Г Л А В А I
Дифференциальные уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ

1^0. Объект изучения.

В этой главе будет изучаться обыкновенное дифференциальное уравнение I порядка, разрешенное относительно производной

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(x, y(x)) \text{ или, в краткой записи, } y' = f(x, y), \qquad (1.1)$$

где x — это независимая переменная, $y = y(x)$ — искомая функция, а $f(x, y)$, если не оговорено противное, — вещественная функция, определенная и непрерывная на множестве

$$\widetilde{G} = G \cup \widehat{G},$$

в котором G — это область в топологии евклидова пространства $\mathbb{R}^2$, а множество $\widehat{G}$, возможно пустое, принадлежит границе области G.

Разъяснения по поводу того, что производная $y'(x)$, определяемая как цельный символ, здесь трактуется и как отношение дифференциалов, приведены в дополнении 1_1.

Таким образом, уравнение (1.1), фактически, задается функцией $f(x, y)$ и ее носителем $\widetilde{G}$, являющимся связным множеством.

Непрерывность $f(x, y)$ будем обозначать стандартно: $f \in C(\widetilde{G})$ и всегда понимать как непрерывность по совокупности переменных, имея в виду, что из непрерывности f по x и по y ее непрерывность по совокупности может не вытекать.
Следует помнить, что областью называется непустое открытое связное множество. Определения некоторых других топологических объектов, которые надо обязательно знать и которые много раз будут использоваться в дальнейшем, можно найти в дополнении 1_2.

Замечание 1. *Граница области* G, *стандартно обозначаемая* ∂G, *состоит из точек множества* $\widehat{G}$ *и точек множества* $\check{G}$, *в которых функция* $f(x,y)$ *не определена или не является непрерывной, т. е.* $\partial G = \widehat{G} \cup \check{G}$. *Разумеется, если* $\partial G = \emptyset$, *то* $\widetilde{G} = G$. *При этом к множеству* $\widehat{G}$ *следует относить все точки* ∂G, *в которых функция* $f(x,y)$ *может быть доопределена с сохранением непрерывности.*

Пусть, например, в уравнении (1.1) $f = y \ln y + (y-1)\sin x^{-1/2}$, тогда $G = \{(x,y)\colon\ x>0,\ y>0\}$, а $\partial G = \partial G_1 \cup \partial G_2$, где $\partial G_1 = \{x>0,\ y(x)\equiv 0\}$, $\partial G_2 = \{x(y)\equiv 0,\ y\geq 0\}$. Очевидно, что функция $y\ln y$ в нуле может быть доопределена по непрерывности нулем, поэтому граница ∂G_1 входит в $\widehat{G}$. Теперь, хотя для любого $y_* \geq 0$ функция $f(x,y_*)$ остается конечной при $x\to 0_+$, доопределить ее с сохранением непрерывности в точке $(0,y_*)$ удается только при $y_*=1$, положив $f(0,1)=0$. Поэтому $\widehat{G} = \partial G_1 \cup \{(0,1)\}$.

Замечание 2. *На практике функция* $f(x,y)$ *может быть определена и непрерывна на некотором не более чем счетном объединении связных множеств вида* $\widetilde{G}$, *возможно имеющих общие границы, Но все теоретические построения будут проводиться для уравнения (1.1), рассматриваемого на каком-либо одном из множеств* $\widetilde{G}$. *При этом решение конкретного уравнения, как правило, происходит одновременно во всем объединении множеств вида* $\widetilde{G}$.

В качестве простого примера можно рассмотреть уравнение (1.1), в котором $f = \sqrt{y}/\sin x$. Эта функция определена и непрерывна на связных множествах $\widetilde{G}_k = G_k \cup \widehat{G}_k \quad (k \in \mathbb{Z})$, где
$G_k = \{(x,y)\colon\ \pi k < x < \pi(k+1),\ y > 0\}$,
$\widehat{G}_k = \{\pi k < x < \pi(k+1),\ y \equiv 0\}$, а множество
$\check{G}_k = \{x = \pi k,\ y \geq 0\}$ — это общая граница областей G_{k-1} и G_k, на которой функция f не определена.

Замечание 3. *Запись уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной, в виде (1.1) является канонической. Именно для уравнения (1.1) будут доказаны все основные теоремы. Но конкретные уравнения бывают записаны в неканоническом виде, например,* $g_1(x,y)y' = g_2(x,y)y' + f_1(x,y)$. *При решении таких уравнений их можно не приводить к каноническому виду, но надо помнить, что кривые* $g_1(x,y) = g_2(x,y)$, *если они существуют, будут принадлежать границе области* G, *так как при переходе к канонической записи (1.1) функция* $f(x,y)$ *не будет на них определена.*

2^0. Решения дифференциального уравнения.

На вещественной оси возьмем непустое связное множество, не являющееся точкой. Хорошо известно, что таким множеством может быть только промежуток $\langle a, b\,\rangle$ $(a < b)$, где символ $\langle$ подразумевает одну из скобок: $($ или $[$, а символ $\rangle$ — скобку $)$ или $]$.

Промежуток (a, b), как обычно, будем называть интервалом и допускать в этом случае значения $a = -\infty$ и $b = +\infty$, а промежуток $[a, b]$ — отрезком, и тогда $|a|, |b| < +\infty$. При этом отрезок не может состоять из одной точки, так как $a < b$.

Df. *Функция* $y = \varphi(x)$, *определенная на некотором промежутке* $\langle a, b\,\rangle$, *называется решением уравнения* (1.1), *если для любого* $x \in \langle a, b\,\rangle$ *выполняются следующие три условия:*

1) *функция* $\varphi(x)$ — *дифференцируемая,*
2) *точка* $(x, \varphi(x)) \in \widetilde{G}$,
3) $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$.

Замечания:

4. *Фактически, решение уравнения (1.1) — это пара: промежуток* $\langle a, b\, \rangle$ *и определенная на нем функция* $\varphi(x)$. *Поэтому сужение* $\varphi(x)$ *на меньший промежуток будет уже иным решением. При этом график решения не может состоять из одной точки, так как у любого промежутка* $\langle a, b\, \rangle$ *по определению* $a < b$.

5. *Первые два условия в определении решения носят вспомогательный характер. Они позволяют выписать условие 3), т. е. выполнить подстановку функции* $y = \varphi(x)$ *в левую и правую части (1.1).*

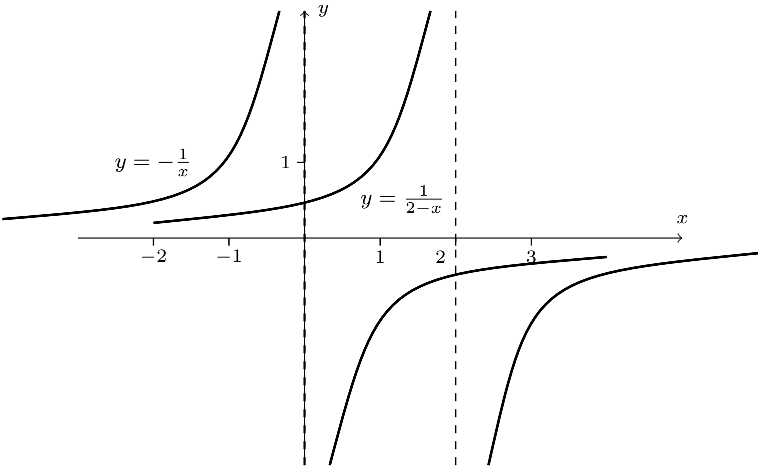
6. *Любое решение* $y = \varphi(x)$ *является функцией не просто дифференцируемой по условию 1), а непрерывно дифференцируемой или гладкой на* $\langle a, b\, \rangle$, *что обычно записывается так:* $\varphi(x) \in C^1(\langle a, b\, \rangle)$.

Действительно, правая часть тождества 3) из определения решения непрерывна как композиция непрерывных функций, а значит, непрерывна и левая часть. При этом, если решение задано на отрезке $[a, b]$, *то на его концах непрерывны односторонние производные.*

7. *Поскольку решение* $y = \varphi(x)$ *— гладкая функция, то через любую точку* $(x, \varphi(x))$ *декартовой плоскости* Oxy *можно провести касательную под углом* $\alpha(x)$ *с осью абсцисс таким, что* $\operatorname{tg} \alpha(x) = f(x, \varphi(x))$. *Поэтому графики решений, проходящих через одну и ту же точку не могут в ней пересекаться, а могут только касаться.*

8. *В определении решения существенно, что функция* $y = \varphi(x)$ *задана на связном множестве.*

Пример 1. *Рассмотрим уравнение* $y' = y^2$. *Его правая часть определена и непрерывна в* $\mathbb{R}^2$.
Подстановкой в уравнение легко проверить, что для любой вещественной константы C *и для любого* $x \neq C$ *функция* $\varphi(x) = (C - x)^{-1}$ *удовлетворяет уравнению, но решением при таких* x *не является, так как* $\mathbb{R}^1 \backslash \{C\}$ *— несвязное множество.*



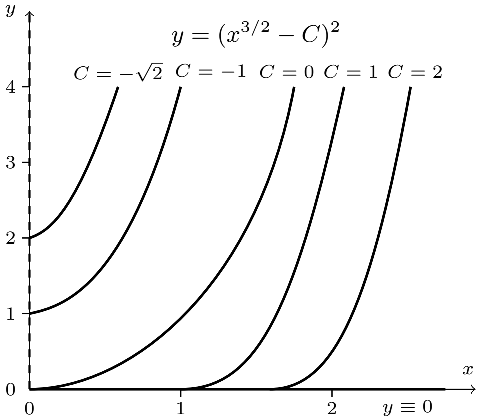
Указанная функция задает два решения, одно на интервале $(-\infty, C)$, *а другое на интервале* $(C, +\infty)$. *При этом решениями будут и любые сужения функции* $\varphi(x)$ *на промежутки вида* $\langle a_1, b\rangle$ *и* $\langle a, b_1\rangle$, *где* $b < C < a$.

Отметим также, что уравнение $y' = y^2$ *имеет решение* $y(x) \equiv 0$, *определенное на* $\mathbb{R}^1$ *и называемое тривиальным.*

Понятие решения уравнения (1.1) бывает удобно уточнять в зависимости от расположения его графика в множестве $\widetilde{G}$.

Df. *Решение уравнения (1.1)* $y = \varphi(x)$, *определенное на промежутке* $\langle a, b\rangle$, *при желании будем называть:*
a) внутренним, если $(x, \varphi(x)) \in G$ *для любого* $x \in \langle a, b\rangle$;
b) граничным, если $(x, \varphi(x)) \in \widehat{G}$ *для любого* $x \in \langle a, b\rangle$;
c) смешанным, если существуют $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$ *такие, что точка* $(x_1, \varphi(x_1)) \in G$, *а точка* $(x_2, \varphi(x_2)) \in \widehat{G}$.

Пример 2. *Рассмотрим уравнение* $y' = 3\sqrt{x}\sqrt{y}$. *Его правая часть непрерывна на множестве* $\widetilde{G} = \{(x, y)\colon\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$. *А лучи* $y \equiv 0 \quad (x \geq 0)$ *и* $x \equiv 0 \quad (y \geq 0)$ *образуют множество* $\widehat{G}$.
Функция $y(x) \equiv 0$, $x \in [0, +\infty)$ *— это граничное решение, при подстановке оно обращает уравнение в тождество.*
Все внутренние решения, как легко проверить, задаются формулой $\varphi(x) = (x^{3/2} - C)^2$, *в которой* $x > 0$ *при* $C \leq 0$ *и* $x > C^{2/3}$ *при* $C > 0$. *Их графики лежат в области* $G = \{(x, y)\colon\ x > 0,\ y > 0\}$.



Перейдем теперь к описанию смешанных решений.
Во-первых, ими станут все внутренние решения с $C \leq 0$, *если к их области определения добавить единственную точку* $x = 0$, *т. е. для любой константы* $C \leq 0$ *функция* $y = (x^{3/2} - C)^2$ *на промежутке* $[0, +\infty)$ *— это смешанное решение и* $(0, C^2)$ *— его единственная граничная точка. Во-вторых, для любой константы* $C > 0$ *смешанное решение образует "составная" функция*
$y = \{0$ *при* $0 \leq x \leq C^{2/3},\ (x^{3/2} - C)^2$ *при* $(x > C^{2/3})\}$.

3^0. Интегральное уравнение.

Решение уравнения (1.1) бывает удобно записывать в так называемом интегральном виде, т. е. в виде решения некоего интегрального уравнения. В частности, при доказательстве теоремы о существовании решения оно будет найдено именно в интегральном виде.

Поэтому наряду с дифференциальным уравнением (1.1) введем в рассмотрение интегральное уравнение вида

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds, \tag{1.2}$$

в котором функция $f(x, y)$ определена и непрерывна на множестве $\widetilde{G}$ из уравнения (1.1) и точка $(x_0, y_0) \in \widetilde{G}$.

Df. *Функция* $y=\varphi(x)$, *определенная на промежутке* $\langle a, b\,\rangle \ni x_0$, *называется решением интегрального уравнения* (1.2), *в котором* $y_0 = \varphi(x_0)$, *если выполняются следующие три условия:*
1) функция $\varphi(x)$ *непрерывна на* $\langle a, b\,\rangle$,
2) точка $(x, \varphi(x)) \in \widetilde{G}$ *для любого* $x \in \langle a, b\,\rangle$,
3) $\varphi(x) \overset{\langle a,b\,\rangle}{\equiv} y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s))\, ds.$

Разделение решений интегрального уравнения на внутреннее, граничное или смешанное происходит аналогично соответствующему разделению решений дифференциального уравнения.

Замечание 9. *По условию 3) любое решение интегрального уравнения (1.2) является гладким, т. е.* $\varphi(x) \in C^1(\langle a, b\,\rangle)$, *поскольку интеграл с переменным верхним пределом от композиции непрерывных функций из правой части 3) является непрерывно дифференцируемой функцией, каковой будет и левая часть.*

Теорема (о связи между дифференциальным и интегральным уравнениями). *Пусть функция* $y = \varphi(x)$ *определена и непрерывна на промежутке* $\langle a, b\,\rangle \ni x_0$ *и* $\varphi(x_0) = y_0$. *Для того чтобы* $\varphi(x)$ *была решением дифференциального уравнения* (1.1) *на* $\langle a, b\rangle$, *необходимо и достаточно, чтобы она была решением интегрального уравнения* (1.2) *на* $\langle a, b\,\rangle$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $y = \varphi(x)$ на $\langle a, b\,\rangle$ — решение уравнения (1.1), тогда точка $(x_0, \varphi(x_0)) \in \widetilde{G}$ и справедливо тождество $\varphi'(x) \overset{\langle a,b\,\rangle}{\equiv} f(x, \varphi(x))$. Интегрируя его по s от x_0 до x и перенося $\varphi(x_0)$ в п. ч., получаем тождество

$$\varphi(x) \overset{\langle a,b\,\rangle}{\equiv} \varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s))\, ds, \qquad (1.3)$$

означающее, что функция $y = \varphi(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению (1.2) на промежутке $\langle a, b\,\rangle$.

Достаточность. Подставляя решение $y = \varphi(x)$ в уравнение (1.2), по определению получаем тождество (1.3), которое согласно замечанию 9 можно продифференцировать по x. В результате получаем тождество $\varphi'(x) \overset{\langle a,b\,\rangle}{\equiv} f(x, \varphi(x))$, означающее, что $y = \varphi(x)$ — это решение уравнения (1.1). $\square$

Замечание 10. *Если отказаться от предположения о непрерывности функции* $f(x, y)$ *в области* G *и потребовать только ее суммируемости в* G *в определенном смысле, то достаточность в теореме доказать не удастся, так как правая часть тождества (1.3), а значит, и функция* $y = \varphi(x)$, *могут оказаться лишь непрерывными функциями. Поэтому, являясь решением интегрального уравнения (1.2),* $\varphi(x)$ *не будет решением дифференциального уравнения (1.1).*
В этом случае понятие решения уравнения (1.1) можно расширить, называя любое решение интегрального уравнения (1.2) *обобщенным решением дифференциального уравнения* (1.1).

4^0. Задача Коши.

Одним из простейших примеров дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной, и его решения является задача о нахождении первообразной из курса математического анализа. Найти первообразную $y(x)$ функции $f(x)$, фактически, означает решить уравнение (1.1) $y' = f(x)$. В курсе математического анализа доказано, что множество всех решений этого уравнения, т. е. множество всех первообразных, задается формулой $y(x) = \int f(x)\,dx + C$, в которой C — произвольная вещественная константа.

Такая ситуация стандартна, поскольку, решая любое уравнение первого порядка, так или иначе придется один раз интегрировать, что приведет к появлению свободной вещественной константы C. При этом часто среди множества всех решений требуется найти какие-то конкретные внутренние, граничные или смешанные решения. Это делается при помощи задания дополнительного условия, позволяющего выделить требуемые решения.

Дополнительное условие может заключаться, например, в том, чтобы найти такие решения уравнения (1.1), графики которых проходят через выбранную точку множества $\widetilde{G}$.
Говорят, что задать такое условие, называемое начальным, — это значит поставить задачу Коши.

Df. *Задача Коши заключается в том, чтобы для выбранной точки* $(x_0, y_0) \in \widetilde{G}$ *найти все решения* $y = \varphi(x)$ *уравнения* (1.1), *заданные на промежутках* $\langle a, b\,\rangle \ni x_0$, *такие, что* $\varphi(x_0) = y_0$.

В теории ОДУ постановка задача Коши для уравнения (1.1) является наиболее востребованным дополнительным условием.
А в качестве альтернативного дополнительного условия можно использовать постановку так называемой краевой задачи.

Df. *Любые два числа* x_0, y_0 *такие, что точка* $(x_0, y_0) \in \widetilde{G}$, *называются начальными данными (н. д.) задачи Коши. В этом случае говорят также, что задача Коши поставлена в точке* (x_0, y_0), *причем, если* $(x_0, y_0) \in G$, *то задачу Коши, уточняя, можно называть внутренней, а если* $(x_0, y_0) \in \widehat{G}$, *то — граничной.*

Df. *Решение задачи Коши уравнения* (1.1) *с начальными данными* x_0, y_0 *существует, если существует такое решение* $y = \varphi(x)$, *определенное промежутке* $\langle a, b \rangle \ni x_0$, *что* $\varphi(x_0) = y_0$.

Замечание 11. Задача Коши по своей постановке является локальной задачей, поскольку любое ее решение достаточно найти на сколь угодно малом промежутке, содержащем точку x_0.

Df. *Внутреннее (граничное, смешанное) решение задачи Коши уравнения* (1.1) *с начальными данными* x_0, y_0 *существует, если точка* $(x_0, y_0) \in G\,(\widehat{G}, \widetilde{G})$ *и найдутся промежуток* $\langle a, b \rangle \ni x_0$ *и определенное на нем внутреннее (граничное, смешанное) решение* $y = \varphi(x)$ *такие, что* $\varphi(x_0) = y_0$.

Таким образом, по определению график внутреннего решения задачи Коши лежит в области G, граничного — в $\widehat{G}$, а смешанного — и там, и там. Кроме того, если постановка задачи Коши для нахождения внутреннего или граничного решения остается локальной, то при нахождении смешанного решения внутренней задачи локальность может быть потеряна. Дальнейшие уточнения постановки задачи Коши сделаны в п. 9^0.

Обсудим теперь условия, которые гарантируют существование решения внутренней задачи Коши и граничной задачи Коши.
В случае, когда задача Коши поставлена в точке $(x_0, y_0) \in G$, для существования решения оказывается достаточно непрерывности функции f в области G, что изначально всегда и предполагается.
Теорема о существовании внутреннего решения задачи Коши (теорема Пеано) будет сформулирована в следующем пункте и затем доказана в § 2. Но сначала будет описан промежуток, на котором это решение, как окажется, должно существовать.

Гораздо менее очевидна ситуация, связанная с существованием решений граничной задачи Коши уравнения (1.1), т. е. задачи Коши, поставленной в точке $(x_0, y_0) \in \widehat{G}$. Здесь, помимо стандартного предположения о непрерывности функции $f(x, y)$ на множестве $\widetilde{G}$, многое зависит от структуры границы в окрестности точки (x_0, y_0), а также от значений функции f на этом участке границы.
Ответы на вопросы, связанные с наличием или отсутствием решений граничной задачи Коши, будут даны в § 3.

5^0. О существовании решения внутренней задачи Коши. Для любой точки (x_0, y_0) из области G отрезком Пеано называют отрезок оси абсцисс с центром в точке x_0, построенный по определенному алгоритму, называемому алгоритмом Пеано. Ниже будет доказано, что на каждом из построенных отрезков Пеано заведомо существует внутреннее решение задачи Коши дифференциального уравнения (1.1) с начальными данными x_0, y_0.

Опишем алгоритм построения отрезка Пеано.

Очевидно, что для любой точки $(x_0, y_0) \in G$ найдутся константы $a, b > 0$ такие, что прямоугольник

$$\overline{R} = \{(x, y) \, : \, |x - x_0| \le a, \, |y - y_0| \le b\},$$

являющийся компактом (замкнутым ограниченным множеством), лежит в области G. При этом замкнутость любого множества будет отмечать стоящая над ним черта.

Давайте сразу исключим из рассмотрения простейший случай, когда $f(x, y) \equiv 0$ на $\overline{R}$, в котором уравнение (1.1), очевидно, имеет решение $y(x) \equiv y_0$ при $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$.

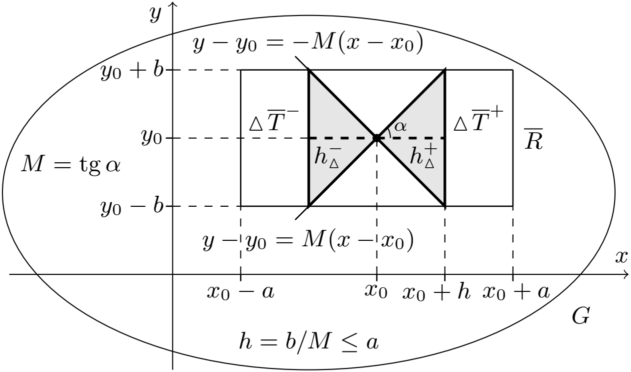
Поскольку на компакте любая непрерывная функция достигает своего максимума, положим $M = \max_{(x,y)\in\overline{R}} |f(x,y)| > 0$, тогда

$$h = \min\{a, b/M\} \quad (h > 0).$$

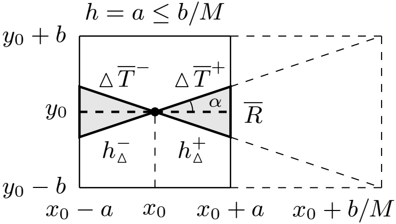
Df. *Отрезок* $\overline{P}_h(x_0, y_0) = [x_0 - h, x_0 + h]$ *называется отрезком Пеано, построенным для точки* $(x_0, y_0) \in G$. *Отрезки* $\overline{P}_h^+(x_0, y_0) = [x_0, x_0 + h]$ *и* $\overline{P}_h^-(x_0, y_0) = [x_0 - h, x_0]$ *называются соответственно правым и левым отрезками Пеано.*

Константа h для точки (x_0, y_0) находится неоднозначно. Но она однозначно определяется выбором прямоугольника $\overline{R}$.
За счет изменения a и b константа h всегда может быть уменьшена, что не представляет практического интереса, а также может быть увеличена, но, возможно, весьма незначительно.
Отметим также, что для построения отрезка Пеано $\overline{P}_h(x_0, y_0)$ и для доказательства затем существования внутреннего решения задачи Коши на этом отрезке, достаточно предполагать непрерывность функции $f(x, y)$ только на $\overline{R}$, а не во всей области G.

Разберемся, в чем заключается геометрический смысл $\overline{P}_h(x_0, y_0)$.
В области G строим произвольный прямоугольник $\overline{R}$ с центром в точке (x_0, y_0) и сторонами $2a$ и $2b$, после чего однозначно вычисляем значения констант M и h.
Далее, через точку (x_0, y_0) проводим две прямые с тангенсами углов наклона равными $\pm M$ вплоть до пересечения их с какой-либо из сторон прямоугольника.
Справа от прямой $x = x_0$ возникает равнобедренный треугольник $\overline{T}^+$ с вершинами в точке (x_0, y_0) и точках пересечения прямых со сторонами $\overline{R}$. Если основание $\overline{T}^+$ лежит на вертикальной стороне $\overline{R}$, то его высота равняется a и $a \leq b/M$, а если $b/M \leq a$, то основание $\overline{T}^+$ лежит на прямой $x = b/M$ внутри прямоугольника.
Таким образом, константа h это всегда есть длина высоты h_Δ^+ треугольника $\overline{T}^+$, при этом $\overline{T}^+ \subset \overline{R} \subset G$.



y
$y - y_0 = -M(x - x_0)$
$y_0 + b$
$\triangle \overline{T}^-$
$\triangle \overline{T}^+$
α
y_0
$\overline{R}$
$M = \operatorname{tg} \alpha$
$h_\triangle^-$
$h_\triangle^+$
$y_0 - b$
$y - y_0 = M(x - x_0)$
x
$x_0 - a$
x_0
$x_0 + h$
$x_0 + a$
G
$h = b/M \le a$



$h = a \le b/M$
$y_0 + b$
$\triangle \overline{T}^-$
$\triangle \overline{T}^+$
α
y_0
$\overline{R}$
$h_\triangle^-$
$h_\triangle^+$
$y_0 - b$
$x_0 - a$
x_0
$x_0 + a$
$x_0 + b/M$

Слева от прямой $x = x_0$ аналогично строится треугольник $\overline{T}^-$, имеющий высоту h_Δ^- той же длины h.

Теорема Пеано (о существовании внутреннего решения). *Пусть правая часть уравнения* (1.1) *непрерывна в области* G, *тогда для любой точки* $(x_0, y_0) \in G$ *и для любого отрезка Пеано* $\overline{P}_h(x_0, y_0)$ *существует по крайней мере одно решение задачи Коши уравнения* (1.1) *с начальными данными* x_0, y_0, *определенное на* $\overline{P}_h(x_0, y_0)$.

Эта важнейшая теорема будет доказана в следующем параграфе.

Замечание 12. *Решение внутренней задачи Коши существует в "полной" окрестности* x_0, *так как* x_0 — *внутренняя точка* $\overline{P}_h(x_0,y_0)$.

6^0. Продолжимость решения, полное решение.

Пусть $y=\varphi(x)$ — решение уравнения (1.1) на промежутке $\langle a,b\,\rangle$. Если этот промежуток произвольным образом сузить, то на новом промежутке функция $y=\varphi(x)$ останется решением, которое естественно называть сужением исходного решения. При этом сужение внутреннего решения останется внутренним, граничного — граничным, а смешанное решение при исключении из промежутка $\langle a,b\,\rangle$ даже одной точки может перестать быть смешанным (см. пример 2).

А существует ли решение уравнения (1.1), определенное на большем промежутке и совпадающее с $y=\varphi(x)$ на $\langle a,b\,\rangle$? И, на сколько больше $\langle a,b\,\rangle$ может оказаться этот промежуток? Пример 1 показывает, что расширение промежутка возможно не всегда. Очевидно, что интервал $(-\infty,1)$, на котором определено решение $\varphi(x)=(1-x)^{-1}$ уравнения $y'=y^2$ увеличить невозможно.

Df. *Решение* $y = \varphi(x)$ *уравнения* (1.1), *определенное на промежутке* $\langle a, b\,\rangle$, *продолжимо вправо, если найдутся число* $\widetilde{b} \geq b$ *и решение* $y = \widetilde{\varphi}(x)$, *определенное на промежутке* $\langle a, \widetilde{b}\,\rangle \neq \langle a, b\,\rangle$, *такие, что сужение функции* $\widetilde{\varphi}(x)$ *на* $\langle a, b\,\rangle$ *совпадает с* $\varphi(x)$. *Если при этом* $\widetilde{b} = b$, *то говорят, что* $y = \varphi(x)$ *продолжимо вправо в точку* b *или на границу, а если* $\widetilde{b} > b$, *то говорят, что* $y = \varphi(x)$ *продолжимо вправо за точку* b *или за границу. В любом случае решение* $y = \widetilde{\varphi}(x)$ *называется продолжением решения* $y = \varphi(x)$ *вправо. Аналогично определяется продолжимость решения влево.*

Это определение связывает понятия сужения решения и продолжения решения. Если решение $y = \widetilde{\varphi}(x)$ является продолжением решения $y = \varphi(x)$, то $y = \varphi(x)$ — сужением $y = \widetilde{\varphi}(x)$, и наоборот.

Отметим, что продолжение решения за границу может не быть единственным в том смысле, что на продолжении $(b, \widetilde{b}\,\rangle$ промежутка $\langle a, b\,\rangle$ оно может задаваться различными функциями $\widetilde{\varphi}(x)$.

Кроме того, продолжение внутреннего или граничного решения может оказаться смешанным решением, что и показывает пример 2, в котором граничное решение $y \equiv 0$, заданное на отрезке $[0, 1]$, может быть продолжено до $+\infty$, оставаясь граничным решением, а может стать смешанным решением $y(x) = \{\, 0$ при $x \in [0, x_*^{2/3}]$, $(x^{3/2} - x_*)^2$ при $x > x_*^{2/3}\}$ для любого $x_* \geq 1$.

Введем теперь понятие "максимально продолженного" решения.

Df. *Решение уравнения* (1.1) *называется полным, или максимально продолженным, или непродолжимым, если его нельзя продолжить ни влево, ни вправо, или, что то же самое, если оно не является сужением никакого другого решения.*

Сделаем естественные уточнения для различных типов решений.

Df. *Внутреннее (граничное) решение уравнения* (1.1) *называется полным, если его нельзя продолжить ни влево, ни вправо так, чтобы оно осталось внутренним (граничным).*
Таким образом, полное внутреннее решение и полное граничное решение могут оказаться продолжимыми в любую сторону, но в этом случае они превратятся в смешанные решения.

Df. *Область определения любого полного решения называется максимальным интервалом существования и обозначается* I_{max}.

Перейдем теперь к вопросу о существовании полного решения. Не смотря на кажущуюся очевидность ответа, существование полного решения придется доказывать, используя лемму Цорна, по сути эквивалентную аксиоме выбора или принципу максимума Хаусдорфа.
Дело в том, что продолжения любого выбранного решения могут, как уже отмечалось, многократно "ветвиться" , поэтому становится неясно, удастся ли добраться, например, до максимальной границы промежутка всех продолженных решений.

Теорема (о существовании полного решения). *Любое решение уравнения (1.1) может быть продолжено до полного решения.*

В другой формулировке эта теорема звучит так: *любое решение уравнения (1.1) является сужением некоторого полного решения.*

Доказательство теоремы о существовании полного решения, предваряемое необходимыми определениями, приведено в дополнении 1_3.

После определения полного решения появилась возможность ввести удобное и востребованное, особенно на практике, понятие.

Df. *Кривая, являющаяся графиком полного решения, называется интегральной кривой уравнения* (1.1). *Если же решение рассматривается на промежутке* $\langle a, b\,\rangle \subsetneqq I_{max}$, *то его график будем называть дугой интегральной кривой.*

Таким образом, интегральные кривые уравнения (1.1) принадлежат $\widetilde{G}$, не могут иметь вертикальных касательных, не пересекаются, но могут, вообще говоря, касаться друг друга.

Изучим теперь вопросы о том, когда решение продолжимо и как далеко оно может быть продолжено?

Теорема (о продолжимости решения на границу). *Пусть* $y = \varphi(x)$ *является решением уравнения* (1.1) *на промежутке* $\langle a, b)$ *и* $b < +\infty$. *Для того чтобы оно было продолжимо вправо в точку* b, *необходимо и достаточно, чтобы существовали число* $\eta \in \mathbb{R}^1$ *и последовательность* $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ *такие, что*

$$(b, \eta) \in \widetilde{G}, \quad x_k \in \langle a, b) \;\; \text{и} \;\; (x_k, \varphi(x_k)) \to (b, \eta) \;\; \text{при} \;\; k \to \infty. \quad (1.4)$$

Аналогично формулируются условия для продолжимости влево.

Д о к а з а т е л ь с т в о. <u>Достаточность.</u> Пусть выполняется условие (1.4). В силу того, что функция $f(x,y)$ определена и непрерывна на множестве $\widetilde{G}$, найдутся такие $c>0$ и $M\geq 1$, что

$$\forall\,(x,y)\in\widetilde{G}\cap V_c(b,\eta):\quad |f(x,y)|\leq M,$$

где $V_c(b,\eta)=\{(x,y)\colon\, |x-b|<c,\ |y-\eta|<c\}$.
Докажем сначала, что существует $\lim\limits_{x\to b_-}\varphi(x)$ и что он равен η.
Зафиксируем произвольное число $\varepsilon>0$ $(\varepsilon\leq c)$.
Тогда $|f(x,y)|\leq M$ для любой точки $(x,y)\in\widetilde{G}\cap V_\varepsilon(b,\eta)$ и по условию (1.4) найдется такой номер m, что верны неравенства

$$b-x_m<\varepsilon/(2M),\quad |\varphi(x_m)-\eta|<\varepsilon/2.$$

Покажем, что

$$\forall\,x\in[x_m,b):\quad |\varphi(x)-\varphi(x_m)|<M(b-x_m).\tag{1.5}$$

Противное означает наличие такого числа x_*, что $x_m < x_* < b$, неравенство (1.5) верно для всех $x \in [x_m, x_*)$, а $|\varphi(x_*) - \varphi(x_m)| = M(b - x_m)$, с учетом того, что при $x = x_m$ неравенство (1.5) очевидным образом выполняется. Тогда в силу выбора числа m

$$\forall\, x \in [x_m, x_*]: \quad b - x < \varepsilon/2, \quad |\varphi(x) - \eta| < \varepsilon, \qquad (1.6)$$

а значит, $(x, \varphi(x)) \in \widetilde{G} \cap V_\varepsilon(b, \eta)$ для любого $x \in [x_m, x_*]$. Действительно, $b - x \le b - x_m < \varepsilon/(2M) \le \varepsilon/2$, следовательно, $|\varphi(x) - \eta| \le |\varphi(x) - \varphi(x_m)| + |\varphi(x_m) - \eta| < M(b - x_m) + \varepsilon/2 < \varepsilon$. По теореме о связи между дифференциальным и интегральным уравнениями $y = \varphi(x)$, являясь решением уравнения (1.1) на $\langle a, b)$, удовлетворяет также тождеству (1.3), в частности, при $x_0 = x_m$, $x = x_*$, т. е. равенству $\varphi(x_*) = \varphi(x_m) + \displaystyle\int_{x_m}^{x_*} f(s, \varphi(s))\, ds$. Поэтому $|\varphi(x_*) - \varphi(x_m)| \le \displaystyle\int_{x_m}^{x_*} |f(s, \varphi(s))|\, ds \le M(x_* - x_m) < M(b - x_m)$. !!

Итак, неравенство (1.5) выполняется и по любому $\varepsilon > 0$ нашлось такое $\delta = x_m$, что неравенство из (1.6) $|\varphi(x) - \eta| < \varepsilon$ верно для любого $x \in [\delta, b)$. Последнее означает, что $\varphi(x) \to \eta$ при $x \to b_-$. Доопределим функцию $y = \varphi(x)$ в точке b, положив $\varphi(b) = \eta$. Согласно (3.1) $\varphi(x) = \varphi(x_0) + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s))\, ds$ для $\forall\, x, x_0 \in \langle a, b)$. В этом тождестве можно перейти к пределу при $x \to b_-$, получая $\eta = \varphi(x_0) + \displaystyle\int_{x_0}^{b} f(s, \varphi(s))\, ds$, так как по условию точка $(b, \eta) \in \widetilde{G}$, а значит, функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в этой точке. В результате функция $\widetilde{\varphi}(x) = \{\varphi(x)\ (x \in \langle a, b)),\ \eta\ (x = b)\}$ по определению является продолжением решения $y = \varphi(x)$ на $\langle a, b]$.

Необходимость. Допустим, что на промежутке $\langle a, b]$ существует решение $y = \widetilde{\varphi}(x)$ такое, что $\widetilde{\varphi}(x) \equiv \varphi(x)$ на $\langle a, b)$. Поскольку $\widetilde{\varphi}(x)$ непрерывна, то $\widetilde{\varphi}(b) = \eta = \lim\limits_{x \to b} \widetilde{\varphi}(x)$, Но тогда $\eta = \lim\limits_{x \to b-} \varphi(x)$ и требуемая последовательность точек x_k существует, причем по определению решения точка $(b, \eta) \in \widetilde{G}$. $\square$

Отметим, что теорема доказывается только для случая, когда в определении продолжимости $\tilde{b} = b$ или $\tilde{a} = a$, и в ней отсутствуют утверждения о продолжимости решения вправо за точку b или влево за точку a. Однако, теорема Пеано позволяет с легкость установить, когда решение, определенное на отрезке, может быть продолжено за его границы.

Лемма (о продолжимости решения за границу отрезка). *Пусть решение* $y = \varphi(x)$ *уравнения* (1.1) *определено на промежутке* $\langle a, b]$ *и точка* $(b, \varphi(b)) \in G$. *Тогда это решение продолжимо вправо за точу* b *на полуотрезок Пеано, построенный для точки* $(b, \varphi(b))$. *Утверждение о продолжимости решения, заданного на* $[a, b\rangle$, *влево за точку* a *формулируется аналогично.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме Пеано на отрезке Пеано $\overline{P}_h(b, \varphi(b))$ существует внутреннее решение $y = \psi(x)$ задачи Коши с начальными данными $(b, \varphi(b))$. Но тогда решение $y = \widetilde{\varphi}(x)$, где

$$\widetilde{\varphi}(x) = \{\varphi(x) \text{ при } x \in \langle a, b],\ \psi(x) \text{ при } x \in [b, b+h]\},$$

по определению является продолжением исходного решения вправо на полуотрезок Пеано. $\square$

Следствие 1. *Если решение* $y = \varphi(x)$ *уравнения* (1.1) *определено на промежутке* $\langle a, b]$ *и не продолжимо вправо за точку* b, *то точка* $(b, \varphi(b)) \in \widehat{G}$. *А если оно определено на промежутке* $[a, b\rangle$ *и не продолжимо влево за точу* a, *то точка* $(a, \varphi(a)) \in \widehat{G}$.

Следствие 2. *Максимальный интервал существования любого внутреннего решения — это интервал.*

Действительно, допуск противного в следствиях противоречит лемме.

Из теоремы о продолжимости решения на границу и последней леммы вытекает следующее утверждение.

Лемма (о продолжимости решения за границу интервала). *Пусть решение* $y = \varphi(x)$ *уравнения* (1.1) *определено на промежутке* $\langle a, b)$, *существует число* $\eta = \lim\limits_{x \to b-} \varphi(x)$ *и точка* $(b, \eta) \in G$. *Тогда это решение продолжимо вправо за точу* b. *Утверждение о продолжимости решения, заданного на* $(a, b\rangle$, *влево за точку* a *формулируется аналогично.*

Здесь условие о существовании левостороннего предела следует из условия (1.4), лишь бы точка (b, η) лежала в области G.

А что происходит с интегральной кривой при стремлении аргумента полного внутреннего решения к границе максимального интервала существования?

Теорема (о поведении интегральной кривой полного внутреннего решения). *Пусть решение* $y = \varphi(x)$ *уравнения* (1.1) *определено на промежутке* $\langle a, \beta)$ *и не продолжимо вправо, тогда для любого компакта* $\overline{H} \subset G$ *найдется такое* $\delta \in \langle a, \beta)$, *что* $(x, \varphi(x)) \notin \overline{H}$ *для всякого* $x \in (\delta, \beta)$. *Аналогичный результат имеет место для решения, определенного на* $(\alpha, b\rangle$ *и непродолжимого влево.*

Другая формулировка этой теоремы: *при стремлении аргумента полного внутреннего решения к границе максимального интервала существования интегральная кривая покидает любой компакт, лежащий в области* G, *и никогда в него не возвращается.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\beta = +\infty,$ то теорема очевидна из-за ограниченности любого компакта $\overline{H}.$

Пусть $\beta < +\infty.$ Тогда, рассуждая от противного, допустим, что существуют компакт $\overline{H} \subset G$ и последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in \langle a, \beta)$ такая, что $x_k \to \beta$ при $k \to \infty$ и $(x_k, \varphi(x_k)) \in \overline{H}$ для $k = 1, 2, \ldots$.

Не уменьшая общности, будем считать эту последовательность сходящейся, иначе перейдем к сходящейся подпоследовательности. Положим $(\beta, \eta) = \lim_{k\to\infty}(x_k, \varphi(x_k)),$ тогда предельная точка (β, η) также принадлежит компакту $\overline{H},$ а значит, выполняются условия теоремы о продолжимости решения из п. $4^0,$ согласно которой решение $y = \varphi(x)$ продолжимо на промежуток $\langle a, \beta].$!!

$\square$

В заключение ответим на вопрос о том, где могут быть определены решения задачи Коши, отличные от решения, чье существование на отрезке Пеано гарантирует теорема Пеано?

