HW 2

1. **(12 баллов)**. Найдите скелетное разложение вида $C\hat{A}^{-1}R$ матрицы $m \times n$ с элементами:

$$a_{ij} = \frac{i}{j} + \frac{j}{i}.$$

Нумерация индексов начинается с 1.

$$A = \begin{pmatrix} 1+\frac{1}{1} & 2+\frac{1}{2} & 3+\frac{1}{3} & \cdots & n+\frac{1}{n} \\ 2+\frac{1}{2} & 2 & & & \vdots \\ 3+\frac{1}{3} & & 2 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ m+\frac{1}{m} & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{m}{n}+\frac{n}{m} \end{pmatrix}$$

Разложим нашу матрицу:

$a_{ij} = \frac{i}{j} + \frac{j}{i} = b_{ij} + c_{ij}$, где $b_{ij} = \frac{i}{j}$, $c_{ij} = \frac{j}{i}$

$\operatorname{rank} B = 1$, $\operatorname{rank} C = 1$

$\operatorname{rank} A \leq \operatorname{rank} B + \operatorname{rank} C = 2$

$\operatorname{rank} A \neq 1$, т.к. $\frac{a_{12}}{a_{11}} \neq \frac{a_{22}}{a_{21}}$ $\quad \frac{\frac{5}{2}}{2} \neq \frac{2}{\frac{5}{2}}$ $\quad \frac{5}{4} \neq \frac{4}{5}$. (Первые 2 строки не являются лин. зависимыми). Значит $\operatorname{rank} A = 2$.

Выделим ненулевой минор: $\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \hat{A}^{-1} = -\frac{4}{9}\begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & 2 \end{pmatrix}$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 2+\frac{1}{2} \\ 2+\frac{1}{2} & 2 \\ \vdots & \vdots \\ m+\frac{1}{m} & \frac{m}{2}+\frac{2}{m} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 2 & 2+\frac{1}{2} & \cdots & n+\frac{1}{n} \\ 2+\frac{1}{2} & 2 & \cdots & \frac{2}{n}+\frac{n}{2} \end{pmatrix}$$

$C\hat{A}^{-1}R$ разложение:

$$-\frac{4}{9}\begin{pmatrix} 2 & 2+\frac{1}{2} \\ 2+\frac{1}{2} & 2 \\ \vdots & \vdots \\ m+\frac{1}{m} & \frac{m}{2}+\frac{2}{m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2+\frac{1}{2} & \cdots & n+\frac{1}{n} \\ 2+\frac{1}{2} & 2 & \cdots & \frac{2}{n}+\frac{n}{2} \end{pmatrix}$$

Скелетное разложение:

$$-\frac{4}{9}\begin{pmatrix} 2 & 2+\frac{1}{2} \\ 2+\frac{1}{2} & 2 \\ \vdots & \vdots \\ m+\frac{1}{m} & \frac{m}{2}+\frac{2}{m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{9}{4} & 0 & \cdots & \frac{2n^2-3}{n}-\frac{5n}{4} \\ 0 & -\frac{9}{4} & \cdots & \frac{3-3n^2}{2n} \end{pmatrix}$$

2. **(15 баллов)**. Пусть $S, S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^n$, а $S^\perp, S_1^\perp, S_2^\perp$ – их ортогональные дополнения.

(a) Покажите, что $\operatorname{dist}(S_1, S_2) = \operatorname{dist}(S_1^\perp, S_2^\perp)$.

(b) Найдите $\operatorname{dist}(S, S^\perp)$.

Знаем, что $\operatorname{dist}(S_1, S_2) = \|P_1 - P_2\|_2$ и проектор на $S^{\perp} = I - P$ ← проектор на S

а) $\operatorname{dist}(S_1, S_2) = \|P_1 - P_2\|_2 = \|-I + P_1 + I - P_2\|_2 = \|-(I-P_1) + (I-P_2)\|_2 = \|(I-P_2) - (I-P_1)\|_2 = \operatorname{dist}(S_1^{\perp}, S_2^{\perp})$

б) $\operatorname{dist}(S, S^{\perp}) = \|P_S - P_{S^{\perp}}\|_2 = \|P_S - (I - P_S)\|_2 = \|2P_S - I\|_2 = \|2U\Sigma U^* - I\|_2 =$

