim_{k\to\infty} s^k_t = b_t,$$

то по теореме о единственности предела $s_t = b_t$. Тогда $\forall j \in \overline{1,m}\ \sum\limits_{i=1}^{n} p_{ij} = b_j$.

Тогда $p \in S$. Значит, S замкнуто.

- **Ограниченность.**
  В каждом из трёх случаев, взяв $M = \max\{a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m\} + 1$, имеем $\forall x \in S\ \rho(x, 0) < M$, что означает ограниченность S.

■

Утверждение.

В каждом из трёх случаев КТЗ $\exists x_* \in S$: x_* — точка глобального минимума φ_0 на S.

Доказательство.

В каждом из трёх случаев $S \neq \varnothing$, замкнуто, ограничено, φ_0 непрерывна на S, тогда по второй теореме Вейерштрасса $\exists x_* \in S$: $\varphi_0(x_*) = \min\limits_{x\in S} \varphi_0(x)$.

■

4 Методы решения КТЗ

Мы рассмотрим два метода решения закрытой КТЗ. Также мы покажем, как решение открытой КТЗ свести к решению закрытой, и что это можно сделать всегда.

4.1 Сведение решения открытой КТЗ к решению закрытой в случае $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i > \sum\limits_{j=1}^{m} b_j$

Утверждение.

Пусть необходимо решить открытую КТЗ, в которой $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i > \sum\limits_{j=1}^{m} b_j$. Рассмотрим КТЗ, отличающуюся от неё лишь наличием ещё одного потребителя, B_{m+1}, с потребностью

$$b_{m+1} = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{j=1}^{m} b_j,$$

и стоимость перевозки к которому $\forall i \in \overline{1,n}\ c_{i,m+1} = 0$ (его называют фиктивным). (Ясно, что эта КТЗ является закрытой.) Пусть

$$\widetilde{c} = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc|c|ccccc} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1m} & c_{1,m+1} & c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2m} & c_{2,m+1} & \ldots & c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nm} & c_{n,m+1} \end{array}\right)^T \in \mathbb{R}^{n(m+1)},$$

$$\widetilde{S} = \left\{ y \in \mathbb{R}^{n(m+1)} \middle| \forall i \in \overline{1,n}\ \sum_{j=1}^{m+1} y_{ij} = a_i;\ \forall j \in \overline{1,(m+1)}\ \sum_{i=1}^{n} y_{ij} = b_j;\ y \geq 0 \right\},$$

$\widetilde{\varphi}_0(y) = \widetilde{c}^T y$ определена на $\widetilde{S}$, и мы решили эту КТЗ, т. е. нашли точку глобального минимума y_* функции $\widetilde{\varphi}_0$ на $\widetilde{S}$.
Тогда точка

$$x_* = \left(\begin{array}{cccc|cccc|c|cccc} y_{*11} & y_{*12} & \dots & y_{*1m} & y_{*21} & y_{*22} & \dots & y_{*2m} & \dots & y_{*n1} & y_{*n2} & \dots & y_{*nm} \end{array} \right)^T \in \mathbb{R}^{nm}$$

принадлежит S и является решением исходной КТЗ.

Доказательство.

1. Покажем, что $\forall \widetilde{y} \in \widetilde{S}$ точка

$$\widetilde{x} = \left(\begin{array}{cccc|cccc|c|cccc} \widetilde{y}_{11} & \widetilde{y}_{12} & \dots & \widetilde{y}_{1m} & \widetilde{y}_{21} & \widetilde{y}_{22} & \dots & \widetilde{y}_{2m} & \dots & \widetilde{y}_{n1} & \widetilde{y}_{n2} & \dots & \widetilde{y}_{nm} \end{array} \right)^T \in \mathbb{R}^{nm}$$

принадлежит S. Действительно, выполнены все три условия принадлежности элемента из $\mathbb{R}^{nm}$ множеству S:

$$\widetilde{x} \geq 0,$$

$$\forall i \in \overline{1,n} \sum_{j=1}^{m} \widetilde{x}_{ij} = \sum_{j=1}^{m} \widetilde{y}_{ij} \leq \sum_{j=1}^{m+1} \widetilde{y}_{ij} = a_i,$$

$$\forall j \in \overline{1,m} \sum_{i=1}^{n} \widetilde{x}_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{y}_{ij} = b_j.$$

2. Покажем, что множества

$$V = \{v \in \mathbb{R} | v = \varphi_0(x),\ x \in S\},\ \widetilde{V} = \left\{ v \in \mathbb{R} \middle| v = \widetilde{\varphi}_0(y),\ y \in \widetilde{S} \right\}$$

соответственно значений φ_0 на S и значений $\widetilde{\varphi}_0$ на $\widetilde{S}$ равны.

- Покажем $\widetilde{V} \subset V$. Возьмём любой $\widetilde{v} \in \widetilde{V}$. По принципу построения $\widetilde{V}$ существует $\widetilde{y} \in \widetilde{S}:\ \widetilde{v} = \widetilde{\varphi}_0(\widetilde{y})$. Согласно первому пункту доказательства,

$$\widetilde{x} = \left(\begin{array}{cccc|cccc|c|cccc} \widetilde{y}_{11} & \widetilde{y}_{12} & \dots & \widetilde{y}_{1m} & \widetilde{y}_{21} & \widetilde{y}_{22} & \dots & \widetilde{y}_{2m} & \dots & \widetilde{y}_{n1} & \widetilde{y}_{n2} & \dots & \widetilde{y}_{nm} \end{array} \right)^T \in S.$$

  Нетрудно убедиться, что $\widetilde{\varphi}_0(\widetilde{y}) = \varphi_0(\widetilde{x}) \in V$. Осюда $\widetilde{v} \in V$.
- Покажем $V \subset \widetilde{V}$. Возьмём любой $\widetilde{v} \in V$. По принципу построения V существует $\widetilde{x} \in S:\ \widetilde{v} = \varphi_0(\widetilde{x})$. Пусть

$$\widetilde{y} = \left(\begin{array}{cccc|cccc|c|cccc} \widetilde{x}_{11} & \dots & \widetilde{x}_{1m} & a_1 - \sum\limits_{j=1}^{m} \widetilde{x}_{1j} & \widetilde{x}_{21} & \dots & \widetilde{x}_{2m} & a_2 - \sum\limits_{j=1}^{m} \widetilde{x}_{2j} & \dots & \widetilde{x}_{n1} & \dots & \widetilde{x}_{nm} & a_n - \sum\limits_{j=1}^{m} \widetilde{x}_{nj} \end{array} \right)^T \in$$

$$\in \mathbb{R}^{n(m+1)}.$$

  Нетрудно убедиться, что $\widetilde{y} \in \widetilde{S}$. Кроме того, $\varphi_0(\widetilde{x}) = \widetilde{\varphi}_0(\widetilde{y}) \in \widetilde{V}$. Отсюда $\widetilde{v} \in \widetilde{V}$.