Лемма (о продолжимости решений на отрезок Пеано). *Пусть* $y = \varphi(x)$ *— решение внутренней задачи Коши с н. д.* x_0, y_0, *определенное на* $\overline{P}_h(x_0, y_0)$. *Тогда любое другое решение уравнения (1.1)* $y = \psi(x)$ *этой же задачи Коши, определенное на промежутке* $\langle a, b\,\rangle \subset [x_0 - h, x_0 + h]$, *продолжимо на* $\overline{P}_h(x_0, y_0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем продолжимость решения $y = \psi(x)$ на правый полуотрезок Пеано (продолжимость на левый полуотрезок доказывается аналогично).

Предположим сначала, что $\langle a, b\,\rangle = \langle a, b) \quad (b \le x_0 + h)$.

При построении $\overline{P}_h(x_0, y_0)$ были введены содержащийся в G прямоугольник $\overline{R}$ с центром в точке (x_0, y_0) и сторонами $2a$ и $2b$, на котором $\max |f(x, y)| = M$, а также лежащий в $\overline{R}$ равнобедренный треугольник $\overline{T}^+$ с вершиной в точке (x_0, y_0), углами наклона боковых сторон, равными $\pm \operatorname{arctg} M$ и высотой, равной h.

График решения $y=\psi(x)$ при $x\in[x_0,b)$ содержится в треугольнике $\overline{T}^+$ по тем же причинам, что и график решения $y=\varphi(x)$.

Поэтому у любой последовательности $x_k\in[x_0,b)$ и $x_k\to b$ при $k\to\infty$ точки $(x_k,\varphi(x_k))\in\overline{T}^+\subset\overline{R}$, а значит, найдется сходящаяся подпоследовательность $(x_{k_l},\varphi(x_{k_l}))$. Ее предел — точка $(b,\eta)\in\overline{T}^+$.

Следовательно, по теореме о продолжимости решения $y=\psi(x)$ продолжимо на $[x_0,b]$, хотя могло быть там сразу и задано.

Если теперь $b=x_0+h$, то следствие доказано.

Пусть $b<x_0+h$. Построим справа от точки (b,η) равнобедренный треугольник $\overline{T}_1^+$ с вершиной в этой точке, боковыми сторонами с теми же тангенсами углов наклона $\pm M$, что и у $\overline{T}^+$, и основанием, лежащим на стороне с абсциссой x_0+h прямоугольника $\overline{R}$.

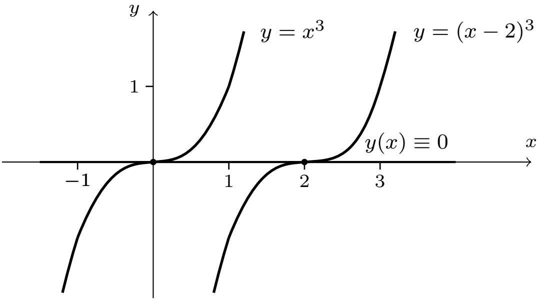
По теореме Пеано на $[b,x_0+h]$ существует решение задачи Коши с н. д. b,η, продолжающее $\psi(x)$ до точки x_0+h включительно.

$\square$

7^0. Вопросы, связанные с единственностью решений.

Условие $f(x,y) \in C(\widetilde{G})$, гарантирующее существование решений как любой внутренней задачи Коши, так и граничной задачи Коши, поставленной в произвольной точке границы, в малой окрестности которой выполняются предположения о структуре границы и, возможно, о поведении на ней функции f, чрезвычайно компактно, удобно и легко проверяется.
Однако, из непрерывности f не следует, что не существует двух различных решений задачи Коши как внутренней, так и граничной, определенных на одном и том же промежутке.

Пример 3. *Рассмотрим уравнение* $y' = 3y^{2/3}$. *Его правая часть определена и непрерывна на* $\mathbb{R}^2$, *поэтому все решения — внутренние.*
Подстановкой в уравнение легко проверить, что для любой $C \in \mathbb{R}^1$ *функция* $y = (x-C)^3$ *— полное решение на* $\mathbb{R}^1$.
Столь же очевидно, что имеется тривиальное решение $y(x) \equiv 0$.



В результате через любую точку оси абсцисс $(x_0, 0)$ *проходят графики двух решений:* $y = (x - x_0)^3$ *и* $y(x) \equiv 0$, *и эти графики не имеют других общих точек. Поэтому в каждой точке оси абсцисс нарушается единственность решения задачи Коши.*

Следует отметить, что уравнение имеет также континуум полных решений задачи Коши с н. д. $x_0, 0,$ совпадающих с тривиальным только на некотором промежутке. Эти решения для любых x_0^-, x_0^+ таких, что $x_0^- \leq x_0 \leq x_0^+,$ задаются "составной" функцией $y = \{(x - x_0^-)^3$ при $x \leq x_0^-,$ 0 при $x \in (x_0^-, x_0^+),$ $(x - x_0)^3$ при $x \geq x_0^+\},$ гладкость которой в точках x_0^- и x_0^+ не нарушается.

Аналогичная ситуация имеет место и для граничных задач Коши. Так, в примере 2 для любой точки $(x_0, 0) \in \widehat{G}$ $(x_0 \geq 0)$ при $x \geq x_0$ имеются решения $y(x) \equiv 0$ и $y = (x^{3/2} - x_0^{3/2})^2,$ графики которых совпадают только в начальной точке $(x_0, 0).$ При этом при $x_0 > 0$ любые продолжения влево у этих решений совпадают, а при $x_0 = 0$ продолжения влево, очевидно, отсутствуют.

Предваряя точные определения единственности и неединственности решения задачи Коши, поставленной в точке $(x_0, y_0) \in \widetilde{G},$ введем понятия точки неединственности и точки единственности.

Df$_1$. *Точка* $(x_0,y_0)\in\widetilde{G}$ *называется точкой неединственности, если существуют такие решения* $y=\varphi_1(x)$ *и* $y=\varphi_2(x)$ *задачи Коши уравнения (1.1) с н. д.* x_0,y_0, *определенные на промежутке* $\langle a,b\,\rangle$, *и такая последовательность* $x_k\to x_0$ *при* $k\to\infty$, *что* $\varphi_1(x_k)\ne\varphi_2(x_k)$ $(k=1,2,\ldots)$. *В противном случае точка* (x_0,y_0) *называется точкой единственности.*

Таким образом, любая точка граничного множества $\widehat{G}$, в которой решение задачи Коши отсутствует, по определению будет точкой единственности (см. ниже примеры 5 из п. 9^0 и 9–11 из § 3, п. 1^0).

Дадим еще одно определение точки неединственности.

Df$_2$. *Точка* $(x_0,y_0)\in\widetilde{G}$ *называется точкой неединственности, если найдутся такие решения* $y=\varphi_1(x)$ *и* $y=\varphi_2(x)$ *задачи Коши уравнения (1.1) с н. д.* x_0,y_0, *определенные на* $\langle a,b\,\rangle$, *что*

$$\forall\,(\alpha,\beta)\ni x_0\quad \exists\, x^*\in(\alpha,\beta)\cap\langle a,b\,\rangle:\quad \varphi_1(x^*)\ne\varphi_2(x^*).$$

В Df$_2$ существенно, что (α,β) — интервал, так как исключается случай, когда, скажем, $\langle a,b\,\rangle=[x_0,b\,\rangle$, а $(\alpha,\beta\,\rangle=(\alpha,x_0]$. Тогда точка x^* не может существовать в принципе.

Приведенные определения точки неединственности равносильны.

Действительно, из Df_1 вытекает, что для всякого интервала $(\alpha, \beta) \ni x_0$ найдется индекс k^* такой, что $x_{k^*} \in (\alpha, \beta)$, поэтому в Df_2 $x^* = x_{k^*}$. С другой стороны, выберем последовательность интервалов (α_k, β_k), которая с ростом k стягивается в точку x_0. Тогда по Df_2 для всякого k найдется $x_k^* \in (\alpha_k, \beta_k) \cap \langle a, b\, \rangle$, что $\varphi_1(x_k^*) \neq \varphi_2(x_k^*)$, т. е. x_k^* — последовательность из Df_1.

Df_2 удобно тем, что помогает сформулировать "прямое" определение точки единственности.

Df. *Точка* $(x_0, y_0) \in \widetilde{G}$ *называется точкой единственности в следующих двух случаях:* 1) *задачи Коши уравнения* (1.1) *с начальными данными* x_0, y_0 *не имеет решений,* 2) *для любых двух решений* $y = \varphi_1(x)$ *и* $y = \varphi_2(x)$ *этой задачи Коши, определенных на некотором* $\langle a, b\, \rangle$, *найдется интервал* $(\alpha, \beta) \ni x_0$ *такой, что*

$$\forall\, x \in (\alpha, \beta) \cap \langle a, b\, \rangle : \quad \varphi_1(x) = \varphi_2(x).$$

Очевидно, что случай 1), не может возникнуть, если $(x_0, y_0) \in G$.

Перейдем теперь к определению неединственности и различным определениям единственности решения задачи Коши.

Df. *Решение задачи Коши* $y = \varphi(x)$ *уравнения* (1.1), *поставленной в точке* $(x_0, y_0) \in \widetilde{G}$, *называется неединственным, если* (x_0, y_0) *— точка неединственности, и называется единственным в точке* (x_0, y_0), *если* (x_0, y_0) *— точка единственности.*

В этом определении добавка "в точке (x_0, y_0)" не случайна, поскольку определение точки единственности не дает ответа на вопрос о том, насколько близка к x_0 абсцисса x_1 ближайшей к (x_0, y_0) точки неединственности $(x_1, \varphi(x_1))$, конечно, если таковая существует.

В самом деле, выделяя какое-либо конкретное решение задачи Коши с н. д. x_0, y_0, заключаем, что по определению другие решения этой задачи Коши совпадают с выделенным на своих промежутках, длина которых может стремиться к нулю.

Поэтому значительно более информативным выглядит другое определение единственности решения задачи Коши, которое сначала будет дано только для внутренних точек множества $\widetilde{G}$.

Df. *Решение внутренней задачи Коши уравнения* (1.1), *поставленной в точке* $(x_0, y_0) \in G$, *называется локально единственным, если существует интервал* $(\alpha, \beta) \ni x_0$ *такой, что все решения этой задачи продолжимы на* (α, β) *и для любых двух ее решений* $y = \varphi_1(x)$ *и* $y = \varphi_2(x)$, *при необходимости произвольным образом продолженных на* (α, β), *имеем:* $\forall\, x \in (\alpha, \beta): \quad \varphi_1(x) = \varphi_2(x)$.

Покажем, что для внутренней задачи Коши понятия единственности в точке и локальной единственности эквивалентны,т. е. из единственности в точке вытекает локальная единственность.

По лемме о продолжимости решений на отрезок Пеано для любой точки $(x_0, y_0) \in G$ и для любого $\overline{P}_h(x_0, y_0)$ любое решение задачи Коши уравнения (1.1) с н. д. x_0, y_0 продолжимо на $[x_0 - h, x_0 + h]$. Поэтому, не уменьшая общности, будем считать, что все решения поставленной задачи Коши определены на выбранном $\overline{P}_h(x_0, y_0)$.

Лемма (о нижнем и верхнем решении задачи Коши). *Пусть* $(x_0, y_0) \in G$, $\overline{P}_h(x_0, y_0)$ *— какой-либо отрезок Пеано и* $\{\chi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *— произвольная последовательность решений задачи Коши уравнения (1.1) с н. д.* x_0, y_0, *определенных на* $[x_0 - h, x_0 + h]$. *Тогда функции* $y = \chi^d(x)$ $(d - down)$ *и* $y = \chi^u(x)$ $(u - up)$, *где*

$$\chi^d = \min\{\chi_1(x), \ldots, \chi_k(x), \ldots\}, \quad \chi^u = \max\{\chi_1(x), \ldots, \chi_k(x), \ldots\},$$

также являются решениями поставленной задачи на $\overline{P}_h(x_0, y_0)$.

Доказательство леммы приведено в дополнении 1_4. В нем используются конструкции из доказательства теоремы Пеано.

Теорема (о локальной единственности решения внутренней задачи Коши). *Пусть* $(x_0, y_0) \in G$ *— это точка единственности, тогда решение задачи Коши уравнения (1.1) с н. д.* x_0, y_0 *является локально единственным.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. <u>От противного</u>. Построим какой-либо отрезок Пеано $\overline{P}_h(x_0, y_0)$ и допустим, что для любого интервала (α, β) такого, что $x_0 \in (\alpha, \beta) \subset [x_0 - h, x_0 + h]$, существуют решения задачи Коши $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$, не совпадающие на (α, β).
Тогда для всякого $k = 1, 2, \ldots$ найдутся решения $y = \varphi_k(x)$ и $y = \psi_k(x)$ задачи Коши, определенные на отрезке Пеано, такие, что

$$\exists\, x_k \in (x_0 - h/k, x_0 + h/k) : \quad \varphi_k(x_k) < \psi_k(x_k).$$

Для любого $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ положим

$$\varphi^d = \min\{\varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x), \ldots\}, \quad \psi^u = \max\{\psi_1(x), \ldots, \psi_k(x), \ldots\},$$

тогда по лемме функции $y = \varphi^d(x)$ и $y = \psi^u(x)$ являются решениями поставленной задачи Коши.
В результате $x_k \to x_0$ при $k \to +\infty$ и справедливы неравенства

$$\forall\, k = 1, 2, \ldots : \quad \varphi^d(x_k) \le \varphi_k(x_k) < \psi_k(x_k) \le \psi^u(x_k),$$

означающие, что точка (x_0, y_0) по определению является точкой неединственности. !! $\square$

Замечание 13. *Теорема о локальной единственности решения задачи Коши может быть доказана и другим способом.*
Для этого надо использовать теорему 2.1 из главы III, § 2 [Ха], в которой установлено существование так называемых минимального $y = \underline{\chi}(x)$ *и максимального* $y = \overline{\chi}(x)$ *решений поставленной задачи Коши на отрезке Пеано, обладающих тем свойством, что для любого другого решения* $y = \chi(x)$ *той же задачи справедливы неравенства*

$$\forall\, x \in [x_0 - h, x_0 + h] : \quad \underline{\chi}(x) \leq \chi(x) \leq \overline{\chi}(x).$$

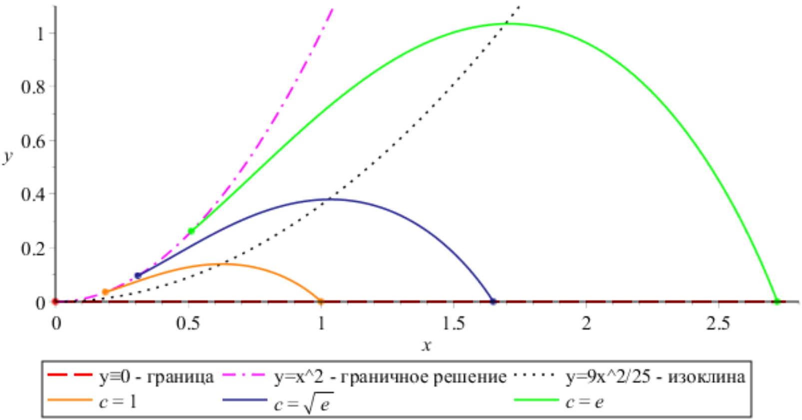
В результате из определения единственности решения задачи Коши в точке (x_0, y_0) *вытекает существование интервала* $(\alpha, \beta) \ni x_0$, *на котором* $\underline{\chi}(x) \equiv \overline{\chi}(x)$, *а значит, и остальные решения задачи Коши должны совпадать друг с другом на* (α, β).

Пусть теперь точка $(x_0, y_0) \in \widehat{G}$, т. е. будем ставить граничную задачи Коши с н. д. x_0, y_0 и предполагать, что решение этой задачи Коши существует и единственно в точке (x_0, y_0).
В этом случае приведенное выше определение локальной единственности не годится, так как решение может быть определено, например, на промежутке $[x_0, b)$, быть непродолжимым влево, но оказаться локально единственным справа от x_0. Более того, из единственности решения граничной задачи Коши в точке локальная единственность может не вытекать даже с одной стороны от x_0.

Пример 4. *Рассмотрим следующее уравнение вида (1.1)*

$$y' = \sqrt{y} - 2\sqrt{x^2 - y} + x, \tag{1.7}$$

в котором $\widetilde{G} = \{(x, y)\colon\ x \geq 0,\ 0 \leq y \leq x^2\}$, $\partial G = \widehat{G} = \gamma_1 \cup \gamma_2$, *где* $\gamma_1 = \{x \geq 0,\ y = x^2\}$, $\gamma_2 = \{x > 0,\ y = 0\}$, *и на границе* $\partial f(x, y)/\partial y$ *не существует.*
Подстановкой в уравнение легко проверить, что функция $y = x^2$, $x \geq 0$ *является граничным решением.*



1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
y
0
0.5
1
1.5
2
2.5
x
y≡0 - граница
y=x^2 - граничное решение
y=9x^2/25 - изоклина
$c = 1$
$c = \sqrt{e}$
$c = e$

Подробное решение уравнения (1.8^a) *с "портретами" представляющих интерес интегральных кривых приведено в приложении* 1_1.
Там установлено, что начало координат является точкой единственности, а любая граничная точка $(x_c, x_c^2) \quad (x_c > 0)$ *является точкой неединственности и из нее от граничного решения* $y = x^2$ *ответвляется интегральная кривая, с ростом* x *приходящая на нижнюю границу в точку* $(c, 0)$, *являющуюся точкой единственности.*
Таким образом, задача Коши с начальными данными $0, 0$ *не имеет промежутка, на котором все ее решения совпадают.*

В дополнении 1_5 приведено определение локальной единственности граничной задачи Коши, а также сформулирована и доказана теорема о локальной единственности решения граничной задачи Коши. В теореме используются обозначения и результаты из § 3.

8^0. Достаточные условия единственности.

Перейдем, наконец, к описанию единственности (глобальной) решения задачи Коши и выяснению, когда она имеет место.

Df. *Решение задачи Коши* $y = \varphi(x)$, *поставленное в точке* $(x_0, y_0) \in \widetilde{G}$ *и определенное на промежутке* $\langle a, b\rangle \ni x_0$, *единственно, если для любого* $x \in \langle a, b\rangle$ *точка* $(x, \varphi(x))$ *является точкой единственности.*

А как узнать, что график некого продолжения, скажем, локально единственного решения не попадет в точку неединственности?

Для ответа на этот вопрос надо научиться конструктивно выделять множества, состоящие из точек единственности, так как ни множество $\widehat{G}$, ни область G могут этим свойством не обладать, что уже продемонстрировали многочисленные примеры.

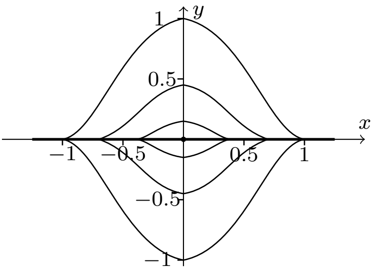
Df. *Область* $G^o \subset G$ *называется областью единственности для уравнения (1.1), если каждая точка* G^o *является точкой единственности. Множество* $\widetilde{G}^o = G^o \cup \widehat{G}^o$, *где* $\widehat{G}^o$ *— это множество граничных точек единственности области единственности* G^o, *называется множеством единственности.*

Из определения следует, что решение задачи Коши единственно, если его график принадлежит множеству единственности. Поэтому лежащие в множестве единственности интегральные кривые не могут касаться друг друга.
Ясно, что правая часть уравнения (1.1) должна в $G^o\,(\widetilde{G}^o)$ помимо непрерывности удовлетворять дополнительному условию. Чем более слабым, но достаточным для единственности оно будет, тем более сильной получится теорема о единственности.
Сформулируем одну из самых простых теорем о единственности, которую, однако, удобно применять на практике.

Теорема (о множестве единственности, слабая). *Пусть в уравнении* (1.1) *функция* $f(x,y)$ *определена и непрерывна на множестве* $\widetilde{G}$, *а частная производная* $\partial f(x,y)/\partial y$ *определенна и непрерывна на множестве* $\widetilde{G}^o = G^o \cup \widehat{G}^o$, *в котором область* $G^o \subset G$, *множество* $\widehat{G}^o$ *состоит из граничных точек* G^o, *причем для любой точки* $(x_0,y_0) \in \widehat{G}^o$ *существует замкнутая* c*-окрестность* $\overline{V}_c(x_0,y_0)$ *такая, что множество* $\widetilde{G}^o \cap \overline{V}_c(x_0,y_0)$ *выпукло по* y. *Тогда* $\widetilde{G}^o$ *является множеством единственности для уравнения* (1.1).

Выпуклость по y означает, что множеству принадлежит отрезок, соединяющий любые две его точки с одинаковой абсциссой.
Эта теорема будет доказана в § 4, где также будут доказаны более сильные теоремы о единственности. А необходимость дополнительного условия, касающегося граничных точек $\widetilde{G}^o$, будет установлена в следующем пункте в ходе решения уравнения (1.9^a) из примера 6 (см. также приложение 1_2).
Вернемся к примеру 3. В нем $\partial f(x,y)/\partial y = 2y^{-1/3}$, а значит, при $y \equiv 0$ частная производная по y отсутствует. Но именно в любой точке оси абсцисс, как было установлено, единственность и нарушается. Поэтому уравнение $y' = 3y^{2/3}$ имеет две области единственности — это верхняя и нижняя полуплоскости.
Аналогичным образом в примере 2 $\partial f(x,y)/\partial y = 3x^{1/2}y^{-1/2}/2$, и множество единственности в нем $\widetilde{G}^o = \{(x,y)\colon\ x \geq 0,\ y > 0\}$, т. е. граничное решение $y(x) \equiv 0$, $x \in [0, +\infty)$, на котором $\partial f(x,y)/\partial y$ не определена, в него не входит.
Однако, условие о существовании и непрерывности $\partial f(x,y)/\partial y$ в формулировке слабой теоремы о множестве единственности не является необходимым, т. е. отсутствие непрерывной частной производной на множестве $\widetilde{G}\backslash\widetilde{G}^o$ не означает, что оно не содержит внутренних или граничных точек единственности.

Пример 5. *В уравнении* $2y' = -3xy^{1/3}$ *правая часть* f *определена и непрерывна в* $\mathbb{R}^2$, *а* $\partial f(x,y)/\partial y$ *— в областях* $G^o_+ = \{(x,y)\colon\, x \in \mathbb{R}^1,\ y > 0\}$ *и* $G^o_- = \{(x,y)\colon\, x \in \mathbb{R}^1,\ y < 0\}$, *являющимися, тем самым, областями единственности.*



Прямая $y(x) \equiv 0$, *на которой частная производная не определена, является полным внутренним решением рассматриваемого уравнения с разделяющимися переменными. Это уравнение легко решить и убедиться, что другие полные внутренние решения имеют вид* $y = \varphi(x, C)$, *где* $\varphi = \{0$ *при* $x \le -C^{1/2}$, $\pm(C - x^2)^{3/2}$ *при* $x \in (-C^{1/2}, C^{1/2})$, 0 *при* $x \ge C^{1/2}\}$ *для* $\forall\, C > 0$. *В результате оказалось, что* $(0,0)$ *— это точка единственности, а все остальные точки графика тривиального решения — это, как и следовало ожидать, точки неединственности.*

Пример 6. *Рассмотрим следующее уравнение вида (1.1)*

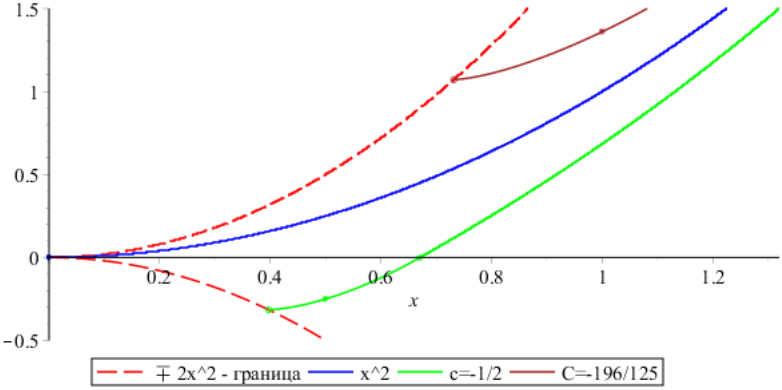
$$y' = 2\sqrt{2x^2 - |y|} + 2ax \quad (a = 0, 2, 9/4), \qquad (1.8^a)$$

в котором $\widetilde{G} = \{(x,y)\colon\ x \geq 0,\ |y| \leq 2x^2\}$, $\widehat{G} = \{x \geq 0,\ |y| = 2x^2\}$ *и на границе, задаваемой функциями* $y = \pm 2x^2$, $\partial f(x,y)/\partial y$ *не существует. Подстановкой легко проверить, что граничное решение имеется только при* $a = 2$ *— это функция* $y = 2x^2$, $x \in [0, +\infty)$.

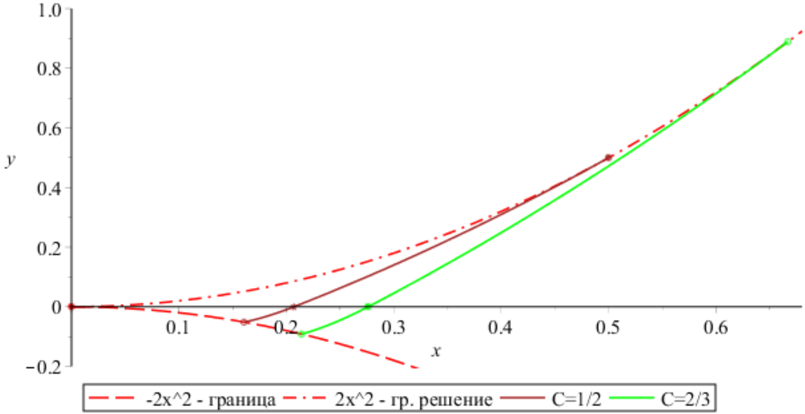
Кроме того, ось абсцисс, является единственной прямой, проходящей через начало координат, которая имеет непустое пересечение с областью G *в сколь угодно малой окрестности точки* $(0,0)$.

Решение уравнения (1.8^a) *приведено в приложении* 1_2.

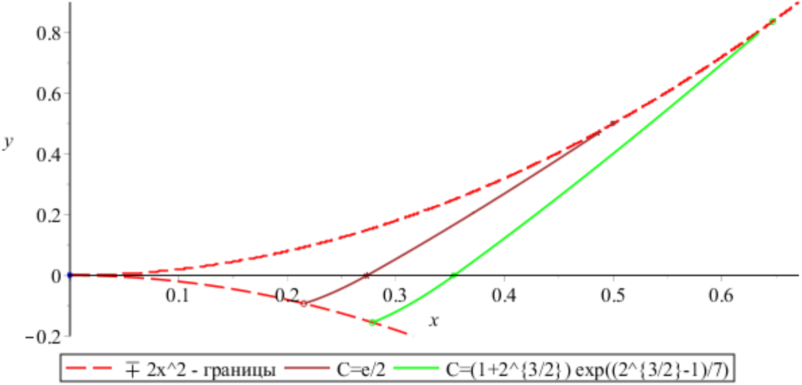
В приложении $1\frac{1}{2}$ установлено, что при $a = 0$ граничная задача Коши с н. д. $0, 0$ имеет единственное решение $y = x^2$ $(x \geq 0)$ и это решение — смешанное. Другие граничные точки также являются точками единственности не смотря на отсутствие в них $\partial f(x, y)/\partial y$, а именно: из каждой граничной точки "выходит" единственное смешанное решение, продолжимое вправо до $+\infty$.



В приложении 1_2^2 установлено, что при $a = 2$ граничная задача Коши с н. д. $0, 0$ имеет единственное решение $y = 2x^2$ $(x \geq 0)$ и это решение — граничное. При этом любая его точка, кроме $(0, 0)$, является точкой неединственности: в ней граничного решения касается смешанное решение, "выходящее" из соответствующей точки нижней границы $y = -2x^2$, состоящей, не смотря на отсутствие на ней $\partial f(x, y)/\partial y$, из точек единственности.



В приложении 1_2^3 установлено, что при $a = 9/4$ граничная задача Коши с н. д. $0, 0$ не имеет решений. При этом, как и при $a = 0$, все граничные точки являются точками единственности, только в этом случае смешанные решения "соединяют" любую точку нижней границы с соответствующей точкой верхней границы, имея, тем самым, ограниченные $I_{\max}$. Исключение составляет точка $(0, 0)$, в которой решение задачи Коши отсутствует, но по определению и она является точкой единственности.



9^0. Частные и специальные решения.

Следующее определение позволит должным образом классифицировать отдельные решения уравнения (1.1), выделяя те из них, чьи графики проходят только через точки единственности множества $\widetilde{G}$ или только через точки неединственности, позволяя, тем самым, без необходимости не рассматривать, описанные в примерах 2 и 3 решения, задаваемые "составными" функциями.

Df. *Решение уравнения* (1.1), *заданное на промежутке* $\langle a, b\,\rangle$, *будем называть частным (специальным), если его график состоит только из точек единственности (неединственности) и это решение является полным в том смысле, что не может быть продолжено ни вправо, ни влево так, чтобы его график, по-прежнему, состоял только из точек единственности (неединственности). В этом случае промежуток* $\langle a, b\rangle$ *будем называть максимальным интервалом существования частного (специального) решения.*

В замечании 11 отмечалось, что задача Коши по своей постановке является локальной, т. е. требуемое решение можно искать в сколь угодно малой окрестности точки, задаваемой начальными данными. А наибольший интерес представляет знание полного решения. Но даже на малом интервале может нарушаться единственность, что приводит к наличию различных полных решений одной и той же задачи Коши, определенных на своих I_{max}. Поэтому при решении конкретных уравнений введенные понятия частного и специального решений дают возможность при желании уточнить постановку задачи Коши и избежать нахождения излишнего числа ее решений.

Разумеется, и частное, и специальное решение задачи Коши, может оказаться как внутренним, так граничным или смешанным.

В примере 3 для любой константы C функция $y = (x - C)^3$ задает два частных решения, одно на интервале $(-\infty, C)$, другое на интервале $(C, +\infty)$. Так, частным решением задачи Коши с н. д. $-1, -1$ является функция $y = x^3$, определенная на интервале $(-\infty, 0)$, поскольку $(0, 0)$ — точка неединственности. А решение $y(x) \equiv 0$ на $\mathbb{R}^1$ — специальное. При этом все эти решения являются внутренними.

Специальное граничное решение, менее тривиальное, чем в примере 2, продемонстрировано в уравнении (1.8^a) с $a = 2$, пример 6.

В то же время любое полное решение уравнения из примера 1, включая $y(x) \equiv 0$, является частным, так как правая часть уравнения $y' = y^2$ удовлетворяет в $\mathbb{R}^2$ слабой теореме о единственности.

Познакомимся теперь с уравнениями, имеющими различные типы частных и специальных решений задачи Коши.

Пример 7. *Рассмотрим следующее уравнение (1.1) при* $a = 1, 3$

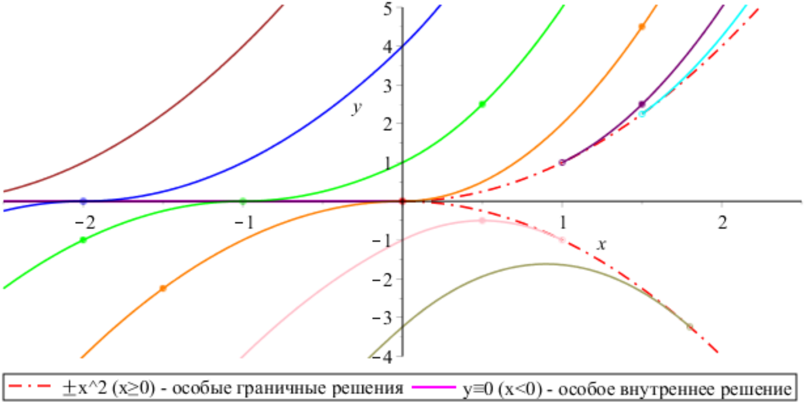
$$y' = 2\{|y|^{a/2} \text{ при } x \le 0,\ (|y| - x^2)^{a/2} + x \operatorname{sign} y \text{ при } x \ge 0\}. \quad (1.9^a)$$

Его правая часть определена и непрерывна на связном множестве $\widetilde{G} = \{(x, y)\colon\ |y| - x^2 \ge 0$ *при* $x \ge 0\}$, *а* $\widehat{G} = \{y = \pm x^2$ *при* $x \ge 0\}$. *Подставляя в уравнение функции* $y = \pm x^2$, *убеждаемся, что они являются полными граничными решениями на* $[0, +\infty)$.

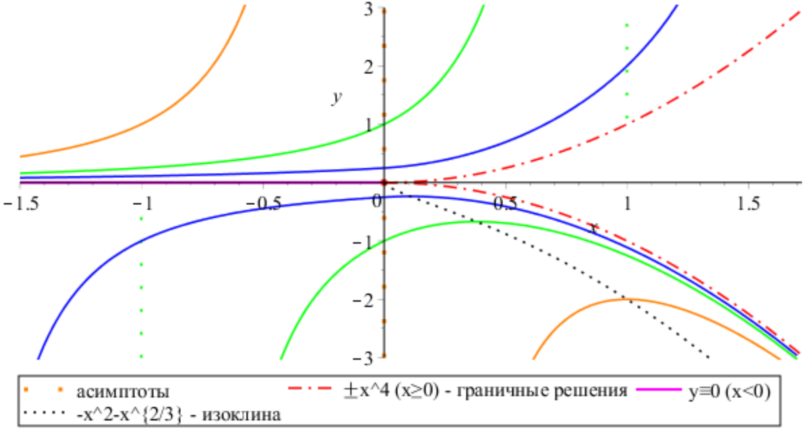
Решение уравнений (1.9^1) *и* (1.9^3) *приведено в приложении* 1_3.

В уравнении (1.9^1) задача Коши с н. д. $-1, 0$ имеет специальное внутреннее решение $y(x) \equiv 0$ при $x < 0$ и два специальных смешанных решения $y_+(x) = \{0$ при $x < 0,\ x^2$ при $x \ge 0\}$ и $y_-(x) = \{0$ при $x < 0,\ -x^2$ при $x \ge 0\}$, а граничная задача Коши с н. д. $1, 1$ имеет специальное граничное решение $y = x^2$ при $x \ge 0$ и первое из специальных смешанных решений.

При желании можно выписать все смешанные решения первой из задач Коши, но это вряд ли представляет реальный интерес.


y
x
5
4
3
2
1
−2
−1
1
2
−1
−2
−3
−4
±x^2 (x≥0) - особые граничные решения
y≡0 (x<0) - особое внутреннее решение

В уравнении (1.9^3) во всех точках множества $\widetilde{G}$ существует и непрерывна частная производная правой части по y, однако, множество единственности $\widetilde{G}^o = \widetilde{G} \backslash \{(0,0)\}$, поскольку решение задачи Коши с н. д. $0, 0$ имеет два в данном случае граничных решения: $y = x^2$ и $y = -x^2$ на $[0, +\infty)$.



Дело в том, что в начале координат не выполняется последнее из условий слабой теоремы о единственности, а именно: множество $\widetilde{G} \cup \overline{V}_c(0,0)$ для любой константы $c > 0$ не является выпуклым по y. Поэтому пример 7 подчеркивает необходимость такого условия.

В результате задача Коши с н. д. $-1, 0$ имеет частное решение $y(x) \equiv 0$ $(x < 0)$, являющееся внутренним, а граничная задача Коши с н. д. $1, 1$ имеет частное граничное решение $y = x^2$ $(x > 0)$.

В заключение этого пункта отметим, что задача Коши может не иметь ни частного, ни специального решения.

Так происходит в уравнении (1.9^3) с граничной задачей Коши с н. д. $0, 0$, поскольку $(0, 0)$ — единственная точка неединственности.

Также происходит с внутренней задачей Коши, имеющей н. д. $0, 0$, в примере 5, но там наоборот: $(0, 0)$ — единственная точка единственности, принадлежащая графику тривиального решения $y(x) \equiv 0$ $(x \in \mathbb{R}^1)$, а значит, $y(x) \equiv 0$ при $x < 0$ и при $x > 0$ — это специальные решения. А все частные решения имеют вид $\varphi(x) = \pm(C - x^2)^{3/2}$, $x \in (-C^{1/2}, C^{1/2})$.

10^0. Понятие общего решения.

Зададимся теперь вопросом о том, как в какой-либо области записать в виде формулы сразу все решения уравнения (1.1)? Отметим сразу, что сделать это удастся, вообще говоря, только локально, т. е. в окрестности, возможно малой, произвольной точки из области единственности G^o.

Для любой точки $(x_0, y_0) \in G^o$ через $y = y(x, x_0, y_0)$ обозначим решение задачи Коши уравнения (1.1) с начальными данными x_0, y_0, заданное на множестве
$\{(x, x_0, y_0)\colon (x_0, y_0) \in G^o,\ x \in I(x_0, y_0)\}$. Тогда по определению $y(x_0, x_0, y_0) = y_0$.

Получается, что решение задачи Коши является функцией трех аргументов, но один из них — лишний, поскольку переменные x_0, y_0 не произвольны, а являются точками графика выбранного решения, т. е. лежат на его интегральной кривой.

Df. *Общим решением уравнения* (1.1) *в некоторой области* A, *принадлежащей области единственности* G^o, *называется функция* $y=\varphi(x,C)$, *определенная и непрерывная по совокупности аргументов на множестве* $H_A=\{(x,C)\colon\, x\in\langle a(C),b(C)\,\rangle,\ C\in\langle C_1,C_2\,\rangle\}$, *если выполняются следующие два условия:*

1) *для любой точки* $(x_0,y_0)\in A$ *уравнение* $y_0=\varphi(x_0,C)$ *имеет единственное решение* $C=C_0=U(x_0,y_0)$;

2) *функция* $y=\varphi(x,C_0)$ *— это решение задачи Коши уравнения* (1.1) *с н. д.* x_0,y_0, *определенное на промежутке* $\langle a(C_0),b(C_0)\,\rangle$.

Таким образом, непрерывная в H функция $\varphi(x,C)$ является однопараметрическим семейством решений. Она задает в некой области $A\subset G^o$ любое решение уравнения (1.1).

Теорема (о существовании общего решения). *Для любой точки* (x_0, y_0) *из области* G^o *уравнения* (1.1) *найдется область* A: $(x_0, y_0) \in A \subset G^o$, *в которой существует общее решение.*

Доказательство теоремы приведено ниже в § 5, где также указано условие, достаточное для дифференцируемости $\varphi(x, C)$ по C.

Можно сказать, что первая задача, стоящая перед теорией обыкновенных дифференциальных уравнений, заключается в выделении тех уравнений первого порядка, для которых общее решение может быть выписано в явном виде при помощи элементарных функций. При этом в нем допускается наличие неберущихся интегралов, тогда говорят, что решение найдено в квадратурах.

11^0. Поле направлений и метод изоклин.
Возьмем произвольную точку (x_0, y_0) из области определения $\widetilde{G}$ уравнения (1.1). В этой точке известен тангенс угла наклона $\alpha(x_0)$ касательной к интегральной кривой: $\operatorname{tg}\alpha(x_0) = y'(x_0) = f(x_0, y_0)$.

Df. *Отрезок произвольной длины с центром в точке* $(x_0, y_0) \in \widetilde{G}$ *и тангенсом угла наклона, равным* $f(x_0, y_0)$, *будем называть отрезком поля направлений в точке* (x_0, y_0). *А само множество* $\widetilde{G}$, *заполненное отрезками поля направлений, называется полем направлений, индуцированным уравнением (1.1).*

Из последнего определения следует, что задание уравнения (1.1) равносильно заданию непрерывного поля направлений.

Именно поэтому кривая, лежащая в $\widetilde{G}$, является интегральной тогда и только тогда, когда она гладкая и в каждой точке направление касательной к ней совпадает с направлением поля в этой точке.

Геометрически, решить дифференциальное уравнение (1.1) означает построить на $\widetilde{G}$ все его интегральные кривые.

Практический интерес представляет задача, заключающаяся в том, чтобы, не решая уравнения (1.1), которое может в явном виде и не интегрироваться, построить приближенно все его интегральные кривые, а точнее, все наиболее характерные из них. Осуществлять приближенное построение интегральных кривых удобно при помощи метода изоклин, идея которого изложена в дополнении 1_6.

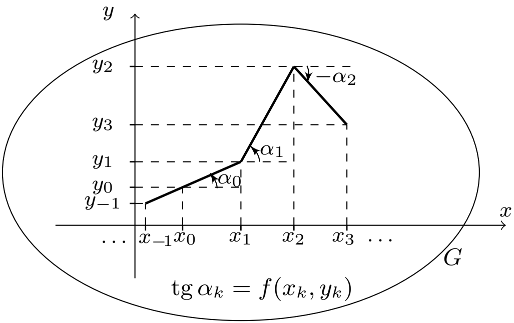
§ 2. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ВНУТРЕННЕЙ ЗАДАЧИ КОШИ

1^0. Ломаные Эйлера.