$= \|2U\Sigma U^* - UU^*\|_2 = \|U(2\Sigma U^* - U^*\|_2 = \|(2\Sigma - I)U^*\|_2 = \|2\Sigma - I\|_2 = \left\|\begin{pmatrix} 2 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 2 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}\right\|_2 =$

$= \left\|\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots 1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}\right\|_2 = 1$

3. **(15 баллов).** Пусть $U = [U_r \ U_r^{\perp}] \in \mathbb{C}^{m\times m}$ – матрица левых сингулярных векторов матрицы $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ ранга r. Покажите, что $\ker(A^*) = \operatorname{Im}(U_r^{\perp})$ и запишите ортопроектор на $\ker(A^*)$.

$\operatorname{Ker} A^* = \{z : A^* z = 0\}$

$\operatorname{Im} U_r^{\perp} : \{x : \exists y \in \mathbb{C}^m$, т.что $x = By\}$

Покажем двухстороннее включение

$\operatorname{Ker}(A^*) \subseteq \operatorname{Im}(U_r^{\perp})$

$x \in \operatorname{Ker} A^* \Rightarrow A^* x = 0$

$$A^*x = (U\Sigma V^*)^* x = V\Sigma^* U^* x = [V_r \ V_r^{\perp}] \begin{bmatrix} \Sigma_r^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} [U_r \ U_r^{\perp}]^* x =$$

$$= [V_r \ V_r^{\perp}] \begin{bmatrix} \Sigma_r^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_r^* x \\ (U_r^{\perp})^* x \end{bmatrix} = [V_r \ V_r^{\perp}] \begin{bmatrix} \Sigma_r^* U_r^* x \\ 0 \end{bmatrix} = V_r \Sigma_r^* U_r^* x = 0$$

унитарная

$V_r^* \cdot | \ \underbrace{V_r^* V_r}_{I} \Sigma_r^* U_r^* x = 0$

диагональн., т.е. $\det \neq 0$

$(\Sigma_r^*)^{-1} \cdot | \ \Sigma_r U_r^* x = 0$

$U_r^* x = 0$

$\square$

$= 0$

Получается, что $\langle u_r^{*(i)}, x \rangle = 0 \ \forall i$

То есть x ортогонален всем $u_r^{(i)}$.

Значит он лежит в ортогональном подпространстве, т.е. $x \in \operatorname{Im}(U_r^{\perp})$

$\operatorname{Ker}(A^*) \supseteq \operatorname{Im}(U_r^{\perp})$

$x \in \operatorname{Im}(U_r^{\perp}) \Rightarrow \exists y : x = U_r^{\perp} y$

$(U_r)^* x = (U_r)^* U_r^{\perp} y$

$(U_r)^* x = 0$

$A^* (U_r)^* x = 0$

Так как $\operatorname{Ker}(A^*) = \operatorname{Im}(U_r^{\perp})$ ортопроектор на $\operatorname{Ker}(A^*) = U_r^{\perp}(\underbrace{(U_r^{\perp})^* U_r^{\perp}}_{I})^{-1}(U_r^{\perp})^* = U_r^{\perp}(U_r^{\perp})^*$

4. **(18 баллов)**. Вычислите $\frac{\partial f}{\partial x}$ для следующих функционалов, где $x \in \mathbb{R}^n$. Считайте все возникающие матрицы и векторы действительными.

(a) $f(x) = \|Ax - b\|_2^2$;

(b) $f(x) = \ln(x^\top x)$, $x \neq 0$.

a) $f(x) = \|Ax - b\|_2^2$ $\quad f(x+dx) - f(x) = df(x)[dx] + \bar{o}(\|dx\|)$ $\quad df(x)[dx] = \langle \frac{\partial f}{\partial x}, dx \rangle$

$f(x+dx) - f(x) = \|A(x+dx) - b\|_2^2 - \|Ax - b\|_2^2 = \|Ax - b + Adx\|_2^2 - \|Ax - b\|_2^2 = \|Ax - b\|_2^2 +$
$+ 2\langle Ax - b, Adx \rangle + \|Adx\|_2^2 - \|Ax - b\|_2^2 = 2(\langle Ax, Adx \rangle - \langle b, Adx \rangle) + \|Adx\|_2^2 = 2((Ax)^T(Adx) -$
$- b^T Adx) + \|Adx\|_2^2 = 2(x^T A^T Adx - b^T Adx) + \|Adx\|_2^2 = 2(x^T A^T A - b^T A)dx + \|Adx\|_2^2 =$
$= 2(x^T A^T - b^T)Adx + \|Adx\|_2^2 = \langle \underbrace{2A^T(Ax - b)}_{\frac{\partial f}{\partial x}}, dx \rangle + \bar{o}(\|dx\|_2)$