3. Из первого пункта доказательства вытекает $x_* \in S$. Нетрудно заметить, что $\varphi_0(x_*) = \widetilde{\varphi}_0(y_*)$. Поскольку y_* — точка глобального минимума $\widetilde{\varphi}_0$ на $\widetilde{S}$, то $\widetilde{\varphi}_0(y_*) = \min \widetilde{V}$. Учитывая также $\widetilde{V} = V$, получаем $\varphi_0(x_*) = \min V$. Значит, x_* — точка глобального минимума φ_0 на S.

■

4.2 Сведение решения открытой КТЗ к решению закрытой в случае $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i < \sum\limits_{j=1}^{m} b_j$

Утверждение.

Пусть необходимо решить открытую КТЗ, в которой $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i < \sum\limits_{j=1}^{m} b_j$. Рассмотрим КТЗ, отличающуюся от неё лишь наличием ещё одного пункта хранения, A_{n+1}, с количеством груза

$$a_{n+1} = \sum_{j=1}^{m} b_j - \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

и стоимость перевозки из которого $\forall j \in \overline{1,m}$ $c_{n+1,j} = 0$ (его называют фиктивным). (Ясно, что эта КТЗ является закрытой.) Пусть

$$\widetilde{c} = \left(\begin{array}{cccc|cccc|c|cccc|cccc} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} & c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m} & \dots & c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nm} & c_{n+1,1} & c_{n+1,2} & \dots & c_{n+1,m} \end{array} \right)^T \in \mathbb{R}^{(n+1)m},$$

$$\widetilde{S} = \left\{ y \in \mathbb{R}^{(n+1)m} \middle| \forall i \in \overline{1,(n+1)} \sum_{j=1}^{m} y_{ij} = a_i;\ \forall j \in \overline{1,m} \sum_{i=1}^{n+1} y_{ij} = b_j;\ y \geq 0 \right\},$$

$\widetilde{\varphi}_0(y) = \widetilde{c}^T y$ определена на $\widetilde{S}$, и мы решили эту КТЗ, т. е. нашли точку глобального минимума y_* функции $\widetilde{\varphi}_0$ на $\widetilde{S}$.
Тогда точка

$$x_* = \left(\begin{array}{cccc|cccc|c|cccc} y_{*11} & y_{*12} & \ldots & y_{*1m} & y_{*21} & y_{*22} & \ldots & y_{*2m} & \ldots & y_{*n1} & y_{*n2} & \ldots & y_{*nm} \end{array} \right)^T \in \mathbb{R}^{nm}$$

принадлежит S и является решением исходной КТЗ.
Доказательство.

1. Покажем, что $\forall \widetilde{y} \in \widetilde{S}$ точка

$$\widetilde{x} = \left(\begin{array}{cccc|cccc|c|cccc} \widetilde{y}_{11} & \widetilde{y}_{12} & \ldots & \widetilde{y}_{1m} & \widetilde{y}_{21} & \widetilde{y}_{22} & \ldots & \widetilde{y}_{2m} & \ldots & \widetilde{y}_{n1} & \widetilde{y}_{n2} & \ldots & \widetilde{y}_{nm} \end{array} \right)^T \in \mathbb{R}^{nm}$$

   принадлежит S. Действительно, выполнены все три условия принадлежности элемента из $\mathbb{R}^{nm}$ множеству S:

$$\widetilde{x} \geq 0,$$

$$\forall j \in \overline{1,m} \ \sum_{i=1}^{n} \widetilde{x}_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{y}_{ij} \leq b_j,$$

$$\forall i \in \overline{1,n} \ \sum_{j=1}^{m} \widetilde{x}_{ij} = \sum_{j=1}^{m} \widetilde{y}_{ij} = a_i.$$

2. Покажем, что множества

$$V = \{v \in \mathbb{R} | v = \varphi_0(x),\ x \in S\},\ \widetilde{V} = \left\{ v \in \mathbb{R} \middle| v = \widetilde{\varphi}_0(y),\ y \in \widetilde{S} \right\}$$

   соответственно значений φ_0 на S и значений $\widetilde{\varphi}_0$ на $\widetilde{S}$ равны.
   - Покажем $\widetilde{V} \subset V$. Возьмём любой $\widetilde{v} \in \widetilde{V}$. По принципу построения $\widetilde{V}$ существует $\widetilde{y} \in \widetilde{S}$: $\widetilde{y} = \widetilde{\varphi}_0(\widetilde{y})$. Согласно первому пункту доказательства,

$$\widetilde{x} = \left(\begin{array}{cccc|cccc|c|cccc} \widetilde{y}_{11} & \widetilde{y}_{12} & \ldots & \widetilde{y}_{1m} & \widetilde{y}_{21} & \widetilde{y}_{22} & \ldots & \widetilde{y}_{2m} & \ldots & \widetilde{y}_{n1} & \widetilde{y}_{n2} & \ldots & \widetilde{y}_{nm} \end{array} \right)^T \in S.$$

     Нетрудно убедиться, что $\widetilde{\varphi}_0(\widetilde{y}) = \varphi_0(\widetilde{x}) \in V$. Отсюда $\widetilde{v} \in V$.
   - Покажем $V \subset \widetilde{V}$. Возьмём любой $\widetilde{v} \in V$. По принципу построения V существует $\widetilde{x} \in S$: $\widetilde{v} = \varphi_0(\widetilde{x})$. Пусть

$$\widetilde{y} = \left(\begin{array}{ccc|ccc|c|ccc|ccc} \widetilde{x}_{11} & \ldots & \widetilde{x}_{1m} & \widetilde{x}_{21} & \ldots & \widetilde{x}_{2m} & \ldots & \widetilde{x}_{n1} & \ldots & \widetilde{x}_{nm} & b_1 - \sum\limits_{i=1}^{n} \widetilde{x}_{i1} & \ldots & b_m - \sum\limits_{i=1}^{n} \widetilde{x}_{im} \end{array} \right)^T \in \mathbb{R}^{(n+1)m}.$$

     Нетрудно убедиться, что $\widetilde{y} \in \widetilde{S}$. Кроме того, $\varphi_0(\widetilde{x}) = \widetilde{\varphi}_0(\widetilde{y}) \in \widetilde{V}$. Отсюда $\widetilde{v} \in \widetilde{V}$.