В этой параграфе будет доказана сформулированная в § 1, п. 5^0 теорема Пеано о существовании решения внутренней задачи Коши уравнения (1.1) $y' = f(x, y)$, т. е. будет рассматриваться задача Коши, поставленная в любой внутренней точке $\widetilde{G}$, и строится решение, график которого лежит в области G.

Решение уравнения будет строиться при помощи так называемого метода ломаных Эйлера, который и будет изложен в этом пункте.

Начнем с того, что выберем в G произвольную точку (x_0, y_0) и построим в ней отрезок поля направлений столь малой длины, что он целиком лежит в G, начинаясь, скажем, в точке (x_{-1}, y_{-1}) и заканчиваясь в точке (x_1, y_1).



Проведем вправо через точку (x_1, y_1) и влево через точку (x_{-1}, y_{-1}) полуотрезки поля, лежащие в G и заканчивающиеся в точках (x_2, y_2) и (x_{-2}, y_{-2}) соответственно, и так далее. Этот процесс можно продолжать любое конечное число шагов N, поскольку G — открытое множество.

Полученная в результате непрерывная кусочно линейная кривая $y = \psi(x)$ называется ломаной Эйлера.
Ломаная Эйлера лежит в области G, проходит через точку (x_0, y_0) и абсциссы ее угловых точек равны x_j $(j = \overline{-N, N})$.

Df. *Рангом дробления ломаной Эйлера назовем число, равное*

$$\max_{j=\overline{1-N,N}} \{x_j - x_{j-1}\}.$$

Формула, рекуррентно задающая ломаную Эйлера $y = \psi(x)$, имеет вид: $\psi(x_0) = y_0$ и далее последовательно по $j = 0, 1, \ldots, N-1$ для любого $x \in (x_j, x_{j+1}]$ или по $j = 0, -1, \ldots, 1-N$ для любого $x \in [x_{j-1}, x_j)$

$$\psi(x) = \psi(x_j) + f(x_j, \psi(x_j))(x - x_j). \tag{1.10}$$

В частности, при $j = 0$ отрезок ломаной Эйлера определен для любого $x \in [x_{-1}, x_1]$ и, делясь на два полуотрезка, проходит через точку (x_0, y_0) под углом, тангенс которого равен $f(x_0, y_0)$.

Из формулы (1.10) вытекает, что для всякого $j = \overline{0, N-1}$ при $x \in (x_j, x_{j+1})$ производная $\psi'(x) = f(x_j, \psi(x_j))$, а в точке x_{j+1} она, вообще говоря, не определена, как и в точках $x_{j-1} \quad (j \leq 0)$.

Доопределим $\psi'(x)$ в возможных точках разрыва как левостороннюю производную при $x > x_0$ и как правостороннюю производную при $x < x_0$, т. е. положим

$$\psi'(x_j) = \psi'_{\mp}(x_j) = \lim_{x \to x_j \mp 0} \frac{\psi(x) - \psi(x_j)}{x - x_j} \quad (j = \pm 1, \ldots, \pm N).$$

А при $j = 0$ существует полная производная $\psi'(x_0) = f(x_0, y_0)$. Таким образом, для любого $x \in (x_j, x_{j+1}]$ $(j = 0, 1, \ldots, N-1)$ или для любого $x \in [x_{j-1}, x_j)$ $(j = 0, -1, \ldots, 1-N)$, дифференцируя равенство (1.10) по x, получаем

$$\psi'(x) = f(x_j, \psi(x_j)) \qquad (j \in \{1-N, \ldots, N-1\}). \tag{1.12}$$

2^0. Лемма об ε-решении.

Покажем, что на некотором промежутке всегда можно построить функцию, график которой проходит через заданную точку области G, такую, что при подстановке ее в уравнение (1.1) разность между левой и правой частями уравнения окажется по модулю меньше любого сколь угодно малого наперед заданного положительного числа.

Df. *Для всякого $\varepsilon > 0$ непрерывная и кусочно гладкая на отрезке $[a, b]$ функция $y = \psi(x)$ называется ε-решением уравнения (1.1) на $[a, b]$, если для любого $x \in [a, b]$ точка $(x, \psi(x)) \in G$ и*

$$|\psi'(x) - f(x, \psi(x))| \leq \varepsilon. \tag{1.13}$$

Лемма (о ломаных Эйлера в роли ε-решения) *Для любой точки $(x_0, y_0) \in G$ и для любого отрезка Пеано $\overline{P}_h(x_0, y_0)$ имеем:*

1) *для $\forall\, \delta > 0$ на отрезке Пеано можно построить ломаную Эйлера $y = \psi(x)$ с рангом дробления, не превосходящим δ, график которой лежит в прямоугольнике $\overline{R}$ из § 1, п. 5^0;*

2) *для $\forall\, \varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что всякая ломаная Эйлера $y = \psi(x)$ с рангом дробления, не превосходящим δ, является ε-решением уравнения (1.1) на $\overline{P}_h(x_0, y_0)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Аналогично тому, как это было сделано в § 1, п. 5^0 для произвольной точки (x_0, y_0) из области G построим прямоугольник $\overline{R} \subset G$ с центром в этой точке и два лежащих в нем равнобедренных треугольника $\overline{T}^-$ и $\overline{T}^+$ с общей вершиной в точке (x_0, y_0) и основаниями, параллельными оси ординат. При этом будут зафиксированы константы a, b, M, h.
Выберем $\delta_* < \delta$ так, чтобы число $h/\delta_* = N \in \mathbb{N}$, и положим $x_{j+1} = x_j + \delta_* \quad (j = \overline{0, N-1})$, тогда $x_N = x_0 + h$.
Для всякого $x > x_0$ будем последовательно строить отрезки ломаной Эйлера $y = \psi(x)$ с узлами в точках x_j.
Для $\forall\, j = 0, \ldots, N-1$ это сделать возможно, так как модуль тангенса угла наклона каждого отрезка равен $|f(x_j, \psi(x_j))|$, а тангенсы углов наклона боковых сторон треугольника $\overline{T}^+$ по построению равны $\pm M$, где $M = \max_{\overline{R}} |f(x, y)|$.
Поэтому любой отрезок ломаной Эйлера, начиная с первого, не может пересечь боковую стенку $\overline{T}^+$, а значит, содержится в нем.
Тем самым, для всех $x \in [x_0, x_0 + h]$ точка $(x, \psi(x)) \in \overline{T}^+$, и требуемая ломаная Эйлера построена на $[x_0, x_0 + h]$.
Для левого полуотрезка Пеано все аналогично.

2) Зафиксируем теперь произвольное положительное число ε. Функция $f(x,y)$ непрерывна на компакте $\overline{R}$, следовательно, по теореме Кантора f равномерно непрерывна на нем. По определению это значит, что существует такое $\delta_1 > 0$, что для любых двух точек (x',y') и (x'',y'') из прямоугольника $\overline{R}$ таких, что $|x'-x''| \le \delta_1$ и $|y'-y''| \le \delta_1$, выполняется неравенство $|f(x',y') - f(x'',y'')| \le \varepsilon$.
Положим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_1/M\}$ и покажем, что для любой ломаной Эйлера $y = \psi(x)$ с рангом дробления меньшим δ на отрезке Пеано $\overline{P}_h(x_0,y_0) = [x_0-h, x_0+h]$ справедливо неравенство (1.13).
Возьмем любую точку x из отрезка Пеано, например, справа от x_0. Найдется индекс $j \in \{0,\ldots,N-1\}$ такой, что $x \in (x_j, x_{j+1}]$, т. е. x_j — ближайшая к x левая угловая точка ломаной Эйлера. Согласно (1.12) $\psi'(x) - f(x,\psi(x)) = f(x_j,\psi(x_j)) - f(x,\psi(x))$.
Оценим близость аргументов функции f.
По выбору δ и j имеем: $|x-x_j| \le \delta \le \delta_1$, и теперь согласно (1.10) $|\psi(x) - \psi(x_j)| = |f(x_j,\psi(x_j))||x-x_j| \le M\delta \le \delta_1$. Поэтому из определения равномерной непрерывности функции f вытекает, что $|f(x_j,\psi(x_j)) - f(x,\psi(x))| \le \varepsilon$, а значит, неравенство (1.13) из определения ε-решения верно для любого $x \in \overline{P}_h(x_0,y_0)$. $\Box$

3^0. Лемма Асколи - Арцела.

Вспомним для начала несколько определений из математического анализа, касающихся функциональных последовательностей, поскольку нам предстоит иметь дело с последовательностью ломаных Эйлера, являющихся ε_n -решениями, и ε_n будет стремиться к нулю.

Пусть последовательность функций $\{h_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ задана на $[a, b]$. Каждая из функций последовательности $\{h_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена на $[a, b]$, если $\forall n \geq 1 \;\; \exists K_n > 0: \;\; \forall\, x \in [a, b] \;\Rightarrow\; |h_n(x)| \leq K_n$.

Df. *Последовательность* $\{h_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *равномерно ограничена на* $[a, b]$, *если* $\exists K > 0: \;\; \forall n \geq 1, \;\; \forall\, x \in [a, b] \;\Rightarrow\; |h_n(x)| \leq K$.

Каждая из функций последовательности $\{h_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ непрерывна на $[a, b]$, а значит, согласно теореме Кантора равномерно непрерывна на $[a, b]$, если $\forall\, \varepsilon > 0, \;\; \forall\, n \geq 1 \;\;\; \exists\, \delta_n > 0: \;\; \forall\, x', x'' \in [a, b]: \;\; |x' - x''| \leq \delta_n \;\Rightarrow\; |h_n(x') - h_n(x'')| \leq \varepsilon$.

Df. *Последовательность* $\{h_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *равностепенно непрерывна на* $[a, b]$, *если* $\forall\, \varepsilon > 0 \;\;\; \exists\, \delta > 0: \;\; \forall\, n \geq 1, \;\; \forall\, x', x'' \in [a, b]:$ $|x' - x''| \leq \delta \;\Rightarrow\; |h_n(x') - h_n(x'')| \leq \varepsilon$.

Последовательность функций $\{h_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ поточечно сходится к некоторой функции $h(x)$ на отрезке $[a,b]$, если
$\forall\,\varepsilon > 0,\ \forall\,x \in [a,b]\ \ \exists\,N_x > 0:\ \ \forall\,i,j \geq N_x\ \Rightarrow\ |h_i(x) - h_j(x)| \leq \varepsilon.$

Df. *Последовательность* $\{h_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *равномерно сходится к некоторой функции* $h(x)$ *на отрезке* $[a,b]$, *если*
$\forall\,\varepsilon > 0\ \ \ \exists\,N > 0:\ \ \forall\,i,j \geq N,\ \ \forall\,x \in [a,b]\ \Rightarrow\ |h_i(x) - h_j(x)| \leq \varepsilon.$

Поточечная сходимость обозначается $h_n(x) \to h(x)$ при $n \to \infty$ для $\forall\,x \in [a,b]$, а равномерная — $h_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} h(x)$ при $n \to \infty$.
Таким образом, в первых двух определениях слова равномерно и равностепенно означают, что константы K и δ не зависят от выбора n, а в третьем, — что номер N не зависит от выбора x.

Лемма Асколи - Арцела (о существовании равномерно сходящейся подпоследовательности). *Из любой равномерно ограниченной и равностепенно непрерывной на отрезке* $[a, b]$ *последовательности функций* $\{h_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *можно извлечь равномерно сходящуюся на* $[a, b]$ *подпоследовательность.*

Доказательство. Хорошо известно, что рациональные числа образуют счетное всюду плотное множество на любом промежутке вещественной прямой. Поэтому всюду плотное множество рациональных чисел, расположенных на отрезке $[a, b]$, можно перенумеровать, обозначая рациональные числа $r_1, r_2, \ldots$.

В точке r_1 числовая последовательность $\{h_n(r_1)\}_{n=1}^{\infty}$ по предположению ограничена, поэтому из нее можно извлечь сходящуюся подпоследовательность, т. е. существует последовательность натуральных чисел $n^{(1)} = \{n_i^{(1)}\}_{i=1}^{\infty}$ $(n_i^{(1)} < n_{i+1}^{(1)})$, что функциональная последовательность $\{h_{n_i^{(1)}}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ сходится при $x = r_1$.

В точке r_2 числовая последовательность $\{h_{n_i^{(1)}}(r_2)\}_{i=1}^{\infty}$ также ограничена, поэтому из нее можно извлечь сходящуюся подпоследовательность, т. е. у последовательности индексов $n^{(1)}$ существует подпоследовательность $n^{(2)} = \{n_i^{(2)}\}_{i=1}^{\infty}$ $(n_i^{(2)} < n_{i+1}^{(2)})$ такая, что функциональная последовательность $\{h_{n_i^{(2)}}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ сходится в точке $x = r_2$. При этом она сходится и при $x = r_1$ как подпоследовательность сходящейся последовательности.

Разряжая аналогичным способом числовую последовательность $\{h_{n_i^{(2)}}(r_3)\}_{i=1}^{\infty}$, получаем функциональную подпоследовательность $\{h_{n_i^{(3)}}(x)\}_{i=1}^{\infty}$, сходящуюся в точках r_1, r_2, r_3. И т. д.

Введем последовательность индексов $\{n_i^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ $(n_i^{(i)} < n_{i+1}^{(i)})$, где $n_i^{(i)}$ — i-й член подпоследовательности $n^{(i)}$.

Пояснение. *Предположим, например, что для сходимости последовательности* $\{h_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *в очередной рациональной точке требуется из имеющейся на данный момент подпоследовательности удалять все члены через одного, начиная с первого. Имеем:*

$$\begin{aligned} n_1 &= \ \underline{2},\ \ 4,\ \ 6,\ \ 8, 10, 12 \dots \ ; \\ n_2 &= \ \ 4,\ \ \underline{8}, 12, 16, 20, 24 \dots \ ; \\ n_3 &= \ \ 8, 16, \underline{24}, 32, 40, 48 \dots \ ; \\ n_4 &= 16, 32, 48, \underline{64}, 80, 96 \dots \quad \textit{и т. д.} \end{aligned}$$

Выбирая теперь в i *-й строке индексов индекс с номером* i, *получаем, что* $\{h_{i_*}(x)\}_{i=1}^{\infty} = \{\, h_2(x), h_8(x), h_{24}(x), h_{64}(x), h_{160}(x), \dots \}$.

Функциональная подпоследовательность $\{h_{n_i^{(i)}}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ последовательности $\{h_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится во всех рациональных точках отрезка $[a,b]$, поскольку в любой рациональной точке r_k последовательность $\{h_{n_i^{(k)}}(x)\}_{i=1}^{\infty}$, сходится по построению, а $\{h_{n_i^{(i)}}(x)\}_{i=k}^{\infty}$ является ее подпоследовательностью.

Покажем, что $\{h_{i_*}(x)\}_{i=1}^{\infty}$, где $i_* = n_i^{(i)}$, является искомой подпоследовательностью исходной последовательности.

Зафиксируем произвольное сколь угодно малое число $\varepsilon > 0$.
По определению последовательность $\{h_{i_*}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ равностепенно непрерывна, следовательно, по выбранному ε найдется $\delta > 0:$
$\forall\, i \in \mathbb{N}, \ \ \forall\, x', x'' \in [a, b]: \ |x' - x''| \le \delta \ \Rightarrow \ |h_{i_*}(x') - h_{i_*}(x'')| \le \varepsilon/3.$
По построению последовательность функций $\{h_{i_*}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ сходится поточечно во всех рациональных точках r_k из $[a, b]$.
Поэтому по выбранному ε для любого $k \in \mathbb{N}$ найдется такое $N_{r_k} > 0$, что для любых $i_*, j_* \ge N_{r_k} \ \Rightarrow \ |h_{i_*}(r_k) - h_{j_*}(r_k)| \le \varepsilon/3.$
Разобьем отрезок $[a, b]$ на непересекающиеся промежутки, длина которых не превосходит δ. Пусть их окажется l штук.
Множество рациональных чисел всюду плотно, поэтому в каждом промежутке можно выбрать по рациональному числу: $r_1^*, \ldots, r_l^*$.
Пусть $N = \max\{N_{r_1^*}, \ldots, N_{r_l^*}\}$, где константы N_r взяты из определения поточечной сходимости последовательности $\{h_{i_*}(x)\}_{i=1}^{\infty}$.

Возьмем теперь произвольный $x \in [a, b]$. Предположим, что он попал в промежуток с номером p. Тогда для любых $i_*, j_* \geq N$ по неравенству треугольника получаем $|h_{i_*}(x) - h_{j_*}(x)| \leq$ $|h_{i_*}(x) - h_{i_*}(r_p^*)| + |h_{i_*}(r_p^*) - h_{j_*}(r_p^*)| + |h_{j_*}(r_p^*) - h_{j_*}(x)| \leq \varepsilon$, так как $|x - r_p^*| \leq \delta$ и справедлива оценка из определения равномерной сходимости.
Итак, для любого $\varepsilon > 0$ нашлось N такое, что для любых $i_*, j_* \geq N$ и $x \in [a, b]$ выполняется неравенство $|h_{i_*}(x) - h_{j_*}(x)| \leq \varepsilon$. $\square$

Замечание 14. *По теореме Стокса-Зайделя предельная функция* $h(x)$, *к которой равномерно относительно* $[a, b]$ *сходится последовательность функций* $\{h_{i_*}(x)\}_{i=1}^{\infty}$, *определена и непрерывна на* $[a, b]$.

4^0. Доказательство теоремы о существовании решения внутренней задачи Коши.

Теорема Пеано (о существовании внутреннего решения). *Пусть правая часть уравнения* (1.1) *непрерывна в области* G, *тогда для любой точки* $(x_0, y_0) \in G$ *и для любого отрезка Пеано* $\overline{P}_h(x_0, y_0)$ *существует по крайней мере одно решение задачи Коши уравнения* (1.1) *с начальными данными* x_0, y_0, *определенное на* $\overline{P}_h(x_0, y_0)$.

Доказательство. Возьмем произвольную точку (x_0, y_0) из области G и построим какой-либо отрезок Пеано $\overline{P}_h(x_0, y_0)$. Выберем произвольную последовательность положительных чисел $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда по лемме об ε-решении для всякого n можно построить ломаную Эйлера $\psi_n(x)$, проходящую через точку (x_0, y_0), определенную на $\overline{P}_h(x_0, y_0)$ и являющуюся ε_n-решением дифференциального уравнения (1.1) на отрезке $\overline{P}_h(x_0, y_0)$.

Тем самым, для любых $n \in \mathbb{N}$ и $x \in \overline{P}_h(x_0, y_0)$ точка $(x, \psi_n(x)) \in \overline{R}$ и выполняется неравенство (1.13) $|\psi_n'(x) - f(x, \psi_n(x))| < \varepsilon_n$.

Покажем, что последовательность ломаных Эйлера $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ на отрезке $\overline{P}_h(x_0, y_0)$ удовлетворяет лемме Асколи-Арцела. Последовательность $\psi_n(x)$ равномерно ограничена, так как график любой функции $y = \psi_n(x)$ лежит в прямоугольнике $\overline{R}$, а значит, $|\psi_n(x)| \le |y_0| + b$ для любого $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$.

Для доказательства равностепенной непрерывности зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Выберем $\delta = \varepsilon/M$, где $M = \max\limits_{(x,y)\in\overline{R}} |f(x,y)|$.

Тогда для любых $n \in \mathbb{N}$ и $x', x'' \in \overline{P}_h(x_0, y_0)$ таких, что $|x'' - x'| \le \delta$, получаем: $|\psi_n(x'') - \psi_n(x')| =$

$$\left| \int_{x_0}^{x''} \psi_n'(s)\,ds - \int_{x_0}^{x'} \psi_n'(s)\,ds \right| = \left| \int_{x'}^{x''} \psi_n'(s)\,ds \right| \overset{(1.12)}{\le}$$

$$\left| \int_{x'}^{x''} \max_{j=\overline{1-N,N-1}} |f(x_j, \psi_n(x_j))|\,ds \right| \le M|x'' - x'| \le M\delta = \varepsilon.$$

Действительно, при интегрировании кусочно постоянной функции $\psi'(x)$ по s от x_0 до x, для любого $x \in [x_{-N}, x_N]$ получаем

$$\psi(x) = \psi(x_0) + \int_{x_0}^{x} \psi'(s)\, ds,$$

$$\int_{x_0}^{x} \psi'(s)\, ds = \sum_{k=0}^{j-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \psi'(s)\, ds + \int_{x_j}^{x} \psi'(s)\, ds \text{ при } x \in (x_j, x_{j+1}]$$

$(j \in \{\overline{0, N-1}\})$, $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \psi'(s)\, ds = \sum_{k=j+1}^{-1} \int_{x_{k+1}}^{x_k} \psi'(s)\, ds + \int_{x_{j+1}}^{x} \psi'(s)\, ds$ при $x \in [x_j, x_{j+1})$ $(j \in \{\overline{-N, -1}\})$.

Таким образом, последовательность ломаных Эйлера $\psi_n(x)$ удовлетворяет условиям леммы Асколи-Арцела и из нее можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность $\{\psi_{i_*}(x)\}_{i_*=1}^{\infty}$.

Пусть $\psi_{i_*}(x) \overset{x\in\overline{P}_h}{\rightrightarrows} \varphi(x)$ при $i_* \to \infty$ $(i_* \to \infty$ при $i \to \infty)$. Тогда по замечанию 14 функция $y = \varphi(x)$ непрерывна на отрезке Пеано. Поскольку $\psi_{i_*}(x)$ по построению — ε-решение, из неравенства (1.13) вытекает, что для любого $x \in \overline{P}_h(x_0, y_0)$

$$\psi'_{i_*}(x) = f(x, \psi_{i_*}(x)) + \Delta_{i_*}(x), \quad |\Delta_{i_*}(x)| \le \varepsilon_{i_*}.$$

Интегрируя последнее равенство по s от x_0 до x, получаем:

$$\psi_{i_*}(x) - \psi_{i_*}(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(s, \psi_{i_*}(s))\, ds + \int_{x_0}^{x} \Delta_{i_*}(s)\, ds. \qquad (1.13)$$

При этом $\psi_{i_*}(x_0) = y_0$, $|\int_{x_0}^{x} \Delta_{i_*}(s)\, ds| \le \varepsilon_{i_*}|x - x_0| \to 0$ при $i_* \to \infty$, так как $|x - x_0| \le h$. Кроме того, поскольку любая точка $(s, \psi_{i_*}(s))$ принадлежит $\overline{R}$, а функция $f(x, y)$ по теореме Кантора равномерно непрерывна на компакте $\overline{R}$, имеем:

$f(s, \psi_{i_*}(s)) \overset{s\in\overline{P}_h}{\rightrightarrows} f(s, \varphi(s))$.

Поэтому $\displaystyle\int_{x_0}^{x} f(s, \psi_{i_*}(s))\, ds \to \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s))\, ds$ при $i_* \to \infty$.

Действительно, зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. Из равномерной непрерывности функции $f(x,y)$ на компакте $\overline{R}$ вытекает, в частности, что по выбранному ε найдется такое $\delta > 0$, что для любых $(x,\tilde{y}),(x,\hat{y}) \in \overline{R}$, $|\hat{y}-\tilde{y}| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x,\hat{y}) - f(x,\tilde{y})| < \varepsilon/h$. Теперь из равномерной относительно $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ сходимости последовательности функций $\psi_n(x)$ к функции $\varphi(x)$ вытекает, что для найденного δ существует номер N такой, что $\forall\, n \geq N$, $\forall\, x \in \overline{P}_h(x_0,y_0) \;\Rightarrow\; |\psi_n(x) - \varphi(x)| < \delta$, причем графики $y = \psi_n(x)$ и $y = \varphi(x)$ по доказанному выше лежат в $\overline{R}$. Поэтому $|f(x,\psi_n(x)) - f(x,\varphi(x))| < \varepsilon/h$.

В результате при $i_* \geq N$ имеем: $\left|\int_{x_0}^{x} f(s,\psi_{i_*}(s))\,ds - \int_{x_0}^{x} f(s,\varphi(s))\,ds\right| \leq$ $\left|\int_{x_0}^{x} |f(s,\psi_{i_*}(s))\,ds - f(s,\varphi(s))|\,ds\right| < \dfrac{\varepsilon}{h}|x - x_0| \leq \varepsilon.$

Переходя в левой и правой частях (1.13) к пределу при $i_* \to \infty$, получаем тождество $\varphi(x) \overset{[x_0-h,x_0+h]}{\equiv} \varphi(x_0) + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(s,\varphi(s))\,ds$. Оно означает, что функция $y = \varphi(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению (1.2) на отрезке Пеано $\overline{P}_h(x_0,y_0)$.

Следовательно, по теореме о связи между дифференциальным и интегральным уравнениями предельная функция $y = \varphi(x)$ является решением задачи Коши дифференциального уравнения (1.1) с н. д. x_0, y_0 на отрезке Пеано $[x_0 - h, x_0 + h]$. $\square$

Замечания:

15. *Теорема Пеано не дает информации о количестве решений уравнения (1.1), проходящих через заданную точку области G.*

16. *В связи с возможным нарушением единственности решений в некоторых точках области G в этих точках существуют решения, которые нельзя приблизить ломаными Эйлера. Так, в примере 3 решения уравнения $y' = 3y^{2/3}$ — это функции $y = (x - C)^3$ и $y \equiv 0$. Но любой отрезок любой ломаной Эйлера, проходящей через точку $(x_0, 0)$, имеет нулевой угол наклона, поэтому ломаная может приближать только решение $y \equiv 0$. А если точка $(x_0, y_0) \in G^o \subset G$ и G^o — область единственности, то любая равномерно сходящаяся на отрезке Пеано подпоследовательность произвольной последовательности ломаных Эйлера сходится к одному и тому же решению.*

§ 3. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ

1^0. Достаточные условия для существования или отсутствия решений граничной задачи Коши.

Для упрощения обозначений и формул, используемых далее при решении граничной задачи Коши, не уменьшая общности будем предполагать, что задача всегда ставится в начале координат и функция f там равна нулю, т. е. уравнение (1.1) имеет вид

$$y' = f_0(x, y), \tag{1.14}$$

где функция f_0 непрерывна на множестве $\widetilde{G} = G \cup \widehat{G}$, G — это область в $\mathbb{R}^2$, $\widehat{G} \in \partial G$, при этом точка $O = (0, 0) \in \widehat{G}$, $f_0(0, 0) = 0$ и рассматривается только задача Коши с н. д. $0, 0$. В самом деле, возьмем произвольное уравнение (1.1) $y' = f(x, y)$ и поставим задачу Коши в любой точке $(x_0, y_0) \in \widehat{G}$, тогда замена

$$x = u + x_0, \quad y = v + y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0) \tag{1.15}$$

сводит (1.1) к уравнению $v' = f_0(u, v)$, в котором функция $f_0 = f(u + x_0, v + f(x_0, y_0)u + y_0) - f(x_0, y_0)$, а значит, при $x = x_0$, $y = y_0$ получаем $u = u_0 = 0$, $v = v_0 = 0$ и $f_0(0, 0) = 0$.

Ключевую роль для наличия или отсутствие решения задачи Коши уравнения (1.14) будет играть расположение множества $\widehat{G}$ по отношению к оси абсцисс, которая в случае существования решения будет касаться его графика в точке $(0,0)$, а также значения f_0 на границе в малой окрестности начала координат.

Df. *Функцию, определенную на отрезке* $[0,a]$, *будем называть правой верхнеграничной и обозначать* $y = \hat{g}_a^+(x)$ *если*
1) *график* $\hat{g}_a^+$ $-$ *кривая* $\hat{\gamma}_a^+ = \{x \in [0,a], y = \hat{g}_a^+(x)\} \subset \widehat{G}$;
2) $\hat{g}_a^+(x) \in C^1([0,a])$; 3) $\hat{g}_a^+(0) = 0$; 4) $(\hat{g}_a^+(0))' \geq 0$, *при этом, если* $(\hat{g}_a^+(0))' = 2\hat{\tau} > 0$, *то* $(\hat{g}_a^+(x))' \geq \hat{\tau}$ *на* $[0,a]$, *а если* $(\hat{g}_a^+(0))' = 0$, *то* $\hat{g}_a^+(x)$ *выпукла вниз на* $[0,a]$ *и* $\hat{g}_a^+(a) \leq a$.
Аналогично определяется правая нижнеграничная функция $y = \check{g}_a^+(x)$ *с графиком* $\check{\gamma}_a^+$, *только условие* 4) *имеет вид:* $(\check{g}_a^+(0))' \leq 0$, *при этом, если* $(\check{g}_a^+(0))' = -2\check{\tau} < 0$, *то* $(\check{g}_a^+(x))' \leq -\check{\tau}$ $[0,a]$, *а если* $(\check{g}_a^+(0))' = 0$, *то* $\check{g}_a^+(x)$ *выпукла вверх на* $[0,a]$ *и* $\check{g}_a^+(a) \geq -a$.
Здесь выпуклость понимается в нестрогом смысле, т. е. на отрезке $[0,a]$ допускается тождество $g_a^+(x) \equiv 0$.

Таким образом, $\hat{\gamma}_a^+$ — это гладкая параметризованная ветвь границы $\widehat{G}$, выходящая из начала координат и лежащая в первой четверти, а $\check{\gamma}_a^+$ — в четвертой.

Замечание 17. *Из определения вытекает, что функция, являющаяся сужением* $g_a^+(x)$ *на любой отрезок* $[0, d]$ $(d \le a)$, *остается правой граничной (и, естественно, обозначается* g_d^+*).*
Поэтому в условии 4) неравенства $(\hat{g}_a^+(x))' \ge \hat{\tau}$ *на* $[0, a]$ *и* $\hat{g}_a^+(a) \le a$ *ограничениями не являются.*
Они всегда достигаются за счет уменьшения константы a.
То же относится к функциям $y = \check{g}_a^+(x)$.
Неравенство $\hat{g}_a^+(a) \le a$ *гарантирует попадание граничной кривой не на верхнюю, а на боковую стенку* V_c^+ *при* $c = a$.
Кроме того, равенство $\hat{\gamma}_a^+ = \check{\gamma}_a^+$ *невозможно, так как эта часть границы окажется введенной искусственно и должна быть удалена.*

В дальнейшем будут использоваться следующие обозначения:
⋆ $l_c^+ = \{x \in [0, c], y = 0\}$ — правый c-отрезок оси абсцисс;
⋆ $V_c^+ = \{(x, y)\colon\ x \in (0, c],\ |y| \le c\}$ — правая c-окрестность O;
⋆ $\Gamma_c^+ = \partial G \cap V_c^+$ — множество граничных точек области G из V_c^+.
⋆ $\hat{U}_{c,\hat{a}}^+ = \{(x, y)\colon x \in (0, \hat{a}]\ (\hat{a} \le c),\ \hat{g}_{\hat{a}}^+(\hat{a}) \in \partial V_c^+,\ \hat{g}_{\hat{a}}^+(x) < y \le c\}$ и $\check{U}_{c,\check{a}}^+ = \{(x, y)\colon x \in (0, \check{a}]\ (\check{a} \le c),\ \check{g}_{\check{a}}^+(\check{a}) \in \partial V_c^+,\ -c \le y < \check{g}_{\check{a}}^+(x)\}$ — соответственно надграфик $\hat{g}_{\hat{a}}^+$ и подграфик $\check{g}_{\check{a}}^+$ из V_c^+;
⋆ $\hat{V}_{c,\hat{a}}^+ = V_c^+ \backslash \hat{U}_{c,\hat{a}}^+$, $\check{V}_{c,\check{a}}^+ = V_c^+ \backslash \check{U}_{c,\check{a}}^+$, $\tilde{V}_{c,\hat{a},\check{a}}^+ = V_c^+ \backslash (\hat{U}_{c,\hat{a}}^+ \cup \check{U}_{c,\check{a}}^+)$.

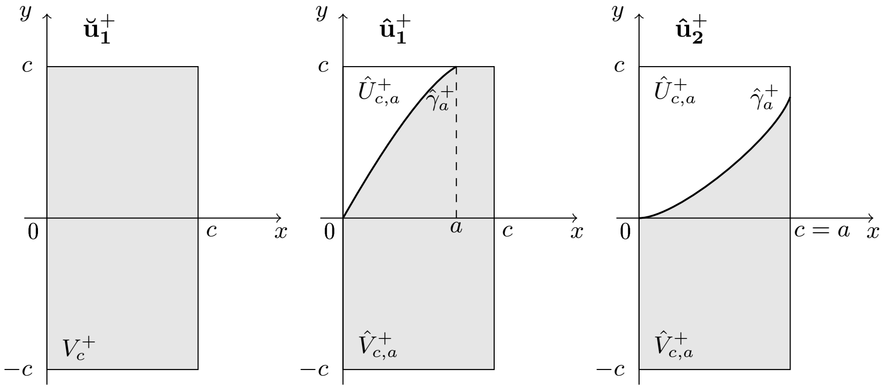
Введем в рассмотрение различные случаи $\mathbf{u}^+$ и $\mathbf{v}^+$ расположения граничных кривых по отношению к области G и их поведения в окрестности граничной точки O.

$\breve{\mathbf{u}}^+)$ $\exists\, c > 0$: $\Gamma_c^+ = \emptyset$, $V_c^+ \cap G \neq \emptyset \Leftrightarrow V_c^+ \subset G$.

$\hat{\mathbf{u}}^+)$ $\exists\, a, c$ $(0 < a \le c)$: $\Gamma_c^+ = \hat{\gamma}_a^+ \backslash O$, $\hat{V}_{c,a}^+ \cap G \neq \emptyset \ \Leftrightarrow\ \hat{V}_{c,a}^+ \subset \widetilde{G}$;

подразделяется на случаи

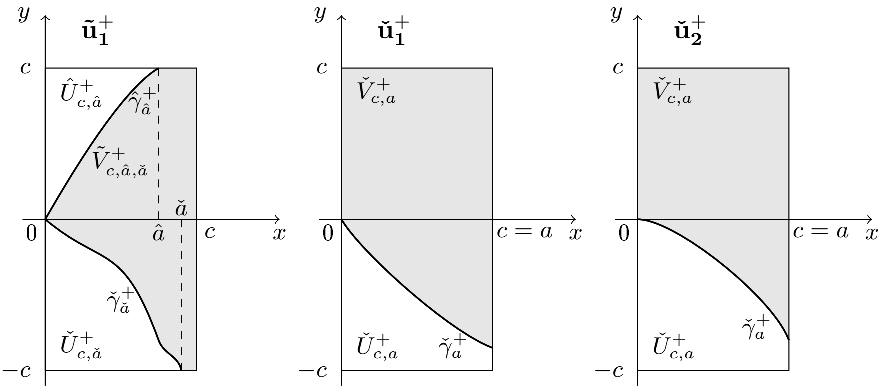
$\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{1}}^+)$ $(\hat{g}_a^+(0))' > 0$ или $\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{2}}^+)$ $(\hat{g}_a^+(0))' = 0$.



$\check{\mathbf{u}}^+$) $\exists\, a, c\ (0 < a \le c)$: $\Gamma_c^+ = \check{\gamma}_a^+ \backslash O$, $\check{V}_{c,a}^+ \cap G \ne \emptyset \ \Leftrightarrow\ \check{V}_{c,a}^+ \subset \widetilde{G}$;

подразделяется на случаи

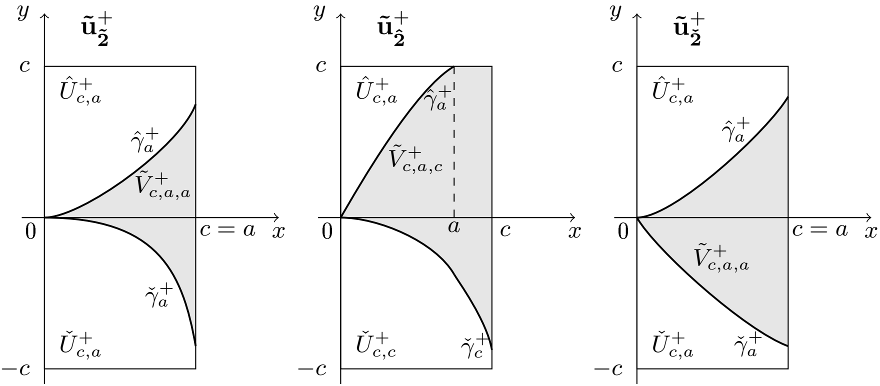
$\check{\mathbf{u}}_{\mathbf{1}}^+$) $(\check{g}_a^+(0))' < 0$ или $\check{\mathbf{u}}_{\mathbf{2}}^+$) $(\check{g}_a^+(0))' = 0$.



$\tilde{\mathbf{u}}^+)$ $\exists\, \hat{a}, \check{a}, c\ (0 < \hat{a}, \check{a} \le c)$: $\Gamma_c^+ = (\hat{\gamma}_{\hat{a}}^+ \cup \check{\gamma}_{\check{a}}^+) \backslash O$, $\tilde{V}_{c,\hat{a},\check{a}}^+ \cap G \ne \emptyset$ $\Leftrightarrow \tilde{V}_{c,\hat{a},\check{a}}^+ \subset \widetilde{G}$; подразделяется на случаи

$\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{1}}^+)$ $(\hat{g}_a^+(0))' > 0$, $(\check{g}_a^+(0))' < 0$, $\tilde{\mathbf{u}}_{\hat{\mathbf{2}}}^+)$ $(\hat{g}_a^+(0))' > 0$, $(\check{g}_a^+(0))' = 0$,

$\tilde{\mathbf{u}}_{\check{\mathbf{2}}}^+)$ $(\hat{g}_a^+(0))' = 0$, $(\check{g}_a^+(0))' < 0$ или $\tilde{\mathbf{u}}_{\tilde{\mathbf{2}}}^+)$ $(\hat{g}_a^+(0))' = 0$, $(\check{g}_a^+(0))' = 0$.



Случаи $\mathbf{v}^+$ определяются дословно также, как каждый из случаев $\mathbf{u}^+$, за исключением двух отличий:

1) если $(g_a^+(0))' = 0$, то предполагается строгая монотонность граничной функции $g_a^+(x))$ на $[0, a]$;

2) расположение области G относительно граничных кривых γ_a^+:

$\breve{\mathbf{v}}^+)$ $V_c^+ \cap G = \emptyset$;
$\hat{\mathbf{v}}^+)$ $\hat{V}_{c,a}^+ \cap G = \emptyset \Leftrightarrow \hat{U}_{c,a}^+ \subset G$;
$\check{\mathbf{v}}^+)$ $\check{V}_{c,a}^+ \cap G = \emptyset \Leftrightarrow \check{U}_{c,a}^+ \subset G$;
$\tilde{\mathbf{v}}^+)$ $\tilde{V}_{c,\hat{a},\check{a}}^+ \cap G = \emptyset \Leftrightarrow (\hat{U}_{c,\hat{a}}^+ \cup \check{U}_{c,\check{a}}^+) \subset G$.

Очевидно, что в случаях $\mathbf{u}^+$ правый отрезок оси абсцисс $l_c^+ \in \widetilde{G}$, а в случаях $\mathbf{v}^+$ он не имеет общих точек с $\widetilde{G}$, кроме точки O. Кроме того, все встречающиеся в случаях $\mathbf{u}^+$ и $\mathbf{v}^+$ условия равносильности достигаются за счет должного уменьшения констант a, c.

Таким образом, сопровождающие случаи $\mathbf{u}^+$ значки означают, что на множестве V_c^+ имеют место следующие ситуации:
$\breve{\mathbf{u}}^+$ — нет γ_a^+, $\hat{\mathbf{u}}^+$ — есть $\hat{\gamma}_a^+$, $\check{\mathbf{u}}^+$ — есть $\check{\gamma}_a^+$, $\tilde{\mathbf{u}}^+$ — есть $\hat{\gamma}_a^+$ и $\check{\gamma}_a^+$; $\mathbf{u_1^+}$ — нет γ_a^+ с $(g_a^+(0))' = 0$, $\mathbf{u_2^+}$ — есть γ_a^+ с $(g_a^+(0))' = 0$.

Замечание 18. *В рассмотренных случаях правая c-окрестность V_c^+ содержит не более одной правой нижнеграничной и верхнеграничной функции $g^+(x)$. Но, конечно, их может быть и больше.*

Например, может быть граничная кривая, "выходящая" из точки O и параметризуемая некой верхнеграничной функцией, затем делающая петлю вне V_c^+ и "возвращающаяся" в V_c^+, будучи параметризованной другой верхнеграничной функцией.

Однако, интерес представляют только верхняя нижнеграничная и нижняя верхнеграничная функции. Остальные функции можно не рассматривать, поскольку все вопросы решаются на множестве, лежащем между упомянутыми "соседними" функциями.