Итого, получаем: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2A^T(Ax - b)$

b) $f(x) = \ln(x^T x)$, $x \neq 0$

$g(x) = x^T x = \|x\|_2^2$, $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$

$d(x^T x)[dx] = (\underbrace{dx^T[dx]}_{(dx)^T})x + x^T(dx[dx]) = (dx)^T x + x^T(dx) = 2x^T dx$

$h(x) = \ln(x)$

$d\ln(x)[dx] = \frac{dx}{x}$

$f(x) = \ln(x^T x) = h(g(x))$

$df(x)[dx] = d\ln(x^T x)[2x^T dx] = \frac{2x^T dx}{x^T x} = \langle \frac{\partial f}{\partial x}, dx \rangle = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T \cdot dx \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2}{x^T x} x$

5. **(20 баллов)**. Пусть $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – симметричная матрица. Пусть $X \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $p < n$. **Указание:** при использовании правил дифференцирования необходимо указывать, на какое конкретно правило вы ссылаетесь.

(a) Найдите дифференциал $f(X) = X^\top AX$.

(b) Найдите дифференциал $g(X) = (X^\top X)^{-1}$. Напомним, что для квадратной обратимой Y справедливо $d(Y^{-1})[H] = -Y^{-1}HY^{-1}$.

(c) Найдите $\frac{\partial w(X)}{\partial X}$, где $w(X) = \mathrm{Tr}(f(X)g(X))$. Считайте, что производная считается в точке X с ортонормированными столбцами.

a) $f(X)=X^T A X$, $g(X)=X^T A$, $h(X)=X$, $K(X)=X^T$, $N(X)=A$

$$df(X)[H]=d(g(X)h(X))[H]\overset{\text{произв.}}{=}(dg(X)[H])\cdot h(X)+g(X)(dh(X)[H])=(dK(X)[H]\cdot N(X)+$$
$$+K(X)\cdot\underbrace{dN(X)[H]}_{0,\ \text{т.к. } N(X) \text{ не зависит от } X})\cdot X+X^T A\, dX[H]=\boxed{H^T A\cdot X+X^T\cdot A\cdot H}$$

По утв. 1 св-во:

$f(X)=X:\ df(X)[H]=f(X+H)-f(X)=X+H-X=X$

$f(X)=X^T:\ df(X)[H]=f(X+H)-f(X)=(X+H)^T-X^T=H^T$

b) $g(X)=(X^T X)^{-1}$, $d(Y^{-1})[H]=-Y^{-1}HY^{-1}$

$f(X)=X^T x$

$$d(x^T x)[dx]=(\underbrace{dx^T[dx]}_{(dx)^T})x+x^T(dx[dx])=(dx)^T x+x^T(dx)=2x^T dx$$

$$dg(X)[H]=d(X^T X)^{-1}[2x^T dx]=\boxed{-(X^T X)^{-1}2x^T dx(X^T X)^{-1}}$$

c) $\frac{\partial \omega(X)}{\partial X}$, $\omega(X)=Tr(f(X)g(X))$

$$d\omega(X)[H]=dTr(f(X)g(X))[H]\overset{Tr\text{-лин.ф-я}}{=}Tr(d(f(X)g(X))[H])\overset{\text{и.ф-я}}{=}Tr(df(X)[H]\cdot g(X)+f(X)\cdot dg(X)[H])\overset{Tr\text{-лин. ф-я}}{=}$$
$$=\underbrace{Tr(df(X)[H]\cdot g(X))}_{1}+\underbrace{Tr(f(X)\cdot dg(X)[H])}_{2}\ \circledeq$$

