Семин Тимофей 216 4 группа

ФКН ВШЭ
ОМВ
Весенний семестр 2023

Экзамен
(Вариант 1)

28.06.23

В теоретических вопросах при доказательствах необходимо обосновывать все переходы. При обоснованиях и при решении задач можно ссылаться на утверждения с лекций или семинаров, но не на задачи из домашних заданий.

1. **(20 баллов)**.
   (a) Дайте определение матрицы со строгим строчным диагональным преобладанием.
   (b) Сформулируйте и докажите теорему Леви-Деспланка (при доказательстве нельзя использовать теорему Гершгорина).
   (c) Сформулируйте первую теорему Гершгорина.
   (d) Дайте определение матрицы Лапласа графа и докажите ее неотрицательную определенность.

2. **(25 баллов)**. Пусть с помощью метода сопряженных градиентов (CG) решается вещественная система $Ax_* = b$ с $n \times n$ матрицей $A = A^\top > 0$ с нулевого начального приближения.
   (a) Дайте определение A-скалярного произведения и A-нормы.
   (b) Дайте определение подпространства Крылова $\mathcal{K}_k(A, b)$.
   (c) Сформулируйте метод сопряженных градиентов (CG) как задачу оптимизации на подпространствах Крылова.
   (d) Дайте определение A-ортогонального проектора P^A на $\mathcal{K}_k(A, b)$.
   (e) Докажите, что для x_k – приближения на k-й итерации CG справедливо $x_k = P^A x_*$.

3. **(16 баллов)**.
   (a) Найдите LU-разложение матрицы:
   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$
   (b) Найдите все $a \in \mathbb{R}$, для которых не существует LU-разложения A.

4. **(16 баллов)**. Пусть $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_{n-2} > \lambda_{n-1} > \lambda_n$ – собственные значения некоторой вещественной $A = A^\top > 0$ порядка $n > 5$. Покажите, что для метода сопряженных градиентов справедлива оценка:
   $$\|e_k\|_A \leq 2 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right)^2 \left(\frac{\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_{n-2}}} - 1}{\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_{n-2}}} + 1}\right)^{k-2} \|e_0\|_A,$$
   где e_k – ошибка решения на k-й итерации метода, $5 < k < n$.

5. **(23 балла)**. Пусть нормальная матрица A имеет блочно-треугольный вид
   $$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$
   с квадратными блоками A_{11} и A_{22}. Докажите, что матрицы A_{11} и A_{22} нормальные, а $A_{12} = 0$.

a) Матрица со строчным диагональным преобладанием — матрица, для которой выполняется $|a_{kk}| > \sum_{i \neq k} |a_{ki}| \ \forall k$

b) Th Леви-Деспланка

Матрица со строгим строчным диагональным преобладанием является невырожденной.

□

$A = \mathrm{diag}(A)(I - \mathrm{diag}(A)^{-1}(A - \mathrm{diag}(A)))$

$\boxed{\text{diag(A)}^{-1} \text{ валидно, т.к. A явл. матр. со строгим строчным. диаг. преобл.}}$

$\| \mathrm{diag}(A)^{-1}(A - \mathrm{diag}(A)) \|_\infty < 1$ — знаем с семинара по итер. методам

$\rho(A) < 1 \Rightarrow I - \mathrm{diag}(A)^{-1}(A - \mathrm{diag}(A))$ явл-ся невырожденной — знаем с ~~семинара~~ лекции по ряду Неймана. $\mathrm{diag}(A)$ и невырожденны, значит A невырожденна.

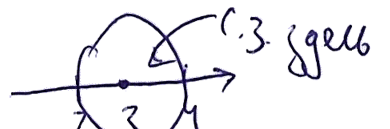
c)

Th 1-я Гершгорина

Пусть $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Тогда все собств. знач. $\in D_1 \cup \ldots \cup D_n$,

где $D_k = \{ z : |z - a_{kk}| \leq \sum_{i \neq k} |a_{ki}| \}$.