Введем теперь в рассмотрение случаи $\mathbf{v}^+$, которые отличаются от соответствующих случаев $\mathbf{u}^+$ только расположением области G относительно γ_a^+ : $\check{\mathbf{v}}_{\mathbf{1}}^+)$ $V_c^+ \cap G = \emptyset$;
$\hat{\mathbf{v}}^+)$ $\hat{V}_{c,a}^+ \cap G = \emptyset \Leftrightarrow \hat{U}_{c,a}^+ \subset G$; $\check{\mathbf{v}}^+)$ $\check{V}_{c,a}^+ \cap G = \emptyset \Leftrightarrow \check{U}_{c,a}^+ \subset G$;
$\tilde{\mathbf{v}}^+)$ $\tilde{V}_{c,\hat{a},\check{a}}^+ \cap G = \emptyset \Leftrightarrow (\hat{U}_{c,\hat{a}}^+ \cup \check{U}_{c,\check{a}}^+) \subset G$.

Замечание 19. *Избегая двойственности, договоримся, что реализуется какой-либо из случаев* $\mathbf{u}_{\mathbf{2}}^+$, *а не* $\mathbf{v}_{\mathbf{2}}^+$, *если имеется* $g_a(x) \equiv 0$.

Очевидно, что в случаях $\mathbf{u}^+$ правый отрезок оси абсцисс $l_c^+ \in \widetilde{G}$, а в случаях $\mathbf{v}^+$ он не имеет общих точек с $\widetilde{G}$, кроме точки O. Кроме того, все имеющиеся в случаях $\mathbf{u}^+$ и $\mathbf{v}^+$ условия равносильности достигаются за счет должного уменьшения констант a и c.

Наконец, в случаях $\mathbf{u}_{\mathbf{2}}^+$ во всех точках граничных кривых γ_a^+ потребуется дополнительное ограничение на функцию $f_0(x,y)$:

$$\forall\, x \in (0,a]\colon \quad \begin{array}{l} f_0(x, \hat{g}_a^+(x)) \le (\hat{g}_a^+(x))', \text{ если } (\hat{g}_a^+(0))' = 0, \\ f_0(x, \check{g}_a^+(x)) \ge (\check{g}_a^+(x))', \text{ если } (\check{g}_a^+(0))' = 0. \end{array} \qquad (1.16^+)$$

Замечание 20. *Аналогичным образом на промежутках вида* $[-c, 0\rangle$ *или* $[-a, 0\rangle$ *вводятся левосторонние объекты* l_c^-, V_c^-, Γ_c^-, g_a^-, γ_a^-, $U_{c,a}^-$, $V_{c,a}^-$, $\mathbf{u}^-$, $\mathbf{v}^-$ *и условия* (1.16^-). *Условие* $(1.\hat{16}^-)$, *например, имеет вид:* $\forall\, x \in (-a, 0] :\ f_0(x, \hat{g}_a^-(x)) \geq (\hat{g}_a^-(x))'$.

Далее в этом параграфе для случаев $\mathbf{u}^+$ и $\mathbf{v}^+$ (и аналогично для $\mathbf{u}^-$ и $\mathbf{v}^-$) будут получены следующие результаты:

— в всех случаях $\mathbf{u}^+$ с добавлением (1.16^+) для $\mathbf{u}_2^+$ поставленные условия достаточны для существования решения на некотором отрезке $[0, h^+]$, аналогичном, по сути, правому отрезку Пеано;

— во всех случаях $\mathbf{v}_1^+$ решения граничной задачи Коши с н. д. $0, 0$ в правой полуплоскости не существует;

— во всех случаях $\mathbf{v}_2^+$ однозначного ответа найти не удается вне зависимости от поведения функции $f_0(x, y)$ на границе.

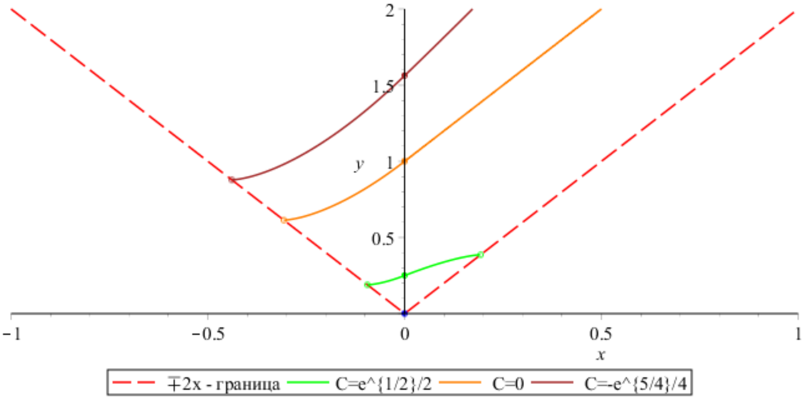
Рассмотрим для начала ряд новых и уже имеющихся примеров, не только подтверждающих сформулированные выше результаты, но показывающие необходимость введенных в них требований. Подробное решение каждого из уравнений, входящих в эти примеры, приведено в соответствующем приложении к главе I, где также поставлены и решены задачи Коши, задающие характерные интегральные кривые, и при помощи пакета программ Maple построен "портрет" этих интегральных кривых.

Начнем со случаев $\mathbf{v}$, когда l_c^+ или (и) l_c^- не лежат в $\widetilde{G}\backslash O$.

Пример 8. *Рассмотрим следующее уравнение вида (1.14)*

$$y' = 2\sqrt{y - 2|x|}, \quad \widetilde{G} = \{(x, y)\colon\ y \geq 2|x|\},\ \widehat{G} = \{y = 2|x|\}. \quad (1.17)$$

Функции $y = 2x$ $(x \geq 0)$ *и* $y = -2x$ $(x \leq 0)$ *образуют границу, но не являются граничными решениями (проверяется подстановкой). В правой полуплоскости уравнение (1.17) относится к случаю* $\hat{\mathbf{v}}_\mathbf{1}^+$ *с* $\hat{g}_\infty^+(x) = x$. *В левой полуплоскости ситуация аналогична.*



В приложении 1_4 установлено, что задача Коши с н. д. $0, 0$ в уравнении (1.17) не имеет решения ни при $x \geq 0$, ни при $x \leq 0$.

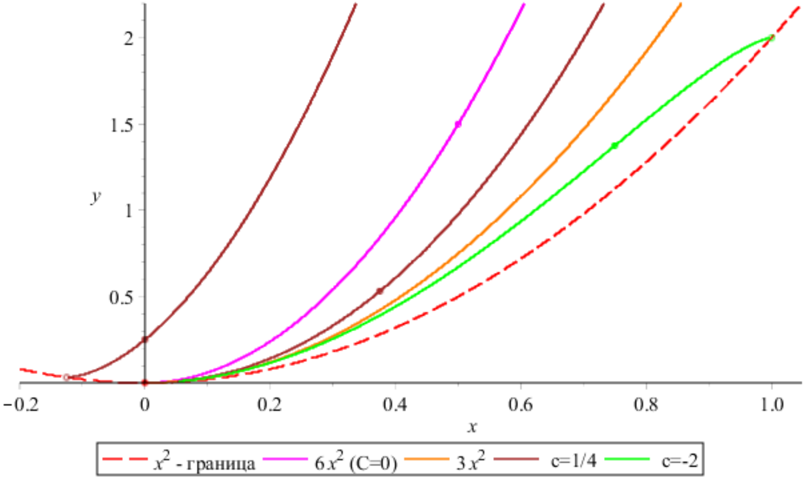
Пример 8 наглядно подтверждает, что в рассматриваемой ситуации решение, будучи гладкой функцией, существовать не может, поскольку его график должен лежать в $\widetilde{G}$.
Действительно, если бы на некотором отрезке $[0,d]$ существовало решение $y=\varphi_d^+(x)$ такое, что $\varphi_d^+(0)=0$, то, поскольку $\varphi_d^{+\prime}(0)=f_0(0,\varphi_d^+(0))=0$, нашлось бы такое $a>0$, что $\varphi_d^{+\prime}(x)<2 \Leftrightarrow \varphi_d^+(x)<2x$ при $x\in(0,a]$. Но по определению решения $(x,\varphi_d^+(x))\in\widetilde{G}$, а значит, $\varphi_d^+(x)\geq 2x$ при $x\in(0,a]$. !!

Пример 9. *Рассмотрим следующие три уравнения вида (1.14)*

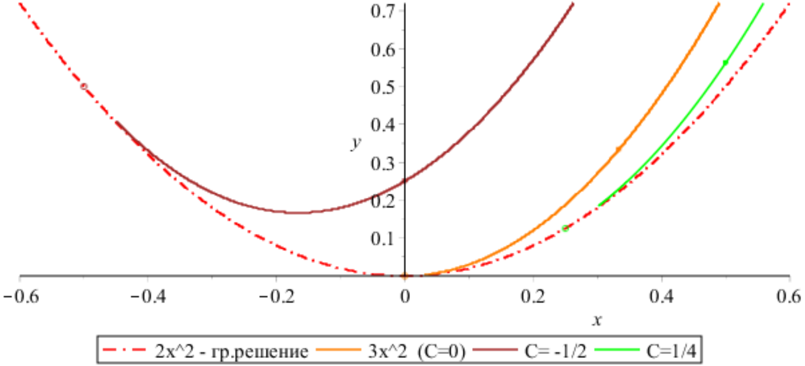
$$y'=6\sqrt{y-2x^2},\quad y'=2\sqrt{y-2x^2}+4x,\quad y'=4x\sqrt{y-2x^2},\quad (1.18)$$

у которых $\widetilde{G}=\{(x,y)\colon\, x\in\mathbb{R}^1,\ y\geq 2x^2\}$, $\widehat{G}=\{x\in\mathbb{R}^1,\ y=2x^2\}$.
Подстановкой легко проверить, что гладкая граничная кривая $y=2x^2$ *для уравнения* (1.18_2) *является граничным решением, а для* (1.18_1) *и* (1.18_3) *— нет.*
В правой полуплоскости уравнения (1.18) относятся к случаю $\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{2}}^+$ *с правой верхнеграничной функцией* $\hat{g}_\infty^+(x)=2x^2$.
Рассмотрим решения задачи Коши с н. д. $0,0$ *при* $x\geq 0$ *из приложения* 1_5) *последовательно для уравнений* $(1.18_1)-(1.18_3)$.

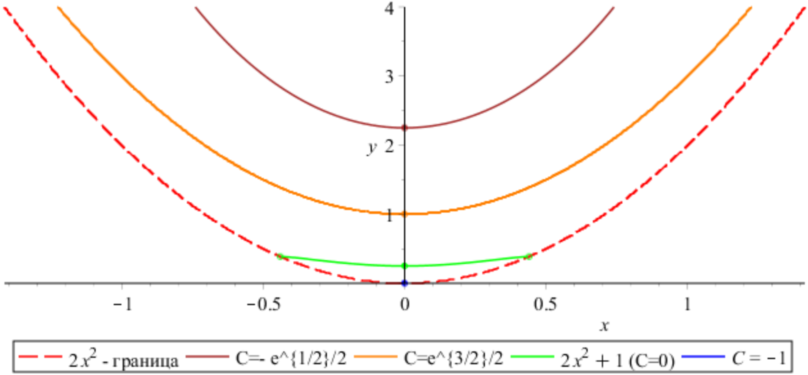
Уравнение (1.18_1) *имеет континуум смешанных решений с конечными и бесконечными максимальными интервалами существования, не смотря на поведение функции* $f_0 = 6\sqrt{y - 2x^2}$ *на границе, а именно:*
$\forall\, x > 0 \;\Rightarrow\; 0 = f_0(x, \hat{g}^+_\infty(x)) < (\hat{g}^+_\infty(x))' = 2x.$



В уравнении (1.18_2) *от специального граничного решения* $y = 2x^2$, в любой точке $(x_*, 2x_*^2)$ ответвляется одно смешанное решение, продолжимое вправо до бесконечности. В частности, при $x_* = 0$ ответвляется решение $y = 3x^2$. Но задача Коши с н. д. $0, 0$, по-прежнему, имеет континуум смешанных решений за счет ответвлений от граничного решения при любом $x > 0$.



В уравнении (1.18_3) *решение задачи Коши отсутствует при том же поведении функции* f_0 *на границе, что и в уравнении* (1.18_1).



Отметим, что в левой полуплоскости в уравнениях (1.18_1) и (1.18_3) решения задачи Коши с н. д. $0, 0$ отсутствуют, а в (1.18_2) существует единственное решение — граничное — $y = x^2$ $(x \le 0)$.
Уравнение (1.18_1) показывает также, что даже задание ограничений на поведение f_0 на границе не гарантирует отсутствия решения граничной задачи Коши в критических случаях $\check{\mathbf{v}}_{\mathbf{2}}^{+}$ и $\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{2}}^{+}$.
Случай $\tilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{2}}^{+}$ встречается в уравнениях (1.9^a) $y' = 2\{|y|^{a/2}$ при $x \le 0$, $(|y| - x^2)^{a/2} + x \operatorname{sign} y$ при $x \ge 0\}$ $(a = 1, 3)$ с $\check{g}_{\infty}^{+} = -x^2$, $\hat{g}_{\infty}^{+} = x^2$ из примера 7, § 1, п. 10^0 (см. приложение 1_3). В них функции g_{∞}^{+} — это граничные решения задачи Коши с н. д. $0, 0$.
Помимо этого, уравнение (1.9^1) имеет континуум смешанных решений поставленной задачи, при любом $x_* \ge 0$ ответвляющихся от граничного решения в точке (x_*, x_*^2) и продолжимых до бесконечности, а уравнение (1.9^3) других решений не имеет.
В то же время в левой полуплоскости для уравнений (1.9^a) реализуется случай $\breve{\mathbf{u}}_{\mathbf{1}}^{-}$ и, ожидаемо, уравнение (1.9^1) имеет континуум смешанных решений граничной задачи Коши при $x \in (-\infty, 0]$, а уравнение (1.9^3) — одно такое решение.

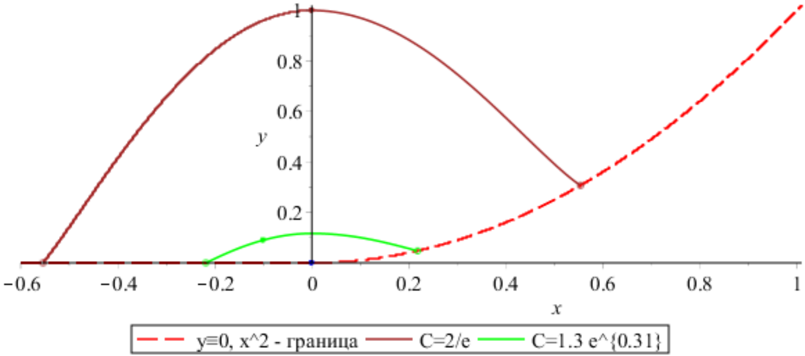
Перейдем к случаями $\mathbf{u}$, когда l_c^+ или (и) l_c^- принадлежат $\widetilde{G}$.

Пример 10 *Рассмотрим следующее уравнение вида (1.14)*

$$y' = \{-4x(\sqrt{y}+1) \ \ (x \leq 0), \ -2x(2\sqrt{y-x^2}+1) \ \ (x \geq 0)\}, \quad (1.19)$$

в котором $\widetilde{G} = \{(x,y)\colon \ y \geq 0$ *при* $x \leq 0, \ y \geq x^2$ *при* $x \geq 0\}$, *а* $\widehat{G} = \{y = 0 \ (x \leq 0), \ y = x^2 \ (x \geq 0)\}$ *— гладкая граница* $\widetilde{G}$.

В приложении 1_6 *установлено, что граничная задача Коши уравнения (1.19) с н. д.* $0, 0$ *не имеет решений. При этом при* $x \leq 0$ *реализуется критический случай* $\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{2}}^-$, *в котором* $\hat{g}_\infty^-(x) \equiv 0$, *но условие* $(9\hat{.}2^-)$ *не выполняется, так как* $f_0(x_*, \hat{g}_\infty^-(x_*)) = -4x_* > 0$ *для любого* $x_* < 0$, *а при* $x \geq 0$ *реализуется случай* $\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{2}}^+$.



Пример 10 показывает необходимость условий (1.16) (в данном случае — условия $(1.\hat{16}^{-})$) для гарантированного существования решения граничной задачи Коши в критических случаях $\mathbf{u_2}$.
В то же время в примере 2 из п. 2^0 граничная задача Коши, поставленная в точке $(0,0)$, имеет на $[0,+\infty)$ как граничное $y(x)\equiv 0$, так и континуум смешанных решений, при любом $x\geq 0$ ответвляющихся от него. Здесь опять реализуется случай $\mathbf{u_2}$, точнее, $\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{2}}^{+}$ и $g_{\infty}^{+}(x)\equiv 0$, но условие $(1.\hat{16}^{+})$ уже выполняется.

Вернемся к примеру 6 из $\S\,1$, п. 9^0, в котором для уравнения $(1.8^a)\quad y' = 2\sqrt{2x^2 - |y|} + 2ax \ \ (a = 0, 2, 9/4)$ с $\widetilde{G} = \{(x,y)\colon\ x \geq 0,\ |y| \leq 2x^2\}$, $\widehat{G} = \{x \geq 0,\ |y| = 2x^2\}$ имеет место еще не встречавшийся ранее случай $\tilde{\mathbf{u}}^+_{\tilde{\mathbf{2}}}$ с $\check{g}^+_\infty(x) = -2x^2$ и $\hat{g}^+_\infty(x) = 2x^2$. Здесь ось абсцисс является единственной прямой, проходящей через начало координат, которая имеет непустое пересечение с областью G в сколь угодно малой окрестности точки $(0,0)$. Подробное решение уравнения (1.8^a) с "портретами" характерных интегральных кривых приведено в приложении 1_2.

Пример 6 показывает, что, хотя в уравнении (1.8^a) при всех $a \geq 0$ на нижнеграничной кривой $\check{\gamma}^+_\infty$ выполняется условие $(1.\check{1}6^+)$, так как $f_0(x, \check{g}^+_\infty(x)) \geq 0$, этого недостаточно для гарантированного существования решения граничной задачи Коши.

Действительно, при $a = 0$ и при $a = 2$ решение ожидаемо существует, так как выполняется дополнительное условие $(1.\hat{1}6^+)$. Но при $a = 9/4$ условие $(1.\hat{1}6^+)$ не выполняется, поскольку $f_0(x_*, \hat{g}^+_\infty(x_*)) = 9x/2 > (\hat{g}^+_\infty(x_*))' = 4x_*$ для любого $x_* > 0$, и решение граничной задачи Коши отсутствует.

2^0. Граничный отрезок Пеано.
Построим теперь для точки $O=(0,0)\in\widehat{G}$ во всех случаях $\mathbf{u}^+$ правый граничный треугольник $\overline{T}_b^+$ $(b-boundary)$, во многом аналогичный равнобедренному треугольнику $\overline{T}^+$ из п. 5^0, и по нему — правый граничный отрезок Пеано
$\overline{P}_{h^+}^+(O)=[0,h^+]$ $(h^+>0)$.

При построении будет использоваться непрерывность функции $f_0(x,y)$ в точке O, где f_0 равна нулю, означающая, что

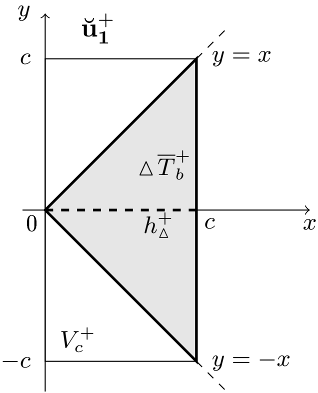
$$\forall\,\tau>0\quad \exists\,\delta_\tau>0\colon\ \ \forall\,(x,y)\in\overline{V}_{\delta_\tau}\cap\widetilde{G}\ \Rightarrow\ |f_0(x,y)|\le\tau. \tag{1.20}$$

где $\overline{V}_{\delta_\tau}=\{(x,y)\colon\,|x|\le\delta_\tau,\,|y|\le\delta_\tau\}$.

Случай $\breve{\mathbf{u}}_{\mathbf{1}}^{+}$.

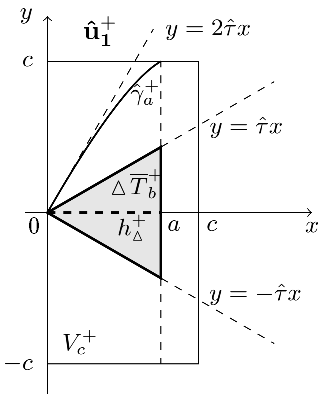
Пусть $c \le \delta_1$ из (1.20). Тогда $V_c^+ \subset G$, $|f_0(x,y)| \le 1$ при $(x,y) \in V_c^+$ и $\underline{h^+ = c}$.

Геометрически надо в прямоугольнике V_c^+ из точки O провести два отрезка в вершины $(c,-c)$ и (c,c), получая равнобедренный треугольник $\overline{T}_b^+$, высота которого h_Δ^+, лежащая на оси абсцисс, имеет длину c. При этом $\overline{T}_b^+ \backslash O \subset V_c^+$.



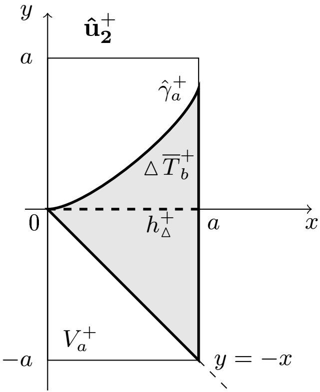
Случай $\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{1}}^{+}$.

Пусть $c \le \delta_\tau$, где τ — из определения $\hat{g}_d^{+}(x)$ а δ_τ — из (1.20). Тогда $\hat{\gamma}_a^{+}$ при $x = a$ пересекается с боковой $(a = c)$ или с верхней $(a < c)$ стороной V_c^{+}. Поэтому $\hat{V}_{c,a}^{+} \subset \widetilde{G}$, $|f_0(x,y)| \le \tau$ при $(x,y) \in \hat{V}_{c,a}^{+}$ и $\underline{h^{+} = a}$.



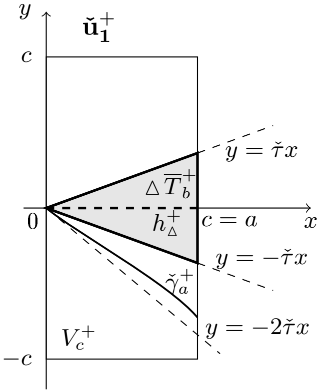
Геометрически надо в V_c^{+} из точки O провести лучи с тангенсами углов наклона, равными $\pm\tau$, до пересечения с вертикальной прямой $x(y) \equiv a$. Высота $h_\triangle^{+}$ полученного равнобедренного треугольника $\overline{T}_b^{+}$ имеет длину a. При этом $\overline{T}_b^{+} \backslash O \subset \hat{V}_{c,a}^{+}$ в силу выбора a, так как $\hat{g}_a^{+}(x) > \tau x$ при $x \in (0, a]$.

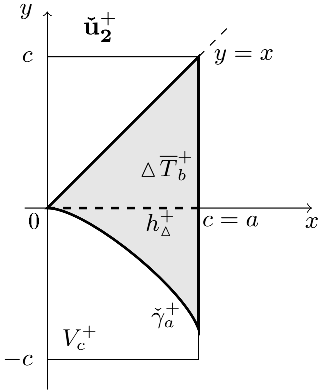
Случай $\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{2}}^{+}$ при условии $(1.\hat{1}6^{+})$.
Пусть $c = a \le \delta_1$, где
δ_1 из (1.20). Тогда кривая $\hat{\gamma}_a^{+}$ согласно
$(1.\hat{1}6^{+})$ заканчивается на боковой
стороне V_a^{+}, $\hat{V}_{a,a}^{+} \subset \widetilde{G}$, $|f_0(x,y)| \le 1$
при $(x,y) \in \hat{V}_{a,a}^{+}$ и $\underline{h^{+} = a}$.



Геометрически надо в V_a^{+} из
точки O провести отрезок в вершину
$(a, -a)$. Тогда он вместе с кривой
$\hat{\gamma}_{\hat{a}}^{+}$ и отрезком боковой стороны V_a^{+}
образует криволинейный треугольник
$\overline{T}_b^{+}$, высота которого $h_\triangle^{+}$ имеет
длину a. При этом $\overline{T}_b^{+} \backslash O \subset \hat{V}_{a,a}^{+}$.

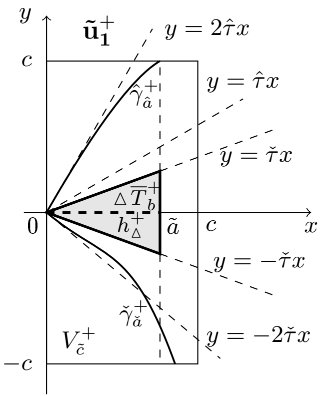
Случаи $\check{\mathbf{u}}_1^+$ и $\check{\mathbf{u}}_2^+$ при выполнении условия $(1.\check{1}6^+)$ аналогичны случаям $\hat{\mathbf{u}}_1^+$ и $\hat{\mathbf{u}}_2^+$. В $\check{\mathbf{u}}_1^+$ для разнообразия рассматривается кривая $\check{\gamma}_a^+$, пересекающаяся не с нижней, а с боковой стороной V_c^+.





Случай $\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{1}}^{+}$.

Пусть $c \le \delta_\tau$, где $\tau = \min\{\check{\tau}, \hat{\tau}\}$, $\check{\tau}, \hat{\tau}$ из определения $g_d^{+}(x)$, а δ_τ из (1.20), и пусть граничная кривая $\hat{\gamma}_a^{+}$ пересекается с $\partial V_{\tilde{c}}^{+}$ при $x = \hat{a}$, а $\check{\gamma}_a^{+}$ — при $x = \check{a}$ $(\check{a}, \hat{a} \le c)$. Тогда $\tilde{V}_{c,\hat{a},\check{a}}^{+} \subset \widetilde{G}$, $|f_0(x,y)| \le \tau$ при $(x,y) \in \tilde{V}_{c,\hat{a},\check{a}}^{+}$ и $\underline{h^{+} = \tilde{a}}$, где $\tilde{a} = \min\{\hat{a}, \check{a}\}$.



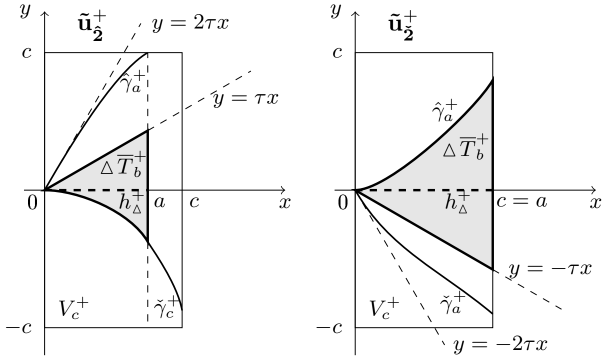
Геометрически надо в V_c^{+} из точки O провести лучи с тангенсами углов наклона, равными $\pm\tau$, до пересечения с вертикальной прямой $x(y) \equiv \tilde{a}$. Высота $h_{\triangle}^{+}$ полученного равнобедренного треугольника $\overline{T}_b^{+}$ имеет длину $\tilde{a}$. При этом $\overline{T}_b^{+} \backslash O \subset \tilde{V}_{c,\hat{a},\check{a}}^{+}$ в силу выбора a, так как $\check{g}_a^{+}(x) < -\tau x$ и $\hat{g}_a^{+}(x) > \tau x$ для всякого $x \in (0, a]$.

Случай $\tilde{\mathbf{u}}_{\hat{\mathbf{2}}}^+$ при условии $(1.\hat{1}6^+)$.

Пусть $c \le \delta_\tau$, где τ — из определения $\hat{g}_d^+(x)$ а δ_τ — из (1.20). Тогда $\hat{\gamma}_a^+$ при $x = a$ пересекается с боковой $(a = c)$ или с верхней $(a < c)$ стороной V_c^+, $\check{\gamma}_c^+$ в силу $(1.\check{1}6^+)$ пересекается с боковой стороной V_c^+, $\tilde{V}_{c,a,c}^+ \subset \widetilde{G}$ и $\underline{h^+ = a}$.

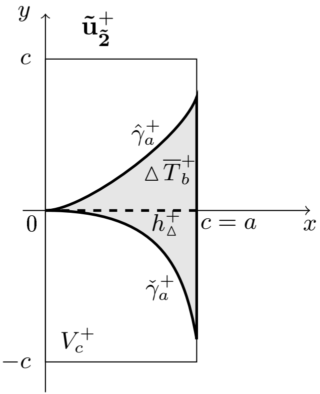
Геометрически надо в V_c^+ из точки O провести луч с тангенсом угла наклона, равным τ, и нижнеграничную кривую $\check{\gamma}_a^+$ до пересечения их с вертикальной прямой $x(y) \equiv a$. Высота $h_\triangle^+$ полученного криволинейного треугольника $\overline{T}_b^+$ имеет длину $\hat{a}$. При этом $\overline{T}_b^+ \backslash O \subset \hat{V}_{c,a}^+$ в силу выбора a, так как $\hat{g}_a^+(x) > \tau x$ при $x \in (0, a]$.

Случай $\tilde{\mathbf{u}}_{\check{\mathbf{2}}}^+$ при условии $(1.\check{1}6^+)$ аналогичен случаю $\tilde{\mathbf{u}}_{\hat{\mathbf{2}}}^+$.



Случай $\tilde{\mathbf{u}}^{+}_{\tilde{\mathbf{2}}}$ при обоих условиях (1.16^{+}) с выделенным общим a.

Положим $c = a$, тогда обе граничные кривые заканчиваются на боковой стороне V^{+}_{c}, при этом $\tilde{V}^{+}_{c,a,a} \subset \widetilde{G}$ и $\underline{h^{+} = a}$. Геометрически a — это длина высоты h^{+}_{Δ} криволинейного треугольника $\overline{T}^{+}_{b}$, боковые стороны которого образуют непосредственно граничные кривые, а основание — отрезок прямой $x \equiv a$, заключенный между ними. При этом $\overline{T}^{+}_{b} \setminus O = \tilde{V}^{+}_{c,a,a}$ и на компакте $\overline{T}^{+}_{b}$ непрерывная функция $f_0(x, y)$ достигает своего максимума, равного, скажем, τ.



Замечание 21. *Аналогичным образом при* $x \le 0$ *для точки* $O = (0, 0) \in \widehat{G}$ *во всех девяти случаях* $\mathbf{u}^{-}$ *строится левый граничный отрезок Пеано* $\overline{P}^{-}_{h^{-}}(O) = [-h^{-}, 0]$ $(h^{-} > 0)$. *При этом, если выполняются один из случаев* $\mathbf{u}^{-}$ *и один из случаев* $\mathbf{u}^{+}$, *то можно определить и построить граничный отрезок Пеано* $\overline{P}_{h^{\mp}}(O) = [-h^{-}, h^{+}]$.

3^0. Теоремы о существовании или отсутствии решений граничной задачи Коши.

Теорема (о существовании решения граничной задачи Коши) *Пусть в уравнении (1.14) функция* $f_0(x,y)$ *определена и непрерывна на множестве* $\widetilde{G}$, *тогда в каждом из случаев* $\mathbf{u}_1^+$; $\check{\mathbf{u}}_2^+$, $\tilde{\mathbf{u}}_{\check{2}}^+$ *при условии* $(1.\check{1}6^+)$; $\hat{\mathbf{u}}_2^+$, $\tilde{\mathbf{u}}_{\hat{2}}^+$ *при условии* $(1.\hat{1}6^+)$; $\tilde{\mathbf{u}}_{\tilde{2}}^+$ *при обоих условиях* (1.16^+) *существует по крайней мере одно решение граничной задачи Коши с начальными данными* $0, 0$, *определенное на произвольно выбранном правом граничном отрезке Пеано* $\overline{P}_{h^+}^+(O)$. *То же справедливо для каждого из девяти случаев* $\mathbf{u}^-$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для каждого из случаев $\mathbf{u}^+$ построим граничный треугольник $\overline{T}_b^+$ и вычислим константу h^+. Поскольку правый h-отрезок оси абсцисс, являющийся отрезком поля направлений в точке $O \in \widehat{G}$, целиком лежит в $\widetilde{G}$, из точки O вправо можно начать строить ломаную Эйлера с произвольным рангом дробления. Покажем, что она всегда может быть продолжена на правый граничный отрезок Пеано $[0, h^+]$.

Рассмотрим, например, случай $\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{2}}^{+}$, сразу фиксирующий число $\tau > 0$. Тогда в прямоугольнике V_c^+ число $c > 0$ с учетом (1.20) выбирается, в частности, так, что $|f_0(x,y)| \le \tau$ для любой точки $(x,y) \in V_c^+ \cap \widetilde{G}$.

Построим, как указано в п. 2^0, криволинейный треугольник $\overline{T}_b^+$, лежащий в $V_c^+ \cap \widetilde{G}$. Длина его высоты равна h^+.

Ломаная Эйлера не может покинуть $\overline{T}_b^+$ через верхнюю боковую сторону, лежащую на прямой $y = \tau x$, так как в любой ее точке $|f_0(x,y)| \le \tau$. Аналогично, при попадании ломаной Эйлера при $x = x_* > 0$ на нижнюю боковую сторону, лежащую на правой нижнеграничной кривой $\check{\gamma}_a^+$, в силу условия $(1.\check{1}6^+)$ $f_0(x_*, \check{g}_a^+(x_*)) \ge (\check{g}_a^+(x_*))'$, а значит, при $x > x_*$ ломаная может либо двигаться по $\check{\gamma}_a^+$, либо "свернуть" внутрь треугольника, продвинувшись при необходимости по x вплоть до h^+.

Такие же рассуждения проводятся для остальных случаев $\mathbf{u}$.

Дальнейшее доказательство дословно повторяет доказательство теоремы Пеано. $\square$

Перейдем к рассмотрению случаев $\mathbf{v}$.

Случаи $\mathbf{v}_\mathbf{1}^+$ отличаются от случаев $\mathbf{u}_\mathbf{1}^+$ только расположением множества $\widetilde{G}$ относительно множеств V_c^+ и $V_{c,a}^+$. В случаях $\mathbf{v}_\mathbf{1}^+$ множества V_c^+ и $V_{c,a}^+$ не содержат точек области G.

В каждом из случаев $\mathbf{u}_\mathbf{1}^+$ в предыдущем пункте был построен равнобедренный треугольник $\overline{T}_b^+$ с вершиной в точке O и боковыми сторонами, лежащими на прямых $y = \pm\tau x$ $(\tau > 0)$, который за исключением точки O содержится в V_c^+ или в $V_{c,a}^+$. Построив аналогичный треугольник в каждом из случаев $\mathbf{v}_\mathbf{1}^+$, мы, тем самым, докажем следующее утверждение.

Лемма (о граничном треугольнике вне области G). *В каждом из четырех случаев* $\mathbf{v}_\mathbf{1}^+$ *существует равнобедренный* $\triangle\overline{T}_b^+$ *с вершиной в точке* O *и высотой, лежащей на оси абсцисс, пересечение которого с областью* G *пусто. В случаях* $\mathbf{v}_\mathbf{1}^-$ *такой же треугольник можно построить в левой полуплоскости.*

Приведенная лемма позволяет доказать следующую теорему.

Теорема (об отсутствии решения граничной задачи Коши). *В каждом из случаев* $\mathbf{v_1^+}$ *в правой полуплоскости не существует решения граничной задачи Коши уравнения (1.14) с начальными данными* $0, 0$. *То же справедливо для каждого из случаев* $\mathbf{v_1^-}$ *в левой полуплоскости.*

Доказательство. Построим $\triangle \overline{T}_b^+$, описанный в лемме (в случае $\check{\mathbf{v}}_\mathbf{1}^+$ число τ фиксируем произвольным образом).
Допустим, что на некотором отрезке $[0, d]$ существует решение $y = \varphi(x)$ задачи Коши уравнения (1.14) с н. д. $0, 0$, т. е. $\varphi(0) = 0$. Учитывая, что $\varphi'(0) = f_0(0, \varphi(0)) = 0$, найдется такое число a $(0 < a \leq d)$, что $|\varphi'(x)| < \tau \Leftrightarrow |\varphi(x)| < \tau x$ для любого $x \in (0, a]$. Но по определению решения точки $(x, \varphi(x)) \in \widetilde{G}$, следовательно $|\varphi(x)| \geq \tau x$ при $x \in (0, a]$. !! $\square$

Следствие. *Граничная задачи Коши уравнения (1.14) с н. д.* $0, 0$ *не имеет решений, если в левой полуплоскости выполняется какое-нибудь из условий* $\mathbf{v_1^-}$, *а в правой —* $\mathbf{v_1^+}$.

§ 4. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

1^0. Лемма Гронуолла.

В этом параграфе будут представлены различные теоремы о глобальной единственности решения задачи Коши. В частности, будет доказана теорема, сформулированная в § 1, п. 8^0.

Доказательство любой из теорем о единственности, как и доказательство многих других результатов, основано на использовании леммы Гронуолла, позволяющей из интегральной оценки функции, когда функция оценивается сверху через интеграл от нее самой, и оценка в этом смысле является рекуррентной, получить прямую оценку сверху только через аргумент функции и входящие в интегральную оценку константы.

Лемма Гронуолла (об интегральной оценке функции сверху). *Пусть функция* $h(x)$ *непрерывна на* $\langle a, b\rangle$ *и существуют такие* $x_0 \in \langle a, b\rangle$, $\lambda \geq 0$, $\mu > 0$, *что для всякого* $x \in \langle a, b\rangle$

$$0 \leq h(x) \leq \lambda + \mu \left| \int_{x_0}^{x} h(s)\, ds \right|. \tag{1.21}$$

Тогда справедливо неравенство

$$h(x) \leq \lambda e^{\mu|x-x_0|}. \tag{1.22}$$

Доказательство. Предположим сначала, что $x \geq x_0$. Введем в рассмотрение функцию $g(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} h(s)\, ds.$

Тогда $g(x_0) = 0$, $g(x) \geq 0$, $g(x) \in C^1([x_0, b\rangle)$ и $g'(x) = h(x) \geq 0.$
Подставляя функцию $g(x)$ в оценку (1.21), получаем неравенство $g'(x) \leq \lambda + \mu g(x).$
Перенося последнее слагаемое в левую часть, умножая обе части на $e^{-\mu(x-x_0)}$ и выделяя слева производную, получаем неравенство $(g'(x) - \mu g(x))e^{-\mu(x-x_0)} = (g(x)e^{-\mu(x-x_0)})' \leq \lambda e^{-\mu(x-x_0)}.$

Интегрируя обе его части по s от x_0 до x, получаем неравенство
$g(x)e^{-\mu(x-x_0)} - g(x_0) \le \lambda \int_{x_0}^{x} e^{-\mu(s-x_0)}\,ds = -(\lambda/\mu)(e^{-\mu(x-x_0)} - 1).$
Учитывая, что $g(x_0) = 0$, и умножая обе части неравенства на $e^{\mu(x-x_0)}$, получаем прямую оценку для g:
$g(x) \le (\lambda/\mu)(e^{\mu(x-x_0)} - 1).$
Подставляя это неравенство в правую часть неравенства (1.21), получаем прямую оценку для h: $h(x) \le \lambda + \mu g(x) \le \lambda e^{\mu(x-x_0)}$.
Таким образом, неравенство (1.22) доказано для всех $x \in [x_0, b\rangle$.
Если $x \le x_0$, то в неравенстве (1.21) $h(x) \le \lambda - \mu \int_{x_0}^{x} h(s)\,ds$ и введенная функция $g(x) \le 0$.
Дальнейшее доказательство аналогично случаю, когда $x \ge x_0$, только домножать и делить соответствующие неравенства придется на $e^{\mu(x-x_0)}$, получая неравенство (1.22) в виде $h(x) \le \lambda e^{-\mu(x-x_0)}$. $\square$

Следствие. *Если в лемме Гронуолла* $\lambda = 0$, *т. е. в неравенстве* (1.21) $\quad 0 \le h(x) \le \mu \left| \int_{x_0}^{x} h(s)\,ds \right|$, *то* $h(x) \overset{\langle a,b\rangle}{\equiv} 0$.

2^0. Условия Липшица.

Бывает, что требование дифференцируемости функции, особенно от нескольких переменных, по какой-либо переменной несмотря на удобство его проверки, оказывается чрезмерным и его заменяют так называемым локальным условием Липшица, которое не допускает более чем линейного роста функции по этой переменной в малой окрестности каждой точки из некоторого множества.

Df. *Функция* $f(x,y)$ *удовлетворяет условию Липшица по* y *глобально на множестве* $D \subset \mathbb{R}^2$ *или* $f \in \mathrm{Lip}_y^{gl}(D)$, *если*

$$\exists\, L > 0\colon\; \forall\,(x,\hat{y}),(x,\tilde{y}) \in D \;\Rightarrow\; |f(x,\tilde{y}) - f(x,\hat{y})| \le L|\tilde{y} - \hat{y}|. \quad (1.23)$$

Df. *Функция* $f(x,y)$ *удовлетворяет условию Липшица по* y *локально на множестве* $\widetilde{G} = G \cup \widehat{G}$, *где* G *— область в* $\mathbb{R}^2$, *а* $\widehat{G} \subset \partial G$, *или* $f \in \mathrm{Lip}_y^{loc}(\widetilde{G})$, *если для любой точки* $(x_0,y_0) \in \widetilde{G}$ *найдется замкнутая* c*-окрестность* $\overline{V}(x_0,y_0) \subset G$ *такая, что функция* $f(x,y)$ *удовлетворяет условию Липшица по* y *глобально на множестве* $\widetilde{G} \cup \overline{V}_c(x_0,y_0)$.

