1. **(11 баллов)**. Пусть задан вектор $u \in \mathbb{C}^n: \|u\|_2 = 1$. Найдите все $\alpha \in \mathbb{C}$, для которых $A = I - \alpha u u^*$ является: 1) эрмитовой 2) косоэрмитовой 3) унитарной 4) нормальной. Для пункта 3) также нарисуйте найденные α на комплексной плоскости.

ДЗ 1

Полезное свойство: $(uu^*)^* = u^{**}u^* = uu^*$

1) $A^* = A$

$A = I - \alpha u u^*$

$A^* = (I - \alpha uu^*)^* = \underbrace{I^* - \bar{\alpha} uu^* = I - \alpha uu^*}= A$

$I^* - \bar{\alpha} uu^* = I - \alpha uu^*$

$\bar{\alpha} uu^* = \alpha uu^* \Rightarrow \bar{\alpha} = \alpha \qquad \alpha = a + bi = a - bi = \bar{\alpha}$

$bi = -bi$

$b = 0 \Rightarrow \alpha \in \mathbb{R}$

2) $A^* = -A$

$A^* = (I - \alpha uu^*)^* = I^* - \bar{\alpha} uu^* = -(I - \alpha uu^*) = -A$

$I^* - \bar{\alpha} uu^* = \alpha uu^* - I$

$2I = \alpha uu^* + \bar{\alpha} uu^*$

$2I = (\alpha + \bar{\alpha}) uu^*$

$I = \frac{(\alpha + \bar{\alpha})}{2} uu^* \mid \cdot u$

$u = \frac{(\alpha + \bar{\alpha})}{2} u \underbrace{u^* u}_{1}$

$u^* \cdot \mid \; u = \frac{(\alpha + \bar{\alpha})}{2} u$

$\underbrace{u^* u}_{1} = \frac{(\alpha + \bar{\alpha})}{2} \underbrace{u^* u}_{1}$

$2 = \alpha + \bar{\alpha}$

$2 = a + bi + a - bi$

$2 = 2a$

$a = 1 \Rightarrow \alpha = 1 + bi$

Проверим: $I = \frac{(1 + bi + 1 - bi)}{2} uu^*$

$I = uu^*$. Пусть $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Тогда $uu^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (1 \;\; 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq I$

Значит нет решений.

3) $A^* = A^{-1}$

$AA^* = I$

$(I - \alpha u u^*)(I^* - \bar{\alpha} u u^*) = I$

$I - \bar{\alpha} u u^* - \alpha u u^* + \alpha\bar{\alpha} u \underbrace{u^* u}_{1} u^* = I$

$\bar{\alpha} u u^* + \alpha u u^* - |\alpha|^2 u u^* = 0$

$(\bar{\alpha} + \alpha - |\alpha|^2) u u^* = 0$

$\Downarrow$

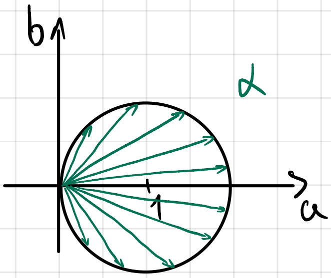
$\bar{\alpha} + \alpha - |\alpha|^2 = 0$, т.к. должно выполняться $\forall u, \|u\|_2 = 1$

$a - bi + a + bi - (a^2 + b^2) = 0$

$2a - a^2 - b^2 = 0$

$a^2 - 2a + b^2 = 0$

$(a-1)^2 + b^2 = 1$



Подходят $\alpha = a + bi$, для которых $a^2 - 2a + b^2 = 0$

4) $A^*A = AA^*$

$(I - \bar{\alpha} u u^*)(I - \alpha u u^*) = (I - \alpha u u^*)(I - \bar{\alpha} u u^*)$

$I - \alpha u u^* - \bar{\alpha} u u^* + |\alpha|^2 u u^* u u^* = I - \bar{\alpha} u u^* - \alpha u u^* + |\alpha|^2 u u^* u u^*$

Получаем тождество, то есть $\alpha \in \mathbb{C}$

2) Пусть $e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Найдите $\|A\|_{2023}$, где $A = ee_1^T$.