3. Из первого пункта доказательства вытекает $x_* \in S$. Нетрудно заметить, что $\varphi_0(x_*) = \widetilde{\varphi}_0(y_*)$. Поскольку y_* — точка глобального минимума $\widetilde{\varphi}_0$ на $\widetilde{S}$, то $\widetilde{\varphi}_0(y_*) = \min \widetilde{V}$. Учитывая также $\widetilde{V} = V$, получаем $\varphi_0(x_*) = \min V$. Значит, x_* — точка глобального минимума φ_0 на S.

■

4.3 Решение закрытой КТЗ симплекс-методом

В закрытой КТЗ

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^{nm} \middle| \forall i \in \overline{1,n} \ \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i;\ \forall j \in \overline{1,m} \ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j;\ x \geq 0 \right\} =$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R}^{nm} \middle| \begin{array}{l} n \text{ строк} \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right. \\ m \text{ строк} \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right. \end{array} \underbrace{\begin{pmatrix} \begin{array}{ccccc|ccccc|c|ccccc} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{array} \end{pmatrix}}_{m \text{ столбцов} \quad m \text{ столбцов} \quad \ldots \quad m \text{ столбцов}} \cdot x = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix};\ x \geq 0 \right\}.$$

Обозначим A и d соответственно матрицу, указанную в множестве S, и вектор в правой части равенства. Нетрудно заметить, что закрытая КТЗ является канонической задачей ЛП. Можно ли для её решения применить симплекс-метод? Ответить на этот вопрос нам помогут следующие утверждения.

Утверждение.

rank $A < n + m$.

Доказательство.

Обозначим $\forall i \in \overline{1,(n+m)}$ s_i i-тую строку матрицы A. Заметим, что

$$\sum_{i=1}^{n} s_i = \sum_{i=n+1}^{n+m} s_i,$$

а отсюда

$$\sum_{i=1}^{n} s_i - \sum_{i=n+1}^{n+m} s_i = 0.$$

Как видим, существует линейная комбинация строк матрицы A, в которой есть хотя бы один ненулевой коэффициент, и которая равна нулевой вектор-строке, поэтому система из всех строк матрицы A является линейно зависимой, а значит rank $A < n + m$.

■

Утверждение.

Любая система из $(n+m)-1$ строк матрицы A является линейно независимой.

Доказательство.

Обозначим $\forall i \in \overline{1,(n+m)}$ s_i i-тую строку матрицы A.

1. Исключим из A любую строку с индексом $t \in \overline{1,n}$ и рассмотрим систему из оставшихся $(n+m)-1$ строк. Обозначим $I = \overline{1,(n+m)} \setminus \{t\}$. Возьмём любые $(n+m)-1$ коэффициентов α_i, $i \in I$:

$$\sum_{i\in I} \alpha_i s_i = 0.$$

(Такой набор коэффициентов обязательно существует. Им является, например, набор из нулей.) Если мы покажем, что тогда обязательно $\forall i \in I$ $\alpha_i = 0$, то для данного случая утверждение будет доказано. Для этого распишем линейную комбинацию покомпонентно:

$$\sum_{i\in I} \alpha_i s_i =$$

$$\begin{array}{rccccccccccccc}
= & \alpha_1 & \cdot & (& \overbrace{1\ \ldots\ 1}^{\substack{\text{первые}\\ m\text{ компонент}}} & \ldots & \overbrace{0\ \ldots\ 0}^{\substack{(t-1)\text{-тые}\\ m\text{ компонент}}} & \overbrace{0\ \ldots\ 0}^{\substack{t\text{-тые}\\ m\text{ компонент}}} & \overbrace{0\ \ldots\ 0}^{\substack{(t+1)\text{-тые}\\ m\text{ компонент}}} & \ldots & \overbrace{0\ \ldots\ 0}^{\substack{n\text{-тые}\\ m\text{ компонент}}} &) & +\ldots \\
\ldots+ & \alpha_{t-1} & \cdot & (& 0\ \ldots\ 0 & \ldots & 1\ \ldots\ 1 & 0\ \ldots\ 0 & 0\ \ldots\ 0 & \ldots & 0\ \ldots\ 0 &) & + \\
+ & \alpha_{t+1} & \cdot & (& 0\ \ldots\ 0 & \ldots & 0\ \ldots\ 0 & 0\ \ldots\ 0 & 1\ \ldots\ 1 & \ldots & 0\ \ldots\ 0 &) & +\ldots \\
\ldots+ & \alpha_{n} & \cdot & (& 0\ \ldots\ 0 & \ldots & 0\ \ldots\ 0 & 0\ \ldots\ 0 & 0\ \ldots\ 0 & \ldots & 1\ \ldots\ 1 &) & + \\
+ & \alpha_{n+1} & \cdot & (& 1\ \ldots\ 0 & \ldots & 1\ \ldots\ 0 & 1\ \ldots\ 0 & 1\ \ldots\ 0 & \ldots & 1\ \ldots\ 0 &) & +\ldots \\
\ldots+ & \alpha_{n+m} & \cdot & (& 0\ \ldots\ 1 & \ldots & 0\ \ldots\ 1 & 0\ \ldots\ 1 & 0\ \ldots\ 1 & \ldots & 0\ \ldots\ 1 &) & = \\
= & & & (& 0\ \ldots\ 0 & \ldots & 0\ \ldots\ 0 & 0\ \ldots\ 0 & 0\ \ldots\ 0 & \ldots & 0\ \ldots\ 0 &). &
\end{array}$$

В последнем равенстве, сложив соответствующие компоненты (в частности, t-тые m компонент), увидим, что $\alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_{n+m}$ равны нулю. Из-за этого и $\alpha_1, \ldots, \alpha_{t-1}, \alpha_{t+1}, \ldots, \alpha_n$ равны нулю. Тогда $\forall i \in I$ $\alpha_i = 0$.

2. Случай, когда из A исключается произвольная строка с индексом $t \in \overline{(n+1),(n+m)}$, доказывается аналогично.

■

Из доказанных утверждений вытекает, что rank $A = (m+n)-1$, т. е. A не является матрицей полного ранга. Естественно, из-за этого применить симплекс-метод для решения такой задачи, не произведя определённого преобразования (какого, — будет ясно далее), нельзя. Эти два утверждения важны для нас, поскольку они позволили сделать этот вывод, но они «самостоятельны», не опираются на то, что сейчас мы рассматриваем КТЗ: их формулировки касаются лишь матриц описанной структуры, а доказательства опираются лишь на основы линейной алгебры.

Теперь учтём, что мы решаем закрытую КТЗ. Пусть $\widetilde{A}$ — матрица, полученная из A исключением произвольной строки с индексом $t \in \overline{1,(n+m)}$ (ясно, что $\widetilde{A}$ — матрица полного ранга), $\widetilde{d}$ — вектор, полученный из d исключением компоненты с индексом t, и

$$\widetilde{S} = \left\{ x \in \mathbb{R}^{nm} \middle| \widetilde{A}x = \widetilde{d};\ x \geq 0 \right\}.$$

Утверждение.