Пример: $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$



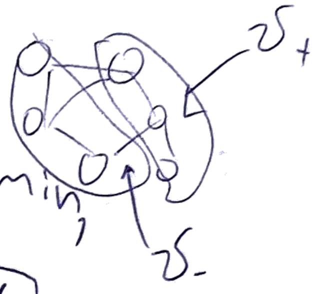
d) Матрица Лапласа

$L = D - E$

D - матрица со степ. вершин, E - матрица смежности

Решаем задачу минимизации: $\sum_{\substack{i \in \{+\} \\ j \in \{-\}}} |v_i - v_j| \to \min$,
т.е. хотим минимизировать кол-во ребер между одинаковыми кластерами.

$\sum_i v_i = 0$ $\boxed{\begin{matrix} v_i = +1 \\ v_j = -1 \end{matrix}}$



$\Leftrightarrow \sum_{u \in V_+} \sum_{v \in V_-} (u - v)^2 \to \min$. Сделаем релаксацию: перейдем от дискретной задачи к непрерывной.

$\Leftrightarrow \sum_{u \in V_+} \sum_{v \in V_-} (u^2 - 2uv + v^2) = \sum_{u \in V_+} u^2 + \underbrace{\sum_{v \in V_{k-}} -2uv + v^2}_{\text{показывает смежность}}$ $= 2x^T D x - 2x^T E x$
$= 2x^T (D - E) x$

$x^T 2(D - E) x > 0$, т.к. > 0 (сумма квадратов)

2

a) A - скалярное произведение - это $\langle x, y \rangle_A = x^T A y$

A - норма - это $\|x\|_A = \sqrt{\langle x, x \rangle_A} = \sqrt{x^T A x}$

b) Пространство Крылова $K_k(A, b)$ - это $\operatorname{span}\{b, Ab, A^2 b, \dots, A^{k-1} b\}$

c) $x_{k+1} = \underset{x_k \in x_0 + K_k(A, r_0)}{\arg\min} \|x_k - x_*\|$. Минимизируем ошибку при условии, что $x_k \in x_0 + K_k(A, r_0)$

d) P^A – A-ортогональный проектор на $K_k(A, b)$, если

1) $(P^A)^2 = P^A$

2) $(P^A)^T = P^A$

3) $(P^A x, y) = (x, P^A y)$

4) $P^A x \perp_A (I - P^A) x$, т.е. $(P^A x, (I - P^A) x)_A = 0$. Мы работаем в основном с A-скал. произв.

e) $x_k = P^A x_*$

Th

□ $x_{k+1} = \underset{x_k \in x_0 + K_k(A, r_0)}{\arg\min} \|x_k - x_*\| \iff x_k - x_* \perp K(A, r_0)$

$Ax_k - b$

$x_k = x_0 + y$, $y \in K_k(A, r_0)$

$\|e_k\|^2 = \|x_* - x_k\|_2^2 = \|(x_* - x_0) - y\|_2^2 \to \min$ ⊜

$x_* - x_k = P^A (x_* - x_0) + (I - P^A)(x_* - x_0)$

ортопроектор на крыловское

ортопроектор на ортогональное крыловскому

⊜ $\|\underbrace{P^A (x_* - x_0) - y}_{\in K_k(A, r_0)} + \underbrace{(I - P^A)(x_* - x_0)}_{\perp K(A, r_0)}\|_2^2 =$

$= \underbrace{\|P^A (x_* - x_0) - y\|_2^2}_{y = P^A (x_* - x_0)} + \underbrace{\|(I - P^A)(x_* - x_0)\|_2^2}_{\text{не зависит от } y}$

$\langle P^A x, (I - P^A) y \rangle = 0$

$(y, z) = (P^A(x_* - x_0), z) = (x_* - x_0, \underbrace{P^A z}_{z}) = \cancel{\dots} (x_* - x_0, z)$

$z \in X_k(A, r_0)$

$(y - x_* + x_0, z) = 0$

$(\underbrace{y + x_0}_{x_k} - x_*, z) = 0$

$(x_k - x_*, z) = 0 \Rightarrow x_k - x_* \perp z \Rightarrow x_k - x_* \perp X(A, r_0)$

$z \in K(A, r_0)$

Значит $P^A(x_k - x_*) = 0$

$\underbrace{P^A x_k}_{= x_k \text{, т.к. } x_k \text{ уже } \in X} - P^A x_* = 0 \Rightarrow x_k = P^A x_*$, ч.т.д.