$A = ee_1^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \ 0 \ 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Так как y на един. сфере
y_1 максимум 1

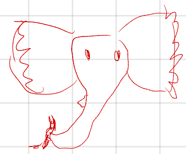
$\|A\|_{2023} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_{2023}}{\|x\|_{2023}} = \sup_{\|y\|_{2023}=1} \|Ay\|_{2023} = \sup_{\|y\|_{2023}=1} \left\| \begin{bmatrix} y_1 \\ y_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \right\|_{2023} = \sup_{\|y\|_{2023}=1} \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\|_{2023} = \sqrt[2023]{1^{2023} + 1^{2023} + 1^{2023}} =$

$= \sqrt[2023]{3}$

3. **(12 баллов).**

(a) Докажите, что
$$\|x\|_2 \overset{1}{\le} \|x\|_1 \overset{2}{\le} \sqrt{n}\|x\|_2 \quad \forall x \in \mathbb{C}^n.$$
На каких векторах x достигаются равенства?

(b) Используя неравенство из (a), покажите, что
$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_2 \le \|A\|_1 \le \sqrt{m}\|A\|_2 \quad \forall A \in \mathbb{C}^{m\times n}.$$



(a) 1) $\|X\|_2 \le \|X\|_1$

$$\sqrt{|X_1|^2+|X|_2^2+\ldots+|X_n|^2} \le |X_1|+\ldots+|X_n|$$

Возведем все в квадрат

$$|X_1|^2+|X|_2^2+\ldots+|X_n|^2 \le (|X_1|+\ldots+|X_n|)^2$$

Неравенство выполняется, т.к. правая часть выглядит как $|X_1|^2+|X|_2^2+\ldots+|X_n|^2$ + попарные произведения модулей.

2) $\|X_1\| \le \sqrt{n}\,\|X\|_2$

КБШ:

$$\left|\left\langle X, \begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}\right\rangle\right| \le \sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}\right\rangle}$$

$$|X_1|+\ldots+|X_n| \le |X_1+\ldots+X_n| \le \sqrt{X_1^2+\ldots+X_n^2}\,\sqrt{n}$$

$$\|X\|_1 \le \sqrt{n}\,\|X\|_2$$

Равенство достигается, когда у вектора все координаты одинаковые

(b) $$\|A\|_1 = \sup_{x\ne 0}\frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} = \sup_{\|y\|_1=1}\|Ay\|_2 = \|a\|_1$$

$a \in \mathbb{C}^m$

$$\|A\|_2 = \sup_{x\ne 0}\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \sup_{\|y\|_2=1}\|Ay\|_2 = \|a\|_2$$

Из пункта (a): $\|a\|_2 \le \|a\|_1 \le \sqrt{m}\,\|a\|_2$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|a\|_2 \le \|a\|_2 \le \|a\|_1 \le \sqrt{m}\,\|a\|_2$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_2 \le \|A\|_1 \le \sqrt{m}\,\|A\|_2$$

4. **(16 баллов)**. Обозначим $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ и $A_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/n & 0 \end{bmatrix}$, $n \in \mathbb{N}$.

(a) Обоснуйте сходимость $A_n \to A$, $n \to \infty$.

(b) Найдите собственные разложения $A_n = S_n \Lambda_n S_n^{-1}$ и проверьте существование пределов для каждой из S_n, Λ_n и S_n^{-1}. Почему не у всех из этих матриц существует предел?

(c) Найдите разложения Шура $A_n = U_n T_n U_n^{-1}$ и проверьте существование пределов для каждой из U_n, T_n и U_n^{-1}.

Замечание: построить разложение Шура поможет доказательство теоремы Шура. При проверке сходимости используйте удобную норму и определение сходимости из лекции.