$\widetilde{S} = S$.

Доказательство.

- Покажем $S \subset \widetilde{S}$. Возьмём любой $\widetilde{x} \in S$. Ясно, что $\widetilde{x} \geq 0$. Также ясно, что $\widetilde{x}$ удовлетворяет каждому уравнению системы $Ax = d$, а поскольку система $\widetilde{A}x = \widetilde{d}$ отличается от неё лишь отсутствием t-того уравнения, а все остальные уравнения те же, то $\widetilde{x}$ удовлетворяет и каждому уравнению системы $\widetilde{A}x = \widetilde{d}$, т. е. $\widetilde{A}\widetilde{x} = \widetilde{d}$. Тогда $\widetilde{x} \in \widetilde{S}$.
- Покажем $\widetilde{S} \subset S$. Возьмём любой $\widetilde{x} \in \widetilde{S}$. Ясно, что $\widetilde{x} \geq 0$. Также ясно, что $\widetilde{x}$ удовлетворяет каждому уравнению системы $\widetilde{A}x = \widetilde{d}$, а значит и каждому уравнению системы $Ax = d$, имеющему индекс из $I = \overline{1, (n+m)} \setminus \{t\}$. Мы рассматриваем закрытую КТЗ, т. е. имеем
$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j.$$
Из этого равенства можно выразить любое из чисел $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m$, в частности, имеющее индекс t в векторе d, как сумму и разность остальных, поэтому справедливо, что t-тое уравнение системы $Ax = b$ есть результат сложения остальных уравнений этой системы. Значит, $\widetilde{x}$ удовлетворяет и ему, и $A\widetilde{x} = d$. Тогда $\widetilde{x} \in S$.

■

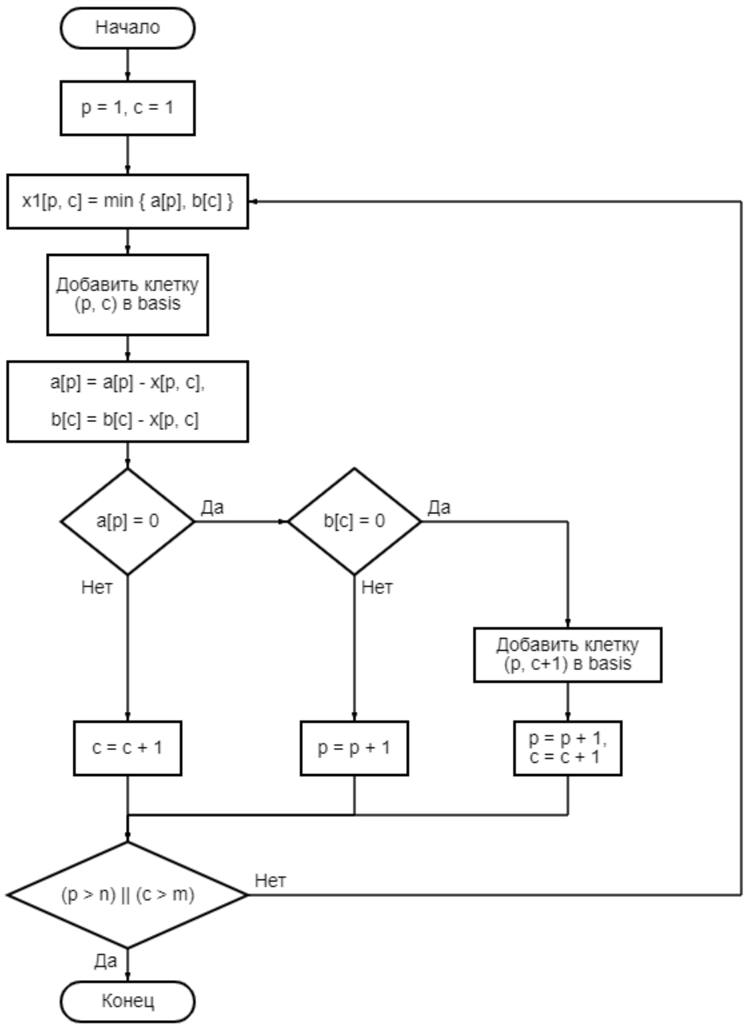
Тогда во-первых, φ_0 определена на $\widetilde{S}$, во-вторых, x_* является точкой глобального минимума φ_0 на S тогда и только тогда, когда x_* является точкой глобального минимума φ_0 на $\widetilde{S}$. Остается лишь заметить, что в $\widetilde{A}$ количество строк меньше количества столбцов тогда и только тогда, когда $m > 1,\ n > 1$ (действительно,
$$m + n - 1 < mn \ \Leftrightarrow\ (m-1)(n-1) > 0 \Leftrightarrow m > 1, n > 1).$$

Значит, при $m > 1,\ n > 1$ мы правомерно можем применить симплекс-метод для нахождения точки глобального минимума φ_0 на $\widetilde{S}$. Она же будет точкой глобального минимума φ_0 на S.

4.4 Решение закрытой КТЗ методом потенциалов

4.4.1 Вычисление начального приближения

Сперва необходимо задать начальное приближение x_1. Один из способов сделать это — воспользоваться методом северо-западного угла (МСЗУ). Его блок-схема такова:



Смысл используемых переменных: $x1$ — вычисляемое начальное приближение x_1; $basis$ — вычисляемое множество базисных клеток вектора x_1; a — вектор, каждая компонента которого равна количеству не отправленного *на данный момент работы алгоритма МСЗУ* груза из соответствующего ей пункта хранения; b — вектор, каждая компонента которого равна не удовлетворённой *на данный момент работы алгоритма МСЗУ* потребности соответствующего ей потребителя. Перед работой алгоритма эти переменные инициализируются следующим образом: $x1 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}^T$, $basis = \varnothing$, $a = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix}^T$, $b = \begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_m \end{pmatrix}^T$.

4.4.2 Критерий оптимальности, используемый в методе потенциалов

Утверждение.

Пусть необходимо решить закрытую КТЗ.

Пусть $x_* \in S$.

Чтобы x_* являлась точкой глобального минимума φ_0 на S, необходимо и достаточно, чтобы существовали

$$\{u_i\}_{i\in\overline{1,n}} \subset \mathbb{R},\ \{v_i\}_{i\in\overline{1,m}} \subset \mathbb{R}$$

такие, что:

- для любых $i \in \overline{1,n}$, $j \in \overline{1,m}$ таких, что компонента x_{*ij} является базисной, верно $v_j - u_i = c_{ij}$;
- для любых $i \in \overline{1,n}$, $j \in \overline{1,m}$ таких, что компонента x_{*ij} не является базисной, верно $v_j - u_i \le c_{ij}$.