③

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R}$

$\cancel{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}} =$

$\cancel{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{a}b & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c^T \\ b & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c^T \\ 0 & D - \frac{c c^T}{a} \end{pmatrix}}$

$\cancel{D - \frac{b c^T}{a}}$

$\cancel{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{a}b & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c^T \\ b & D \end{pmatrix}}$

$\underset{Z_1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}} = \underset{A_1}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$

$A = Z_2 Z_1 A = U$

$A = \underbrace{(Z_2 Z_1)^{-1}}_{L} U$

(B) $\underset{Z_2}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-a} & 1 \end{pmatrix}} \underset{A_1}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1-a}+1 \end{pmatrix} = U$

$$Z_2 Z_1 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&\frac{1}{1-a}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\\frac{1}{a-1}&\frac{1}{1-a}&1\end{pmatrix}$$

$$(Z_2 Z_1)^{-1} = \begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\a-1&1-a&1\end{pmatrix} = L$$

$$A = LU = \begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\a-1&1-a&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&a-1&1\\0&0&\frac{1}{1-a}+1\end{pmatrix}$$

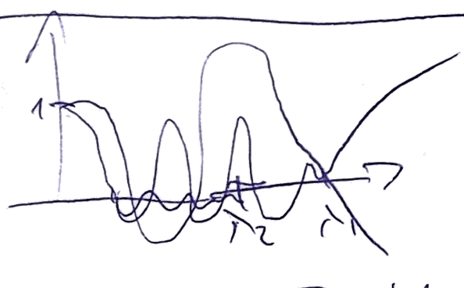
b) LU-разложение не существует, когда

$a-1=0$

$a=1$, потому что мы не можем сделать шаг

4) Знаем, что для CG верна оценка

$$\boxed{\|e_k\|_A \le 2\left(\frac{\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}}-1}{\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}}+1}\right)^{k}\|e_0\|_A} \quad \text{и} \quad \boxed{\|e_k\|_A \le 2\left(\frac{\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_n}}-1}{\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_n}}+1}\right)^{k-1}\|e_0\|_A}$$



$$\prod(\dots)\left(1-\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right)$$

$$\prod(\dots)\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)$$

$$\|e_k\| \le 2\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\left(\frac{\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_{n-1}}}-1}{\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_{n-1}}}+1}\right)^{k-1}\|e_0\|_A$$

5

$$A=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ 0 & A_{22}\end{bmatrix}.$$ Т.д. A_{11} и A_{22} нормальные и $A_{12}=0$

$$AA^T=A^TA$$

$$\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ 0 & A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{11} & 0\\ A_{12} & A_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11} & 0\\ A_{12} & A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ 0 & A_{22}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}A_{11}^2+A_{12}^2 & A_{12}A_{22}\\ A_{22}A_{12} & A_{22}^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11}^2 & A_{11}A_{12}\\ A_{12}A_{11} & A_{12}^2+A_{22}^2\end{pmatrix}$$

$$A_{11}^2+A_{12}^2=A_{11}^2$$
$$A_{12}^2=0$$

$$\boxed{\begin{aligned}A_{12}A_{22}&=A_{11}A_{12}\\ A_{22}A_{12}&=A_{12}A_{11}\end{aligned}}$$

$$A_{22}=A_{12}^{-1}A_{11}A_{12}$$
$$A_{11}=A_{12}A_{22}A_{12}^{-1}$$
$$A_{12}=A_{22}^{-1}A_{11}A_{12}$$
$$A_{12}=A_{22}^{-1}A_{12}A_{11}$$

$$A_{11} = A_{12} A_{22} A_{12}^{-1}$$

$$A_{11} = A_{12}^{-1} A_{22} A_{12}$$

$$A_{11} A_{11}^{T} = \overbrace{A_{12} A_{22} A_{12}^{-1}}^{C} \overbrace{A_{12}^{T} A_{22}^{T} A_{12}^{-T}}^{D} =$$

$$A_{11}^{T} A_{11} = A_{12}^{T} A_{22}^{T} A_{12}^{-T} A_{12} A_{22} A_{12}^{-1} =$$

$$A_{11} A_{11}^{T} = A_{12} A_{22} A_{12}^{-1} A_{12}^{-T} A_{22}^{T} A_{12}^{T}$$

$$A_{11}^{T} A_{11} = A_{12}^{T} A_{22}^{T} A_{12}^{-T} A_{12}^{-1} A_{22} A_{12}$$