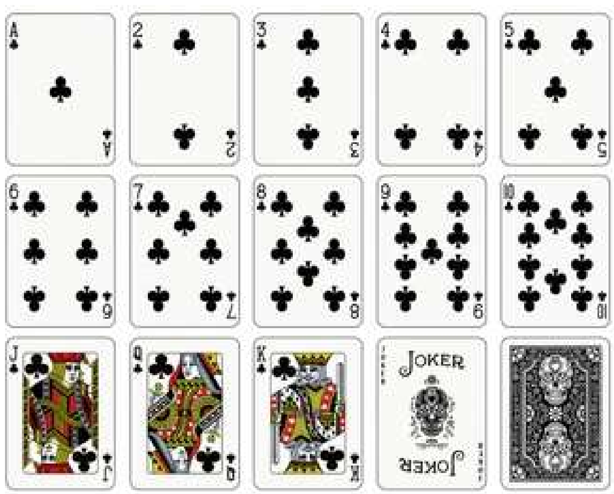
3. Combinatoriek

Inleiding

In de combinatoriek staat tellen centraal. Bij het tellen maken we gebruik van structuren die we geleerd hebben. Bijvoorbeeld bij de vraag wat een grotere massa heeft, een kilo veren of een kilo ijzer , dan weten we dat het soort object er niet toe doet. Een massa van één kilogram is gelijk aan de massa van één kilogram. Dat structuur van belang is zal het volgende voorbeeld laten zien. Hoeveel kaarten zie je in de onderstaande figuur?

Figuur 2 Hoeveel kaarten liggen hier?

Als we de kaarten rangschikken in rijtjes, dan zal het voor iedereen snel duidelijk zijn hoeveel kaarten er liggen. We zijn dan gewend niet meer alle kaarten te tellen, maar gebruik te maken van vermenigvuldigen. Drie rijen van vijf kaarten geeft 15 kaarten.



Figuur 3 Hoeveel kaarten liggen hier?

In het onderdeel combinatoriek, zullen we verschillende structuren leren kennen om allerlei telproblemen op te lossen, **zonder** uitgebreid alle mogelijkheden uit te schrijven. Dat kan alleen als we structuren kunnen ontdekken in de telproblemen. Hiervoor is het nodig om de problemen te abstraheren tot variabelen en hiervan het verband weer te geven in een formule. In het voorbeeld van de kaarten is de structuur een aantal kaarten b in een aantal rijen a. Het totaal aantal kaarten c is dan weer te geven in de formule: $c = ab$. In figuur 2 zijn vier rijen van acht kaarten, dus $c = 4 \times 8 = 32$.

Bij die telproblemen zal het vaak gaan om uit een verzameling elementen een aantal te kiezen. De centrale vraag is dan meestal: “op hoeveel manieren kan dat?”. Bijvoorbeeld: hoeveel mogelijkheden hebben we als we 13 kaarten uit de berg van figuur 1 halen?

Twee vragen die essentieel zijn bij telproblemen zijn:

1. Mogen dezelfde elementen meer dan één keer gekozen worden (herhaling)?
2. Is de keuzevolgorde van belang?

Deze twee vragen kunnen met ja en nee beantwoord worden., waardoor er vier mogelijke situaties zijn voor telproblemen:

Herhaling →

Volgorde ↓

zonder herhaling zonder volgorde — II	met herhaling zonder volgorde — IV
zonder herhaling met volgorde — I	met herhaling met volgorde — III

Figuur 4 Schema voor telproblemen

Deze vier situaties noemen we ook wel telstructuren. De telstructuren I t/m IV zullen we verder gaan uitwerken in paragraaf 2 t/m 5 van dit hoofdstuk.

Voor dat we met deze telstructuren aan de gang gaan, kijken we eerst naar een belangrijke basis voor telproblemen, namelijk het keuzeprincipe. Het volgende voorbeeld geeft een illustratie hiervan. Stel we hebben twee broeken en drie shirts. Ervan uitgaande dat alle shirts bij alle broeken passen (smaak…), hoeveel mogelijke combinaties kunnen we dan maken?

- b1 = broek 1
- b2 = broek 2
- s1 = shirt1
- s2=shirt2
- s3=shirt3

De objecten broek en shirt zijn onafhankelijk van elkaar, want elk shirt past bij elke broek. We nemen aan dat we slechts één broek en één shirt tegelijk aantrekken. Het keuzeprincipe zegt dan dat het aantal mogelijkheden het aantal broeken x het aantalshirts is, dus in ons geval 2x3=6.