.

Доказательство.

Приведём лишь доказательство достаточности.

$$\forall x \in S\ \varphi_0(x_*) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{*ij}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}(v_j - u_i)\cdot x_{*ij}\right)}_{\text{поскольку небазисные компоненты } x_* \text{ равны } 0} = \sum_{j=1}^{m}\left(v_j \cdot \sum_{i=1}^{n} x_{*ij}\right) - \sum_{i=1}^{n}\left(u_i \cdot \sum_{j=1}^{m} x_{*ij}\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m}(v_j b_j) - \sum_{i=1}^{n}(u_i a_i) =$$

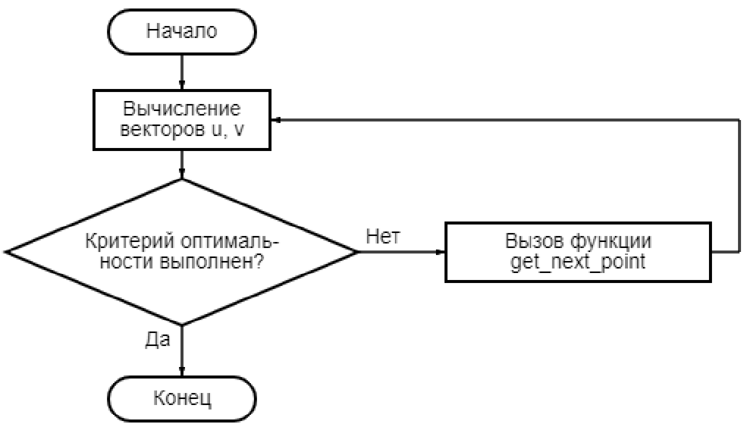
$$= \sum_{j=1}^{m}\left(v_j \cdot \sum_{i=1}^{n} x_{ij}\right) - \sum_{i=1}^{n}\left(u_i \cdot \sum_{j=1}^{m} x_{ij}\right) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}(v_j - u_i)\cdot x_{ij}\right) \le \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}\right)}_{\substack{\text{в силу принципа выбора чисел } u_i\ (i\in\overline{1,n}),\ v_j\ (j\in\overline{1,m}) \\ \text{и неотрицательности компонент вектора } x}} = \varphi_0(x).$$

Таким образом, x_* — точка глобального минимума φ_0 на S.

■

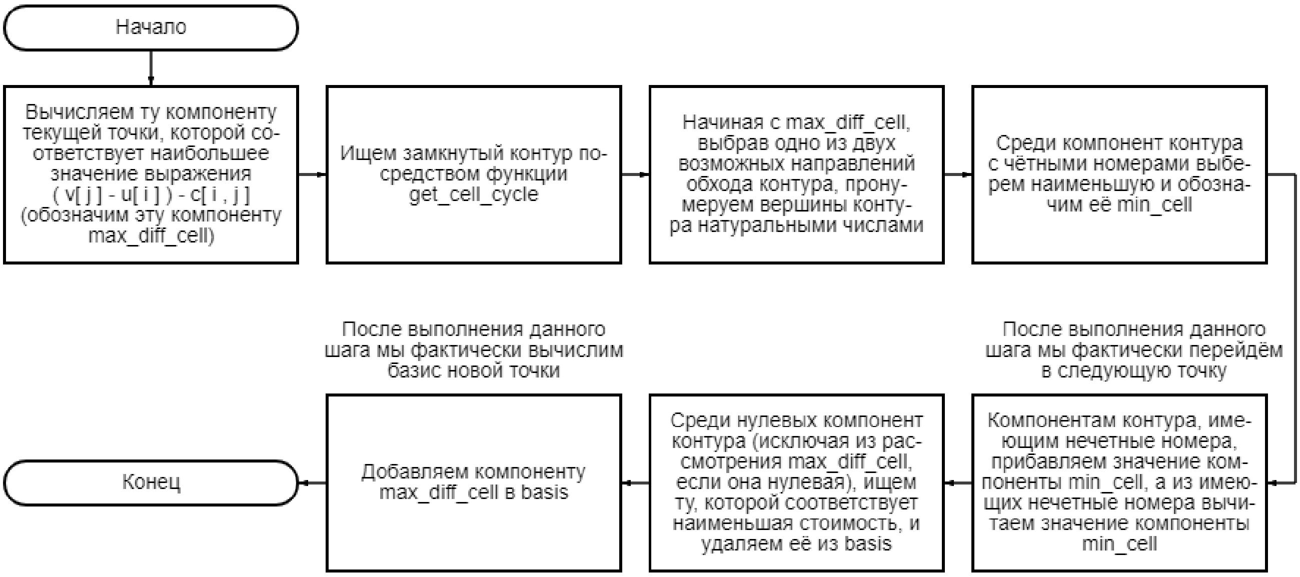
4.4.3 Алгоритм метода потенциалов

Приведём блок-схему метода потенциалов.



Здесь $u = \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_n \end{pmatrix}^T$, $v = \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_m \end{pmatrix}^T$ (числа $u_1, \dots, u_n$, $v_1, \dots, v_m$ и называют потенциалами). Количество потенциалов равно $n + m$, и вычисляются они по базисным клеткам, количество которых $n + m - 1$. Поэтому нам необходимо решить $n+m-1$ уравнений $n+m$ неизвестных, и одну из них, например, u_1, необходимо считать равной 0 или любому другому вещественному числу.

Посредством следующей блок-схемы опишем работу функции get_next_point, вычисляющей последующую точку и её базис.



В свою очередь, раскроем работу функции get_cell_cycle, вычисляющей замкнутый контур. Построение контура необходимо начинать из клетки max_diff_cell, она считается первой вершиной контура. Сначала мы пробуем построить контур, в котором вторая вершина будет расположена (имеется в виду расположение в таблице перевозок) выше первой, и эту работу выполняет функция $begin\_cycle\_search\_up$; затем, если не удалось построить такой контур, — в котором вторая вершина расположена ниже, левее, правее. Доказуемо, что интересующий нас контур всегда существует, поэтому хотя бы одна из функций его вычислит.

Раскроем работу функции $begin\_cycle\_search\_up$ (функции $begin\_cycle\_search\_down$, $begin\_cycle\_search\_left$, $begin\_cycle\_search\_right$ выполняют аналогичные действия). Выше первой вершины контура может не быть ни одной базисной клетки, может быть только одна базисная клетка, может быть несколько базисных клеток. Во втором и третьем случаях после нахождения второй вершины контура вызывается рекурсивная функция $visit\_cell$, пробующая построить контур далее; обратим внимание, что в третьем случае сначала выбирается «ближайшая» к первой базисная клетка, а если построить контур не удалось, то далее она пропускается и выбираются последующие базисные клетки, расположенные над первой.