(a) $A_n \to A,\ n \to \infty \iff \|A - A_n\| \to 0$ в любой норме (все нормы эквивалентны)

$$\|A - A_n\|_F = \sqrt{0^2 + (1-1)^2 + \left(0 - \frac{1}{n}\right)^2 + 0^2} = \frac{1}{n} \to 0,\ n \to \infty$$

(b) $A_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{n} & 0 \end{bmatrix}$

Найдем с.з: $(0-\lambda)(0-\lambda) - \frac{1}{n} = 0$

$$\lambda^2 = \frac{1}{n}$$

$$\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow \Lambda = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{n}} \end{pmatrix}$$

Найдем собств. вектора:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{n}}: \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{n}} & 1 \\ \frac{1}{n} & -\frac{1}{\sqrt{n}} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{n}} & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{n} \\ 1 \end{pmatrix} \text{- собств. вектор}$$

$$\lambda = -\frac{1}{\sqrt{n}}: \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & 1 \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{\sqrt{n}} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{n} \\ -1 \end{pmatrix} \text{- собств. вектор}$$

$$S_n = \begin{pmatrix} \sqrt{n} & \sqrt{n} \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\quad S_n^{-1} = \frac{1}{-2\sqrt{n}} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{n} \\ -1 & \sqrt{n} \end{pmatrix}$$

Собств. разложение: $A = S_n \Lambda_n S_n^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{n} & \sqrt{n} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{n}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{n}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{n}} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$$\Lambda_n \to \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=\Lambda},\ n \to \infty, \text{ т.к. } \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0,\ -\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0,\ n \to \infty$$

$$\|\Lambda_n-\Lambda\|_F=\sqrt{\left(0-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2+0^2+0^2+\left(0+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2}=\sqrt{\frac{2}{n}}\to 0,\ n\to\infty$$

$$S_n^{-1}\to\underbrace{\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}}_{=S^{-1}},\ n\to\infty,\ \text{т.к.}\ \frac{1}{2\sqrt{n}}\to 0,\ n\to\infty$$

$$\|S_n-S\|_F=\sqrt{\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}-0\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}-0\right)^2+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{2n}}\to 0,\ n\to\infty$$

У матрицы S_n нет предела, т.к. $\sqrt{n}\to\infty,\ n\to\infty$.
Не у всех матриц есть предел, т.к. с.з. $=\pm\frac{1}{\sqrt{n}}$, и из-за этого в собств. векторе одна координата должна быть $\sqrt{n}\not\to 0,\ n\to\infty$

(c) Дополним с.в. $v_1=\begin{pmatrix}\sqrt{n}\\ 1\end{pmatrix}$ до ортогон. базиса вектором $v_2=\begin{pmatrix}1\\ -\sqrt{n}\end{pmatrix}$

Отнормируем: $u_1=\frac{v_1}{\sqrt{n+1}}$, $u_2=\frac{v_2}{\sqrt{1+n}}$

Матрица $U_n=[u_1,u_2]=\frac{1}{\sqrt{n+1}}\begin{bmatrix}\sqrt{n} & 1\\ 1 & -\sqrt{n}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} & \frac{1}{\sqrt{n+1}}\\ \frac{1}{\sqrt{n+1}} & -\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\end{bmatrix}$

Найдем $T_n=U_n^*A_nU_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}\begin{bmatrix}\sqrt{n} & 1\\ 1 & -\sqrt{n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{n} & 0\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{n+1}}\begin{bmatrix}\sqrt{n} & 1\\ 1 & -\sqrt{n}\end{bmatrix}=$

$$=\frac{1}{n+1}\begin{bmatrix}\frac{1}{n} & \sqrt{n}\\ -\frac{1}{\sqrt{n}} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{n} & 1\\ 1 & -\sqrt{n}\end{bmatrix}=\frac{1}{n+1}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{n}(1+n)}{n} & \frac{(1-n)(1+n)}{n}\\ 0 & -\frac{1+n}{\sqrt{n}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1-n}{n}\\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{n}}\end{bmatrix}$$