Als we alle mogelijkheden uitschrijven krijgen we:

- b1+s1 b2+s1
- b1+s2 b2+s2
- b1+s3 b2+s3

Algemeen geformuleerd: Als we twee soorten objecten A en B hebben met respectievelijk m en n elementen, die onderling onafhankelijk zijn, dan is het aantal mogelijke combinaties $c = m \times n$. Dit noemen we het *keuzeprincipe*. Dit principe is uitbreidbaar naar meer objecten ($c = m \times n \times o$…).

Als je meer wilt lezen over grafentheorie op het internet, surf dan eens naar http://nl.wikipedia.org/wiki/Combinatoriek.

Rangschikkingen

In deze paragraaf zullen we ons bezig houden met telproblemen, waarbij elk element maar één maal gekozen mag worden en de volgorde van de elementen van belang is. In ons schema is dat situatie I, zonder herhaling en met volgorde.

Herhaling

Volgorde

zonder herhaling zonder volgorde II	met herhaling zonder volgorde IV
zonder herhaling met volgorde I	met herhaling met volgorde III

Figuur 5 Telstructuur I zonder herhaling en met volgorde

Rangschikking

Het ordenen van alle elementen van een verzameling, waarin ieder element eenmaal voorkomt en waarbij gelet wordt op de volgorde van de elementen noemen we een rangschikking. Het rangschikken van *n* elementen van een verzameling heet ook wel een *n*-rangschikking of permutatie.

Voorbeeld

Een goed voorbeeld van een dergelijke situatie is het principe van een talentenjacht. Stel er zijn twaalf kandidaten waaruit een jury moet kiezen wie van de kandidaten op de eerste plaats verdient, wie de tweede etc. Kandidaten komen maar één keer in de lijst voor (geen herhaling), en de volgorde is van belang (hoe hoger je eindigt, des te beter het is).

Op hoeveel manieren kunnen we die kandidaten rangschikken? Voor kandidaat 1 zijn er twaalf mogelijke plekken. Zodra we een plek gekozen hebben zijn er voor de volgende kandidaat nog elf mogelijkheden over. Voor de derde kandidaat zijn er nog tien plekken over, etc.

Als we dit uitschrijven krijgen we:

$12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 12!$

Hier lijkt dus een verband te ontstaan tussen het aantal elementen en de faculteit ervan. Op een rijtje:

- Met slechts één element hebben we maar $1 = 1!$ mogelijkheden: A
- Met twee elementen zijn er $2 \times 1 = 2! = 2$ mogelijkheden: AB en BA.
- Met drie elementen zijn er $3 \times 2 \times 1 = 3! = 6$ mogelijkheden:
  - ABC BAC CAB
  - ACB BCA CBA
- Met vier elementen zijn er $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4! = 24$ mogelijkgheden
  - ABCD BACD CABD DABC

    - ABDC BADC CADB DACB
    - ACBD BCAD CBAD DBAC
    - ACDB BCDA CBDA DBCA
    - ADBC BDAC CDAB DCAB
    - ADCB BDCA CDBA DCBA
- Met n elementen zijn er $n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1 = n!$ mogelijkheden.

Aantal rangschikkingen

Met n verschillende elementen kunnen we $n!$ verschillende rangschikkingen maken.

Dus als we de hele verzameling moeten rangschikken dan zijn we in staat het aantal mogelijkheden te berekenen. Maar wat nu als we het iets algemener willen maken. Stel we willen uit ons voorbeeld van de talentenjacht alleen de nummers 1 t/m 3 kiezen, omdat er maar drie prijzen zijn weg te geven. Wat dan?

Op een rijtje:

- Voor de eerste plaats: n = 12 mogelijkheden.
- Voor de tweede plaats: $n - 1 = 11$ mogelijkheden.
- Voor de derde plaats: $n - 2 = 10$ mogelijkheden.

Het aantal mogelijkheden met n kandidaten voor drie prijzen is: $n \times (n-1) \times (n-2) = \frac{n!}{(n-3)!}$. Als we dit uitbreiden naar 4 prijzen, dan krijgen we $n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) = \frac{n!}{(n-4)!}$. Nu nog algemener: voor n kandidaten die strijden om k prijzen zijn er

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} = (n)_k$$

Dit noemen we het aantal k-rangschikkingen of variaties uit een verzameling van n verschillende elementen.