Функция $visit\_cell$ вычисляет третью и последующие точки для контура. Если мы «пришли» в текущую базисную клетку «по вертикали», то далее имеет смысл искать базисные клетки лишь слева или справа по отношению к текущей; если же «по горизонтали», то далее имеет смысл искать базисные клетки лишь сверху или снизу по отношению к текущей. Найденная базисная клетка добавляется в контур только в том случае, если она ещё не содержатся в нём (противоположную ситуацию мы называли самопересечением контура — self-intersection). Аналогично четырём вышеописанным функциям обрабатывается случай, когда базисных клеток слева, справа, сверху, снизу несколько.

5 Пример решения КТЗ с помощью метода потенциалов, симплекс-метода

Рассмотрим транспортную задачу, заданную таблицей тарифов:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	1	4	7	8	11	33
A_2	3	5	9	7	14	35
A_3	4	5	12	6	9	17
A_4	6	10	11	17	13	12
	23	34	5	16	19	

Данная транспортная задача является закрытой, поскольку суммарная потребность равна суммарному запасу груза и составляет 97 у. е. Нас интересуют планы перевозок, принадлежащие множеству

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^{20} \,\middle|\, \left(\begin{array}{ccccc|ccccc|ccccc|ccccc} 1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1 \\ \hline 1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1 \end{array} \right) \cdot x = \begin{pmatrix} 33 \\ 35 \\ 17 \\ 12 \\ 23 \\ 34 \\ 5 \\ 16 \\ 19 \end{pmatrix} \; ; \; x \geq 0 \right\}.$$

Пусть

$$c = \left(1 \quad 4 \quad 7 \quad 8 \quad 11 \,\middle|\, 3 \quad 5 \quad 9 \quad 7 \quad 14 \,\middle|\, 4 \quad 5 \quad 12 \quad 6 \quad 9 \,\middle|\, 6 \quad 10 \quad 11 \quad 17 \quad 13 \right)^T \in \mathbb{R}^{20},$$

и функция $\varphi_0(x) = c^T x$ определена на S. Наша задача — найти план перевозок $x_* \in S$:

$$\varphi_0(x_*) = \min_{x \in S} \varphi_0(x).$$

5.1 Демонстрация работы метода потенциалов

Прежде всего необходимо вычислить начальное приближение x_1. Для этого воспользуемся методом северо-западного угла. Продемонстрируем его работу.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Остаточный запас
A_1	×					33
A_2						35
A_3						17
A_4						12
Остаточная потребность	23	34	5	16	19	

→

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Остаточный запас
A_1	**23**	×				10
A_2	0					35
A_3	0					17
A_4	0					12
Остаточная потребность	0	34	5	16	19	

→

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Остаточный запас
A_1	**23**	**10**	0	0	0	0
A_2	0	×				35
A_3	0					17
A_4	0					12
Остаточная потребность	0	24	5	16	19	

→

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Остаточный запас
A_1	**23**	**10**	0	0	0	0
A_2	0	**24**	×			11
A_3	0	0				17
A_4	0	0				12
Остаточная потребность	0	0	5	16	19	

→

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Остаточный запас
A_1	**23**	**10**	0	0	0	0
A_2	0	**24**	**5**	×		6
A_3	0	0	0			17
A_4	0	0	0			12
Остаточная потребность	0	0	0	16	19	

→

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Остаточный запас
A_1	**23**	**10**	0	0	0	0
A_2	0	**24**	**5**	**6**	0	0
A_3	0	0	0	×		17
A_4	0	0	0			12
Остаточная потребность	0	0	0	10	19	

→

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Остаточный запас
A_1	**23**	**10**	0	0	0	0
A_2	0	**24**	**5**	**6**	0	0
A_3	0	0	0	**10**	×	7
A_4	0	0	0	0		12
Остаточная потребность	0	0	0	0	19	

→

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Остаточный запас
A_1	**23**	**10**	0	0	0	0
A_2	0	**24**	**5**	**6**	0	0
A_3	0	0	0	**10**	**7**	0
A_4	0	0	0	0	×	12
Остаточная потребность	0	0	0	0	12	

→

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Остаточный запас
A_1	**23**	**10**	0	0	0	0
A_2	0	**24**	**5**	**6**	0	0
A_3	0	0	0	**10**	**7**	0
A_4	0	0	0	0	**12**	0
Остаточная потребность	0	0	0	0	0	

Итак, начальное приближение — точка

$$x_1 = \left(23 \quad 10 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \,\middle|\, 0 \quad 24 \quad 5 \quad 6 \quad 0 \,\middle|\, 0 \quad 0 \quad 0 \quad 10 \quad 7 \,\middle|\, 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 12 \right)^T \in S.$$

Теперь вычислим точку глобального минимума с помощью метода потенциалов. Продемонстрируем его работу (в столбце с координатами точки приведены только базисные компоненты, остальные равны 0).

Шаг — Базисные клетки и потенциалы — Координаты точки — Значение φ_0

1

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	×	×				$u_1 = 0$
A_2		×	×	×		$u_2 = 1$
A_3				×	×	$u_3 = 0$
A_4					×	$u_4 = 4$
	$v_1 = 1$	$v_2 = 4$	$v_3 = 8$	$v_4 = 6$	$v_5 = 9$	

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	23	10			
A_2		24	5	6	
A_3				10	7
A_4					12

549

2

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	$\times$	$\times$	$\times$			$u_1 = 0$
A_2		$\times$		$\times$		$u_2 = 1$
A_3				$\times$	$\times$	$u_3 = 0$
A_4					$\times$	$u_4 = 4$
	$v_1 = 1$	$v_2 = 4$	$v_3 = 7$	$v_4 = 6$	$v_5 = 9$	

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	23	5	5			
A_2		29		6		
A_3				10	7	
A_4					12	

544

Итак, точка глобального минимума — точка

$$x_* = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc|ccccc|ccccc} 23 & 5 & 5 & 0 & 0 & 0 & 29 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{array} \right)^T \in S.$$

5.2 Демонстрация работы симплекс-метода

Теперь вычислим точку глобального минимума с помощью симплекс-метода. Его применение к решению данной КТЗ возможно, ибо $n = 4 > 1$, $m = 5 > 1$.