Tr-лин. ф-я

$$1=Tr((H^T A\cdot X+X^T\cdot A\cdot H)(\underbrace{X^T X}_{I})^{-1})\overset{Tr\text{-лин. ф-я}}{=}Tr(H^T AX)+Tr(X^T AH)$$

$$2=Tr(X^T AX(-(\underbrace{X^T X}_{I})^{-1}2x^T H(\underbrace{X^T X}_{I})^{-1}))\overset{Tr\text{-лин.ф-я}}{=}-Tr(X^T AX(2X^T H))=-2Tr(X^T AXX^T H)$$

$$\circledeq\ Tr(X^T A^T H)+Tr(X^T AH)-2Tr(X^T AXX^T H)\overset{A\text{-симм.}}{=}\langle AX,H\rangle+\langle AX,H\rangle-\langle 2XX^T A^T X,H\rangle=$$
$$=\langle 2(AX-XX^T A^T X),H\rangle$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial X}=2(AX-XX^T A^T X)}$$

6. **(20 баллов)**. Пусть $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – симметричная положительно определенная матрица.

(a) Найдите матрицу M, такую что

$$\operatorname{vec}(AX + XA) = M \operatorname{vec}(X)$$

и укажите ее размер.

(b) Пусть $A = S\Lambda S^{-1}$ – собственное разложение A. Выразите собственные векторы и собственные значения матрицы M через S и Λ. **Подсказка:** вам поможет тождество $I = SS^{-1}$ и правила Кронекерова произведения.

(c) Покажите, что решение $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ матричного уравнения

$$AX + XA = B,$$

существует и единственно для любой $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

a) $\operatorname{vec}(AX+XA) = \operatorname{vec}(AX) + \operatorname{vec}(XA) = M \operatorname{vec}(X)$

$\operatorname{vec}(AX) = \operatorname{vec}(AXI) = (I\otimes A)\operatorname{vec}(X)$

$\operatorname{vec}(XA) = \operatorname{vec}(IXA) = (A^T\otimes I)\operatorname{vec}(X) = (A\otimes I)\operatorname{vec}(X)$

$(I\otimes A)\operatorname{vec}(X) + (A\otimes I)\operatorname{vec}(X) = (I\otimes A + A\otimes I)\operatorname{vec}(X) \Rightarrow$

$\Rightarrow M = (I\otimes A + A\otimes I)$, размер: $(n\times n)\times(n\times n) = n^2\times n^2$

b) $A = S\Lambda S^{-1}$ $\quad M = \tilde{S}\tilde{\Lambda}\tilde{S}^{-1}$

$\tilde{S}\tilde{\Lambda}\tilde{S}^{-1} = (SS^{-1})\otimes(S\Lambda S^{-1}) + (S\Lambda S^{-1})\otimes(SS^{-1}) = (S\otimes(S\Lambda))(S^{-1}\otimes S^{-1}) + (S\Lambda\otimes S)(S^{-1}\otimes S^{-1}) =$

$= (S\otimes S\Lambda + S\Lambda\otimes S)(S^{-1}\otimes S^{-1}) = ((SI)\otimes(S\Lambda) + (S\Lambda)\otimes(SI))(S^{-1}\otimes S^{-1}) =$

$= ((S\otimes S)(I\otimes\Lambda) + (S\otimes S)(\Lambda\otimes I))(S^{-1}\otimes S^{-1}) = \underbrace{(S\otimes S)}_{\tilde{S}}\underbrace{(I\otimes\Lambda + \Lambda\otimes I)}_{\tilde{\Lambda}}\underbrace{(S^{-1}\otimes S^{-1})}_{\tilde{S}^{-1}}$

диаг., т.к. I, Λ диаг.

c) $AX + XA = B \overset{\text{vec-биекция}}{\Longleftrightarrow} \operatorname{vec}(XA+AX) = \operatorname{vec}(B)$

$\to M\operatorname{vec}(X) = \operatorname{vec}(B)$

СЛУ, решение $\exists$ и единственно, если M невырождена

$\det M = \det(S\otimes S)\det(I\otimes\Lambda + \Lambda\otimes I)\det((S\otimes S)^{-1}) =$

$= \dfrac{\det(S\otimes S)\det(I\otimes\Lambda+\Lambda\otimes I)}{\det(S\otimes S)} = \det(\underbrace{I\otimes\Lambda + \Lambda\otimes I}_{♡})$. Значит решение существует и единственно.

A - пол. опр. $\Rightarrow$ с.з. $> 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ ♡ диаг. матр. ($\det \neq 0$)