HW 4

1. **(15 баллов).** Вложите блочно-теплицеву матрицу с теплицевыми блоками

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

в $B \in \mathbb{R}^{9\times 9}$ – блочный циркулянт с циркулянтными блоками и найдите собственное разложение B.

Расширим матрицу следующим образом:

$$\begin{array}{c} \\ A \to \\ \\ \\ C \to \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \leftarrow B \\ \\ \\ \leftarrow A \\ \\ \end{array}$$

Тогда матрица 9×9 будет выглядеть как

$$\begin{pmatrix} B & C & A \\ A & B & C \\ C & A & B \end{pmatrix} = X$$

$$X = \underbrace{(F_3 \otimes F_3)^{-1}}_{S} \underbrace{\mathrm{diag}((F_3 \otimes F_3)c)}_{\Lambda} \underbrace{(F_3 \otimes F_3)}_{S^{-1}}$$

$$F_3 \otimes F_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w_n & w_n^2 & 1 & w_n & w_n^2 & 1 & w_n & w_n^2 \\ 1 & w_n^2 & w_n^4 & 1 & w_n^2 & w_n^4 & 1 & w_n^2 & w_n^4 \\ 1 & 1 & 1 & w_n & w_n & w_n & w_n^2 & w_n^2 & w_n^2 \\ 1 & w_n & w_n^2 & w_n & w_n^2 & w_n^3 & w_n^2 & w_n^3 & w_n^4 \\ 1 & w_n^2 & w_n^4 & w_n & w_n^3 & w_n^5 & w_n^2 & w_n^4 & w_n^6 \\ 1 & 1 & 1 & w_n^2 & w_n^2 & w_n^2 & w_n^4 & w_n^4 & w_n^4 \\ 1 & w_n & w_n^2 & w_n^2 & w_n^3 & w_n^4 & w_n^4 & w_n^5 & w_n^6 \\ 1 & w_n^2 & w_n^4 & w_n^2 & w_n^4 & w_n^6 & w_n^4 & w_n^6 & w_n^8 \end{pmatrix}$$

Собственные значения: $(F_3 \otimes F_3)c = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w_n & w_n^2 & 1 & w_n & w_n^2 & 1 & w_n & w_n^2 \\ 1 & w_n^2 & w_n^4 & 1 & w_n^2 & w_n^4 & 1 & w_n^2 & w_n^4 \\ 1 & 1 & 1 & w_n & w_n & w_n & w_n^2 & w_n^2 & w_n^2 \\ 1 & w_n & w_n^2 & w_n & w_n^2 & w_n^3 & w_n^2 & w_n^3 & w_n^4 \\ 1 & w_n^2 & w_n^4 & w_n & w_n^3 & w_n^5 & w_n^2 & w_n^4 & w_n^6 \\ 1 & 1 & 1 & w_n^2 & w_n^2 & w_n^2 & w_n^4 & w_n^4 & w_n^4 \\ 1 & w_n & w_n^2 & w_n^2 & w_n^3 & w_n^4 & w_n^4 & w_n^5 & w_n^6 \\ 1 & w_n^2 & w_n^4 & w_n^2 & w_n^4 & w_n^6 & w_n^4 & w_n^6 & w_n^8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 1+w_n+w_n^2 \\ 1+w_n^2+w_n^4 \\ 1+w_n+w_n^2 \\ 1+w_n^2+w_n^4 \\ 1+w_n^3+w_n^6 \\ 1+w_n^2+w_n^4 \\ 1+w_n^3+w_n^6 \\ 1+w_n^4+w_n^6 \end{pmatrix}$$

Собственные вектори будут находиться в столбцах матрицы $(F_3 \otimes F_3)^{-1} = F_3^{-1} \otimes F_3^{-1} = \frac{1}{3} F_n^T \otimes \frac{1}{3} F_n = \frac{1}{9} F_n^T \otimes F_n$

2. (15 баллов). Сколько уровней алгоритма Штрассена надо сделать, чтобы число операций с плавающей точкой в нем стало в 10 раза меньше (асимптотически), чем для наивного умножения? Считайте, что рассматриваются достаточно большие действительные квадратные матрицы порядка 2^q, $q \in \mathbb{N}$.

Будем спускаться до k-го уровня с помощью Штрассена. Асимптотика:

$$M(n) = M(2^q) = 7 \cdot M(2^{q-1}) = \ldots = 7^k \cdot \underbrace{M(2^{q-k})}_{\text{умножаем наивно}} = 7^k \cdot (2^{q-k})^3 = 7^k \cdot 8^{q-k} = \left(\frac{7}{8}\right)^k \cdot 8^q = \left(\frac{7}{8}\right)^k \cdot (2^q)^3$$

$$\frac{(2^q)^3}{\left(\frac{7}{8}\right)^k (2^q)^3} = 10 \Rightarrow \left(\frac{7}{8}\right)^{-k} = 10$$

$$\left(\frac{8}{7}\right)^k = 10 \Rightarrow k = \log_{8/7} 10 \approx 17{,}2 \approx 18$$

3. **(15 баллов)**. Проверьте наличие прямой и обратной устойчивости алгоритма $y = x - 2(u^\top x)u$ вычисления $y = H(u)x$, где $u, x \in \mathbb{R}^n$, $\|u\|_2 = 1$, $H(u)$ – матрица Хаусхолдера.