Непосредственно из определения вытекает, что $f \in \mathrm{Lip}_y^{loc}(G)$, т. е. удовлетворяет локальному условию Липшица в области, если для любой точки $(x_0, y_0) \in G$ найдется замкнутая c-окрестность $\overline{V}(x_0, y_0) \subset G$ такая, что $f \in \mathrm{Lip}_y^{gl}(\overline{V}(x_0, y_0))$.

Более подробно условия Липшица будут рассмотрены в главе 3, посвященной нормальным системам дифференциальных уравнений.

3^0. Теоремы о глобальной единственности решений.

Теорема (о множестве единственности). *Пусть в уравнении* (1.1) *функция* $f(x, y)$ *определена и непрерывна на множестве* $\widetilde{G}$ *и удовлетворяет условию Липшица по* y *локально на множестве* $\widetilde{G}^o = G^o \cup \widehat{G}^o$, *где область* $G^o \subset G$, *а множество* $\widehat{G}^o$ *состоит из граничных точек* G^o. *Тогда* $\widetilde{G}^o$ *— множество единственности.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольную точку (x_0, y_0) из $\widetilde{G}^o$ и покажем, что она является точкой единственности. Поскольку $f \in \mathrm{Lip}_y^{loc}(\widetilde{G}^o)$, найдутся $\overline{V}_c(x_0, y_0)$ и $L_0 > 0$ такие, что $f \in \mathrm{Lip}_y^{gl}(U_c)$ с константой L_0, где $U_c = \widetilde{G}^o \cup \overline{V}_c(x_0, y_0)$. Разумеется, если $(x_0, y_0) \in G^o$, то существует $c_0 > 0$ такое, что $U_c = \overline{V}_c(x_0, y_0)$, а если $(x_0, y_0) \in \widehat{G}^o$ и решение задачи Коши с начальными данными x_0, y_0 отсутствует, то (x_0, y_0) по определению — это точка единственности для уравнения (1.1).

Рассмотрим любые два решения $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ задачи Коши с н. д. x_0, y_0 определенные по крайней мере на некотором общем промежутке $\langle \alpha, \beta \rangle$ таком, что $x_0 \in \langle \alpha, \beta \rangle \subset [x_0 - c, x_0 + c]$. Тогда для всякого $x \in \langle \alpha, \beta \rangle$ точки $(x, \varphi_1(x)), (x, \varphi_2(x)) \in U_c$. По теореме о связи между дифференциальным и интегральным уравнениями $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ являются решениями интегрального уравнения (1.2) на $\langle \alpha, \beta \rangle$, т. е. для любого $x \in \langle \alpha, \beta \rangle$ справедливы равенства $\varphi_j(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi_j(s))\, ds \quad (j = 1, 2)$.

Следовательно, $\varphi_2(x) - \varphi_1(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} (f(s, \varphi_2(s)) - f(s, \varphi_1(s)))\, ds,$
точки $(s, \varphi_j(s)) \in G^*$ и для них верно неравенство (1.23).
В результате $|\varphi_2(x) - \varphi_1(x)| \le$

$$\left| \int_{x_0}^{x} |f(s, \varphi_2(s)) - f(s, \varphi_1(s))|\, ds \right| \le \left| \int_{x_0}^{x} L|\varphi_2(s) - \varphi_1(s)|\, ds \right|.$$

К последнему неравенству можно применить следствие к лемме Гронуолла, положив $h(x) = |\varphi_2(x) - \varphi_1(x)|$, $\lambda = 0$, $\mu = L$. Тогда $|\varphi_2(x) - \varphi_1(x)| \overset{\langle \alpha, \beta \rangle}{\equiv} 0$, т. е. решения $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ задачи Коши с н. д. x_0, y_0 совпадают в каждой точке $\langle \alpha, \beta \rangle \ni x_0$.
Поэтому по определению (x_0, y_0) — это точка единственности. $\square$

Хорошо известен частный случай этой теоремы для области.

Теорема (о единственности в области). *Пусть в уравнении* (1.1) *функция* $f(x, y)$ *непрерывна в области* G *и удовлетворяет условию Липшица по* y *локально в области* $G^o \subset G$, *тогда* G^o *— это область единственности.*

При решении практических задач проверить наличие локального условия Липшица по y у функции $f(x,y)$ бывает сложнее, чем проверить у нее наличие непрерывной частной производной по y. Поэтому при решении вопросов о единственности решений обычно используют слабую теорему о множестве единственности, сформулированную в § 1, п. 9^0. Понятно, что она имеет более жесткие ограничения на функцию $f(x,y)$, являясь, тем самым, следствием основной теоремы о единственности. Докажем ее.

Теорема (о множестве единственности, слабая). *Пусть в уравнении* (1.1) *функция* $f(x,y)$ *определена и непрерывна на множестве* $\widetilde{G}$, *а частная производная* $\partial f(x,y)/\partial y$ *определенна и непрерывна на множестве* $\widetilde{G}^o = G^o \cup \widehat{G}^o$, *где область* $G^o \subset G$, *множество* $\widehat{G}^o$ *состоит из граничных точек* G^o, *причем для любой точки* $(x_0,y_0) \in \widehat{G}^o$ *существует замкнутая* c*-окрестность* $\overline{V}_c(x_0,y_0)$ *такая, что множество* $\widetilde{G}^o \cap \overline{V}_c(x_0,y_0)$ *выпукло по* y. *Тогда* $\widetilde{G}^o$ *является множеством единственности для уравнения* (1.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим произвольную точку $(x_0, y_0) \in \widetilde{G}^o$. Поскольку функция $\partial f(x,y)/\partial y$ непрерывна в точке (x_0, y_0), существует δ такое, что $0 < \delta \le c$, где c берется из формулировки теоремы, и для любой точки
$(x,y) \in U_\delta = \widetilde{G}^o \cap \overline{V}_\delta(x_0,y_0)$ следует, что
$|\partial f(x,y)/\partial y - \partial f(x_0,y_0)/\partial y| \le 1$.
Таким образом, установлено, что множество U_δ выпукло по y и
$|\partial f(x,y)/\partial y| \le L = |\partial f(x_0,y_0)/\partial y| + 1$ для любой точки
$(x,y) \in U_\delta$.
По теореме Лагранжа для любых двух точек $(x,\hat{y}), (x,\tilde{y}) \in U_\delta$,
$\hat{y} < \tilde{y}$ найдется $y^* \in (\hat{y}, \tilde{y})$: $f(x,\tilde{y}) - f(x,\hat{y}) = \dfrac{\partial f(x,y^*)}{\partial y}(\tilde{y} - \hat{y})$.
Здесь точка $(x, y^*) \in U_\delta$, так как U_δ выпукло по y. Поэтому в U_δ верно неравенство $|f(x,\tilde{y}) - f(x,\hat{y})| \le L|\tilde{y} - \hat{y}|$, означающее, что $f \in \mathrm{Lip}_y^{gl}(U_\delta)$. Тогда по определению $f \in \mathrm{Lip}_y^{loc}(\widetilde{G}^o)$, а значит, по теореме о единственности $\widetilde{G}^o$ — множество единственности. $\square$

Сформулируем частный случай этой теоремы для области.

Теорема (о единственности в области, слабая). *Пусть в уравнении* (1.1) *функция* $f(x, y)$ *определена и непрерывна в области* G, *а* $\partial f(x, y)/\partial y$ *определена и непрерывна в области* $G^o \subset G$. *Тогда* G^o *— это область единственности.*

Вернемся еще раз к примеру 7 из § 1, п. 10^0. В уравнении (1.9^3) $f(x, y) = 2\{|y|^{3/2}$ при $x \le 0$, $(|y| - x^2)^{3/2} + x \operatorname{sign} y$ при $x \ge 0\}$, а множество $\widetilde{G} = \{(x, y)\colon\ |y| - x^2 \ge 0$ при $x \ge 0\}$ и во всех его точках существует и непрерывна $\partial f(x, y)/\partial y$. Но $\widetilde{G}^o = \widetilde{G} \backslash \{(0, 0)\}$, поскольку решение задачи Коши с н. д. $0, 0$ имеет на промежутке $[0, +\infty)$ два граничных решения: $y = x^2$ и $y = -x^2$, графики которых совпадают только в точке $(0, 0)$.
Дело в том, что в начале координат не выполняется одно из условий слабой теоремы о множестве единственности, а именно: множество $\widetilde{G} \cup \overline{V}_c(0, 0)$ для $\forall\, c > 0$ не является выпуклым по y.

Убедимся, что ни в какой окрестности начала координат для f из уравнения (1.9^3) не выполняется и глобальное условие Липшица. Для $\forall\, x > 0$ точки $(x, -x^2), (x, x^2) \in \widehat{G} \subset \widetilde{G}$. Для них неравенство Липшица (1.23) выглядит так: $x \le Lx^2$. Поэтому для любой константы $L > 0$ найдется такая константа $c > 0$, что на $\widetilde{G} \cap \overline{V}_c(0, 0)$ это неравенство нарушается, поскольку $x \le c$.

Следует отметить, что не только гладкость функции f по y, но и локальное условие Липшица не является необходимым и его можно ослаблять, гарантируя при этом единственность в области.

Теорема Осгуда (о единственности в области, сильная). *Пусть в уравнении* (1.1) *функция* $f(x,y)$ *непрерывна в области* G *и*

$$\forall\,(x,\hat{y}),(x,\tilde{y})\in G:\quad |f(x,\tilde{y})-f(x,\hat{y})|\le h(|\tilde{y}-\hat{y}|), \tag{1.24}$$

причем функция $h(s)$ *определена, непрерывна и положительна для всякого* $s\in(0,a]$ *и* $\displaystyle\int_\varepsilon^a h^{-1}(s)\,ds\to\infty$ *при* $\varepsilon\to 0$ $(\varepsilon>0)$. *Тогда* G — *это область единственности для уравнения* (1.1).

Доказательство см. напр. в [Пе, § 12].

В качестве функции $h(s)$ можно выбрать, например, функцию $y=Ls$ $(L>0)$. Тогда (1.24) превратится в неравенство (1.23), т. е. окажется глобальным условием Липшица в области G, а теорема Осгуда — следствием теоремы о единственности.

Но $\int_0^a h^{-1}(s)\,ds$ будет также расходящимся для любой функции $h(s)=Ks\,|\ln s|$, $Ks\,|\ln s|\,\ln|\ln s|$, $Ks\,|\ln s|\,\ln|\ln s|\,\ln\ln|\ln s|$ и т. д. А условие (1.24) на функцию $f(x,y)$ с такими функциями $h(s)$ уже значительно слабее, чем условие Липшица. Очевидно, оно допускает нелинейный рост функции f по y.

§ 5. СУЩЕСТВОВАНИЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ

1^0. Область существования общего решения.

В §1, п. 10^0 было дано определение общего решения $y=\varphi(x,C)$ уравнения (1.1) и сформулирована теорема о его существовании, которую предстоит доказать в этом параграфе.

Первое, что предстоит сделать, это описать область A, в которой, как будет установлено, можно построить общее решение, поскольку гарантировать его существование во всей области единственности G^o нельзя, какой бы малой она ни была.

Область существования общего решения A (не надо ее путать с областью определения функции $y=\varphi(x,C)$) будет задаваться локально, т. е. в окрестности любой точки из G^o, и будет иметь определенную форму, позволяющую получить необходимые результаты.

Итак, пусть G^o — область единственности для уравнения (1.1). Возьмем произвольную точку $(x_0^*,y_0^*)\in G^o$. Поскольку G^o является открытым множеством, существует такое $r>0$, что r-окрестность $V_r(x_0^*,y_0^*)=\{(x,y)\colon |x-x_0^*|<r,\, |y-y_0^*|<r\}\subset G^o$. Уменьшая при необходимости r, добьемся, чтобы $\overline{V}_r\subset G^o$.

Пусть числа y_1, y_2 таковы, что $y_0^* - y_1 < r$ и $y_2 - y_0^* < r$, т. е. точки $(x_0, y_i) \in V_r$. И рассмотрим решения задачи Коши $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ с начальными данными (x_0^*, y_1) и (x_0^*, y_2), графики которых лежат в $\overline{V}_r$ при $x \in [a, b] \ni x_0^*$. Тогда открытое множество

$$A = \{(x, y) \,|\, a < x < b,\ \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)\} \tag{1.25}$$

вместе со своим замыканием $\overline{A}$ содержатся в $\overline{V}_r$.
Поскольку по построению $\varphi_1(x_0^*) = y_1 < y_2 = \varphi_2(x_0^*)$ и G^o — это область единственности, то $\varphi_1(x) < \varphi_2(x)$ для всякого $x \in [a, b]$. Поэтому открытое множество A — это область, так как дуги интегральных кривых решений $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ при $x \in [a, b]$ не могут соприкоснуться, разбивая A на несвязные подмножества.

В чем же заключаются достоинства области A?

Лемма (о поведении решений в области A). 1) *Существует число* $h > 0$ *такое, что для любой точки* $(x_0, y_0) \in \overline{A}$ *можно построить* $P_h(x_0, y_0)$ *— отрезок Пеано универсальной длины* $2h$; 2) *Для любой точки* $(x_0, y_0) \in \overline{A}$ *решение уравнения (1.1)* $y = \varphi(x)$ *с н. д.* x_0, y_0 *продолжимо на весь отрезок* $[a, b]$.

Доказательство. Возьмем произвольную точку (x_0^*, y_0^*) из области G^o и построим ее окрестность A вида (1.25) так, чтобы $\overline{A} = \{(x, y) \,|\, a \leq x \leq b,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\} \subset G^o$.

1) Пусть $A^c = \{(x, y)\colon\ \exists\, (x_*, y_*) \in A : |x - x_*| < c,\, |y - y_*| < c\}$ $(c > 0)$ — c-окрестность области A. При этом $(\overline{A})^c = A^c$. Очевидно, что существует такое $\varepsilon > 0$, что замыкание ε-окрестности области A — это компакт $\overline{A^\varepsilon}$ — содержится в области G^o. Поэтому найдется число $M = \max_{\overline{A^\varepsilon}} |f(x, y)|$.

Возьмем произвольную точку (x_0, y_0) из $\overline{A}$. Тогда замкнутый прямоугольник $\overline{R} = \{(x, y)\colon\ |x - x_0| \leq \varepsilon,\ |y - y_0| \leq \varepsilon\} \subset \overline{A^\varepsilon} \subset G^o$.

Положим $h = \min\{\varepsilon, \varepsilon/M\}$. Тогда $P_h(x_0, y_0) = [x_0 - h, x_0 + h]$ — отрезок Пеано, построенным для точки (x_0, y_0).

2) Для любой точки $(x_0, y_0) \in \overline{A}$ по теореме Пеано решение задачи Коши $y = \varphi(x)$ с начальными данными x_0, y_0 определено на отрезке Пеано $[x_0 - h, x_0 + h]$, длина которого согласно 1) неизменна для всех точек компакта $\overline{A}$.

Рассмотрим функцию $\varphi(x)$, например, при $x > x_0$.
Если $x_0 + h \geq b$, то доказывать нечего.
Если $x_0 + h < b$, то $\varphi_1(x_0 + h) < \varphi(x_0 + h) < \varphi_2(x_0 + h)$, а значит, $(x_0 + h, \varphi(x_0 + h)) \in \overline{A}$.
Выбрав эту точку в качестве начальной, решение $y = \varphi(x)$ можно продолжить вправо на полуотрезок Пеано $[x_0 + h, x_0 + 2h]$.
Если теперь $x_0 + 2h \geq b$, то доказательство закончено, если нет, то сделаем очередное продолжение решения вправо на длину h.

Таким образом за конечное число шагов решение будет продолжено вправо до точки b включительно.

Аналогично $y = \varphi(x)$ можно продолжить влево до точки a. $\square$

2^0. Формула общего решения.

Для любой точки (x_0, y_0) из $\overline{A}$ обозначим через $y = y(x, x_0, y_0)$ решение задачи Коши уравнения (1.1) с начальными данными x_0, y_0. Тогда $y(x_0, x_0, y_0) = y_0$ и по лемме из п. 1^0 решение $y = y(x, x_0, y_0)$ определено для всякого $x \in [a, b]$.

Для произвольной точки $\zeta \in (a, b)$ рассмотрим функцию

$$\varphi(x, C) = y(x, \zeta, C) \qquad ((\zeta, C) \in \overline{A}). \tag{1.26}$$

заданную в замкнутом прямоугольнике $\overline{H}_A = \{(x, C)\colon\, a \le x \le b,$ $\varphi_1(\zeta) \le C \le \varphi_2(\zeta)\}$, который является частным случаем H_A из определения общего решения, данного в § 1, п. 10^0.

В самом деле, $\varphi_1(\zeta) \le C \le \varphi_2(\zeta)$ по построению $\overline{A}$. А по лемме решение $y = y(x, \zeta, C)$ определено для любого $x \in [a, b]$ и при $x = \zeta$ по определению решения задачи Коши $\varphi(\zeta, C) = y(\zeta, \zeta, C) = C$.

Теорема (о существовании общего решения). *Введенная в* (1.26) *функция* $y = \varphi(x, C)$ *является общим решением уравнения* (1.1) *в области* A *из* (1.25), *построенной в окрестности произвольной точки из области единственности* G^o.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что функция $y = \varphi(x, C)$ удовлетворяет определению общего решения уравнения (1.1), сформулированному в § 1, п. 10^0.

1) Возьмем любую точку $(x_0, y_0) \in A$ и рассмотрим уравнение $y_0 = \varphi(x_0, C)$ или согласно (1.26) уравнение

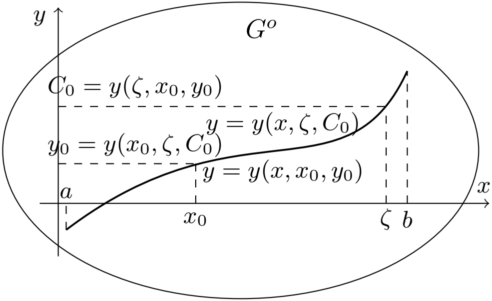
$$y_0 = y(x_0, \zeta, C). \tag{1.27}$$

Наличие у него решения $C = C_0$, фактически, означает, что выпущенное из точки $(\zeta, C_0) \in A$ решение уравнения (1.1) в момент x_0 попадает в точку $(x_0, y_0) \in A$. Покажем, что решение уравнения (1.27) существует и единственно.

Выпустим из точки (x_0, y_0) решение $y = y(x, x_0, y_0)$, которое по лемме из п. 1^0 определено на всем отрезке $[a, b]$ и, в частности, при $x = \zeta \in (a, b)$ по определению (1.26).

Положим $C_0 = y(\zeta, x_0, y_0)$. Тогда (ζ, C_0) является точкой единственности, так как принадлежит графику решения $y = y(x, x_0, y_0)$.

Следовательно, решение задачи Коши $y = y(x, \zeta, C_0)$ уравнения (1.1) с начальными данными ζ, C_0 по лемме о поведении решений в области A продолжимо на $[a, b]$ и совпадает с решением $y = y(x, x_0, y_0)$. Тогда $y_0 = y(x_0, \zeta, C_0)$, т. е. график функции $y = y(x, \zeta, C_0)$ проходит через точку (x_0, y_0).



Другими словами, дуга интегральной кривой уравнения (1.1), построенная на $[a, b]$ и проходящая через точки (x_0, y_0), (ζ, C_0) имеет две параметризации $y = y(x, x_0, y_0)$ и $y = y(x, \zeta, C_0)$.

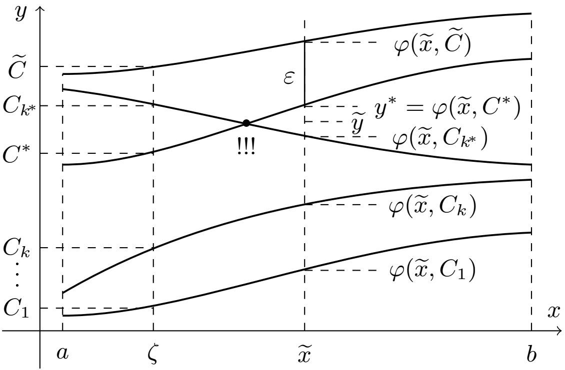
Итак, установлено, что уравнение (1.27) имеет единственное решение $C = C_0 = y(\zeta, x_0, y_0)$, т. е. $y_0 = y(x_0, \zeta, y(\zeta, x_0, y_0))$. При этом функция $y = \varphi(x, C_0)$ является решением задачи Коши уравнения (1.1) с начальными данными x_0, y_0, поскольку согласно (1.26) и (1.27) $\varphi(x_0, C_0) = y(x_0, \zeta, C_0) = y_0$.

2) Покажем теперь, что функция $y = \varphi(x, C)$ из (1.26) непрерывна на компакте $\overline{H}_A$.
Поскольку для всякого $C \in [\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)]$ функция $y = \varphi(x, C)$ – это решение уравнения (1.1), она непрерывна по x при $x \in [a, b]$.

Покажем, что для всякого $x \in [a, b]$ функция $y = \varphi(x, C)$ непрерывна по C при $C \in [\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)]$.

Допуская противное, предположим, что найдутся $\widetilde{\varepsilon} > 0$, $\widetilde{x} \in [a, b]$ и последовательность $C_k \to \widetilde{C}$ при $k \to +\infty$, $C_k \in [\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)]$ такие, что $|\varphi(\widetilde{x}, C_k) - \varphi(\widetilde{x}, \widetilde{C})| \geq \widetilde{\varepsilon}$ при всех $k \geq 1$.

Это значит, что при $x = \widetilde{x}$ функция $\varphi(\widetilde{x}, C)$ терпит разрыв в точке $\widetilde{C} \in [\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)]$, так как любой компакт и, в частности, отрезок $[\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)]$ содержит все свои предельные точки.
В этом случае, кстати, $\widetilde{x} \neq \zeta$, поскольку при $k \to \infty$ по определению $\varphi(\zeta, C_k) = C_k \to C = \varphi(\zeta, C)$.



Выпуская из точек $(\zeta, C_k) \in \overline{A}$ решения уравнения (1.1), получаем последовательность решений $y = y(x, \zeta, C_k) = \varphi(x, C_k)$. Поскольку из любой сходящейся последовательности можно выделить монотонную подпоследовательность, будем считать, не уменьшая общности, что последовательность C_k, например, монотонно возрастает, т. е. $C_k < C_{k+1} < \widetilde{C}$ для любого $k \geq 1$.

В области единственности интегральные кривые не пересекаются, поэтому последовательность $\varphi(\widetilde{x}, C_k)$ тоже монотонно возрастает и ограничена, так как $\varphi(\widetilde{x}, C_k) \leq \varphi(\widetilde{x}, \widetilde{C}) - \widetilde{\varepsilon}$ по предположению. Но любая ограниченная монотонная последовательность имеет предел.

Положим $\widetilde{y} = \lim\limits_{k \to +\infty} \varphi(\widetilde{x}, C_k)$, тогда $\widetilde{y} \leq \varphi(\widetilde{x}, \widetilde{C}) - \widetilde{\varepsilon}$.

Выберем произвольную точку y^* из интервала $(\widetilde{y}, \varphi(\widetilde{x}, \widetilde{C}))$.

Рассмотрим определенное на $[a, b]$ решение задачи Коши с н. д. $\widetilde{x}, y^*$, обозначаемое $y = y(x, \widetilde{x}, y^*)$, и положим $C^* = y(\zeta, \widetilde{x}, y^*)$. Тогда $C^* < \widetilde{C}$, поскольку $y^* < \varphi(\widetilde{x}, \widetilde{C}) = y(\widetilde{x}, \zeta, \widetilde{C})$.

Дугу интегральной кривой решения $y = y(x, \widetilde{x}, y^*)$ на отрезке $[a, b]$, как было установлено выше, параметризует также решение с начальными данными ζ, C^*, имеющее согласно формуле (1.26) вид $y = \varphi(x, C^*)$, причем $\varphi(\widetilde{x}, C^*) = y^*$.
Однако, существует индекс k^* такой, что член C_{k^*} сходящейся к $\widetilde{C}$ последовательности C_k будет больше чем C^*.

В результате вышло, что дуги интегральных кривых решений $y = \varphi(x, C_{k^*})$ и $y = \varphi(x, C^*)$ пересекаются в некоторой точке x^*, лежащей между ζ и $\widetilde{x}$, поскольку
$\varphi(\zeta, C_{k^*}) = C_{k^*} > C^* = \varphi(\zeta, C^*)$,
а $\varphi(\widetilde{x}, C_{k^*}) < \widetilde{y} < y^* = y(\widetilde{x}, \zeta, C^*) = \varphi(\widetilde{x}, C^*)$.
Этот факт противоречит предположению о том, что G — область единственности.
Итак, доказано, что функция $y = \varphi(x, C)$ непрерывна по C, а значит, по каждой из переменных в прямоугольнике $\overline{H}$. Но этого недостаточно для ее непрерывности по совокупности переменных.

Воспользуемся дополнительно еще одним свойством функции φ. Поскольку $y = \varphi(x, C)$ при любой константе $C \in [\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)]$ — решение уравнения (1.1), то $\partial\varphi(x, C)/\partial x \equiv f(x, \varphi(x, C))$ на $[a, b]$. Но $(x, \varphi(x, C)) \in \overline{A}$, когда точка $(x, C) \in \overline{H}$, а на компакте $\overline{A}$ выполняется неравенство $|f(x, y)| \leq M$.
Следовательно, функция $|\partial\varphi(x, C)/\partial x|$ ограничена на $[a, b]$.

Используя теорему Лагранжа, заключаем, что для любой $C \in [\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)]$ и для любых $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x_2$ найдется такое число $x_C \in (x_1, x_2)$, что

$$\varphi(x_2, C) - \varphi(x_1, C) = \frac{\partial\varphi(x_C, C)}{\partial x}\,(x_2 - x_1).$$

Этого достаточно, чтобы непрерывность функции $y = \varphi(x, C)$ по x на $[a, b]$ равномерная относительно $C \in [\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)]$ в силу признака Вейерштрасса с $\delta = \varepsilon/M$ стала очевидной.

Последнее свойство функции φ наряду с ее поточечной непрерывностью по C гарантирует непрерывность $\varphi(x, C)$ по совокупности переменных в прямоугольнике $\overline{H}$.

Действительно, возьмем произвольную точку $(x_0, C_0) \in \overline{H}$ и покажем, что функция $\varphi(x, C)$ непрерывна в этой точке.

Зафиксируем любое число $\varepsilon > 0$. Тогда в силу непрерывности φ по C найдется $\delta_{x_0} > 0$ такое, что $\forall\, C : |C - C_0| < \delta_{x_0} \quad \Rightarrow$ $|\varphi(x_0, C) - \varphi(x_0, C_0)| < \varepsilon/2$.

А из равномерной непрерывности функции φ по x относительно C вытекает, что существует $\delta_0 > 0$ такое, что

$$\forall\, C \in [\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)],\ \forall x : |x - x_0| < \delta_0 \Rightarrow |\varphi(x, C) - \varphi(x_0, C)| < \varepsilon/2.$$

Выберем число $\delta = \min\{\delta_{x_0}, \delta_0\}$, тогда для любой точки (x, C) получаем: $\|(x, C) - (x_0, C_0)\| = \max\{|x - x_0|, |C - C_0|\} < \delta$, откуда $|\varphi(x, C) - \varphi(x_0, C_0)| \le |\varphi(x, C) - \varphi(x_0, C)| + |\varphi(x_0, C) - \varphi(x_0, C_0)| = \varepsilon$.
$\square$

Df. *Общее решение* $y = \varphi(x, C)$, *определенное формулой* (1.26), *называется общим решением в форме Коши или классическим общим решением уравнения первого порядка (1.1).*

Итак, в теореме установлено, что функция $\varphi(x, C)$, являющаяся общим решением уравнения (1.1), непрерывна по C. А когда она окажется непрерывно дифференцируемой по C?

Теорема (о дифференцируемости общего решения). *Пусть в области A из (1.25) при некотором $\zeta \in (a, b)$ формула (1.26) задает общее решение $y = \varphi(x, C)$, определенное в прямоугольнике $\overline{H}_A$. Тогда, если в уравнении (1.1) функция $f(x, y)$ непрерывно дифференцируема по y в некоторой окрестности A, то*

$$\forall\,(x, C) \in \overline{H}_A\colon \quad \frac{\partial\varphi(x, C)}{\partial C} = \exp\left(\int_\zeta^x \frac{\partial f(t, \varphi(t, C))}{\partial y}\,dt\right). \qquad (1.28)$$

Доказательство. Зафиксируем произвольным образом константу $C \in [\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)]$ и для всякого $x \in [a, b]$ положим $\triangle\,\varphi = \varphi(x, C + \triangle\, C) - \varphi(x, C)$, где $\triangle\, C$ — это приращение аргумента C.

Поскольку при выбранной C функция $y = \varphi(x, C)$ является решением уравнения (1.1), справедлива цепочка равенств:

$$\frac{d(\triangle\varphi)}{dx} = f(x, \varphi(x, C + \triangle C) - f(x, \varphi(x, C)) =$$
$$= \int_0^1 d(f(x, \varphi(x, C) + (\triangle\varphi)s)) = \int_0^1 \frac{df(x, \varphi(x, C) + (\triangle\varphi)s)}{ds} ds =$$
$$= \int_0^1 \frac{\partial f(x, \varphi(x, C) + (\triangle\varphi)s)}{\partial y} ds \cdot (\triangle\varphi).$$

Пусть $\triangle C \neq 0$, $\psi(x, \triangle C) = \triangle\varphi / \triangle C$.

Рассмотрим линейное однородное уравнение $\dfrac{du}{dx} = p(x, \triangle C)u$,

в котором $p(x, \triangle C) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial f(x, \varphi(x, C) + (\triangle\varphi)s)}{\partial y} ds.$

Функция ψ является решением задачи Коши этого уравнения с н. д. $\zeta, 1$, так как

$$\psi(\zeta, \triangle C) = \frac{\varphi(\zeta, C + \triangle C) - \varphi(\zeta, C)}{\triangle C} = \frac{C + \triangle C - C}{\triangle C}.$$

Тем самым, $\psi(x, \triangle C) = \exp\left(\int_\zeta^x p(t, \triangle C) dt\right)$.

Однако, функция $p(x, \triangle C)$ определена и при $\triangle C = 0$, причем $p(x, 0) = \int_0^1 \frac{\partial f(x, \varphi(x, C))}{\partial y} dt$. Поэтому

$$\frac{\partial \varphi(x, C)}{\partial C} = \lim_{\triangle C \to 0} \psi(x, \triangle C) = \lim_{\triangle C \to 0} \exp\left(\int_\zeta^x p(t, \triangle C) dt\right),$$

т. е. частная производная общего решения $y = \varphi(x, C)$ по C существует, непрерывна и вычисляется по формуле (1.28). $\square$

Замечание 22. *В теореме, фактически, доказано, что, если правая часть уравнения (1.1) непрерывно дифференцируема по* y, *то решение* $y = y(x, x_0, y_0)$, *рассматриваемое как функция трех переменных, имеет непрерывную положительную производную по н. д.* y_0. *Этот результат будет использован в главе III при доказательстве теоремы о дифференцируемости решений нормальной системы по начальным данным и параметрам.*

ДОПОЛНЕНИЯ К ГЛАВЕ I.

Дополнение 1_1. Связь между дифференцируемостью и существованием производной.

Пусть функция $y = y(x)$ определена и непрерывна в некоторой окрестности точки x_0. Тогда $\triangle y = \triangle y(x_0) = y(x_0 + \triangle x) - y(x_0)$ — приращение функции, $\triangle x = x - x_0$ — приращение аргумента.
Если существует $\lim\limits_{\triangle x \to 0} \dfrac{\triangle y(x_0)}{\triangle x}$, то $y'(x_0) = \lim\limits_{\triangle x \to 0} \dfrac{\triangle y(x_0)}{\triangle x}$ — это производная y.

Df. *Если существует такое число A, что*

$$\triangle y = A \cdot \triangle x + o(\triangle x), \qquad (*)$$

то функцию $y(x)$ называют дифференцируемой в точке x_0, а выражение $A \cdot \triangle x$ — дифференциалом y и обозначают $dy(x_0)$ или dy, воспринимая это обозначение как единый функциональный символ.

Теорема (о связи между дифференцируемостью и наличием производной). *Непрерывная функция* $y = y(x)$ *дифференцируема в точке* x_0 *тогда и только тогда, когда существует конечная производная* $y'(x_0)$. *В этом случае в равенстве* $(*)$ $A = y'(x_0)$.
Доказательство этой теоремы можно найти в [3, п.104].

В результате установлено, что

$$dy = y'_x \cdot \triangle x, \qquad (**)$$

причем $\triangle x$ — произвольное приращение независимой переменной, не обязательно бесконечно малое.
С геометрической точки зрения $\triangle y$ — это приращение ординаты кривой $y(x)$ в точке x_0, а dy — приращение ординаты касательной.

Отождествляя теперь дифференциал независимой переменной x с дифференциалом функции $y(x) = x$, получаем

$$dx = \triangle x,$$

поскольку согласно $(**)$ $dx = x'_x \cdot \triangle x = 1 \cdot \triangle x$. Следовательно, формулу $(**)$ можно записать в виде

$$dy = y'_x \, dx \quad \text{или} \quad y'_x = \frac{dy}{dx},$$

что позволяет трактовать производную функции $y(x)$ как отношение дифференциалов и активно это использовать особенно при решении дифференциальных уравнений первого порядка.

Дополнение 1_2. Некоторые топологические определения. Приведем определения встречающихся в данном пособии топологических объектов применительно к евклидовому пространству $\mathbb{R}^2$, поскольку именно в такой форме они используются в первых двух главах. В последующих главах не составит труда обобщить эти определения на пространство $\mathbb{R}^n$.

1) областью называется непустое открытое связное множество;
2) множество $U \subset \mathbb{R}^2$ называется открытым, если любая его точка является внутренней, т. е. если для любой точки $(x_0, y_0) \in U$ найдется такое $\varepsilon > 0$, что $V_\varepsilon(x_0, y_0) \subset U$, где $V_\varepsilon(x_0, y_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x - x_0| < \varepsilon, \ \ |y - y_0| < \varepsilon\}$ — ε-окрестность точки (x_0, y_0);
3) множество $A \subset \mathbb{R}^2$ называется связным, если его нельзя покрыть двумя открытыми в $\mathbb{R}^2$ непересекающимися множествами, т. е. не существует открытых множеств $U, V \subset \mathbb{R}^2$, $U \cap V = \emptyset$ таких, что $A \subset U \cup V$, $A \cap U \neq \emptyset$ и $A \cap V \neq \emptyset$;
множество $A \subset \mathbb{R}^2$ называется линейно-связным (в $\mathbb{R}^2$ оно равносильно связному), если любые две его точки можно соединить лежащим в A путем, а путь — это непрерывный образ отрезка;

4) множество $A \subset \mathbb{R}^2$ называется односвязным, если для любой замкнутой непрерывной кривой, принадлежащей A, часть плоскости, ограниченная этой кривой, также принадлежит A.
5) точка (x_*, y_*) называется граничной точкой множества $A \subset \mathbb{R}^2$, если любая ее окрестность содержит как точки, принадлежащие A, так и точки, не принадлежащие A.
6) множество называется замкнутым, если его дополнение открыто; множество $\overline{U} \subset \mathbb{R}^2$ называется замкнутым, если содержит все свои граничные точки или содержит все свои предельные точки;
7) множество $\overline{H}$ называется компактом, если из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие; замкнутое ограниченное множество $\overline{H} \subset \mathbb{R}^2$ является компактом.

Дополнение 1_3. Существование полного решения.

Df. *Отношением частичного порядка или частичным порядком на множестве* M *называется бинарное отношение* $\preccurlyeq$ *(не превосходит), удовлетворяющее трем условиям:* 1) $\forall\, a:\ a \preccurlyeq a$ *(рефлексивность);* 2) $\forall\, a, b, c:\ a \preccurlyeq b$ *и* $b \preccurlyeq c \ \Rightarrow\ a \preccurlyeq c$ *(транзитивность);* 3) $\forall\, a, b:\ a \preccurlyeq b$ *и* $b \preccurlyeq a \ \Rightarrow\ a = b$ *(антисимметричность). При этом множество* M, *на котором задан частичный порядок, называется частично упорядоченным и обозначается* $\langle M, \preccurlyeq\rangle$.

Df. *Элементы* $a, b \in \langle M, \preccurlyeq\rangle$ *сравнимы* $(a \asymp b)$, *если* $a \preccurlyeq b$ *или* $b \preccurlyeq a$, *иначе эти элементы не сравнимы* $(a \not\asymp b)$. *Элемент* $a \in \langle M, \preccurlyeq\rangle$ *— максимален, если* $\forall\, b \in M \ \Rightarrow\ b \not\asymp a$ *или* $b \preccurlyeq a$.

Df. *Подмножество* Θ *множества* $\langle M, \preccurlyeq\rangle$ *называется цепью, если* $\forall\, a, b \in \Theta \Rightarrow a \asymp b$. *Цепь* A *имеет верхнюю грань, если существует элемент* $d \in M$, *называемый верхней гранью, такой, что* $\forall\, a \in \Theta \ \Rightarrow\ a \preccurlyeq d$.

Лемма Цорна. *Если любая цепь в множестве $\langle M, \preccurlyeq \rangle$ имеет верхнюю грань, то любой элемент из M не превосходит некоторого максимального элемента.*

Теорема (о существовании полного решения). *Любое решение уравнения (1.1) может быть продолжено до полного решения.*
Доказательство. Обозначим через M множество всех решений $y = \varphi(x)$ уравнения (1.1), определенных на промежутках I_φ, и зададим на нем частичный порядок: $\varphi_1 \preccurlyeq \varphi_2$, если $\varphi_2(x)$ является продолжением $\varphi_1(x)$, заданного на I_{φ_1}, на промежуток I_{φ_2}, или, если $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ на $I_{\varphi_1} = I_{\varphi_2}$.
Пусть Θ — какая-либо цепь в $\langle M, \preccurlyeq \rangle$.
Положим $I = \cup_{\varphi \in \Theta} I_\varphi$. Тогда I — это промежуток в $\mathbb{R}^1$, так как он является объединением попарно пересекающихся промежутков.
Определим функцию $y = \psi(x)$ на I следующим образом:

$$\forall\, \varphi \in \Theta,\ \forall\, x \in I_\varphi : \quad \psi(x) = \varphi(x).$$

Это определение корректно, поскольку любые две функции φ_1 и φ_2 из цепи Θ сравнимы, а значит, $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ при $x \in I_{\varphi_1} \cap I_{\varphi_2}$.

Из тех же соображений вытекает, что $y = \psi(x)$ является решением уравнения (1.1) на промежутке I, т. е. $\psi \in M$.
И, наконец, ψ является верхней гранью цепи, так как по определению $\varphi \preccurlyeq \psi$ для любой цепи $\varphi \in \Theta$.
Поэтому по лемме Цорна для любого решения $y = \varphi(x)$ уравнения (1.1), определенного на промежутках I_{φ}, существует максимальный элемент — это некоторое решение $y = \widetilde{\varphi}(x)$ на $I_{\widetilde{\varphi}}$, обладающее следующими свойствами: $y = \widetilde{\varphi}(x)$ является продолжением решения $y = \varphi(x)$ на $I_{\widetilde{\varphi}}$ и не существует решения, являющегося продолжением $y = \widetilde{\varphi}(x)$.
Следовательно, $y = \widetilde{\varphi}(x)$ — полное решение на $I_{max} = I_{\widetilde{\varphi}}$. $\square$

Дополнение 1_4. Верхнее и нижнее решение.

Лемма (о нижнем и верхнем решении задачи Коши). *Пусть* $(x_0, y_0) \in G$, $\overline{P}_h(x_0, y_0)$ *— какой-либо отрезок Пеано и* $\{\chi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *— произвольная последовательность решений задачи Коши уравнения (1.1) с н. д.* x_0, y_0, *определенных на* $[x_0 - h, x_0 + h]$. *Тогда функции* $y = \chi^d(x)$ $(d - down)$ *и* $y = \chi^u(x)$ $(u - up)$, *где*

$$\chi^d = \min\{\chi_1(x), \ldots, \chi_k(x), \ldots\}, \quad \chi^u = \max\{\chi_1(x), \ldots, \chi_k(x), \ldots\},$$

также являются решениями поставленной задачи на $\overline{P}_h(x_0, y_0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим

$$\forall\, k = 1, 2, \ldots\,,\ \forall\, x \in [x_0 - h, x_0 + h]: \quad \chi_k^d(x) = \min\{\chi_1(x), \ldots, \chi_k(x)\}.$$

Тогда $y = \chi_k^d(x)$ является решением (1.1) на $\overline{P}_h(x_0, y_0)$. Действительно, эта функция удовлетворяет всем трем условиям из определения решения, поскольку для любого $x_* \in [x_0 - h, x_0 + h]$ найдется такой индекс j $(1 \le j \le k)$, что $\chi_k^d(x_*) = \chi_j(x_*)$. В частности, если $\chi_j(x_*) = \chi_m(x_*)$, то $\chi_j'(x_*) = \chi_m'(x_*) = f(x_*, \chi_k^d(x_*))$.