Variatie

Het aantal variaties of k-rangschikkingen met n verschillende elementen is $(n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Dit is de uiteindelijke formule die in vakje I hoort te staan van ons schema!

Herhaling →

Volgorde ↓

zonder herhaling zonder volgorde II	met herhaling zonder volgorde IV
zonder herhaling met volgorde $(n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}$ I	met herhaling met volgorde III

Figuur 6 Telstructuur I zonder herhaling en met volgorde

Combinaties of deelverzamelingen

In deze paragraaf zullen we ons bezig houden met telproblemen, waarbij elk element maar één maal gekozen mag worden en de volgorde van de elementen **niet** van belang is. In ons schema is dat situatie II, zonder herhaling en zonder volgorde.

Herhaling →

Volgorde ↓

zonder herhaling zonder volgorde II	met herhaling zonder volgorde IV
zonder herhaling met volgorde $(n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}$ I	met herhaling met volgorde III

Figuur 7 Telstructuur II zonder herhaling en zonder volgorde

Voorbeeld

Een goed voorbeeld van een dergelijke situatie is het kiezen van 5 leden voor een kwaliteitspanel uit een klas van 30 studenten. Hierbij is de volgorde niet van belang, het maakt niet uit of je als eerste, tweede, derde, vierde of vijfde lid bent gekozen, je zit in het kwaliteitspanel, daar gaat het om. De volgorde is dus niet van belang. Je kunt maar één keer in het panel terecht komen als vertegenwoordiger, dus herhaling is niet toegestaan.

Op hoeveel manieren kunnen we die panelleden kiezen? Het aantal mogelijkheden waarbij we letten op de volgorde kunnen we al berekenen en is $(n)_k = (30)_5$. Dit moeten we delen door het aantal manieren waarop we die 5 leden kunnen rangschikken, want elke mogelijke rangschikking geeft hetzelfde kwaliteitspanel. De formule wordt dan: $\frac{(n)_k}{k!} = \frac{(30)_5}{5!} = 142506$.

Combinatie

Een keuze van k-elementen uit een verzameling van n elementen heet een k-combinatie of k-deelverzameling. Het aantal k-combinaties uit een verzameling met n elementen is gelijk aan $(n)_k$ gedeeld door het aantal dubbeltellingen $k!$. Dit noemen we in de combinatoriek het aantal k-deelverzamelingen uit n, of n boven k:

$$\binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!} = \frac{\mathrm{n!}}{\mathrm{k!\,(n-k)!}}$$

Dit is de formule voor ons tweede telstructuur in het schema.

Herhaling

Volgorde

zonder herhaling zonder volgorde $\binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!}$ II	met herhaling zonder volgorde IV
zonder herhaling met volgorde $(n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}$ I	met herhaling met volgorde III

Figuur 8 Telstructuur II zonder herhaling zonder volgorde

Herhalingsrangschikkingen

In deze paragraaf zullen we ons bezig houden met telproblemen, waarbij elk element maar meerdere malen gekozen mag worden (herhaling) en de volgorde van de elementen van belang is. In ons schema is dat situatie III, met herhaling en met volgorde.

Herhaling →

Volgorde ↓

zonder herhaling zonder volgorde $\binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!}$ II	met herhaling zonder volgorde IV
zonder herhaling met volgorde $(n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}$ I	met herhaling met volgorde III

Figuur 9 Telstructuur III met herhaling en met volgorde

Voorbeeld

Een goed voorbeeld van een dergelijke situatie is een pincode. Hierbij is de volgorde van de cijfers van belang, 1234 is een andere pincode als 4321. De volgorde is dus van belang. De cijfers mogen vaker voorkomen, 1111 is een gedlige pincode. Herhaling is dus toegestaan.

Hoeveel verschillende pincodes bestaan er nu met vier cijfers? Voor het eerste cijfer hebben we tien mogelijkheden, namelijk 0..9. Voor het tweede cijfer zijn er weer tien mogelijkheden, zo ook voor de derde en het vierde cijfer. Kortom we hebben $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4$ mogelijkheden. Voor k-cijfers hebben we 10^kmogelijkheden.

Conclusie

Het aantal k-herhalingsrangschikkingen met n verschillende elementen is gelijk aan n^k.

Dit is de formule voor ons derde telstructuur in het schema.