Forward error:

$$\text{forw\_err} = \frac{\|\tilde f(x) - f(x)\|}{\|f(x)\|} = \frac{\|x - 2\overbrace{(u^T\tilde x)}^{\text{число}}u - (I - 2uu^T)x\|_2}{\|\underbrace{(I-2uu^T)}_{\text{унитарная}}x\|_2} = \frac{2\|uu^T\tilde x - uu^Tx\|_2}{\|x\|_2} \leq$$

$$\leq \frac{2\|u\sum_{i=1}^n u_ix_i(1+\varepsilon)^{n+2-i} - u\sum_{i=1}^n u_ix_i\|_2}{\|x\|_2} \leq \frac{2\|u\|_2\left|\sum_{i=1}^n (x_iu_i(1+\varepsilon)^{n+2-i} - x_iu_i)\right|}{\|x\|_2} \leq$$

$$\leq \frac{2\cdot\sum_{i=1}^n |x_iu_i|\,|\overbrace{(1+\varepsilon)^{n+2-i}}^{1+(n+2-i)+O(\varepsilon^2)} - 1|}{\|x\|_2} = \frac{2\sum_{i=1}^n (|x_iu_i|\cdot(n+2-i)|\varepsilon|) + O(\varepsilon^2)}{\|x\|_2} \leq \frac{2(n+2)|\varepsilon|\sum_{i=1}^n |x_iu_i|}{\|x\|_2} + O(\varepsilon^2) \leq [u_i \leq 1] \leq$$

$$\leq \frac{2(n+2)|\varepsilon|\sum_{i=1}^n |x_i|}{\|x\|_2} + O(\varepsilon^2) = \frac{2(n+2)|\varepsilon|\|x\|_1}{\|x\|_2} + O(\varepsilon^2) \leq \frac{2\sqrt{n}(n+2)|\varepsilon|\|x\|_2}{\|x\|_2} = 2\sqrt{n}(n+2)|\varepsilon| + O(\varepsilon^2)$$

$\Downarrow$

есть прямая устойчивость

Backward error:

$$\sum_{i=1}^n x_iu_i(1+\varepsilon)^{n+2-i} = \sum_{i=1}^n \tilde x_i\tilde u_i, \quad \tilde x_i = (1+\varepsilon)^{\frac{n+2-i}{2}}; \quad \tilde y_i = (1+\varepsilon)^{\frac{n+2-i}{2}} = 1 + O(\varepsilon)$$

$$\left.\frac{\|\tilde x - x\|_1}{\|x\|_1} = \frac{\sum_{i=1}^n |\tilde x_i - x_i|}{\|x\|_1} = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i|\,|(1+\varepsilon)^{\frac{n+2-i}{2}} - 1|}{\|x\|_1} \leq \frac{n+2}{2}|\varepsilon| + O(\varepsilon^2)\right\} \Rightarrow \text{есть обратная устойчивость}$$

для u аналогично

4. (15 баллов). Пусть $f(x) = Ax$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – невырожденная матрица, $x \in \mathbb{R}^n$. Докажите, что

$$\sup_{x \neq 0} \operatorname{cond}(f, x) = \operatorname{cond}(A).$$

Здесь в определениях чисел обусловленности используется вторая матричная и векторная нормы.

$$\operatorname{cond}(f, x) = \frac{\|f'(x)\|}{\|f(x)\|}\|x\|, \quad \operatorname{cond}(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$$

$\square$

В нашем случае $f'(x) = A$, $f(x) = Ax$

$$\sup_{x\neq 0} \operatorname{cond}(f, x) = \sup_{x \neq 0} \frac{\|A\|_2}{\|Ax\|_2}\|x\|_2 = \|A\|_2 \sup_{x \neq 0} \frac{\|x\|_2}{\|Ax\|_2} = \begin{bmatrix} \text{Введем} \\ u = Ax \end{bmatrix} = \|A\|_2 \sup_{A^{-1}u \neq 0} \frac{\|A^{-1}u\|_2}{\|u\|_2} \overset{\text{by def}}{=}$$

$$= \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \operatorname{cond}(A)$$

$\blacksquare$

5. **(20 баллов)**. С помощью матричной экспоненты найдите, при каком начальном условии y_0 решение системы дифференциальных уравнений $y(t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = Ay, \\ y(0) = y_0, \end{cases} \qquad \text{с матрицей} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

будет удовлетворять $y(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$. **Замечание:** В этой задаче может пригодиться разложение в ряд Тейлора гиперболических функций.