уже разложена

Разложение Шура: $A_n=U_nT_nU_n^{-1}=\frac{1}{n+1}\begin{bmatrix}\sqrt{n} & 1\\ 1 & -\sqrt{n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1-n}{n}\\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{n}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{n} & 1\\ 1 & -\sqrt{n}\end{bmatrix}$

$U_n=U_n^{-1}$, т.к. это унитарная матрица (у нее столбцы ортонормированы)

$$U_n\to\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}}_{=U},\ n\to\infty$$

$$\|U_n-U\|_C=\max\left\{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}-1,\ \frac{1}{\sqrt{n+1}},\ \frac{1}{\sqrt{n+1}},\ -\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}+1\right\}=\frac{1}{\sqrt{n+1}}\to 0,\ n\to\infty$$

$$T_n\to\underbrace{\begin{bmatrix}0 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}}_{=T},\ n\to\infty$$

$\|T_n - T\|_C = \max\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{n}, 0, -\frac{1}{\sqrt{n}}\right\} = \frac{1}{n} \to 0, \ n\to\infty$

5. **(10 баллов)**. Докажите, что нормальная матрица является унитарной тогда и только тогда, когда все ее собственные значения по модулю равны 1.

A - норм $\overset{def}{=} AA^* = A^*A$ $\qquad$ A унит. $\Leftrightarrow$ A-норм., $|\lambda| = 1$

A - унит $\overset{def}{=} A^* = A^{-1}$

$\square$

$\Rightarrow$ $AA^* = I$

$U\Lambda \underbrace{U^* U}_{I} \Lambda^* U^* = I$

$U^* \cdot |\ U\Lambda\Lambda^* U^* = I\ | \cdot U$

$\Lambda\Lambda^* = I$

Λ и Λ^* - диагональные, т.е для любой позиции $(a+bi)(a-bi) = 1$

$a^2 + b^2 = 1$

$\Downarrow$

$|\lambda|^2$

Получается, что на каждой позиции число по модулю равно 1.

$\Leftarrow$ Знаем, что матрица нормальная, т.е. в разложении Шура матрица диагональна и $|\lambda_i| = 1$, т.е. $\Lambda\Lambda^* = \Lambda^*\Lambda = I$

$U\Lambda \underbrace{U^* U}_{I} \Lambda^* U^* = U \underbrace{\Lambda\Lambda^*}_{I} U^* = UU^* = I$

Получается, что $A^* = A^{-1}$

$\blacksquare$

6. **(12 баллов)**. Найдите сингулярное разложение матрицы с элементами $a_{ij} = ij + j$ и запишите его в компактном и полном представлениях. **Замечание:** при записи полного SVD не обязательно явно строить векторы, ортогональные данному.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 & \dots & 2n \\ 3 & 6 & 8 & 10 & \dots & 3n \\ 4 & & \ddots & & & \\ \vdots & & & & & \\ m+1 & & \dots & & & (m+1)n \end{pmatrix}$, $a_{ij} = i(j+1)$, значит у матрицы ранг 1.

$$A = UV^T = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ \vdots \\ m+1 \end{pmatrix} (1\ 2 \dots n)$$

Компактное SVD

Отнормируем вектора: $A = \frac{1}{\sqrt{2^2+3^2+\dots+(m+1)^2} \cdot \sqrt{1^2+2^2+\dots+n^2}} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ \vdots \\ m+1 \end{pmatrix} \cdot \left(\sqrt{2^2+3^2+\dots+(m+1)^2} \cdot \sqrt{1^2+2^2+\dots+n^2}\right) (1\ 2 \dots n)$

Полное SVD: $A = \frac{1}{\sqrt{2^2+3^2+\dots+(m+1)^2} \cdot \sqrt{1^2+2^2+\dots+n^2}} \left(\begin{array}{c|c} 2 & \\ 3 & \text{дополним} \\ 4 & \text{до ортонорм.} \\ \vdots & \text{базиса} \\ m+1 & \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2^2+3^2+\dots+(m+1)^2} \cdot \sqrt{1^2+2^2+\dots+n^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3 \dots n \\ \hline \text{дополним} \\ \text{до ортонорм.} \\ \text{базиса} \end{pmatrix}$

7. **(14 баллов)**.