Herhaling →

Volgorde ↓

zonder herhaling zonder volgorde $\binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!}$ II	met herhaling zonder volgorde IV
zonder herhaling met volgorde $(n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}$ I	met herhaling met volgorde n^k III

Figuur 10 Telstructuur III met herhaling en met volgorde

Herhalingscombinaties

In deze paragraaf zullen we ons bezig houden met telproblemen, waarbij elk element meerdere malen gekozen mag worden en de volgorde van de elementen **niet** van belang is. In ons schema is dat situatie IV, met herhaling en zonder volgorde.

Herhaling →

Volgorde ↓

zonder herhaling zonder volgorde $\binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!}$ II	met herhaling zonder volgorde IV
zonder herhaling met volgorde $(n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}$ I	met herhaling met volgorde n^k III

Figuur 11 Telstructuur IV met herhaling en zonder volgorde

Voorbeeld

Een goed voorbeeld van een dergelijke situatie is een groep studenten, die op een terrasje iets gaan drinken. Er kan gekozen worden uit bier, cola of water (even voor het gemak). Jan en Angela bestellen cola, Marco, Eric en Monique bestellen een biertje. Hierbij is de volgorde waarin de bestelling wordt opgenomen niet van belang, het gaat erom dat er twee cola's en drie biertjes worden gebracht! Herhaling is toegestaan, er mogen meer mensen hetzelfde drankje bestellen. De ober kan voor deze tafel volstaan met het opschrijven van:

Bier	3
Cola	2
Water	0

Combinaties

Hoe berekenen we nu het aantal mogelijkheden voor vijf mensen om een bestelling door te geven? We kunnen dit voorbeeld wiskundig opschrijven door een rijtje te maken van puntjes en streepjes. Het streepje is voor de categorie of groep. Een puntje staat voor het aantal personen dat voor die groep gekozen heeft. Ons voorbeeld wordt dan: ... | .. |

Dit moeten we lezen als drie bier, twee cola en geen water. Nul bier, nul cola en 5 water is bijvoorbeeld: | | .....

Elke regel van punten en streepjes komt overeen met een mogelijke bestelling. We zouden dus nu moeten kunnen uitzoeken hoeveel van dit soort rijtjes er mogelijk zijn.

We hebben het probleem dus vertaalt naar rijtjes met 2 streepjes en vijf stippen, waarbij het gaat om het aantal mogelijke plaatsen van de streepjes:

$$= \text{aantal puntjes} + \text{aantal streepjes}$$

$$= \text{aantal puntjes} + \text{aantal groepen} - 1$$

$$= n + k - 1$$

De volgorde doet er niet toe en er is geen herhaling (elk streepje kan maar op één plek staan). Dit is een combinatie, ofwel telstructuur II. We kunnen nu dus uitrekenen op hoeveel manieren we twee streepjes kunnen neerzetten op $n + k - 1$ plaatsen: $\binom{n + k - 1}{k}$.

In ons voorbeeld zijn er dus $\binom{n + k - 1}{k} = \binom{5 + 3 - 1}{3} = \binom{7}{3} = 35$ mogelijkheden.

De formule voor herhalingscombinatie is dus $\binom{n + k - 1}{k}$. Hiermee kunnen we het schema compleet maken.

Herhaling

Volgorde

zonder herhaling zonder volgorde $\binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!}$ II	met herhaling zonder volgorde $\binom{n + k - 1}{k}$ IV
zonder herhaling met volgorde $(n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}$ I	met herhaling met volgorde n^k III

Figuur 12 Telstructuur IV met herhaling en zonder volgorde

Samenvatting

In de vorige paragrafen hebben we de vier telstructuren bekeken en daar eenvoudige formules voor de oplossing gevonden. In het onderstaande schema is dit weergegeven:

Herhaling →

Volgorde ↓

zonder herhaling zonder volgorde $\binom{n}{k}$ II	met herhaling zonder volgorde $\binom{n-1+k}{k}$ IV
zonder herhaling met volgorde $(n)_k$ I	met herhaling met volgorde n^k III

Figuur 13 Telformules in één overzicht

1. $(n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}$

2. $\binom{n}{k} = \frac{\mathrm{n!}}{\mathrm{k!(n-k)!}}$ (Dit is het binomiaalcoëfficiënt)

3. $n^k = n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$; met $n_1 = n_2 = \cdots = n_k$

4. $\binom{n-1+k}{k} = \frac{\mathrm{(n-1+k)!}}{\mathrm{k!(n-1)!}}$