Номер точки	Замен базиса	Координаты точки	Значение φ_0
1	0	(таблица ниже)	666
…	…	……	
10	4	(таблица ниже)	544

Точка 1:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1				14	19	
A_2		28	5	2		
A_3	11	6				
A_4	12					

Точка 10:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	23	10				
A_2		24		11		
A_3				5	12	
A_4			5		7	

Итак, точка глобального минимума — точка

$$x_* = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc|ccccc|ccccc} 23 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 12 & 0 & 0 & 5 & 0 & 7 \end{array} \right)^T \in S.$$

5.3 Анализ полученных результатов

5.3.1 Проверка достоверности результата, полученного симплекс-методом

Напомним, x_* будет точкой глобального минимума в канонической задаче ЛП тогда и только тогда, когда существует $y_* \in \mathbb{R}^{n+m}$ такой, что

$$c^T - y_* A \geq 0,\ (c^T - y_* A) x_* = 0.$$

Таковым является вектор

$$y_* = \left(\begin{array}{ccccccccc} 5 & 4 & 1 & 7 & -5 & -2 & 1 & 2 & 5 \end{array} \right)^T,$$

ибо

$$c^T - y_* A = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc|ccccc|ccccc} 0 & 0 & 3 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{array} \right) \geq 0,$$

$$(c^T - y_* A) x_* = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc|ccccc|ccccc} 0 & 0 & 3 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{array} \right) \cdot$$

$$\cdot \left(\begin{array}{ccccc|ccccc|ccccc|ccccc} 23 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 12 & 0 & 0 & 5 & 0 & 7 \end{array} \right)^T = 0.$$

5.3.2 Проверка достоверности результата, полученного методом потенциалов

Для удобства ещё раз приведём таблицу тарифов и таблицу с базисными компонентами, потенциалами x_*.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	23	5	5			
A_2		29		6		
A_3				10	7	
A_4					12	

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	$\times$	$\times$	$\times$			$u_1 = 0$
A_2		$\times$		$\times$		$u_2 = 1$
A_3				$\times$	$\times$	$u_3 = 0$
A_4					$\times$	$u_4 = 4$
	$v_1 = 1$	$v_2 = 4$	$v_3 = 7$	$v_4 = 6$	$v_5 = 9$	

Нетрудно убедиться, что

- для любых $i \in \overline{1,n},\ j \in \overline{1,m}$ таких, что компонента x_{*ij} является базисной, выполнено $v_j - u_i = c_{ij}$,
- для любых $i \in \overline{1,n},\ j \in \overline{1,m}$ таких, что компонента x_{*ij} не является базисной, выполнено $v_j - u_i \leq c_{ij}$.

Поскольку критерий оптимальности выполнен, то x_* действительно является точкой глобального минимума.

5.3.3 Замечание о разнице вычисленных планов перевозок

В результате решения одной и той же КТЗ двумя методами мы получили две различных точки глобального минимума. Поскольку в задаче выпуклого программирования множество точек глобального минимума выпукло, то любая выпуклая комбинация (а их бесконечно много) двух найденных точек также является точкой глобального минимума. В рассматриваемой КТЗ, таким образом, можно указать бесконечно много оптимальных планов перевозок.

5.3.4 Замечание о количестве оптимальных решений

Количество возможных решений транспортной задачи можно определить с помощью метода потенциалов. Если в задаче существуют уникальные потенциалы, то задача имеет единственное оптимальное решение. В противном случае, задача может иметь множество оптимальных решений.

Таким образом, количество решений транспортной задачи зависит от условий задачи, и может быть единственным, несколькими или даже бесконечным, если задача не имеет оптимального решения.

Если такие потенциалы существуют и являются уникальными, то это гарантирует единственность оптимального решения исходной задачи ЛП. Если же потенциалы не существуют или не являются уникальными, то метод потенциалов может привести к множеству оптимальных решений исходной задачи ЛП.

Пусть мы получили оптимальный план, и при этом одна или несколько оценок свободных клеток равны нулю. Покажем, что в этом случае решение задачи не единственное, существует два или более оптимальных опорных планов, а их линейная комбинация может дать бесконечно много решений. Предположим, что оценка свободной клетки $x_{i_2 j_2}$ равна нулю. Тогда, в силу : $\Delta_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$, получаем что $c_{i_2 j_2} = u_{i_2} + v_{i_2}$.
Где c_{ij} – издержки на перевозки, u_i и v_j - потенциалы поставщиков и потребителей. Величины Δ_{ij} также называют оценками свободных клеток таблицы, или оценками векторов-условий. Для базисных переменных, $\Delta_{ij} = 0$. Если план оптимален, то $\Delta_{ij} \geq 0$ для всех переменных. Если существуют отрицательные оценки, то план не оптимален.

Перейдем к новым базисным переменным, включив в их состав $x_{i_2 j_2}$. Допустим, что из базиса выйдет переменная $x_{i_1 j_1}$. Тогда для определения потенциалов, мы получим ту же систему уравнений $u_i + v_i = c_{ij}$ для базисных переменных x_{ij}, в которой вместо уравнения $c_{i_1 j_1} = u_{i_1} + v_{i_1}$ будет уравнение $c_{i_2 j_2} = u_{i_2} + v_{i_2}$. Но поскольку при решении первой системы мы получили, что уравнение $c_{i_2 j_2} = u_{i_2} + v_{i_2}$ выполняется, тогда и новой системе удовлетворяют те же значения потенциалов. Поэтому новый план также будет оптимальным.

5.3.5 Сравнение методов

Симплекс метод может быть использован для решения любой задачи линейного программирования, в то время как метод потенциалов применим только для решения транспортной задачи.

Симплекс метод может быть неэффективным для больших задач уже при n и m = 10 -15., так как он требует много вычислительных ресурсов. В то же время, метод потенциалов является более эффективным для больших задач, поскольку он не требует формирования таблицы.

Симплекс метод может обнаруживать оптимальное решение более быстро, чем метод потенциалов. Однако, если транспортная задача имеет определенные свойства (например, уникальность потенциалов), то метод потенциалов может быть быстрее.

Симплекс метод может быть более точным в нахождении оптимального решения, поскольку он рассматривает все возможные базисные переменные. В то же время, метод потенциалов может давать приближенные результаты.

В целом, выбор между симплекс методом и методом потенциалов зависит от конкретной задачи и объема данных, которые требуется обработать. Если задача достаточно маленькая, то можно использовать симплекс метод. Если же задача большая, то метод потенциалов может быть более эффективным в использовании ресурсов.

5.3.6 Получение других оптимальных решений

Если у нас есть два оптимальных решения транспортной задачи, то мы можем получить новые допустимые решения, используя методы комбинирования имеющихся решений.

Один из таких методов - это метод компромисса (или метод смешанных стратегий), который заключается в следующем:

Выбирается весовой коэффициент alpha (обычно выбирают значение от 0 до 1), который определяет вес каждого из двух решений. Полученное взвешенное решение является новым допустимым решением транспортной задачи.