Рассмотрим последовательность решений $\{\chi_k^d(x)\}_{k=1}^{\infty}$ на отрезке $[x_0 - h, x_0 + h]$. Поскольку все их графики располагаются в треугольнике T, полученном при построении отрезка Пеано, эта последовательность равномерно ограничена и равностепенно непрерывна (см. док-во т. Пеано). Следовательно, по лемме Асколи-Арцела из нее можно выделить равномерно на $\overline{P}_h(x_0, y_0)$ сходящуюся подпоследовательность, предел которой тоже будет решением уравнения (1.1) на отрезке Пеано. Но последовательность $\chi_k^d(x)$ монотонна, поэтому она сама будет сходиться к нижнему решению $y = \chi^d(x)$.
Аналогичным образом вводятся функции $\chi_k^u(x)$ и доказывается их сходимость к верхнему решению $y = \chi^u(x)$. $\square$

Дополнение 1_5. О локальной единственности решения граничной задачи Коши.

В $\S\,1$, п. 8^0 была доказана теорема о локальной единственности решения внутренней задачи Коши с н. д. x_0, y_0, устанавливающая равносильность понятий единственности решения задачи Коши в точке (x_0, y_0) и локальной единственности, когда точка $(x_0, y_0) \in G$.
Для того чтобы разобраться, когда эти понятия равносильны для точки $(x_0, y_0) \in \widehat{G}$, надо сначала привести определение локальной единственности решения граничной задачи Коши, уточняющее уже имеющееся определение для внутренней задачи Коши.

Уточнения связаны с тем, что граничная задача Коши в отличие от внутренней может вообще не иметь решений или не иметь решений, определенных на произвольном интервале $(\alpha, \beta) \ni x_0$.

Df. *Решение граничной задачи Коши уравнения* (1.1), *поставленной в точке* $(x_0, y_0) \in \widehat{G}$, *называется локально единственным справа, если для любого* $\beta > 0$ *эта задача не имеет решений на промежутке* $[x_0, \beta)$ *или найдется такой промежуток* $[x_0, \beta)$, *что все ее решения продолжимы на* $[x_0, \beta)$ *и для любых двух решений* $y = \varphi_1(x)$ *и* $y = \varphi_2(x)$, *при необходимости произвольным образом продолженных на* $[x_0, \beta)$, *имеем:* $\forall\, x \in [x_0, \beta): \quad \varphi_1(x) = \varphi_2(x)$. *Аналогично определяется решение, локально единственное слева.*

Df. *Решение граничной задачи Коши уравнения* (1.1), *поставленной в точке* $(x_0, y_0) \in \widehat{G}$, *называется локально единственным, если оно локально единственно и слева, и справа.*

Итак, будем предполагать, что точка (x_0, y_0), в которой поставлена граничная задача Коши, является точкой единственности для уравнения (1.1), а значит, по определению решение задачи Коши единственно в этой точке.

Проблема заключается в том, что для доказательства локальной единственности потребуется построить граничный отрезок Пеано, который, в отличие от отрезка Пеано для точек из области G, может отсутствовать. А результаты о наличии или отсутствии граничных отрезков были получены в § 3 только для нулевых начальных данных и при определенных условиях
на функцию $f(x, y)$.
Поэтому, в первую очередь, после выбора точки $(x_0, y_0) \in \widehat{G}$, сделаем обратимую замену переменных (1.15)
$u = x - x_0,\ v = y - y_0 - f(x_0, y_0)(x - x_0),$ преобразующую уравнение (1.1) в уравнение вида (1.14)

$$v' = f_0(u, v), \tag{$*$}$$

с функцией $f_0 = f(u + x_0, v + f(x_0, y_0)u + y_0) - f(x_0, y_0),$ определенной и непрерывной на множестве $\widetilde{G}_0 = G_0 \cup \widehat{G}_0,$ причем $f_0(0, 0) = 0.$ А граничную задачу Коши, поставленную в точке $(x_0, y_0),$ замена (1.15) преобразует в задачу Коши, поставленную в точке $(0, 0) \in \widehat{G}_0.$

Теорема (о локальной единственности решения граничной задачи Коши). *Пусть* $(x_0, y_0) \in \widehat{G}$ *— точка единственности уравнения* (1.1), *тогда решение задачи Коши с начальными данными* x_0, y_0 :

1) *локально единственно справа, если в правой полуплоскости для уравнения* $(*)$ *выполняется один из случаев* $\mathbf{v_1^+}$ *или оно удовлетворяет условиям теоремы о существовании решения граничной задачи Коши, т. е. выполняется один из случаев* $\mathbf{u_1^+}$ *или* $\mathbf{u_2^+}$ *с дополняющем его условием* (1.16^+);

2) *локально единственно слева, если уравнение* $(*)$ *в левой полуплоскости удовлетворяет условиям из пункта* 1), *в которых верхний индекс* "$+$" *заменен на индекс* "$-$".

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть для уравнения $(*)$ выполняется один из случаев $\mathbf{v_1^+}$, сформулированных в главе I, § 3, п. 1^0. Тогда по теореме об отсутствии решения граничной задачи Коши в правой полуплоскости не существует решения граничной задачи Коши уравнения $(*)$ с начальными данными $0, 0$, а значит, по определению решение этой граничной задачи локально единственно справа.

Пусть теперь для уравнения $(*)$ выполняется любой из случаев $\mathbf{u_1^+}$ или любой из случаев $\mathbf{u_2^+}$ при соответствующем условии (1.16^+).
В главе I, § 3, п. 2^0 показано, как для точки $O=(0,0)\in\widehat{G}$ во всех девяти случаях $\mathbf{u}^+$ построить правый граничный треугольник $\overline{T}_b^+$ и правый граничный отрезок Пеано $\overline{P}_{h^+}^+(O)=[0,h^+]$ $(h^+>0)$.
По теореме о существовании решения граничной задачи Коши на любом $\overline{P}_{h^+}(O)$ существует по крайней мере одно решение $v=\psi(u)$ такое, что $\psi(0)=0$.
Локальная единственность этого решения доказывается дословно также, как это сделано при доказательстве теоремы о локальной единственности решения внутренней задачи Коши, только все рассуждения проводятся в правой полуплоскости.
Осуществив в уравнении $(*)$ замену $v=y-y_0-f(x_0,y_0)(x-x_0)$, $u=x-x_0$, обратную к (1.15), вновь получим уравнение (1.14), решение задачи Коши которого
$y=y_0+f(x_0,y_0)(x-x_0)+\psi(x-x_0)$ с н. д. x_0,y_0 локально единственно справа на отрезке $[x_0,x_0+h^+]$.
Пункт 2) теоремы доказывается аналогично. $\square$

Дополнение 1_6. Метод изоклин и его применение.

Df. *Изоклиной уравнения* (1.1) *называется любая кривая, расположенная в* $\widetilde{G}$, *в каждой точке которой направление поля имеет один и тот же угол наклона.*

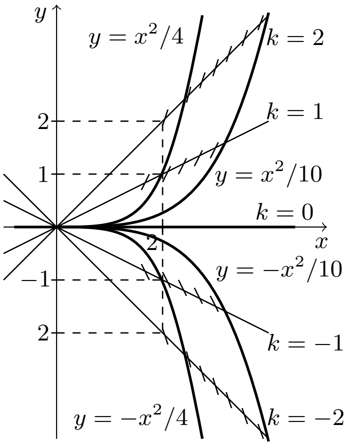
Поэтому все изоклины задаются уравнением

$$f(x, y) = k,$$

где k — любое вещественное число из области изменения $f(x, y)$.

Метод изоклин заключается в том, чтобы, нарисовав достаточное число изоклин и отрезков поля на них, начертить все характерные интегральные кривые, которые, попадая на очередную изоклину, должны касаться отрезков поля направлений, построенных на ней.

Пример 11. *В уравнении* $y' = 2y/x$ *правая часть определена, непрерывна и непрерывно дифференцируема по* y *в областях* $G_1^o = \{(x, y)\colon\ x < 0,\ y \in \mathbb{R}^1\}$ *и* $G_2^o = \{(x, y)\colon\ x > 0,\ y \in \mathbb{R}^1\}$. *Уравнение для изоклин имеет вид:* $2y/x = k$ *или* $y = (k/2)x$ *— это множество лучей, выходящих из начала координат.*



Построим несколько изоклин в G_+^o :
$k = -2$: *изоклина* $y = -x$ *пересекается интегральными кривыми, имеющими в точке пересечения угол наклона* $\alpha = -\operatorname{arctg} 2$;
$k = -1$: *изоклина* $y = -x/2$, $\alpha = -\pi/4$;
$k = 0$: *изоклина* $y \equiv 0$, $\alpha = 0$, *т. е. отрезки поля направлений лежат на изоклине, которая в данном случае является решением, что проверяется непосредственной подстановкой в уравнение;*
$k = 1$: *изоклина* $y = x/2$, $\alpha = \pi/4$;
$k = 2$: *изоклина* $y = x$, $\alpha = \operatorname{arctg} 2$;

при дальнейшем росте k изоклины выходят из начала координат под все большим углом и в точках пересечения с каждой из них интегральные кривые имеют все больший угол наклона, стремящийся к $\pi/2$ при $k \to +\infty$.
Построенные методом изоклин интегральные кривые напоминают параболы, которыми, конечно, и являются, так как общее решение уравнения имеет вид $y = Cx^2$. Эта формула верна и в G_+^o, и G_-^o.

Иногда метод изоклин бывает полезен при решении конкретных задач Коши, так как использование изоклин с вертикальными и горизонтальными отрезками поля направлений на них может помочь найти границы максимального интервала существования, особенно в тех случаях, когда полученное в неявном виде решение не удается разрешить ни относительно y, ни относительно x.

Г Л А В А II
Дифференциальные уравнения первого порядка в симметричной форме

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ, ЕГО СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ

1^0. Объект изучения.

В главе I рассматривалось уравнение первого порядка (1.1) $y' = f(x,y)$, разрешенное относительно производной. Недостатком уравнения (1.1) является его несимметричность относительно переменных x и y. В частности, интегральную кривую такого уравнения нельзя продолжить за точку с вертикальной касательной. Чтобы не исключать вертикальные направления, можно рассматривать "перевернутое" уравнение $dx/dy = 1/f(x,y)$, в нем переменные x и y, фактически, меняются местами. Это уравнение равносильно (1.1) всюду в области G, где $f(x,y) \neq 0$, но имеет аналогичный недостаток. Существует симметричная форма записи уравнения первого порядка, которая объединяет и обобщает как уравнение (1.1), так и перевернутое уравнение.

Уравнение первого порядка в симметричной форме имеет вид

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \tag{2.1}$$

и в нем вещественные функции M и N определены и непрерывны на связном множестве

$$\widetilde{B} = B \cup \widehat{B} \cup \breve{B},$$

где B — это область в $\mathbb{R}^2$, в которой

$$M^2(x,y) + N^2(x,y) \neq 0, \tag{2.2}$$

множества $\widehat{B}$, $\breve{B}$, возможно пустые, состоят из граничных точек области B, причем для точек из множества $\widehat{B}$ условие (2.2) выполняется, а для точек из множества $\breve{B}$ — нет.
Таким образом, ни в одной из точек множеств B и $\widehat{B}$ функции M и N не могут одновременно обратиться в нуль, а для любой точки $(x,y) \in \breve{B}$ справедливы равенства $M(x,y) = N(x,y) = 0$.

Df. *Множество* $\breve{B}$ *называется особым и состоит из особых точек. Точки из множества* $B \cup \widehat{B}$ *— обыкновенные или неособые.*

Выделим множества нулей функций M и N, положив

$$\overline{M^0} = \{(x, y) \in \widetilde{B} \colon M(x, y) = 0\}, \quad \overline{N^0} = \{(x, y) \in \widetilde{B} \colon N(x, y) = 0\},$$

тогда множество $\breve{B} \subset \overline{M^0} \cap \overline{N^0}$.

Отметим, что каждое из множеств $\overline{M^0}$ и $\overline{N^0}$ замкнуто, так как на любой сходящейся последовательности точек из $\overline{M^0}$, например, функция M принимает нулевые значения, а значит, в силу непрерывности будет равна нулю и в предельной точке.

Следует также помнить, что в каждой точке множества

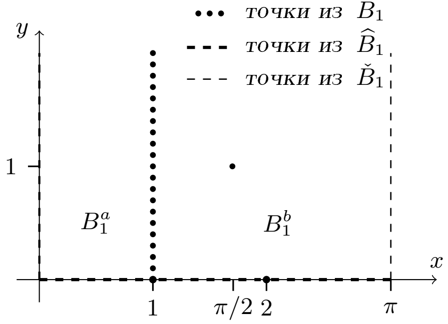
$$\breve{B} = \partial B \backslash (\widehat{B} \cup \breve{B})$$

хотя бы одна из функций M или N не определена или разрывна.

Пример 1. *Пусть в уравнении (2.1)*

$$M(x,y) = \sqrt{y}(x-1)\operatorname{ctg} x, \quad N(x,y) = (y-1)(x-2)\ln x.$$

Тогда M *и* N *непрерывны на связных множествах* $\widetilde{B}_n = \{(x,y)\colon\ (n-1)\pi < x < n\pi,\ y \geq 0\}$ $(n \in \mathbb{N})$. *При этом луч* $\{x = n\pi,\ y \geq 0\}$ *— общая граница* $\widetilde{B}_n$ *и* $\widetilde{B}_{n+1}$, *так как функция* $M(x,y)$ *на нем не определена. По той же причине положительная полуось ординат — левая граница* $\widetilde{B}_1$. *На ней, к тому же, не определена и функция* N.
Но каждое из множеств $\widetilde{B}_n$ *разбивается еще на два множества.*



Например, $\widetilde{B}_1$ распадается в объединение двух связных множеств с общей границей: $\widetilde{B}_1 = \widetilde{B}_1^a \cup \widetilde{B}_1^b$, где
$\widetilde{B}_1^a = \{(x,y)\colon\ 0 < x \leq 1,\ y \geq 0\}$, $\widetilde{B}_1^b = \{(x,y)\colon\ 1 \leq x < \pi,\ y \geq 0\}$, поскольку состоящий из особых точек луч $\{x = 1,\ y \geq 0\}$ — граница $\widetilde{B}_1^a$ и $\widetilde{B}_1^b$ — разбивает область
$B_1 = \{(x,y)\colon\ 0 < x < \pi,\ y > 0\}$ на две области. Поэтому предложенное уравнение в симметричной форме следует, вообще говоря, рассматривать отдельно на множествах $\widetilde{B}_1^a$ и $\widetilde{B}_1^b$.
Множество $\widetilde{B}_1^b$ в силу разложения в (2.1) состоит из области
$B_1^b = \{(x,y)\colon\ 1 < x < \pi,\ y > 0\} \backslash \{(\pi/2, 1)\}$ и множеств граничных точек $\widehat{B}_1^b = \{x \in (1,2) \cup (2,\pi),\ y = 0\}$ и
$\breve{B}_1^b = \{x \equiv 1,\ y \geq 0\} \cup \{(\pi/2, 1)\} \cup \{(2,0)\}$, причем $(\pi/2, 1)$ является внутренней особой точкой $\widetilde{B}_1^b$.

2^0. Решения уравнения в симметричной форме.
Сравним уравнение симметричной форме (2.1) с уравнением (1.1), разрешенным относительно производной.
Уравнение (1.1) $y' = f(x,y)$ с $f \in C(\widetilde{G})$ или аналогичное ему "перевернутое" уравнение $x' = g(x,y)$ с $g \in C(\widetilde{G})$ на всем множестве $\widetilde{G}$ равносильно уравнению в симметричной форме

$$f(x,y)dx - 1 \cdot dy = 0 \quad \text{или} \quad 1 \cdot dx - g(x,y)dy = 0, \qquad (2.1^a)$$

поскольку в обоих случаях все точки множества $\widetilde{G}$ — обыкновенные.
Не так обстоит дело с уравнением (2.1), определенном на $\widetilde{B}$.
Обозначим через $\widetilde{B}_N$ и $\widetilde{B}_M$ произвольные компоненты связности соответственно множества $\widetilde{B}\backslash\overline{N^0}$, на котором $N(x,y) \neq 0$, и $\widetilde{B}\backslash\overline{M^0}$, на котором $M(x,y) \neq 0$. Введем также множества $\widetilde{B}_{MN} = \widetilde{B}_M \cap \widetilde{B}_N$.
Очевидно, что все три разновидности введенных множеств могут иметь общие границы и состоят из обыкновенных точек.

Уравнение (2.1) на любом из множеств $\widetilde{B}_N$ равносильно уравнению, разрешенному относительно производной,

$$dy/dx = -M(x,y)/N(x,y), \tag{2.3$_1$}$$

на множествах $\widetilde{B}_M$ оно равносильно "перевернутому" уравнению

$$dx/dy = -N(x,y)/M(x,y). \tag{2.3$_2$}$$

а на любом из множеств $\widetilde{B}_{MN}$ уравнение в симметричной форме (2.1) равносильно каждому из уравнений (2.3).
Но на любом подмножестве множества $\widetilde{B}_N$, содержащем хотя бы одну точку из $\overline{M^0}$, от (2.1) можно перейти только к уравнению (2.3_1), так как в уравнении (2.3_2) знаменатель обращается в нуль в точках $\overline{M^0}$. Аналогично обстоит дело в случае, когда $\widetilde{B}_M \cap \overline{N^0} \neq \emptyset$.
Указанное обстоятельство приводит к вынужденному обобщению понятия решения уравнения (2.1).

Df. *Решением уравнения* (2.1) *называется определенная на некотором промежутке* $\langle a, b\,\rangle$ *функция* $y = \varphi(x)$ *или функция* $x = \psi(y)$, *удовлетворяющая следующим трем условиям:*

1) *функция* $\varphi(x)$ *или функция* $\psi(y)$ *дифференцируема на* $\langle a, b\,\rangle$,
2) *точка* $(x, \varphi(x)) \in \widetilde{B} \backslash \breve{B}$ *для любого* $x \in \langle a, b\,\rangle$ *или*
 точка $(\psi(y), y) \in \widetilde{B} \backslash \breve{B}$ *для любого* $y \in \langle a, b\,\rangle$,
3) $M(x, \varphi(x)) + N(x, \varphi(x))\varphi'(x) \equiv 0$ *на* $\langle a, b\,\rangle$ *или*
 $M(\psi(y), y)\psi'(y) + N(\psi(y), y) \equiv 0$ *на* $\langle a, b\,\rangle$.

При этом решения уравнения (2.1) *подразделяются на внутренние, граничные и смешанные в соответствии с аналогичным подразделением решений уравнения* (1.1).

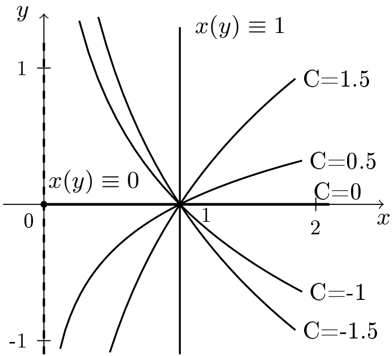
Для себя сразу отметим, что по определению график любого решения уравнения (2.1) состоит только из обыкновенных точек.

Замечание 1. *По аналогии с уравнением (1.1) для уравнения (2.1) вводится понятие полного решения, в котором максимальный интервал указывается либо для решения* $y = \varphi(x)$, *график которого лежит в* $\widetilde{B}_N$, *либо для решения* $x = \psi(y)$ *с графиком из* $\widetilde{B}_M$.

Из определения решения уравнения (1.1) вытекает, что любое решение уравнения, разрешенного относительно производной, в том числе "перевернутого" , будет решением соответствующего уравнения в симметричной форме (2.1^a).
Убедимся теперь в том, что любое решение уравнения (2.1) является решением по крайней мере одного из уравнений (2.3).
Пусть, например, $y = \varphi(x)$ является решением уравнения (2.1).
Тогда согласно тождеству $3_1)$ $N(x, \varphi(x)) \neq 0$ для $\forall\, x \in \langle a, b\,\rangle$, так как, если допустить, что $\exists\, x_* \in \langle a, b\,\rangle :\ N(x_*, \varphi(x_*)) = 0$, то и $M(x_*, \varphi(x_*)) = 0$, и точка $(x_*, \varphi(x_*))$ — особая.
Поэтому $d\varphi(x)/dx \equiv -M(x, \varphi(x))/N(x, \varphi(x))$ при $x \in \langle a, b\,\rangle$, а значит, на этом промежутке функция $y = \varphi(x)$ по определению является решением уравнения (2.3_1).
Аналогичные рассуждения справедливы для решения $x = \psi(y)$, удовлетворяющего тождеству $3_2)$.

В результате на множестве обыкновенных точек уравнение (2.1) по сравнению с (1.1) может иметь больше решений за счет возможности сведения его еще и к уравнению вида $x' = g(x, y)$.

Пример 2. *Уравнение в симметричной форме* $y dx = x \ln x \, dy$ *определено на множестве* $\widetilde{B} = \{(x, y)\colon\ x \geq 0,\ y \in \mathbb{R}^1\}$, *так как, следуя замечанию 1 из главы I, функцию* $x \ln x$ *при* $x = 0$ *следует, сохраняя непрерывность, доопределить нулем. Тогда множество* $\breve{B}$ *состоит из двух особых точек* $(0, 0)$ *и* $(1, 0)$, *а множество граничных точек* $\widehat{B} = \{x = 0,\ y \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)\}$. *Помимо двух классических общих решений* $y = C \ln x$, *определенных при* $x > 1$ *и* $x \in (0, 1)$, *это уравнение имеет еще два внутренних решения:* $x(y) \equiv 1$ *при* $y < 0$ *или при* $y > 0$ *и два граничных решения* $x(y) \equiv 0$ *при* $y < 0$ *или при* $y > 0$. *Для любой константы* C *графики решений* $y = C \ln x$ $(x \neq 1)$ *и лучи* $x(y) \equiv 1$ $(y \neq 0)$ *одним из своих концов примыкают к особой точке* $(1, 0)$, *причем каждая пара — со своим углом наклона касательной. А к особой точке* $(0, 0)$ *примыкают оба граничных решения и решение* $y(x) \equiv 0$ *с* $x \in (0, 1)$.



Если же предложенное уравнение разрешить относительно производной, то уравнение $y' = y/(x \ln x)$ *будет определено в областях* $G_1 = \{(x, y)\colon\ x \in (0, 1),\ y \in \mathbb{R}^1\}$ *и* $G_2 = \{(x, y)\colon\ x \in (1, +\infty),\ \ y \in \mathbb{R}^1\}$, а прямые $x(y) \equiv 0, 1$ *станут границами этих областей, что приведет к потере четырех решений. Аналогично, уравнение* $dx/dy = y^{-1} x \ln x$ *"теряет" решения* $y(x) \equiv 0 \ \ (x \neq 1)$.

Переформулируем теперь понятия решение задачи Коши и точки единственности для уравнения (2.1).

Выберем в качестве начальных данных координаты произвольной точки $(x_0, y_0) \in \widetilde{B} \backslash \breve{B}$. Если $(x_0, y_0) \in \widetilde{B}_N$, то на этом множестве уравнение (2.1) сводится к уравнению (2.3_1), решение задачи Коши которого с н. д. x_0, y_0 и будет по определению решением задачи Коши для уравнения (2.1). Аналогично определение решения задачи Коши для точки $(x_0, y_0) \in \widetilde{B}_M$.

Разумеется, если $(x_0, y_0) \in \widetilde{B}_{MN}$, то в окрестности этой точки решение задачи Коши может быть записано как в виде функции x, так и в виде функции y. И это могут быть как различные решения, так и одно и то же решение, но по разному параметризованное.

Df. *Точка* $(x_0, y_0) \in \widetilde{B} \backslash \breve{B}$ *называется точкой неединственности уравнения* (2.1), *если хотя бы для одного из уравнений* (2.3) *она окажется точкой неединственности. В противном случае* (x_0, y_0) *— это точка единственности.*

Замечание 2. *Решения уравнения* (2.1) *могут быть частными или специальным точно так же, как это происходит с решениями уравнения, разрешенного относительно производной. Так, для уравнений, рассмотренных в примере 7 гл. I, § 1, п.* 9^0 *и переписанных в симметричном виде, можно дословно повторить все проведенные там рассуждения, касающиеся частных и специальных решений.*

3^0. Интегральные кривые.

Одним из достоинств уравнения в симметричной форме является возможность обобщить понятие интегральной кривой, введенное для уравнений (1.1), поскольку появилась возможность продолжать ее за точку с вертикальной касательной. Действительно, через каждую точку множества $\widetilde{B}\backslash\breve{B}$, используя одно из уравнений (2.3), можно провести отрезок поля, построив, тем самым, на множестве B поле направлений уравнения (2.1). Разумеется, если на некотором множестве уравнение (2.1) можно свести как к первому, так и ко второму уравнению (2.3), то отрезки поля направлений в каждой точке этого множества будут иметь одинаковые углы наклона.

Наличие поля направлений позволяет сохранить геометрическое определение интегральной кривой. А именно, интегральной кривой уравнения (2.1) на множестве $\widetilde{B} \backslash \breve{B}$ назовем любую гладкую кривую, лежащую в этом множестве, направление касательной к которой в каждой точке совпадает с направлением поля в этой точке.

Таким образом, локально дуга интегральной кривой задается или функцией $y = \varphi(x)$, или функцией $x = \psi(y)$.

Например, единичная окружность является одной из интегральных кривых уравнения $x\,dx + y\,dy = 0$. Поэтому в окрестностях точек $(0, 1)$ или $(0, -1)$, где касательные к ней близки к горизонтальной, интегральная кривая задается функциями $y = (1 - x^2)^{1/2}$ или $y = -(1 - x^2)^{1/2}$, а в окрестности точек $(1, 0)$ или $(-1, 0)$, где касательные близки к вертикальной, — функциями $x = (1 - y^2)^{1/2}$ или $x = -(1 - y^2)^{1/2}$. В окрестностях остальных точек окружность может быть представлена и как функцией x, и как функцией y.

Очевидно, что в области единственности любые две интегральные кривые, имеющие хотя бы одну общую точку, совпадают.

4^0. Особые решения уравнения в симметричной форме. Еще одно существенное отличие уравнения в симметричной форме от уравнения, разрешенного относительно производной, заключается в том, что в связи с появлением множества $\breve{B}$ уравнение (2.1) может иметь ранее не встречавшуюся разновидность решений.

Df. *Функцию* $y = \varphi^0(x)$ *или* $x = \psi^0(y)$, *определенную и дифференцируемую на некотором промежутке* $\langle a, b\,\rangle$, *будем называть особым решением уравнения* (2.1), *если для любого* $x \in \langle a, b\,\rangle$ *точка* $(x, \varphi^0(x)) \in \breve{B}$ *или для любого* $y \in \langle a, b\,\rangle$ *точка* $(\psi^0(y), y) \in \breve{B}$.

Таким образом, уравнение в симметричной форме может иметь как решения, так и особые решения или, что то же самое, особые граничные решения. График любого решения состоит из обыкновенных точек, а график любого особого решения — из особых точек.

Замечание 3. *Условие* 3) *из определения решения уравнения (2.1) отсутствует в определении особого решения потому, что выполняется автоматически, так как по условию* 1) *во всех точках* $\langle a, b \rangle$ *производная функции* φ^0 *или* ψ^0 *существует, а значит, конечна, в то время, как функции* M *и* N *в тождествах* 3) *равняются нулю.*

Замечание 4. *Гладкость любого решения уравнения (2.1), гарантируемая непрерывностью функций* M *и* N *на* $\widetilde{B}$, *вытекает непосредственно из определения, как это происходит и для решений уравнения (1.1) (см. замечание 6 из главы* I). *Однако, нельзя гарантировать непрерывную дифференцируемость особого решения. Она будет зависеть от гладкости соответствующей части множества* $\breve{B}$.

Замечание 5. *Важно, что уравнение симметричной форме (2.1) по определению рассматривается только на множестве* $\widetilde{B}$, *для которого условие (2.2) может нарушаться только в граничных точках.*
Если бы оно могло содержать, например, множество $\overline{A}$ *— замыкание области* $A \subset \mathbb{R}^2$, *на котором* $M(x,y) = N(x,y) = 0$, *то по определению в качестве особых решений уравнения (2.1) получили бы любые дифференцируемые функции, чьи графики лежат в* $\overline{A}$.
А при наших предположениях область A, *в которой лежат графики "странных" решений, из рассмотрения исключается наряду с той частью своей границы, которая в связи с удалением* A *перестает быть границей области* B.
Описанная ситуация встретится в $\S\,2, \text{п.}\, 5^0$.

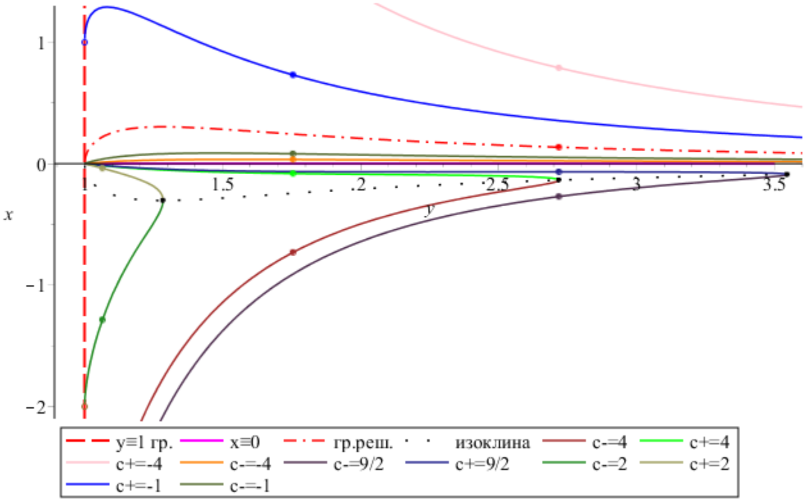
Решение задачи Коши в особой точке (x_0, y_0) определяется естественным образом — это особое решение уравнения (2.1) $y = \varphi^0(x)$ или $x = \psi^0(y)$ такое, что $\varphi^0(x_0) = y_0$ или $\psi^0(y_0) = x_0$.

Для более подробного знакомства с множествами особых точек уравнения (2.1) приведем два достаточно интересных уравнения. Особые точки первого из них образуют кривую, параметризуемую особым решением и разделяющую область непрерывности функций M и N на две области. Второе уравнение имеет только изолированные особые точки, одна из которых — внутренняя точка области B, а другая разделяет графики граничных решений, лежащие в $\widehat{B}$.

Пример 3. *Рассмотрим уравнение в симметричной форме*

$$(y\ln y - x^2y^5)\,dx + (x^2y^2\ln^{-1/2} y - 2x^3y^4 + 2x\ln y - x)\,dy = 0, \quad (2.4)$$

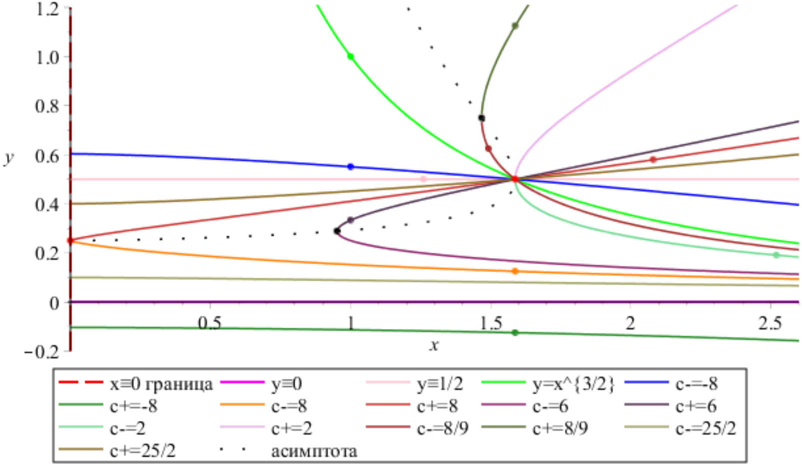
с функциями M, N *непрерывными в области*
$B^* = \{x \in \mathbb{R}^1,\ y > 1\}$.
Найдем множество особых точек $\breve{B}$ *уравнения (2.4).*
Имеем: $M(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = \pm y^{-2}\ln^{1/2} y$.
Подставляя эти функции в равенство $N(x,y) = 0$, *выясняем, что функция* $x = y^{-2}\ln^{1/2} y \quad (y \in (0,+\infty))$ *является гладким особым решением и его график образует множество* $\breve{B}$. *В то же время, функция* $x = y^{-2}\ln^{1/2} y \quad (y \in (0,+\infty))$ *параметризует изоклину для вертикальных отрезков поля направлений.*
В результате область B^* *естественным образом распадается на два связных множества* $\widetilde{B}_1 = \{(x,y)\colon\ x \le y^{-2}\ln^{1/2} y,\ y > 1\}$ *и* $\widetilde{B}_2 = \{(x,y)\colon\ x \ge y^{-2}\ln^{1/2} y,\ y > 1\}$, *имеющих общую границу* $\breve{B} = \{x = y^{-2}\ln^{1/2},\ y > 0\}$, *которая состоит из особых точек и является особым граничным решением.*


1
0
−1
−2
1
1.5
2
2.5
3
3.5
x
y
y≡1 гр.
x≡0
гр.реш.
изоклина
c-=4
c+=4
c+=-4
c-=-4
c-=9/2
c+=9/2
c-=2
c+=2
c+=-1
c-=-1

Пример 4. *Рассмотрим уравнение в симметричной форме*

$$3x^{1/2}(2y-1)y^2\,dx+(8y-2-4x^{3/2}y^2)\,dy=0. \tag{2.5}$$

для которого согласно (2.1) $\widetilde{B}=B\cup\widehat{B}\cup\breve{B}$, *где множество особых точек* $\breve{B}$ *состоит из дух точек* $(0,1/4)$ *и* $(2^{2/3},1/2)$, *поскольку только в этих точках функции* M *и* N *одновременно обращаются в нуль, множество граничных точек* $\widehat{B}=\{x=0,\ y\in\mathbb{R}^1\backslash\{1/4\}\}$ *и область* $B=\{(x,y)\colon\ x>0,\ y\in\mathbb{R}^1\}\backslash\{(2^{2/3},1/2)\}$. *При этом к внутренней особой точке* $(2^{2/3},1/2)$ *области* B *графики решений примыкают с любыми углами наклона касательных, а к граничной особой точке* $(0,1/4)$ *примыкают графики только двух решений и с различными углами наклона касательных.*



1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
y
0.5
1
1.5
2
2.5
x
x=0 граница
y=0
y=1/2
y=x^{3/2}
c-=-8
c+=-8
c-=8
c+=8
c-=6
c+=6
c-=2
c+=2
c-=8/9
c+=8/9
c-=25/2
c+=25/2
асимптота

Пример 4 интересен тем, что большинство его решений практически, а не теоретически, удается записать как в виде $y = \varphi(x)$, так и в виде $x = \psi(y)$, и убедиться, что в первом случае решения параметризуют только части интегральных кривых (до точек с вертикальными касательными), а во втором явно выписанные функции параметризуют всю интегральную кривую.

В приложениях 2_1 и 2_2 приведены подробные решения уравнений (2.4) и (2.5) с использованием интегрирующих множителей (см. ниже $\S\,3$, п. 2^0), а также найдены решения ряда характерных задач Коши, позволяющие продемонстрировать различные параметризации интегральных кривых и различные возможности их примыкания к особым точкам и к границам.

В заключение этого пункта отметим, что особые решения возникают, как правило, при решении уравнений Клеро $y = xy' + v(y')$ и уравнений Лагранжа $y = xu(y') + v(y')$ (см. напр. [2, гл. I, § 6, п. 3]), являющихся разновидностью уравнений первого порядка, не разрешенных относительно производной.

5^0. Существование и единственность решения. Поскольку уравнение (2.1) в некоторой окрестности любой неособой точки из множества $\widetilde{B}$, а точнее, на множествах $\widetilde{B}_N$ или $\widetilde{B}_M$, сводится к одному из уравнений (2.3), разрешенных относительно производной, то все локальные определения и теоремы главы I остаются верными и для уравнений в симметричной форме. Часть из них уже была переформулирована выше.

Замечание 6. *В дальнейшем при обсуждении теоретических вопросов, связанных с решениями уравнения симметричной форме (2.1), оно будет рассматриваться только в области* B, *в которой по определению отсутствуют особые точки. Связано это с тем, что использование в качестве области определения непрерывных функций* M *и* N *более широкого множества* $\widetilde{B}$ *требуется, вообще говоря, только для практического решения граничных задач Коши. Вопросы существования таких решений для уравнения (1.1) были разобраны в § 3 главы I. В результате график любого решения будет принадлежать области, а значит, по определению все решения будут внутренними и их максимальные интервалы существования всегда будут интервалами.*

Теорема (о существовании решения). *Пусть в уравнении* (2.1) *функции* $M(x,y)$ *и* $N(x,y)$ *непрерывны в области* B, *тогда для любой точки* $(x_0,y_0)\in B$ *и для любого отрезка Пеано* $P_h(x_0,y_0)$, *построенного для первого или второго уравнения* (2.3), *которое определено в некоторой* c*-окрестности* $V_c(x_0,y_0)\subset B$, *на* $P_h(x_0,y_0)$ *существует по крайней мере одно решение задачи Коши уравнения* (2.1) *с начальными данными* x_0,y_0.

Теорема (о единственности в области, слабая). *Пусть в уравнении* (2.1) *функции* $M(x,y)$ *и* $N(x,y)$ *непрерывны в области* B, *а в области* $B^{\circ}\subset B$ *выполняется хотя бы одно из двух условий: a)* $N(x,y)\neq 0$, *существуют и непрерывны* $\partial M(x,y)/\partial y$, $\partial N(x,y)/\partial y$; *b)* $M(x,y)\neq 0$, *существуют и непрерывны частные производные* $\partial M(x,y)/\partial x$, $\partial N(x,y)/\partial x$. *Тогда* B° *— это область единственности для уравнения* (2.1).

Действительно, при выполнении условия а), например, в B° (2.1) равносильно уравнению (1.1) с $f=-M/N$, и частная производная $\partial f/\partial y=(M\,\partial N/\partial y-N\,\partial M/\partial y)/N^2$ существует и непрерывна, а значит, верна слабая теорема о единственности из гл. I, § 4, п. 3^0.

Следствие. *Область* B *будет областью единственности для уравнения* (2.1), *если найдется открытое покрытие ее областями, для каждой из которых выполняется хотя бы одно из условий a) или b), приведенных в формулировке теоремы.*

Г Л А В А III
Нормальные системы ОДУ

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

1^0. Виды систем.

В общем виде система из n обыкновенных дифференциальных уравнений с n неизвестными выглядит следующим образом

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(m_n)}) = 0, \\ \quad \ldots \\ F_n(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(m_n)}) = 0. \end{cases} \tag{3.1*}$$

Решением системы будем называть n функций $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, определенных на некотором промежутке $\langle a, b \rangle$ таких, что подстановка их в систему обращает ее в n тождеств на $\langle a, b \rangle$. Система (3.1^*) называется системой, не разрешенной относительно старших производных функций $y_1(x), \ldots, y_n(x)$. Очевидно, что при $n = 1$ и $m_1 = 1$ она превращается в уравнение первого порядка $F(x, y, y') = 0$, не разрешенное относительно производной.

Первым шагом на пути как теоретического, так и практического решения системы (3.1^*), должна стать попытка разрешить ее относительно старших производных. Если эта попытка удастся, то система (3.1^*) примет вид

$$\begin{cases} y_1^{(m_1)} = f_1(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1-1)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(m_n-1)}), \\ \quad \ldots \\ y_n^{(m_n)} = f_n(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1-1)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(m_n-1)}). \end{cases} \tag{3.1**}$$

Система (3.1^{**}), естественно, называется системой, разрешенной относительно старших производных. При $n = 1$ и $m_1 = 1$ она превращается в хорошо знакомое, изученное в главе I уравнение первого порядка $y' = f(x, y)$, разрешенное относительно производной.

Рассмотрим два важнейших частных случая системы (3.1^{**}) :
I. $m_1 = \ldots = m_n = 1,$
II. $n = 1 \quad (m_1 = m).$
В случае I система (3.1^{**}) превращается в систему

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1 \ldots, y_n), \\ \quad \ldots \\ y_n' = f_n(x, y_1 \ldots, y_n), \end{cases} \tag{3.1}$$

которая называется н о р м а л ь н о й с и с т е м о й обыкновенных дифференциальных уравнений порядка n и будет являться основным объектом изучения в этой главе. А различные частные случаи нормальной системы (3.1) предстоит изучать в последующих главах.