(a) Докажите, что для любой $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $m \geq n$, справедливо:

$$\|A\|_2 \overset{①}{\leq} \|A\|_F \overset{②}{\leq} \sqrt{n}\|A\|_2.$$

(b) Покажите, что все матрицы $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, удовлетворяющие $\|A\|_F = \sqrt{n}\|A\|_2$, являются унитарными, умноженными на некоторую константу.

Замечание: воспользуйтесь сингулярным разложением.

(a) 1) $\|A\|_2 = \sigma_1(A)$

$\|A\|_F = \sqrt{\sigma_1^2(A) + \dots + \sigma_r^2(A)}$ $\Rightarrow \|A\|_2 \leq \|A\|_F$

2) $\|A\|_F = \sqrt{\underbrace{\sigma_1^2(A) + \dots + \sigma_r^2(A)}_{r\leq n}}$

$\sqrt{n}\,\|A\|_2 = \sqrt{\underbrace{\sigma_1^2(A) + \dots + \sigma_1^2(A)}_{n}}$

$\Rightarrow$ Учитывая, что $\sigma_1(A) \geq \dots \geq \sigma_r(A)$ делаем вывод, что $\|A\|_F \leq \sqrt{n}\,\|A\|_2$

(b) $A = U\Sigma V^*$, где $\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_1} \end{pmatrix}$

$A = U\Sigma V^* = \sqrt{\lambda_1}\, UIV^* = \sqrt{\lambda_1}\, \underset{\text{унитар}}{UV^*} = \underset{\text{const}}{\sqrt{\lambda_1}} \cdot \underset{\text{унитар}}{B}$

Произв. унитарных — унитарная

$A \cdot B = C$ Т.д.: $C^* = C^{-1}$

$B^* A^* = C^*$

$ABB^*A^* = CC^*$

$I = CC^*$

8. **(14 баллов)**. Дана нормальная матрица $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ и её разложение Шура $A = U\Lambda U^*$.

(a) Запишите сингулярное разложение матрицы A с использованием матриц U и Λ.

(b) Покажите, что $\sigma_1(A) = \max_i |\lambda_i(A)|$.

(c) Приведите пример матрицы $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, не являющейся нормальной и для которой полученное в (b) выражение неверно.

(a) A-нормальная $\Rightarrow \Lambda$ диагональная

Если в Λ есть отрицательные эл-ты, то домножим Λ на $B = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & \ddots\, 0 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & \ddots\, 0 \end{pmatrix}$,

$B^{-1} = B^T = B$, значит разложение $A = UB^{-1}\Lambda B U^*$ валидно (произв. унитарных - унитарная).

Теперь упорядочим элементы в Λ по убыванию, домножив Λ на матрицу перестановки C (она ортогональна (в каждом столбце лишь одно ненул. значение и такие позиции не повторяются) + ненул. знач. только единицы $\Rightarrow$ матрица унитарна).

В конце концов получим разложение $A = UC^{-1}B_2^{-1}B_1^{-1}\Lambda B_1 B_2 C U^*$, которое и будет являться SVD.

(b) $\|A\|_2 = \|U\Sigma U^*\|_2 = \|\Sigma\|_2 = \max\limits_i |\lambda_i(A)|$

(c) Рассмотрим матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = AA^*$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda(1-\lambda) = 0$$

$\lambda = 1$

$\lambda = 0$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-\lambda) = 0$$

$\lambda_2 = 0$

$\lambda_1 = 2$ $\Rightarrow \sigma_1(A) = \sqrt{2} \neq |1|$