Формально, новое решение может быть выражено следующей, хорошо известной нам формулой выпуклой комбинации двух точек:

$X_{new} = \alpha * \cdot X_1 + (1 - \alpha) \cdot X_2$

где $X_1 X_2$ - два оптимальных решения, $\alpha \in [0, 1]$ - весовой коэффициент, а X_{new} - новое допустимое решение.

Например, если $\alpha = 0.5$, то новое решение будет являться средним арифметическим двух оптимальных решений.

Продемонстрируем данный способ получения новых оптимальных решений применительно к нашей задаче.

Пусть

$$c = \left(1 \quad 4 \quad 7 \quad 8 \quad 11 \,\middle|\, 3 \quad 5 \quad 9 \quad 7 \quad 14 \,\middle|\, 4 \quad 5 \quad 12 \quad 6 \quad 9 \,\middle|\, 6 \quad 10 \quad 11 \quad 17 \quad 13 \right)^T \in \mathbb{R}^{20},$$

и функция $\varphi_0(x) = c^T x$ определена на S.

Тогда

$$X_1 = (\; 23 \quad 5 \quad 5 \quad 0 \quad 0 \,|\, 0 \quad 29 \quad 0 \quad 6 \quad 0 \,|\, 0 \quad 0 \quad 0 \quad 10 \quad 7 \,|\, 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 12 \;)^T \in S.$$

$$X_2 = (\; 23 \quad 10 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \,|\, 0 \quad 24 \quad 0 \quad 11 \quad 0 \,|\, 0 \quad 0 \quad 0 \quad 5 \quad 12 \,|\, 0 \quad 0 \quad 5 \quad 0 \quad 7 \;)^T \in S.$$

$$\phi_0(X_1) = \phi_0(X_2) = 544$$

Пусть $\alpha = 0.5 \quad \Rightarrow \quad X_{new} = 0.5 \cdot (X_1 + X_2)$

Тогда

$$X_{new} = (\; 23 \quad 7.5 \quad 2.5 \quad 0 \quad 0 \,|\, 0 \quad 26.5 \quad 0 \quad 8.5 \quad 0 \,|\, 0 \quad 0 \quad 0 \quad 7,5 \quad 9.5 \,|\, 0 \quad 0 \quad 2.5 \quad 0 \quad 9.5 \;)^T \in S.$$

Заметим, что $\phi_0(X_{new}) = 544$, что свидетельствует о том, что из выпуклой комбинации точек, являющихся оптимальными решениями задачи линейного программирования мы получаем другие оптимальные решения.

6 Многопродуктовая транспортная задача

6.1 Постановка задачи

Пусть имеется k видов различных продуктов, m пунктов производства, n пунктов потребления.
Для каждого пункта производства известно количество каждого продукта
Для каждого пункта потребления известна потребность в каждом продукта
Пусть известна стоимость перевозки *единицы* груза из каждого пункта производства каждому потребителю.
Необходимо найти среди планов перевозок со свойствами:

- каждому потребителю пришло количество груза, равное его потребности
- из каждого пункта вывезены все продукты
- сумма стоимостей всех перевозок минимальна.

6.2 Формализация рассматриваемой задачи

$a_i = (a_{i1}, ..., a_{ik})$ - объем производства в i-ом пункте
$b_j = (b_{j1}, ..., b_{jk})$ - объем потребления в j-ом пункте
$c_{ij} = (c_{ij1}, ...c_{ijk})$ - стоимость перевозки единицы продуктов из i-го пункта в j-й
$x_{ij} = (x_{ij1}, ..., x_{ijk})$ - объем перевозок из i-го пункта в j-й
Тогда функция цели:

$$\sum_{l=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} c_{ijl} x_{ijl} \to min \tag{1}$$

Ограничения задачи:
Условие того, что все проудукты должны быть вывезены:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = \overline{1, m} \tag{2}$$

Условие того, что потребности всех пунктов потребления выполнены:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = \overline{1, n} \tag{3}$$

Так же очевидно, что:

$$x_{ij} \geq 0, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n} \tag{4}$$

Запишем условие в виде общей таблицы для случая $n = 5$,$m = 4$, $k = 3$

(a_{11}, a_{12}, a_{13})	$(c_{111}, c_{112}, c_{113})$	$(c_{121}, c_{122}, c_{123})$	$(c_{131}, c_{132}, c_{133})$	$(c_{141}, c_{142}, c_{143})$	$(c_{151}, c_{152}, c_{153})$
(a_{21}, a_{22}, a_{23})	$(c_{211}, c_{212}, c_{213})$	$(c_{221}, c_{222}, c_{223})$	$(c_{231}, c_{232}, c_{233})$	$(c_{241}, c_{242}, c_{243})$	$(c_{251}, c_{252}, c_{253})$
(a_{31}, a_{32}, a_{33})	$(c_{311}, c_{312}, c_{313})$	$(c_{321}, c_{322}, c_{323})$	$(c_{331}, c_{332}, c_{333})$	$(c_{341}, c_{342}, c_{343})$	$(c_{351}, c_{352}, c_{353})$
(a_{41}, a_{42}, a_{43})	$(c_{411}, c_{412}, c_{413})$	$(c_{421}, c_{422}, c_{423})$	$(c_{431}, c_{432}, c_{433})$	$(c_{441}, c_{442}, c_{443})$	$(c_{451}, c_{452}, c_{453})$
	(b_{11}, b_{12}, b_{13})	(b_{21}, b_{22}, b_{23})	(b_{31}, b_{32}, b_{33})	(b_{41}, b_{42}, b_{43})	(b_{51}, b_{52}, b_{53})

Каждое условие из пунктов (2) - (4) по свойствам вектора можно разделить на k условий:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = \overline{1, m} \iff \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij1} = a_{i1}, i = \overline{1, m} \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij2} = a_{i2}, i = \overline{1, m} \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij3} = a_{i3}, i = \overline{1, m} \end{cases}. \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = \overline{1, n} \iff \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_{ij1} = b_{j1}, j = \overline{1, n} \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij2} = b_{j2}, j = \overline{1, n} \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij3} = b_{j3}, j = \overline{1, n} \end{cases}. \tag{6}$$

$$x_{ij} \geq 0, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n} \iff \begin{cases} x_{ij1} \geq 0, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n} \\ x_{ij2} \geq 0, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n} \\ x_{ij3} \geq 0, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n} \end{cases}. \tag{7}$$

И тогда можно решить нашу задачу как три независящих КТЗ, каждый раз решая задачу относительно первой, второй и третьей компоненты векторов, записанных в таблицу.