В случае II система (3.1^{**}) превращается в уравнение

$$y^{(m)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(m-1)}), \tag{3.2}$$

которое называется обыкновенным дифференциальным уравнением порядка m, разрешенным относительно старшей производной.

Следует иметь в виду, что уравнение (3.2) является частным случаем нормальной системы (3.1) порядка m, так как это уравнение всегда можно свести к системе стандартной заменой переменных

$$y = y_1,\ y' = y_2,\ \ldots,\ y^{(m-1)} = y_m. \tag{3.3}$$

Последовательно дифференцируя равенства (3.3) и подставляя в последнее правую часть (3.2), получаем нормальную систему

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ \quad \ldots \\ y_{m-1}' = y_m, \\ y_m' = f(x, y_1 \ldots, y_m). \end{cases} \tag{3.4}$$

Система (3.4) эквивалентна уравнению (3.2) в следующем смысле: если $y = \varphi(x)$ является решением уравнения (3.2), то вектор $(\varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(m-1)}(x))$ — это решение системы (3.4), и наоборот, если $(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x))$ является решением системы (3.4), то функция $y = \varphi_1(x)$ — это решение уравнения (3.2).

В заключение отметим, что любую систему (3.1^{**}) всегда можно свести к нормальной системе более высокого порядка путем введения в системе (3.1^{**}) в качестве новых переменных производных функций $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, как это делалось для уравнения (3.2) в замене (3.3).

2^0. Решения нормальной системы и векторная запись. В дальнейшем будет рассматриваться нормальная система (3.1)

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1 \ldots, y_n), \\ \quad \ldots \\ y_n' = f_n(x, y_1 \ldots, y_n), \end{cases}$$

в которой вещественные функции $f_1, \ldots, f_n \in C(G)$, т. е. непрерывны в области $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — пространстве переменных $x, y_1, \ldots, y_n$.

Df. *Решением нормальной системы* (3.1) *называются* n *непрерывных на промежутке* $\langle a, b \rangle$ *функций* $y_1 = \varphi_1(x), \ldots, y_n = \varphi_n(x)$, *для всякого* $x \in \langle a, b \rangle$ *удовлетворяющих следующим условиям:*

1) *функции* $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ — *дифференцируемые,*
2) *точка* $(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)) \in G$,
3) $\varphi_i{}'(x) = f_i(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)) \quad (i = \overline{1, n})$.

Из условия 3), в частности, вытекает, что все функции $\varphi_i(x)$ непрерывно дифференцируемы на $\langle a, b\rangle$, т. е. $\varphi_i \in C^1(\langle a, b\rangle)$.

Иными словами, решением системы (3.1) является гладкая на некотором промежутке $\langle a, b\rangle$ вектор-функция $y = \varphi(x)$, чей график лежит в области G, а подстановка в систему обращает последнюю в тождество.

Следует отметить, что при $n = 1$ данное определение совпадает с определением внутреннего решения уравнения (1.1), так как система (3.1) будет рассматриваться только в области G. Тем самым, любое решение нормальной системы является внутренним решением.

Нормальную систему гораздо удобнее и короче записывать в векторном виде:

$$y' = f(x, y), \tag{3.1}$$

где $y = \text{colon}\,(y_1, \ldots, y_n)$, $y' = \text{colon}\,(y_1', \ldots, y_n')$, а вектор-функция $f = \text{colon}\,(f_1, \ldots, f_n)$. Естественно, ей присвоен тот же номер (3.1).

В векторной записи решение — это вектор-функция $y = \varphi(x)$, заданная на промежутке $\langle a, b\rangle$, с указанными выше свойствами.

В дополнении 3_1 собраны используемые в дальнейшем определения, связанные в векторами и вектор-функциями.

В частности, следует помнить, что при изучении нормальных систем дифференциальных уравнениях удобно использовать норму вектора, задаваемую следующим образом:
$\|y\| = \max\{|y_1|, \ldots, |y_n|\}$.

В дальнейшем при желании вектор-функции для краткости будем называть функциями.

3^0. Обобщение определений и результатов из главы I. Перечислим те основные определения и результаты, касающиеся уравнений первого порядка, разрешенных относительно производной, которые без изменений переносятся на n-мерный случай путем замены при необходимости модуля скалярной величины на норму векторной величины, не забывая при этом, что востребованы будут только внутренние объекты, так как правая часть системы (3.1) определена именно в области.

1) Определение решения интегрального уравнения и теорема о связи между дифференциальным и интегральным уравнениями из § 1, п. 3^0.

2) Постановка задачи Коши, определения начальных данных, решения задачи Коши и его существования из § 1, п. 4^0. При этом точка (x_0, y^0), в которой ставится задача Коши, берется из области G, а значит, будут рассматриваться только внутренние решения задачи Коши системы (3.1).

3) Определение отрезка Пеано и теорема Пеано из $\S\,1$, п. 5^0. Здесь следует отметить, что в $\S\,3$ теорема о существовании решения (внутреннего) будет доказана другим, интегральным методом, называемым методом последовательных приближений Пикара.

Правда, в методе Пикара существенно используется предположение о том, что правая часть системы (3.1) в области G удовлетворяет условию Липшица по вектору y локально. Это предположение, как видно из теоремы Пеано, не является необходимым, но позволяет применить интегральный метод и попутно доказать теорему о единственности решения задачи Коши в области.

Кроме того, метод последовательных приближений Пикара потребуется для доказательства других фундаментальных результатов.

4) Определения продолжимости решения, полного решения, максимального интервала существования решения и интегральной кривой из $\S\,1$, п. 6^0; теорема о существовании полного решения.

В частности, если $y = \varphi(x)$ — решение системы (3.1) на максимальном интервале существования $I_{\max} = (\alpha, \beta)$, то кривая γ, образуемая множеством точек $(x, \varphi(x))$, где $x \in I_{\max}$, называется интегральной кривой.
Поскольку функция $y = \varphi(x)$ непрерывно дифференцируема, γ является гладкой кривой, лежащей в G. При этом в каждой точке $(x_0, \varphi(x_0))$ известно уравнение ее непрерывно вращающейся касательной: $y - \varphi(x_0) = \varphi'(x_0)(x - x_0)$, а $\varphi'(x_0) = f(x_0, \varphi(x_0))$ $(y \in \mathbb{R}^n)$.
Отрезки касательных произвольной длины, построенные в каждой точке области G, что возможно в силу теоремы о существовании решения, образуют поле направлений, индуцированное нормальной системой. Поэтому, как и для уравнения первого порядка, геометрически дуга интегральной кривой — это любая гладкая кривая из G, направление касательной к которой в каждой точке совпадает направлением отрезка поля в этой точке.
Далее, поскольку для системы (3.1) предполагается, что $f(x, y)$ определена и непрерывна в области, теорему о продолжении решения за границу и последующую лемму можно объединить.

Теорема (о продолжимости решения). *Пусть* $y = \varphi(x)$ *— это решение системы* (3.1) *на промежутке* $\langle a, b\rangle$ *и* $b < +\infty$. *Для того чтобы оно было продолжимо вправо за точку* b *необходимо и достаточно, чтобы существовали вектор* $\eta \in \mathbb{R}^n$ *и последовательность* $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ *такие, что*

$$(b, \eta) \in G, \quad x_k \in \langle a, b), \quad (x_k, \varphi(x_k)) \to (b, \eta) \quad \textit{при} \quad k \to \infty.$$

Аналогично формулируются условия для продолжимости решения влево за точку a.

Действительно, в части достаточности доказательство продолжимости решения в точку b упрощается за счет существования замкнутой c-окрестности $\overline{V}_c(b, \eta) = \{(x, y)\colon |x - b| \le c, \ \|y - \eta\| \le c\}$, лежащей в области G, на которой функция $\|f(x, y)\|$ достигает максимума, поскольку точка $(b, \eta) \in G$. По той же причине применима лемма о продолжимости решения за границу отрезка.

В результате максимальный интервал любого полного решения системы (3.1) — это интервал.

Далее, очевидным образом остаются справедливыми леммы о продолжимости решений за границу интервала и на отрезок Пеано, а также фундаментальная теорема о поведении интегральной кривой полного внутреннего решения, формулировку которой еще раз приведем здесь в связи с большой значимостью полученного результата.

Теорема (о поведении интегральной кривой полного решения). *Пусть в системе* (3.1) $f(x,y) \in C(G)$, *тогда при стремлении аргумента любого решения к границе своего максимального интервала существования интегральная кривая стремится к границе области* G, *т. е. покидает любой компакт* $\overline{H} \subset G$ *и никогда в него не возвращается.*

5) Определения точек неединственности и единственности, данные в § 1, п. 7^0, упрощаются, поскольку все точки — внутренние.

Df. *Точка* $(x_0, y_0) \in G$ *называется точкой неединственности, если найдутся такие решения* $y = \varphi_1(x)$ *и* $y = \varphi_2(x)$ *задачи Коши системы* (3.1) *с н. д.* x_0, y_0, *что для любого интервала* $(\alpha, \beta) \ni x_0$ *существует* $x^* \in (\alpha, \beta)$ *такое, что* $\varphi_1(x^*) \neq \varphi_2(x^*)$. *В противном случае* (x_0, y_0) *называется точкой единственности.*

Тем самым, $(x_0, y_0) \in G$ — точка единственности, если для любых двух решений $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ задачи Коши с н. д. x_0, y_0 найдется интервал $(\alpha, \beta) \ni x_0$, на котором эти решения совпадают.
Для систем остаются в силе определения единственности решения задачи Коши в точке, локальная единственность решения и теорема об их эквивалентности.

6) Что касается вопросов глобальной единственности из $\S\,1$, п. 8^0, то переход от уравнения первого порядка к нормальной системе потребует обобщения теоремы Лагранжа. Также предстоит установить связь между локальным и глобальным условиями Липшица. А само определение области единственности G^o переносится дословно.

7) Остается обобщить понятие общего решения из $\S\,1$, п. 10^0, которое в первую очередь потребуется при изучении линейных систем.

Df. *Непрерывная по совокупности аргументов вектор-функция* $y = \varphi(x, C)$, *где* $C = (C_1, \ldots, C_n)$, *называется общим решением системы* (3.1) *в некоторой области* $A \subset G^o$, *если для любой точки* $(x_0, y^0) \in A$ *существует и единственно решение* C^0 *алгебраической системы* $y^0 = \varphi(x_0, C)$ *такое, что функция* $y = \varphi(x, C^0)$ *есть решения задачи Коши системы* (3.1) *с н. д.* x_0, y^0.

4^0. Механическая интерпретация решений.

Нормальную систему в механике принято записывать в виде

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, \ldots, x_n) \\ \quad \ldots \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1, \ldots, x_n) \end{cases} \qquad \text{или} \quad \dot{x} = f(x, t) \qquad (f \in C(G)), \quad (3.5)$$

трактуя независимую переменную t как время, вектор искомых функций $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ как движение материальной точки в фазовом пространстве $x_1, \ldots, x_n$, имеющей в каждый момент времени t координаты $x_1(t), \ldots, x_n(t)$, $\dot{x}(t) = (\dot{x}_1(t), \ldots, \dot{x}_n(t))$ трактуется как вектор скорости движения материальной точки.

Тем самым, вектор скорости в системе (3.5), равный $f(t, x(t))$, зависит не только от точки x фазового пространства, но и от момента времени t, в который движение в нее попадает. А любое решение $x = \varphi(t)$, рассматриваемое на промежутке $\langle a, b\rangle$, определяет некоторое движение материальной точки в фазовом пространстве с момента времени a до момента времени b.

Df. *Множество точек* $(x_1(t), \dots, x_n(t))$ *фазового пространства при* $t \in (a, b)$ *называется траекторией движения.*

Следовательно, траектория — это проекция интегральной кривой на фазовое пространство вдоль оси времени.

Хотя в области единственности интегральные кривые системы (3.5) не пересекаются, но их траектории вполне могут пересекаться, например, в точке $(x_1^0, \dots, x_n^0)$, причем под любым углом. Это всего лишь означает, что интегральные кривые проходят через указанную точку, но в разные моменты времени.

Df. *Если в системе* (3.5) *функция* f *определена и непрерывна для всякого* $t \in \mathbb{R}^1$ *и есть решение* $x(t) \equiv x^0$ *на* $\mathbb{R}^1$, *то точка* x^0 *фазового пространства, являющаяся траекторией этого решения, называется состоянием (положением) равновесия, или точкой покоя, или особой точкой системы* (3.5).

Очевидно, что все точки покоя можно найти из алгебраической системы тождеств $f_1(t, x_1^0, \dots, x_n^0) \overset{t}{\equiv} 0, \dots, f_n(t, x_1^0, \dots, x_n^0) \overset{t}{\equiv} 0.$

5^0. Системы в симметричной форме.
Уравнения первого прядка, разрешенные относительно производной, часто бывает удобно записывать в более общем виде, который называется симметричной формой уравнения первого порядка и которому посвящена Глава II.
Также обстоит дело и с нормальными системами, только наличие n $(n \geq 2)$ уравнений приводит к тому что координатные функции системы (3.1) попадают в знаменатель.
Df. *Систему дифференциальных уравнений порядка* n

$$\frac{d\,x_1}{X_1(x_1,\ldots,x_{n+1})} = \ldots = \frac{d\,x_{n+1}}{X_{n+1}(x_1,\ldots,x_{n+1})}, \tag{3.6}$$

где $X_1,\ldots,X_{n+1}$ *непрерывны в области* G *пространства* $(x_1,\ldots,x_{n+1})$, *называют системой в симметричной форме.*
Df. *Точка* $x^0 = (x_1^0,\ldots,x_{n+1}^0)$ *из области* G *называется особой для системы* (3.6), *если* $X_i(x^0) = 0$ *для всякого* $i = \overline{1, n+1}$.
В противном случае точка называется обыкновенной.
Теорема (о связи системы в симметричной форме и нормальной системы). *Для любой обыкновенной точки* $x^0 \in G$ *существует окрестность* $V(x^0)$, *в которой система в симметричной форме* (3.6) *эквивалентна нормальной системе* (3.1) *порядка* n.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть x^0 — обыкновенная точка для системы (3.6). Тогда, например, $X_{n+1}(x^0) \neq 0$. В противном случае можно перенумеровать переменные.
Поскольку функция X_{n+1} непрерывна в области G, найдется такая окрестность $V(x^0) \in G$, что для всякого $x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in V(x^0)$ функция $X_{n+1}(x) \neq 0$. Теперь в окрестности $V(x^0)$ систему (3.6) можно переписать в виде

$$\frac{d\,x_1}{d\,x_{n+1}} = \frac{X_1(x_1, \ldots, x_{n+1})}{X_{n+1}(x_1, \ldots, x_{n+1})}, \ldots, \frac{d\,x_n}{d\,x_{n+1}} = \frac{X_n(x_1, \ldots, x_{n+1})}{X_{n+1}(x_1, \ldots, x_{n+1})}.$$

А это — нормальная система вида (3.1), правые части которой непрерывны в $V(x^0)$. $\square$

Обратная теорема справедлива во всей области G. Нормальная система (3.1) всегда может быть записана в симметричной форме:

$$\frac{d\,y_1}{f_1(x, y_1, \ldots, y_n)} = \ldots = \frac{d\,y_n}{f_n(x, y_1, \ldots, y_n)} = \frac{d\,x}{1}.$$

Очевидно, что в полученной системе все точки обыкновенные.

§ 2. ФОРМУЛА КОНЕЧНЫХ ПРИРАЩЕНИЙ, УСЛОВИЯ ЛИПШИЦА

1^0. Лемма Адамара.

Хорошо известна формула конечных приращений для скалярной непрерывно дифференцируемой функции f скалярного аргумента $x \in [a, b]$ — это формула Лагранжа:

$$\forall\ \tilde{x}, \hat{x} \in [a, b],\ \tilde{x} < \hat{x}\ \Rightarrow\ \exists\ u \in (\tilde{x}, \hat{x}):\quad f(\hat{x}) - f(\tilde{x}) = f'(u)(\hat{x} - \tilde{x}).$$

Выведем аналог формулы Лагранжа для скалярной и векторной функций векторного аргумента.

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_l)$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$, скалярная функция $f(x, y)$ определена и непрерывна вместе со своими частными производными по $y_1, \ldots, y_m$ в некой области $G \subset \mathbb{R}^{l+m}$, которая выпукла по y, т. е. для любых двух точек $(x, \tilde{y}), (x, \hat{y}) \in G$ следует, что для всякого $s \in [0, 1]$ точка $(x, u(s)) \in G$, где $u(s) = \tilde{y} + s(\hat{y} - \tilde{y})$.

Тогда

$$f(x,\hat{y}) - f(x,\tilde{y}) = f(x,u(1)) - f(x,u(0)) = \int_0^1 \frac{df(x,u(s))}{ds}\,ds.$$

Но $u(s) = \begin{pmatrix} u_1(s) \\ \dots \\ u_m(s) \end{pmatrix}$, поэтому $\dfrac{df(x,u(s))}{ds} = \sum_{j=1}^{m} \dfrac{\partial f(x,u(s))}{\partial y_j}\,\dfrac{du_j(s)}{ds}$,
а $du_j(s)/ds = \hat{y}_j - \tilde{y}_j$. В результате получаем формулу конечных приращений для скалярной функции векторного аргумента

$$f(x,\hat{y}) - f(x,\tilde{y}) = \sum_{j=1}^{m} \int_0^1 \frac{\partial f(x,u(s))}{\partial y_j}\,ds \cdot (\hat{y}_j - \tilde{y}_j). \tag{3.7}$$

Пусть теперь $f(x,y)=\begin{pmatrix} f_1(x_1,\dots,x_l,y_1,\dots,y_m) \\ \dots \\ f_n(x_1,\dots,x_l,y_1,\dots,y_m) \end{pmatrix}$, тогда формула (3.7) справедлива для любой компоненты $f_1,\dots,f_n$. Поэтому для вектор-функции f формула (3.7) имеет вид

$$f(x,\hat{y})-f(x,\tilde{y})=\int_0^1 \frac{\partial f(x,u(s))}{\partial y}\,ds\cdot(\hat{y}-\tilde{y}).$$

Здесь $\displaystyle\int_0^1 \frac{\partial f(x,u(s))}{\partial y}\,ds$ — матрица размерности $n\times m$.

Лемма Адамара. *Если вектор-функция $f(x,y)$ непрерывна вместе со своей частной производной по y в выпуклой по y области G, то для любых $(x,\tilde{y})$, $(x,\hat{y})\in G$ найдутся такие непрерывные вектор-функции $h^{(1)}(x,\tilde{y},\hat{y}),\dots,h^{(m)}(x,\tilde{y},\hat{y})$, что*

$$f(x,\hat{y})-f(x,\tilde{y})=\sum_{j=1}^m h^{(j)}(x,\tilde{y},\hat{y})\cdot(\hat{y}_j-\tilde{y}_j).$$

Очевидно, $\displaystyle h^{(j)}(x,\tilde{y},\hat{y})=\int_0^1 \frac{\partial f(x,u(s))}{\partial y_j}\,ds.$

2^0. Локальное и глобальное условия Липшица.
Пусть x — скалярная переменная, y — вектор размерности n, $f(x,y)$ — вектор-функция размерности n, определенная и непрерывная в области $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Df. *Функция $f(x,y)$ удовлетворяет условию Липшица глобально по y на множестве $B \subset G$ или $f(x,y) \in \mathrm{Lip}_y^{gl}(B)$, если найдется такая константа $L = L_B > 0$, что*

$$\forall\,(x,\tilde{y}),(x,\hat{y}) \in B \;\Rightarrow\; \|f(x,\hat{y}) - f(x,\tilde{y})\| \leq L\|\hat{y} - \tilde{y}\|. \qquad (3.8)$$

Df. *Функция $f(x,y)$ удовлетворяет условию Липшица локально по y в области G или $f(x,y) \in \mathrm{Lip}_y^{loc}(G)$, если для любой точки $(x_0,y^0) \in G$ существуют окрестность $V(x_0,y^0)$, лежащая в G, и константа Липшица $L = L_V > 0$ такие, что для любых двух точек $(x,\tilde{y}),(x,\hat{y})$ из $V(x_0,y^0)$ выполняется неравенство* (3.8).

Следует иметь в виду, что условия Липшица призваны заменить дифференцируемость по y функции f, если таковая отсутствует, и означают, что во всей области G или в некой окрестности любой ее точки рост функции $f(x,y)$ по y не более чем линеен.

Лемма (о связи между локальным и глобальным условиями Липшица). *Если* $f(x,y) \in \mathrm{Lip}_y^{loc}(G)$, *то для любого компакта* $\overline{H}$ *из* G *следует, что* $f(x,y) \in \mathrm{Lip}_y^{gl}(\overline{H})$.

Доказательство. От противного. Пусть существует замкнутое ограниченное множество (компакт) $\overline{H} \in G$, в котором $f(x,y)$ не удовлетворяет условию Липшица по y глобально. Значит, найдутся последовательность констант $L_k \to +\infty$ при $k \to \infty$ и последовательности точек $(x_k, \tilde{y}^{(k)}), (x_k, \hat{y}^{(k)}) \in \overline{H}$, что

$$\forall\, k \geq 1: \quad \|f(x_k, \hat{y}^{(k)}) - f(x_k, \tilde{y}^{(k)})\| \geq L_k \|\hat{y}^{(k)} - \tilde{y}^{(k)}\|. \qquad (3.9)$$

Надо показать, что при каком-то k это неравенство нарушается. Разряжая при необходимости два раза подряд последовательность индексов k натурального ряда и пользуясь тем, что из каждой последовательности точек компакта $\overline{H}$ можно извлечь сходящуюся подпоследовательность, выберем подпоследовательность индексов $k_l \to \infty$ при $l \to \infty$, что $(x_{k_l}, \tilde{y}^{(k_l)}) \to (x_0, \tilde{y}^{(0)})$, $(x_{k_l}, \hat{y}^{(k_l)}) \to (x_0, \hat{y}^{(0)})$. При этом обе точки $(x_0, \tilde{y}^{(0)}), (x_0, \hat{y}^{(0)}) \in \overline{H}$, поскольку замкнутое множество содержит все свои предельные точки.

В результате векторы $\tilde{y}^{(0)}$ и $\hat{y}^{(0)}$ либо совпадают, либо нет. Предположим сначала, что $\tilde{y}^{(0)} \neq \hat{y}^{(0)}$. Тогда можно ввести в рассмотрение функцию $h(x, \tilde{y}, \hat{y}) = \|f(x, \hat{y}) - f(x, \tilde{y})\| / \|\hat{y} - \tilde{y}\|$, определенную в некоторой окрестности точки $(x_0, \tilde{y}^{(0)}, \hat{y}^{(0)})$.
Пусть $h(x_0, \tilde{y}^{(0)}, \hat{y}^{(0)}) = L_0$. Тогда существует окрестность $V = V(x_0, \tilde{y}^{(0)}, \hat{y}^{(0)})$, в которой h непрерывна и $h(x, \tilde{y}, \hat{y}) < L_0 + 1$.
Поэтому найдется такое число $K > 0$, что для всякого $k_l > K$ точка $(x_{k_l}, \tilde{y}^{(k_l)}, \hat{y}^{(k_l)}) \in V(x_0, \tilde{y}^{(0)}, \hat{y}^{(0)})$, а значит, $h(x_{k_l}, \tilde{y}^{(k_l)}, \hat{y}^{(k_l)}) < L_0 + 1$ или
$\|f(x_{k_l}, \hat{y}^{(k_l)}) - f(x_{k_l}, \tilde{y}^{(k_l)})\| < (L_0 + 1)\|\hat{y}^{(k_l)} - \tilde{y}^{(k_l)}\|$.
Но это неравенство при $l = l^*$ противоречит неравенству (3.9), поскольку всегда найдется индекс l^* такой, что $L_{k_{l^*}} > L_0 + 1$, так как $L_{k_l} \to +\infty$ при $l \to \infty$.

Пусть теперь $y^{(0)} = \tilde{y}^{(0)} = \hat{y}^{(0)}$, тогда точка $(x_0, y^{(0)}) \in \overline{H} \subset G$. В этом случае используем предположение о том, что функция f удовлетворяет локальному условию Липшица.
По определению для точки $(x_0, y^{(0)})$ существуют лежащая в G окрестность $V(x_0, y^{(0)})$ и константа Липшица $L > 0$ такие, что для любых двух точек $(x, \tilde{y})$, $(x, \hat{y})$ из $V(x_0, y^{(0)})$ выполняется неравенство (3.8). Кроме того, обе подпоследовательности $(x_{k_l}, \tilde{y}^{(k_l)})$ и $(x_{k_l}, \hat{y}^{(k_l)})$ имеют общий предел — точку $(x_0, y^{(0)})$. Поэтому найдется такое число $K > 0$, что для всякого $k_l > K$ точки $(x_{k_l}, \tilde{y}^{(k_l)})$ и $(x_{k_l}, \hat{y}^{(k_l)})$ принадлежат $V(x_0, y^{(0)})$, а значит, выполняется неравенство (3.8).
Однако, существует индекс l^* такой, что $L_{k_{l^*}} > L$, и неравенства (3.8) и (3.9) не совместны при $l = l^*$. $\square$

3^0. Связь между дифференцируемостью и условием Липшица.

Докажем теперь, что дифференцируемость действительно более сильное свойство функции, чем липшицевость.

Лемма (о достаточном условии для локальной липшицевости). *Если вектор-функция* $f(x, y)$ *непрерывна вместе со своими частными производными по* $y_1, \ldots, y_n$ *в области* G, *то она удовлетворяет условию Липшица по* y *локально в* G.

Доказательство. Пусть V — окрестность произвольной точки из области G. Очевидно, что ее можно выбрать выпуклой по y и такой, что $\overline{V} \in G$. Для этого достаточно в качестве V взять куб с центром в выбранной точке и достаточно маленьким ребром.

Покажем, что вектор-функция $f(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица по y глобально в окрестности V.

По формуле конечных приращений (3.7) для любых двух точек $(x,\tilde{y}),(x,\hat{y})\in V:\ f(x,\hat{y})-f(x,\tilde{y})=\sum\limits_{j=1}^{n}\int\limits_0^1 \dfrac{\partial f(x,u(s))}{\partial y_j}\,ds\cdot(\hat{y}_j-\tilde{y}_j)$,
где $u(s)=\tilde{y}+s(\hat{y}-\tilde{y})$ для всякого $s\in[0,1]$, при этом точка $(x,u(s))\in V$ в силу выпуклости окрестности по y.
Поскольку частные производные функции f по y непрерывны в G и их конечное число, а компакт $\overline{V}\in G$ по построению, то

$$\exists\, M>0:\quad \forall\, s\in[0,1],\quad \forall\, j=\overline{1,n}\ \Rightarrow\ \left\|\frac{\partial f(x,u(s))}{\partial y_j}\right\|\le M.$$

Поэтому $\|f(x,\hat{y})-f(x,\tilde{y})\|\le\sum\limits_{j=1}^{n}\left\|\int\limits_0^1 \dfrac{\partial f(x,u(s))}{\partial y_j}\,ds\cdot(\hat{y}_j-\tilde{y}_j)\right\|\le$
$\sum\limits_{j=1}^{n}\int\limits_0^1 \left\|\dfrac{\partial f(x,u(s))}{\partial y_j}\right\|\,ds\cdot|\hat{y}_j-\tilde{y}_j|\le M\int\limits_0^1 ds\cdot n\cdot\max\limits_{j=\overline{1,n}}|\hat{y}_j-\tilde{y}_j|\le$
$nM\|\hat{y}-\tilde{y}\|$, а значит, выполняется неравенство (3.8) с глобальной константой Липшица $L=nM$, обслуживающей окрестность V произвольной точки из области G. $\square$

§3. МЕТОД
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ПИКАРА

1^0. Теорема Пикара.

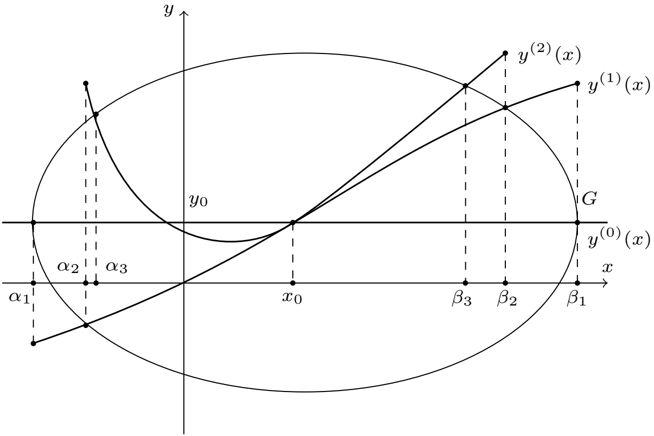
Рассмотрим нормальную систему (3.1) $y' = f(x, y)$ с $f \in C(G)$. Наша задача заключается в построении решения задачи Коши системы (3.1) $y = y(x)$ с произвольными н. д. (x_0, y^0) из области $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$, определенного на каком-либо отрезке.

Решение будем строить при помощи последовательных приближений Пикара, которые ниже рекуррентно определим.

Итак, зафиксируем произвольную точку $(x_0, y^0) \in G$.

В качестве нулевого приближения возьмем $y^{(0)}(x) \equiv y^0$. Функция $y^{(0)}(x)$, очевидно, определена для всякого $x \in \mathbb{R}$, но возможно не при всех значениях переменной x точка $(x, y^{(0)}(x))$ окажется в области G.
Однако, существует интервал (α_1, β_1) такой, что $x_0 \in (\alpha_1, \beta_1)$ и для всякого $x \in (\alpha_1, \beta_1)$ точка $(x, y^{(0)}(x)) \in G$, а значит, функция $f(x, y^{(0)}(x))$ определена и непрерывна на (α_1, β_1).

Теперь в качестве первого пикаровского приближения возьмем $y^{(1)}(x) = y^0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y^{(0)}(s))\, ds,$ и оно определено и непрерывно как суперпозиция непрерывных функций на интервале (α_1, β_1).



Но, опять-таки, возможно не при всех x точка $(x, y^{(1)}(x))$ попадет в G. В этом случае (α_1, β_1) придется уменьшить. Существует интервал $(\alpha_2, \beta_2) \subset (\alpha_1, \beta_1)$ такой, что $x_0 \in (\alpha_2, \beta_2)$ и для всякого x из (α_2, β_2) точка $(x, y^{(1)}(x)) \in G$, а значит, функция $f(x, y^{(1)}(x))$ определена и непрерывна на (α_2, β_2). И так далее.

Предположим, что $y^{(k)}(x)$ определено и непрерывно на некотором интервале (α_k, β_k), содержащем точку x_0, и $y^{(k)}(x_0) = y^0$.

Тогда существует такой интервал $(\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}) \subset (\alpha_k, \beta_k)$, что $x_0 \in (\alpha_{k+1}, \beta_{k+1})$ и для всякого $x \in (\alpha_{k+1}, \beta_{k+1})$ точка $(x, y^{(k)}(x)) \in G$.

Для $\forall\, x \in (\alpha_{k+1}, \beta_{k+1})$ введем $(k+1)$-е приближение по Пикару:

$$y^{(k+1)}(x) = y^0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y^{(k)}(s))\, ds \tag{3.10}$$

Оно определено и непрерывно на интервале $(\alpha_{k+1}, \beta_{k+1})$.

Таким образом, каждое пикаровское приближение определено в некоторой окрестности точки x_0 и $y^{(k)}(x_0) = y^0$ при $\forall k \geq 0$.

Но последовательность вложенных интервалов (α_k, β_k) при их пересечении может стянуться в точку x_0, т. е. общий интервал для всех пикаровских приближений, вообще говоря, может отсутствовать. Также может оказаться, что вектор-функции $y^{(k)}(x)$ не будут равномерно ограничены сверху по норме. Каждая из этих возможностей мешает получить предельную функцию, которую и хотелось бы видеть решением системы (3.1).

Теорема Пикара. *Пусть в системе* (3.1) $f(x,y) \in C(G)$, $f(x,y) \in \mathrm{Lip}_y^{loc}(G)$ *и пусть для любой точки* (x_0, y^0) *из области* G *последовательные приближения Пикара* $y^{(k)}(x)$ $(k = 0, 1, \ldots)$ *с начальными данными* x_0, y^0 *определены на некотором отрезке* $[\alpha, \beta]$, *причем существует такой компакт* $\overline{H} \subset G$, *что для любых* $k \geq 0$ *и* $x \in [\alpha, \beta]$ *точка* $(x, y^{(k)}(x)) \in \overline{H}$.
Тогда функции $y^{(k)}(x)$ *равномерно относительно* $[\alpha, \beta]$ *стремятся при* $k \to \infty$ *к предельной функции* $y(x)$, *которая является решением задачи Коши системы* (3.1) *с начальными данными* x_0, y^0 *на отрезке* $[\alpha, \beta]$.

Доказательство. Возьмем произвольную точку (x_0, y^0) из области G. По условию теоремы для этой точки найдутся отрезок $[\alpha, \beta]$, содержащий x_0, и компакт $\overline{H}$, содержащийся в G, такие, что можно построить последовательные пикаровские приближения

$$y^{(k)}(x) = y^0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y^{(k-1)}(s))\, ds \qquad (k = 0, 1, \ldots),$$

определенные для всякого $x \in [\alpha, \beta]$, и такие, что их графики, т. е. точки $(x, y^{(k)}(x))$, при всех x и k принадлежат компакту $\overline{H}$. Наличие компакта позволяет незамедлительно ввести на нем две глобальные константы.
Обозначим через $L > 0$ константу Липшица, обслуживающую $\overline{H}$. Она существует по лемме о связи между локальным и глобальным условиями Липшица, согласно которой функция
$f(x, y) \in \mathrm{Lip}_y^{gl}(\overline{H})$.
Положим также $M = \max\limits_{(x,y)\in\overline{H}} \|f(x, y)\|$, поскольку на компакте непрерывная функция достигает своего максимума.

Нам предстоит установить равномерную сходимость последовательности пикаровских приближений. Для этого существует стандартный прием, основанный на замене последовательности функций соответствующим функциональным рядом. А для рядов имеются простые и эффективные критерии абсолютной сходимости.

Введем новую последовательность функций $\varphi^{(k)}(x)$, заданных на отрезке $[\alpha, \beta]$: $\varphi^{(0)}(x) = y^{(0)}(x)$, $\varphi^{(1)}(x) = y^{(1)}(x) - y^{(0)}(x)$, $\ldots$, $\varphi^{(k)}(x) = y^{(k)}(x) - y^{(k-1)}(x)$, $\ldots$.

Рассмотрим функциональный ряд $\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^{(k)}(x)$.

Очевидно, что его n-я частичная сумма $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \varphi^{(k)}(x)$ совпадает с $y^{(n)}(x)$. Поэтому сходимость ряда $\varphi(x)$, означающая сходимость последовательности его частичных сумм, равносильна сходимости последовательности пикаровских приближений $y^{(k)}(x)$.

Построим для $\varphi(x)$ мажорантный ряд, оценив по норме сверху при помощи метода математической индукции члены $\varphi^{(k)}(x)$.

Для $\forall x \in [\alpha, \beta]$ имеем:

$$\|\varphi^{(0)}(x)\| = \|y^{(0)}(x)\|, \quad \|\varphi^{(1)}(x)\| = \|y^{(1)}(x) - y^{(0)}(x)\| =$$

$$= \left\| \int_{x_0}^{x} f(s, y^{(0)}(s))\, ds \right\| \leq \left| \int_{x_0}^{x} \left\| f(s, y^{(0)}(s)) \right\| \, ds \right|.$$

Но по условию теоремы любая точка $(s, y^{(0)}(s))$ лежит в $\overline{H}$, так как $s \in [x_0, x] \subset [\alpha, \beta]$ $(x_0 \leq x)$ или $s \in [x, x_0] \subset [\alpha, \beta]$ $(x_0 \geq x)$.
Следовательно, $\|\varphi^{(1)}(x)\| \leq M|x - x_0|$.
Далее,

$$\|\varphi^{(2)}(x)\| = \|y^{(2)}(x) - y^{(1)}(x)\| =$$

$$= \left\| \int_{x_0}^{x} f(s, y^{(1)}(s))\, ds - \int_{x_0}^{x} f(s, y^{(0)}(s))\, ds \right\| \leq$$

$$\leq \left| \int_{x_0}^{x} \left\| f(s, y^{(1)}(s)) - f(s, y^{(0)}(s)) \right\| \, ds \right|.$$

Аналогично предыдущему точки $(s, y^{(1)}(s))$ и $(s, y^{(0)}(s))$ принадлежат компакту $\overline{H}$, в котором $f(x,y)$ удовлетворяет глобальному условию Липшица. Поэтому

$$\|\varphi^{(2)}(x)\| \leq \left| \int_{x_0}^{x} L\|y^{(1)}(s) - y^{(0)}(s)\|\, ds \right| = L \left| \int_{x_0}^{x} \|\varphi^{(1)}(s)\|\, ds \right| \leq$$

$$\leq L \left| \int_{x_0}^{x} M|s - x_0|\, ds \right| \leq LM \frac{|x - x_0|^2}{2}$$

или $\|\varphi^{(2)}(x)\| \leq \dfrac{M}{L} \dfrac{(L|x - x_0|)^2}{2!}$.

Предположим, что для любых $k \geq 2$ и $x \in [\alpha, \beta]$

$$\|\varphi^{(k)}(x)\| \leq \frac{M}{L} \frac{(L|x - x_0|)^k}{k!} \tag{3.11}$$

Оценим $\varphi^{(k+1)}(x)$:

$$\|\varphi^{(k+1)}(x)\| = \|y^{(k+1)}(x) - y^{(k)}(x)\| =$$

$$\left\|\int_{x_0}^{x} f(s, y^{(k)}(s))\, ds - \int_{x_0}^{x} f(s, y^{(k-1)}(s))\, ds\right\| \leq$$

$$\leq \left|\int_{x_0}^{x} \left\|f(s, y^{(k)}(s)) - f(s, y^{(k-1)}(s))\right\| ds\right|.$$

Поскольку аргументы f принадлежат $\overline{H}$, используем для оценок глобальное условие Липшица и индукционное предположение (3.11):

$$\|\varphi^{(k+1)}(x)\| \leq \left|\int_{x_0}^{x} L\|y^{(k)}(s) - y^{(k-1)}(s)\|\, ds\right| =$$

$$L\left|\int_{x_0}^{x} \|\varphi^{(k)}(s)\|\, ds\right| \leq L\left|\int_{x_0}^{x} \frac{M}{L}\frac{(L|s-x_0|)^k}{k!}\, ds\right| \leq \frac{M}{L}\frac{(L|x-x_0|)^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Таким образом, индукционное предположение (3.11) доказано.

И, поскольку $|x - x_0| \le \beta - \alpha$, справедлива равномерная оценка членов ряда $\varphi(x)$: $\|\varphi^{(k)}(x)\| \le \dfrac{M}{L}\dfrac{(L(\beta - \alpha))^k}{k!}$ для любого $x \in [\alpha, \beta]$.

Мажорантный для $\varphi(x)$ ряд $\|y^0\| + \dfrac{M}{L}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(L(\beta-\alpha))^k}{k!}$ сходится при любых конечных α, β, и его сумма есть экспонента.

По признаку Вейерштрасса функциональный ряд $\sum_{k=0}^{\infty}\varphi^{(k)}(x)$ сходится равномерно на отрезке $[\alpha, \beta]$, а значит, последовательность $y^{(k)} \overset{[\alpha,\beta]}{\rightrightarrows} y(x)$ при $k \to \infty$.

Для всякого $x \in [\alpha, \beta]$ предельная функция $y(x)$ непрерывна по теореме Стокса-Зайделя и точка $(x, y(x))$, являясь предельной, содержится в $\overline{H}$. Следовательно $\displaystyle\int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\,ds$ существует.

Рассмотрим равенство (3.10), устремив в нем k к бесконечности. По доказанному выше, слева получим функцию $y(x)$.

Покажем, что справа $\displaystyle\int_{x_0}^{x} f(s, y^{(k)}(s))\,ds \to \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\,ds$ при $k \to \infty$ или что разность интегралов стремится к нулю.

Равномерная сходимость последовательности пикаровских приближений $y^{(k)}(x)$ означает, что

$$\forall\,\varepsilon_0>0\ \ \exists\,K>0:\ \forall\,k>K,\ \forall\,x\in[\alpha,\beta]\ \Rightarrow\ \|y^{(k)}(x)-y(x)\|<\varepsilon_0,$$

т. е. K — универсальная, не зависящая от x, константа.
Итак, зафиксируем произвольное число $\varepsilon>0$. Теперь выберем $\varepsilon_0=\varepsilon/(L(\beta-\alpha))$, по нему найдется K из определения равномерной сходимости. Возьмем произвольное числа $k>K$ и $x\in[\alpha,\beta]$, тогда

$$\left\|\int_{x_0}^{x} f(s,y^{(k)}(s))\,ds-\int_{x_0}^{x} f(s,y(s))\,ds\right\|\le$$

$$\le\left|\int_{x_0}^{x}\left\|f(s,y^{(k)}(s))-f(s,y(s))\right\|\,ds\right|\le L\left|\int_{x_0}^{x}\|y^{(k)}(s)-y(s)\|\,ds\right|\le$$

$$\le L\varepsilon_0|x-x_0|\le\varepsilon,$$

а значит, в правой части (3.10) тоже можно перейти к пределу.