Знаем с семинара, что решение такого диффура имеет вид $y(t) = e^{At} \cdot C$, $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Заметим, что $y(0) = e^{A \cdot 0} \cdot C = y_0$. То есть нам достаточно найти только C.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = I \cdot A = A$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = I$$

$$A^{2k} = I, \quad A^{2k+1} = A$$

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} = \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^{2l}}{(2l)!} \right) I + \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^{2l+1}}{(2l+1)!} \right) A = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{ch} t & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{ch} t \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \operatorname{sh} t \\ 0 & \operatorname{sh} t & 0 \\ \operatorname{sh} t & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & 0 & \operatorname{sh} t \\ 0 & \operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t & 0 \\ \operatorname{sh} t & 0 & \operatorname{ch} t \end{pmatrix}$$

$$y(1) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} 1 & 0 & \operatorname{sh} 1 \\ 0 & \operatorname{ch} 1 + \operatorname{sh} 1 & 0 \\ \operatorname{sh} 1 & 0 & \operatorname{ch} 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c_1 \cdot \operatorname{ch} 1 + c_3 \operatorname{sh} 1 = 1 \\ c_2 (\operatorname{ch} 1 + \operatorname{sh} 1) = 0 \\ c_1 \operatorname{sh} 1 + c_3 \operatorname{ch} 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 \cdot \dfrac{e^1 + e^{-1}}{2} + c_3 \cdot \dfrac{e^1 - e^{-1}}{2} = 1 \\ c_2 \left(\dfrac{e + \frac{1}{e}}{2} + \dfrac{e - \frac{1}{e}}{2} \right) = 0 \\ c_1 \dfrac{e - \frac{1}{e}}{2} + c_3 \dfrac{e + \frac{1}{e}}{2} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 e + \dfrac{c_1}{e} + c_3 e - \dfrac{c_3}{e} = 2 \\ c_2 e = 0 \\ c_1 e - \dfrac{c_1}{e} + c_3 e + \dfrac{c_3}{e} = 0 \end{cases}$$

$+$: $2c_1 e + 2c_3 e = 2$

$$c_1 + c_3 = \frac{1}{e}$$

$-$: $\dfrac{2c_1}{e} - \dfrac{2c_3}{e} = 2$

$$c_1 - c_3 = e$$

$$\begin{cases} c_2 = 0 \\ c_1 + c_3 = \frac{1}{e} \\ c_1 - c_3 = e \end{cases} \quad \begin{matrix} + \\ - \end{matrix}$$

$$2c_1 = e + \frac{1}{e}$$

$$c_1 = \frac{e}{2} + \frac{1}{2e}$$

$$2c_3 = \frac{1}{e} - e$$

$$c_3 = \frac{1}{2e} - \frac{e}{2}$$

Итого:

$$c = y_0 = \begin{pmatrix} \frac{e}{2} + \frac{1}{2e} \\ 0 \\ \frac{1}{2e} - \frac{e}{2} \end{pmatrix}$$

6. **(20 баллов)**. Пусть у $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n > 1$, все ведущие подматрицы невырождены. Покажите, что матрица $D - \frac{1}{a}bc^\top$ (см. обозначения в лекции 13) также удовлетворяет этому свойству.

Запишем A как $\begin{pmatrix} a & c^T \\ b & D \end{pmatrix}$. Мы получаем $D-\frac{1}{a}bc^T$ как

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{a}b & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c^T \\ b & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c^T \\ 0 & D-\frac{1}{a}bc^T \end{pmatrix}$$

Мы знаем, что при элем. преобразованиях определитель не меняется. Докажем по индукции, пусть для матрицы меньшего размера выполнен этот факт. Применим к матрице $D-\frac{1}{a}bc^T$ еще один шаг Гаусса. Получим матрицу $\begin{pmatrix} a & \cdots \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} \tilde a & \cdots \\ 0 & * \end{matrix}} \end{pmatrix}$

$\tilde a \neq 0$, т.к. $\det A = a \cdot \tilde a \cdot \det(*)$. $\det(*) \neq 0$ по предположению индукции. Что же с остальными минорами? Каждый из них мы можем элементарными преобразованиями строк довести до верхнетреугольного вида. Определитель такой подматрицы - произведение ее диагональных элементов. На каждом шаге Гаусса мы понимаем, что новый эл-т на диагонали $\neq 0$. Значит определитель всей подматрицы $\neq 0$. Помним, что определитель при элем. преобразованиях не меняется, значит наши рассуждения будут верны для изначальных подматриц. Сделаем так для всех подматриц и докажем ☺.