В результате $y(x) = y^0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds$ для $\forall\, x \in [\alpha, \beta]$, т. е. предельная функция $y(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению, что равносильно тому, что $y(x)$ является решением задачи Коши системы (3.1) с начальными данными x_0, y^0 на отрезке $[\alpha, \beta]$. $\square$

Следствие. *Имеет место следующая оценка остатка:*

$$\|y(x) - y^{(k)}(x)\| \le \frac{M}{L}\frac{(L|x - x_0|)^{k+1}}{(k+1)!} \le \frac{M}{L}\frac{(L(\beta - \alpha))^{k+1}}{(k+1)!}. \qquad (3.12)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Базу индукции получаем при $k = 0$:

$$\|y(x) - y^{(0)}(x)\| \le \left\| \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds \right\| \le M|x - x_0| \le \frac{M}{L} L(\beta - \alpha).$$

Пусть выполнено индукционное предположение (3.12), тогда

$$\|y(x)-y^{(k+1)}(x)\| \leq \left\| \int_{x_0}^{x} (f(s,y(s)) - f(s,y^{(k)}(s))\, ds \right\| \leq$$

$$\leq \left| \int_{x_0}^{x} L\|y(s)-y^{(k)}(s)\|\, ds \right| \leq L \left| \int_{x_0}^{x} \frac{M}{L} \frac{(L|s-x_0|)^{k+1}}{(k+1)!}\, ds \right| \leq$$

$$\leq \frac{M}{L} \frac{(L|x-x_0|)^{k+2}}{(k+2)!} \leq \frac{M}{L} \frac{(L|\beta-\alpha|)^{k+2}}{(k+2)!} \qquad \forall\, x \in [\alpha,\beta]. \quad \Box$$

Пример 1. *Уравнение* $y' = y$, *задача Коши* $y(0) = 1$.
По определению для любого вещественного x *имеем:* $y^{(0)}(x) = 1$,
$y^{(1)}(x) = 1 + \int_0^x 1 \cdot ds = 1 + x$, $y^{(2)}(x) = 1 + \int_0^x (1+s)\, ds = 1 + x + \frac{x^2}{2}$,
$\ldots, y^{(k)}(x) = 1 + \int_0^x \left(1 + s + \ldots + \frac{s^{k-1}}{(k-1)!}\right) dx = 1 + x + \ldots + \frac{x^k}{k!}, \ldots$
Очевидно, что последовательность приближений Пикара $y^{(k)}(x)$ *равномерно относительно* x *из любого конечного промежутка при* $k \to \infty$ *сходится к решению* $y(x) = e^x$.

2^0. Существование и единственность решения системы. Из теоремы Пикара следует, что для доказательства существования решения системы (3.1), проходящего через точку (x_0, y^0), остается найти отрезок, на котором будут определены все пикаровские приближения, и компакт, в котором будут лежать все их графики.

Теорема (о существовании и единственности). *Пусть в системе* (3.1) $f(x, y)$ *непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по* y *локально в области* G, *тогда для любой точки* $(x_0, y^0) \in G$ *и для любого отрезка Пеано* $P_h(x_0, y^0)$ *существует и единственно решение задачи Коши с н. д.* x_0, y^0, *определенное на* $P_h(x_0, y^0)$.

Доказательство.
Существование. Возьмем любую точку (x_0, y^0) из области G и найдем для нее отрезок $[\alpha, \beta]$ и компакт $\overline{H}$ из теоремы Пикара. Сначала, как обычно, построим отрезок Пеано с центром, расположенным в точке x_0. Для этого возьмем такие числа $a, b > 0$, что компакт $\overline{R} = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a, \|y - y^0\| \leq b\} \subset G$.

Положим $M = \max\limits_{(x,y)\in\overline{R}} \|f(x,y)\|, \quad h = \min\{a, b/M\}, \quad \alpha = x_0 - h,$
$\beta = x_0 + h$. Тогда $[\alpha, \beta]$ — это отрезок Пеано $P_h(x_0, y_0)$.
Выберем $\overline{H} = \{(x,y) :\, \alpha \le x \le \beta,\, \|y - y^0\| \le b\,\}$, тогда $\overline{H} \subset \overline{R}$.
Покажем методом математической индукции по $k = 0, 1, \ldots$, что

$$\forall\, x \in [\alpha, \beta] : \quad \|y^{(k)}(x) - y^0\| \le b. \tag{3.13}$$

Тогда точка $(x, y^{(k)}(x))$ попадет в компакт $\overline{H}$, что позволит определить пикаровское приближение $y^{(k+1)}$ на всем отрезке Пеано $[\alpha, \beta]$.
По определению $y^{(0)}(x) \equiv y^0$, поэтому база индукции очевидна.

Предположим, что неравенство (3.13) верно. Тогда $\forall\, x \in [\alpha, \beta]$

$$\|y^{(k+1)}(x) - y^0\| = \left\| \int_{x_0}^{x} f(s, y^{(k)}(s))\, ds \right\| \le \left| \int_{x_0}^{x} \left\| f(s, y^{(k)}(s)) \right\| \, ds \right| .$$

Но согласно (3.13) точка $(s, y^{(k)}(s)) \in \overline{H} \subset \overline{R},$ поэтому под знаком интеграла $\|f\| \le M$ и $\|y^{(k+1)}(x) - y^0\| \le M|x - x_0| \le Mh \le b.$

В результате выполняются условия теоремы Пикара и существование решения системы (3.1) на отрезке Пеано $P_h(x_0, y^0)$ доказано.

Единственность. Стандартно доказываем ее от противного.

Предположим, что существует еще одно решение $\tilde{y}(x)$ с теми же начальными данными, т. е. $\tilde{y}(x_0) = y^0,$ определенное на некотором интервале $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}),$ содержащем точку $x_0.$

Пусть $[a, b]$ — отрезок, на котором определены оба решения. Для завершения доказательства достаточно показать, что на (a, b) решения $y(x)$ и $\tilde{y}(x)$ совпадают.

Используя интегральную формулу (1.3), для любого $x \in (a, b)$ запишем разность этих решений:

$$y(x) - \tilde{y}(x) = \int_{x_0}^{x} \left(f(s, y(s)) - f(s, \tilde{y}(s)) \right) ds.$$

Существует такой компакт $\overline{H} \subset G$, что для всякого $s \in [a, b]$ точки $(s, y(s))$, $(s, \tilde{y}(s)) \in \overline{H}$.
По условию теоремы в области G для функции $f(x, y)$ выполняется локальное условие Липшица. А значит, по лемме о связи между локальным и глобальным условиями Липшица $f \in \mathrm{Lip}_y^{gl}(\overline{H})$, и L — глобальная константа Липшица, обслуживающая компакт $\overline{H}$.
В результате $\|y(x) - \tilde{y}(x)\| \leq \left| \int_{x_0}^{x} \|f(s, y(s)) - f(s, \tilde{y}(s))\| \, ds \right| \leq$
$L \left| \int_{x_0}^{x} \|y(s) - \tilde{y}(s)\| \, ds \right|$.
По следствию из леммы Гронуолла с $\mu = L$ заключаем, что $\|y(x) - \tilde{y}(x)\| \overset{(a,b)}{\equiv} 0$, и по определению нормы $y(x) - \tilde{y}(x) \overset{(a,b)}{\equiv} 0$. $\square$

§4. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ. ВВЕДЕНИЕ

1^0. Существование и единственность решений.

Df. *Система* (3.1) *называется линейной, если она имеет вид*

$$\begin{cases} y_1' = p_{11}(x)y_1 + \ldots + p_{1n}(x)y_n + q_1(x) \\ \quad \ldots \\ y_n' = p_{n1}(x)y_1 + \ldots + p_{nn}(x)y_n + q_n(x) \end{cases} \tag{3.14}$$

или в векторной записи

$$y' = P(x)y + q(x),$$

где матрица $P = \{p_{ij}(x)\}_{i,j=1}^n$, *вектор* $q = (q_1(x), \ldots, q_n(x))$, *функции* $p_{ij}(x)$ *и* $q_i(x)$ *непрерывны на интервале* (a, b).

Иными словами, нормальная система является линейной, если $f(x, y) = P(x)y + q(x)$, а область $G = (a, b) \times \mathbb{R}^n$.

Df. *Линейная система* (3.14) *называется однородной (ЛОС), если в ней* $q(x) \overset{(a,b)}{\equiv} 0$, *в противном случае линейная система — неоднородная (ЛНС). Функция* $q(x)$ *— неоднородность системы.*

Очевидно, что ЛОС всегда имеет тривиальное решение $y(x) \equiv 0$.

Df. *Линейная система* (3.14) *называется вещественной, если функции* $p_{ij}(x), q_i(x)$ *принимают только вещественные значения.*

В дальнейшем, если не оговорено противное, будут рассматриваться только вещественные линейные системы.
Исходя из структуры области G, начальные данные для задачи Коши — это произвольная точка x_0 из интервала (a, b) и произвольный вектор $y^0 = (y_1^0, \ldots, y_n^0)$ из пространства $\mathbb{R}^n$.

Теорема (о существовании и единственности решений линейных систем). *Для любой точки* $x_0 \in (a, b)$, *для любого вектора* $y^0 \in \mathbb{R}^n$ *и для любого отрезка Пеано* $P_h(x_0, y^0)$ *существует и единственно решение задачи Коши линейной системы* (3.14) *с н. д.* x_0, y^0, *определенное на* $P_h(x_0, y^0)$.

Доказательство. Поскольку функция $f(x, y) \in C(G)$ и $f'_y(x, y) = P(x) \in C(G)$, а значит, $f \in Lip_y^{loc}(G)$, для системы (3.14) справедлива теорема о существовании и единственности решений нормальной системы (3.1). $\square$

2^0. О продолжимости решений линейных систем.
Рассмотрим сначала более широкий класс систем, для которых и докажем теорему о продолжимости решения.
Дело в том, что максимальные интервалы существования различных решений произвольной нормальной системы могут не только не совпадать, но и не иметь общих точек. Но существует класс систем, имеющих общий $I_{\max}$ для всех своих решений.

Df. *Система* (3.1) *называется почти линейной, если функция* $f(x,y) \in C(G)$, *где область* $G = (a,b) \times \mathbb{R}^n$, *и существуют непрерывные и неотрицательные на* (a,b) *функции* $L(x), M(x)$ *такие, что* $\|f(x,y)\| \le L(x) + M(x)\|y\|$ *для* $\forall\,(x,y) \in G$.

Теорема (о продолжимости решений почти линейных систем). *Любое решение почти линейной системы продолжимо на* (a, b).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим произвольное решение почти линейной системы $y = \varphi(x)$, заданное на максимальном интервале существования (α, β). Тогда для $\forall\, x_0 \in (\alpha, \beta)$ по интегральной формуле, аналогичной (1.3),

$\varphi(x) \overset{(\alpha,\beta)}{\equiv} \varphi(x_0) + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s))\, ds$, следовательно

$$\|\varphi(x)\| \le \|\varphi(x_0)\| + \left|\int_{x_0}^{x} \|f(s, \varphi(s))\|\, ds\right| \le$$

$$\|\varphi(x_0)\| + \left|\int_{x_0}^{x} (L(s) + M(s)\|\varphi(s)\|)\, ds\right|.$$

Если $\beta < b$, тогда отрезок $[x_0, \beta] \subset (a, b)$, и в силу непрерывности функций L и M имеем: $L(x) \le L_0$, $M(x) \le M_0$ для $\forall\, x \in [x_0, \beta]$.

Поэтому $\|\varphi(x)\| \le \|\varphi(x_0)\| + L_0(\beta - x_0) + M_0 \left|\displaystyle\int_{x_0}^{x} \|\varphi(s)\|\, ds\right|$.

По лемме Гронуолла $\|\varphi(x)\| \le (\|\varphi(x_0)\| + L_0(\beta - x_0))e^{M_0(\beta - x_0)}$ для $\forall\, x \in [x_0, \beta]$, что противоречит теореме о поведении интегральной кривой полного решения.

Аналогично рассматривается случай, когда $\alpha > a$. $\square$

Теорема (о продолжимости решений линейных систем). *Любое решение линейной системы* (3.14) *продолжимо на* (a, b).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что линейная система является почти линейной.

Положим $p_0(x) = \max\limits_{i,j=\overline{1,n}} \{|p_{ij}(x)|\}$, $q_0(x) = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \{|q_i(x)|\}$, тогда функции $p_0(x), q_0(x)$ непрерывны на (a, b).

Оценим сверху компоненты правой части системы (3.14). Имеем: $|f_i(x, y)| = |p_{i1}(x)y_1 + \ldots + p_{in}(x)y_n + q_i(x)| \leq \sum_{j=1}^{n} |p_{ij}(x)|\,|y_j| + |q_i(x)| \leq \sum_{j=1}^{n} p_0(x)|y_j| + q_0(x) \leq np_0(x) \max_{j=\overline{1,n}} |y_j| + q_0(x)$.

По определению нормы $\|f(x, y)\| \leq np_0(x)\|y\| + q_0(x)$, т. е. система (3.14) почти линейна и любое ее решение продолжимо на (a, b). $\square$

3^0. Комплекснозначные линейные системы.

Если в линейной системе (3.14) p_{ij} и q_i — комплекснозначные функции вещественного аргумента x, то решение системы (3.14) $y = y(x)$ также будет иметь комплексные значения.

Возникает естественный вопрос о существовании, единственности и продолжимости такого решения.

Пусть $y = u(x) + \mathrm{i}v(x)$, $P = R(x) + \mathrm{i}S(x)$, $q = g(x) + \mathrm{i}h(x)$, тогда согласно определению решения, подставляя $y(x)$ в систему (3.14), получаем тождество на интервале (a, b)

$$u' + \mathrm{i}v' \equiv (R + \mathrm{i}S)(u + \mathrm{i}v) + g + \mathrm{i}h.$$

Выделяя в нем вещественную и мнимую части, заключаем, что вектор-функция $(u(x), v(x))$ удовлетворяет вещественной линейной системе из $2n$ уравнений с $2n$ неизвестными

$$u' \equiv Ru - Sv + g, \quad v' \equiv Su + Rv + h,$$

к которой можно применить теоремы о существовании и единственности и продолжимости решений.

Таким образом доказано, что решение линейной системы (3.14) с непрерывными на (a, b) комплексными коэффициентами существует, единственно и продолжимо на весь интервал (a, b).

§5. ЗАВИСИМОСТЬ РЕШЕНИЙ ОТ НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ И ПАРАМЕТРОВ

1^0. Непрерывность решений по начальным данным и параметрам.

Рассмотрим нормальную систему (3.1), зависящую от параметра $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$

$$y' = f(x, y, \mu), \tag{3.15}$$

где функция $f(x, y, \mu)$ непрерывна в области $F = G \times \mathfrak{M} \subset \mathbb{R}^{m+n+1}$, а $\mathfrak{M} = \{\mu \mid \|\mu - \mu^*\| < c\}$ – область изменения вектора параметров.

Фактически, (3.15) представляет собой семейство систем, каждая из которых отвечает своему значению вектора μ.

Особое место среди систем (3.15) занимает "расчетная" система

$$y' = f(x, y, \mu^*), \tag{3.15*}$$

которая в той или иной форме интегрируется и ее решение поставленной задачи Коши определяет расчетное движение материальной точки в пространственно-временном континууме.

Реальное движение материальной точки, естественно, будет отличаться от расчетного не только из-за погрешностей счета, но и за счет различий между реальными и расчетными значениями начальных данных и параметров.
Поэтому основополагающая задача заключается в установлении непрерывной зависимости решений от начальных данных и параметров. В противном случае реальное движение со временем может оказаться существенно отличным от расчетного.

Приведенные рассуждения приводят к необходимости рассматривать решения зависящими не только от независимой переменной x, но и от начальных данных x_0, y^0 и вектора параметров μ (верхний нолик у μ можно для краткости не писать), т. е. в виде $y = y(x, x_0, y^0, \mu)$. При этом по определению $y(x_0, x_0, y^0, \mu) = y^0(\mu)$, а значит, мы имеем решение задачи Коши с начальными данными x_0, y^0, где y^0, вообще говоря, может непрерывно зависеть от μ.

Итак, рассмотрим интересующее нас решение расчетной системы (3.15*) $y = \varphi(x) = \varphi(x, \mu^*)$, определенное на некотором $[a, b]$. Тогда найдется такое $\Delta > 0$, что в области F содержится компакт

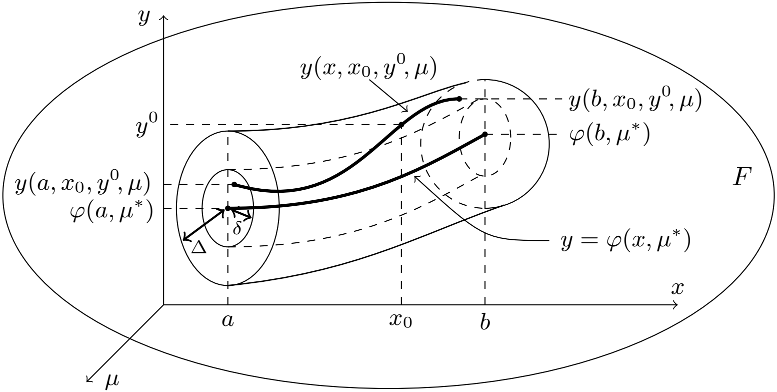
$$\overline{U}_\Delta = \{(x, y, \mu)\colon\ a \le x \le b,\ \|y - \varphi(x, \mu^*)\| \le \Delta,\ \|\mu - \mu^*\| \le \Delta\},$$

являющийся трубчатой окрестностью интегральной кривой расчетного решения $y = \varphi(x)$.

В самом деле, поскольку кривая $\gamma^* = \{(x, \varphi(x, \mu^*), \mu^*)\colon\ x \in [a, b]\}$ является компактом в F, из ее открытого покрытия
$\mathbb{V} = \bigcup_{x \in [a,b]} V_x$,
$V_x = \{(\tilde{x}, \tilde{y}, \mu)\colon\ |\tilde{x} - x| < \sigma_x,\ \|\tilde{y} - \varphi(x, \mu^*)\| < \sigma_x,\ \|\mu - \mu^*\| < \sigma_x\} \subset F$
можно выделить конечное подпокрытие $V_{x_1}, \ldots, V_{x_N}$ $(x_k \in [a, b])$ такое, что $\gamma \in \bigcup_{k=1}^{N} V_{x_k}$. Остается выбрать $\Delta = \min_{k=\overline{1,N}} \sigma_{x_k}$.

Теорема (об интегральной непрерывности или о непрерывной зависимости решений от начальных данных и параметров).
Пусть в системе (3.15) *функция* $f(x, y, \mu)$ *определена, непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по* y *локально в области* $F = G \times \mathfrak{M}$. *И пусть* $y = \varphi(x)$ *есть решение системы* (3.15^*), *определенное на отрезке* $[a, b]$.
Тогда для любого $\Delta > 0$ *такого, что компакт* $\overline{U}_\Delta \subset F$, *найдутся такие* $\delta > 0$ *и трубчатая область начальных данных* $U_\delta = \{(x_0, y^0, \mu)\colon\, a < x_0 < b,\, \|y^0 - \varphi(x_0)\| < \delta,\, \|\mu - \mu^*\| < \delta\}$, *что для любой точки* $(x_0, y^0, \mu) \in U_\delta$ *решение* $y = y(x, x_0, y^0, \mu)$ *системы* (3.15) *определено для всякого* $x \in [a, b]$, *является непрерывной функцией по совокупности своих аргументов в области* $V_\delta = (a, b) \times U_\delta$ *и точка* $(x, y(x, x_0, y^0, \mu), \mu) \in \overline{U}_\Delta$ *для всякого* $x \in [a, b]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Установим наличие столь малой константы $\delta > 0$, что любое решение $y = y(x, x_0, y^0, \mu)$ с н. д. из окрестности U_δ продолжимо на $[a, b]$, непрерывно в $V_\delta = (a, b) \times U_\delta$ и $\|y(x, x_0, y^0, \mu) - \varphi(x)\| \leq \Delta$ при $x \in [a, b]$.



Для этого, выбрав произвольную точку (x_0, y^0, μ) из U_δ, будем строить решение $y = y(x, x_0, y^0, \mu)$ методом последовательных приближений Пикара, по мере необходимости уменьшая δ, но так, чтобы в конечном итоге оно оказалось большим нуля.

Учитывая тот факт, что все должно происходить в малой трубчатой окрестности дуги интегральной кривой решения $y = \varphi(x, \mu^*)$, выберем нулевое пикаровское приближение не постоянным, а лежащим в окрестности кривой $\gamma^* = \{(x, \varphi(x, \mu^*), \mu^*)\colon\ a \le x \le b\}$.

Выберем также, для начала, $\delta \le \Delta$ и положим для $\forall\, x \in [a, b]$

$$y^{(0)}(x) = y^{(0)}(x, x_0, y^0, \mu^*) = y^0 - \varphi(x_0, \mu^*) + \varphi(x, \mu^*).$$

Отметим четыре свойства нулевого пикаровского приближения:
а) $y^{(0)}(x_0) = y^0$;
б) $y^{(0)}(x) = y^0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s, \mu^*), \mu^*)\, ds$ для $\forall\, x \in [a, b]$;
в) $\|y^{(0)}(x) - \varphi(x)\| = \|y^0 - \varphi(x_0)\|$ для $\forall\, x \in [a, b]$;
г) $\forall\, \delta \ \ (0 < \delta \le \Delta), \ \ \forall\, x \in [a, b] \ \Rightarrow \ (x, y^{(0)}(x), \mu) \in \overline{U}_\Delta \subset F$.
Непосредственно из вида $y^{(0)}(x, x_0, y^0, \mu^*)$ в б) вытекает, что нулевое пикаровское приближение непрерывно по каждому из аргументов x_0, y^0, μ, а по x непрерывно дифференцируемо, что гарантирует непрерывность $y^{(0)}$ по совокупности аргументов. Кроме того, свойство г), очевидно, вытекает из в), поскольку в области U_δ $\|y^0 - \varphi(x_0)\| < \delta \le \Delta$, а $\|\mu - \mu^*\|$ всегда меньше δ. Теперь для $\forall\, k \ge 1$ стандартно рекуррентным образом введем

$$y^{(k)}(x) = y^{(k)}(x, x_0, y^0, \mu) = y^0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y^{(k-1)}(s), \mu)\, ds \qquad (3.16)$$

— k-е пикаровское приближение, которое определено в некоторой окрестности точки x_0, и $y^{(k)}(x_0) = y^0$.

Наличие компакта $\overline{U}_\Delta$ позволят ввести две константы.
Пусть $L = L_\Delta \geq 1$ — глобальная константа Липшица для $\overline{U}_\Delta$,
а $\tau = \tau_{\Delta,L} = \Delta L/(2(e^{L(b-a)} - 1))$.

Покажем методом математической индукции по k $(k \geq 1)$, что существует такое $\delta = \delta_\tau$ $(0 < \delta \leq \Delta/2)$, что

$1_k)$ $y^{(k)}(x, x_0, y^0, \mu)$ определено для $\forall\, x \in [a, b]$, непрерывно в V_δ;

$2_k)$ $\forall\, x \in [a, b]: \quad \|y^{(k)}(x) - y^{(k-1)}(x)\| \leq \dfrac{\tau}{L} \cdot \dfrac{(L|x - x_0|)^k}{k!}$;

$3_k)$ $\forall\, x \in [a, b]$ точка $(x, y^{(k)}(x), \mu) \in \overline{U}_\Delta$.

Опять же, $3_k)$ означает, что $\|y^{(k)}(x) - \varphi(x)\| \leq \Delta$ и $\|\mu - \mu_*\| \leq \Delta$.

Установим сначала базу индукции.

1_1) Согласно свойству г) нулевого приближения для $\forall\,\delta \le \Delta$ и $\forall\, x \in [a,b]$ функция $f(x, y^{(0)}(x), \mu)$ определена и непрерывна. Поэтому первое пикаровское приближение

$$y^{(1)}(x, x_0, y^0, \mu) = y^0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y^{(0)}(s), \mu)\, ds$$

определено для любых $x \in [a,b]$ и непрерывно в V_δ как композиция непрерывных функций.

2_1) Для $\forall\, x \in [a,b]$ имеем: $\|y^{(1)}(x) - y^{(0)}(x)\| \overset{\text{б)}}{=}$

$$= \left\| \int_{x_0}^{x} f(s, y^{(0)}(s), \mu)\, ds - \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s,\mu^*), \mu^*)\, ds \right\| \le$$
$$\le \left| \int_{x_0}^{x} \|f(s, y^{(0)}(s), \mu) - f(s, \varphi(s,\mu^*), \mu^*)\|\, ds \right|.$$

Согласно свойству г) аргумент функции f принадлежит $\overline{U}_\Delta \subset F$ и f непрерывна в F, следовательно $f(x,y,\mu)$ равномерно непрерывна на компакте $\overline{U}_\Delta$.

По определению равномерной непрерывности, где в качестве ε используется введенная выше константа $\tau > 0$, найдется константа $\delta = \delta_\tau$ $(0 < \delta \leq \Delta/2)$ такая, что если
$\|y^{(0)}(s) - \varphi(s)\| \leq \delta$ и $\|\mu - \mu^*\| \leq \delta$, то
$\|f(s, y^{(0)}(s), \mu) - f(s, \varphi(s, \mu^*), \mu^*)\| \leq \tau$.
Но точка $(x_0, y^0, \mu) \in U_\delta$ и выполняется свойство в), поэтому последнее неравенство справедливо.
В результате $\|y^{(1)}(x) - y^{(0)}(x)\| \leq \tau|x - x_0|$ для $\forall\, x \in [a, b]$, что совпадает с $2_k)$ при $k = 1$.
$3_1)$ Для $\forall\, x \in [a, b]$ по неравенству треугольника имеем:

$$\|y^{(1)}(x) - \varphi(x)\| \leq \|y^{(1)}(x) - y^{(0)}(x)\| + \|y^{(0)}(x) - \varphi(x)\| \overset{2_1),\ \text{в)}}{\leq}$$
$$\leq \tau|x - x_0| + \delta \leq \tau(b - a) + \Delta/2 \leq \Delta,$$

так как, очевидно, что $\tau \leq \Delta/(2(b - a))$ и $\delta \leq \Delta/2$.

Предположим теперь, что предположения 1) — 3) выполнены для приближений $y^{(2)}, \ldots, y^{(k)}$, и докажем их для $y^{(k+1)}$ $(k \geq 1)$.

$1_{k+1})$ Функция $y^{(k+1)}(x, x_0, y^0, \mu) = y^0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(s, y^{(k)}(s), \mu)\, ds$ согласно (3.16) является $(k+1)$-м пикаровским приближением. По индукционному предположению $3_k)$ это приближение определено для любых $x \in [a, b]$ и непрерывно по совокупности аргументов в V_δ как композиция непрерывных функций.

$2_{k+1})$ Для любого $x \in [a, b]$ имеем:

$$\|y^{(k+1)}(x) - y^{(k)}(x)\| \leq \left| \int_{x_0}^{x} \|f(s, y^{(k)}(s), \mu) - f(s, y^{(k-1)}(s), \mu)\|\, ds \right| .$$

Согласно $3_k)$ и $3_{k-1})$ аргументы f принадлежат компакту $\overline{U}_\Delta$, на котором f удовлетворяет условию Липшица глобально с константой L. Поэтому, используя неравенство (3.8), получаем:

$$\|y^{(k+1)}(x) - y^{(k)}(x)\| \leq \left| L \int_{x_0}^{x} \|y^{(k)}(s) - y^{(k-1)}(s)\|\, ds \right| \overset{2_k)}{\leq}$$

$$\leq L \left| \int_{x_0}^{x} \frac{\tau}{L} \cdot \frac{(L|s - x_0|)^k}{k!}\, ds \right| = \frac{\tau}{L} \cdot \frac{(L|x - x_0|)^{k+1}}{(k+1)!}.$$

$3_{k+1})$ Для $\forall\, x \in [a,b]$ по неравенству треугольника имеем:

$$\|y^{(k+1)}(x)-\varphi(x)\| \leq \|y^{(k+1)}(x)-y^{(k)}(x)\| + \ldots$$

$$\ldots + \|y^{(1)}(x)-y^{(0)}(x)\| + \|y^{(0)}(x)-\varphi(x)\| \overset{2),\ \text{в})}{\leq}$$

$$\leq \frac{\tau}{L}\left(\frac{(L(b-a))^{k+1}}{(k+1)!}+\ldots+\frac{L(b-a)}{1!}\right)+\delta \leq \frac{\tau}{L}(e^{L(b-a)}-1)+\frac{\Delta}{2}=\Delta.$$

В результате индукционные предположения $1_k)-3_k)$ доказаны.

Дословно следуя теперь доказательству теоремы Пикара, можно показать, что пикаровские приближения, определенные в (3.16), равномерно относительно $[a,b]$ сходятся к непрерывной в области V_δ функции $y=y(x,x_0,y^0,\mu)$, являющейся единственны решением системы (3.15) с начальными данными $x_0, y^0(\mu)$. $\square$

Замечание 1. *Теорему об интегральной непрерывности бывает удобно использовать в несколько более общем виде, рассматривая вместо области начальных данных* U_δ *множество*
$U'_\delta = \{(x_0, y^0, \mu)\colon\ a \le x_0 \le b,\ \|y^0 - \varphi(x_0)\| < \delta,\ \|\mu - \mu^*\| < \delta\}$,
позволяющее выбирать в качестве начального данного для независимой переменной x *границы отрезка* $[a, b]$, *на котором рассматривается решение* $y = \varphi(x)$ *расчетной системы* (3.15^*).

Действительно, следуя лемме о продолжении решения за границу отрезка, можно продолжить решение $y = \varphi(x)$ *влево и вправо за границы* $[a, b]$ *на полуотрезки Пеано соответственно* h_a *и* h_b, *тем самым, доказывая теорему для отрезка* $[a - h_a, b + h_b]$ *и области* U_δ, *в которой* $a - h_a < x_0 < b + h_b$, *что позволяет затем уменьшить ее до множества* U'_δ.

2^0. Дифференцируемость решений по начальным данным и параметрам.

Продолжим изучение нормальной системы (3.15) $y' = f(x, y, \mu)$, зависящей от векторного параметра $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m)$, с непрерывной в области $F = G \times \mathfrak{M}$ функцией f, где $\mathfrak{M} = \{\mu\colon \|\mu - \mu^*\| < c\}$.

Пусть $y = y(x, x_0, y^0, \mu)$ — решение задачи Коши системы (3.15) с начальными данными x_0, y^0, т.е. $y(x_0, x_0, y^0, \mu) = y^0(\mu)$.

В предыдущем разделе была установлена непрерывность решения по совокупности своих четырех аргументов.
Однако большой практический интерес представляет собой знание производных выбранного решения по параметрам и начальным данным, причем как их наличие, так и способы нахождения.

Разумеется, чтобы рассчитывать на дифференцируемость решений не только по независимой переменной x, придется наложить дополнительные ограничения на функцию $f(x, y, \mu)$.

Теорема (о дифференцируемости решений по начальным данным и параметрам). *Пусть в системе* (3.15) *функция* $f(x, y, \mu)$ *определена, непрерывна и имеет непрерывные* f'_y, f'_μ *в области* F *пространства точек* (x, y, μ), *т. е.* $f \in C^{0,1,1}_{x,y,\mu}(F)$. *Тогда решение системы* (3.15) $y = y(x, x_0, y^0, \mu) \in C^{1,1,1,1}_{x,x_0,y^0,\mu}(D)$, *где область* $D = \{(x, x_0, y^0, \mu)\colon\ (x_0, y^0, \mu) \in F,\ x \in I_{max}\}$, I_{max} *— максимальный интервал существования* $y(x, x_0, y^0, \mu)$, *причем*

1) *для* $\forall\, j = \overline{1, m}$ *вектор-функция* $\psi^{(j)}(x) = \partial y(x, x_0, y^0, \mu)/\partial \mu_j$ *— решение задачи Коши линейной неоднородной системы*

$$v' = \frac{\partial f(x, y(x, x_0, y^0, \mu), \mu)}{\partial y}\, v + \frac{\partial f(x, y(x, x_0, y^0, \mu), \mu)}{\partial \mu_j} \tag{3.17}$$

с начальными данными $x_0, \partial y^0(\mu)/\partial \mu_j$;

2) *для* $\forall\, i = \overline{1, n}$ *вектор-функция* $\varphi^{(i)}(x) = \partial y(x, x_0, y^0, \mu)/\partial y^0_i$ *является решением задачи Коши линейной однородной системы*

$$u' = \frac{\partial f(x, y(x, x_0, y^0, \mu), \mu)}{\partial y}\, u \tag{3.18}$$

с начальными данными $x_0, e^{(i)}$, *где* $e^{(i)} = (0, \ldots, 1_i, \ldots, 0)$;

3) *вектор-функция* $\varphi^{(0)}(x) = \partial y(x, x_0, y^0, \mu)/\partial x_0$ *является решением задачи Коши системы* (3.18) *с н. д.* $x_0, -f(x_0, y^0, \mu)$.

Df. *Линейные системы* (3.17) *и* (3.18) *называются системами в вариациях вдоль решения* $y(x, x_0, y^0, \mu)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Существование частных производных решения доказывается путем непосредственного вычисления предела приращения функции к приращению аргумента. Наличие дифференцируемости решения по y^0 при $n = 1$ установлено в теореме о дифференцируемости общего решения из главы I, § 5. А существование производных по x^0 и μ доказывается аналогично.

Это техническое рассуждение можно найти практически в любом учебнике по ОДУ (см., например, в [1, гл. 5, § 2, т. 5.2.1]).

Перейдем к доказательству неформальной части теоремы.

Подставляя решение $y(x, x_0, y^0, \mu)$ в систему (3.15), получаем

$$\frac{\partial}{\partial x}\, y(x, x_0, y^0, \mu) \stackrel{x}{\equiv} f(x, y(x, x_0, y^0, \mu), \mu). \qquad (3.19)$$

1) Поскольку в F существуют и непрерывны f'_y и f'_μ, а в D — $y'_\mu(x, x_0, y^0, \mu)$, левую и правую (как сложную функцию) части тождества (3.19) можно продифференцировать по компоненте μ_j, т. е. найти их частные производные по μ_j: $\dfrac{\partial}{\partial \mu_j}\dfrac{\partial}{\partial x}\, y(x, x_0, y^0, \mu) =$

$$\frac{\partial f(x, y(x, x_0, y^0, \mu), \mu)}{\partial y}\, \frac{\partial}{\partial \mu_j}\, y(x, x_0, y^0, \mu) + \frac{\partial f(x, y(x, x_0, y^0, \mu), \mu)}{\partial \mu_j}\,.$$

Правая часть полученного равенства непрерывна по x и μ_j как композиция непрерывных функций, следовательно и левая часть непрерывна, а значит, во второй смешанной производной дифференцирование по x и по μ_j можно поменять местами.

После этого становится очевидным, что любая функция $\psi^{(j)}(x) = \partial y(x, x_0, y^0, \mu)/\partial \mu_j \quad (j = \overline{1, m})$ удовлетворяет системе в вариациях (3.17).

При этом в силу независимости переменных x и μ в частной производной решения по μ_j можно выбрать x равным x_0. Тогда $\psi^{(j)}(x_0) = \partial y(x_0, x_0, y^0, \mu)/\partial \mu_j = \partial y^0(\mu)/\partial \mu_j$.

2) По соображениям аналогичным тем, которые приведены в 1), левую и правую части тождества (3.19) можно продифференцировать по компоненте начального данного y_i^0, получая равенство:

$$\frac{\partial}{\partial y_i^0}\frac{\partial}{\partial x}\,y(x,x_0,y^0,\mu)=\frac{\partial f(x,y(x,x_0,y^0,\mu),\mu)}{\partial y}\,\frac{\partial}{\partial y_i^0}\,y(x,x_0,y^0,\mu).$$

Меняя в левой части порядок дифференцирования, заключаем, что функция $\varphi^{(i)}(x)=\partial y(x,x_0,y^0,\mu)/\partial y_i^{(0)}\quad(i=\overline{1,n})$ удовлетворяет системе в вариациях (3.18).

Кроме того, $\varphi^{(i)}(x_0)=\partial y(x_0,x_0,y^0,\mu)/\partial y_i^{(0)}=\partial y^0/\partial y_i^{(0)}=e^{(i)}$, поскольку компоненты $y_1^{(0)},\dots,y_n^{(0)}$ не зависят друг от друга.

3) Дифференцируя тождество (3.19) по начальному данному x_0 и меняя порядок дифференцирования, устанавливаем, что функция $\chi(x) = \partial y(x, x_0, y^0, \mu)/\partial x_0$ также удовлетворяет системе (3.18).

Остается только вычислить $\chi(x_0)$. Однако, зафиксировать в частной производной решения по x_0 аргумент x равным x_0 нельзя, так как x_0 в рассматриваемом случае оказалась не константой, а независимой переменной, по которой и берется частная производная.

Поэтому придется использовать тождество $y(x_0, x_0, y^0, \mu) = y^0$. Дифференцируя его по x_0, получаем

$$\left.\frac{\partial y(x, x_0, y^0, \mu)}{\partial x}\right|_{x=x_0} + \frac{\partial y(x_0, x_0, y^0, \mu)}{\partial x_0} = 0.$$

Согласно (3.19) первое слагаемое полученного равенства равно $f(x, y(x, x_0, y^0, \mu), \mu)|_{x=x_0}$ и, значит, равно $f(x_0, y^0, \mu)$, а второе — это $\chi(x_0)$. Отсюда $\chi(x_0) = -f(x_0, y^0, \mu)$. $\square$

Если допустить, что в системе (3.15) функция $f(x, y, \mu)$ имеет большую чем единица гладкость по y и μ, то естественно ожидать, что и решение $y = y(x, x_0, y^0, \mu)$ системы (3.15) можно большее число раз продифференцировать по начальным данным и параметрам.

Теорема (о существовании у решения производных высших порядков). *Пусть в системе* (3.15) *функция* $f(x, y, \mu) \in C^{0,k,k}_{x,y,\mu}(F)$, *тогда решение системы* (3.15) $y = y(x, x_0, y^0, \mu) \in C^{1,k,k,k}_{x,x_0,y^0,\mu}(D)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проведем его методом математической индукции по степени гладкости k функции f.

База индукции уже имеется, так как при $k = 1$ справедлива теорема о дифференцируемости по начальным данным и параметрам.

Используем теперь доказываемую теорему в качестве индукционного предположения, т. е. считаем, что $y(x, x_0, y^0, \mu) \in C^{1,k,k,k}_{x,x_0,y^0,\mu}(D)$.
Пусть в системе (3.15) $f \in C^{0,k+1,k+1}_{x,y,\mu}(F)$. Тогда матрица $\dfrac{\partial f(x, y(x, x_0, y^0, \mu), \mu)}{\partial y}$ и вектор $\dfrac{\partial f(x, y(x, x_0, y^0, \mu), \mu)}{\partial \mu_j}$ систем в вариациях (3.17) и (3.18) как производные сложных функций оказываются функциями k раз непрерывно дифференцируемыми по x_0, y^0, μ, поскольку такими по индукционному предположению являются решение $y(x, x_0, y^0, \mu)$ и функции f'_{y_i}, f'_{μ_j}.

Применяя теперь индукционное предположение непосредственно к линейным системам в вариациях, заключаем, что функции $\psi^{(j)}(x) = \partial y(x, x_0, y^0, \mu)/\partial \mu_j$, $\varphi^{(i)}(x) = \partial y(x, x_0, y^0, \mu)/\partial y^0_i$, $\chi(x) = \partial y(x, x_0, y^0, \mu)/\partial x_0$, являющиеся решениями соответствующей системы (3.17) или (3.18), k раз непрерывно дифференцируемы по x_0, y^0, μ. А значит, само решение $y(x, x_0, y^0, \mu)$ системы (3.15) дифференцируемо по каждой из этих переменных $(k + 1)$ раз. $\square$

3^0. Аналитичность решений по начальным данным и параметрам.

Рассмотрим, наконец, нормальную систему (3.15) $y' = f(x, y, \mu)$ с непрерывной в области $F = G \times \mathfrak{M}$ функцией f в предположении, что для всякой точки $(x_0, y^0, \mu^*) \in F$ функция $f(x, y, \mu)$ является вещественно-аналитической функцией переменных y, μ в некоторой окрестности точки (y^0, μ^*).

Иными словами, в поликруге $K_r(y^0, \mu^*) = \{(y, \mu) : \|y - y^0\| < r, \|\mu - \mu^*\| < r\}$ радиуса r с центром (y^0, μ^*) вещественная функция f допускает разложение в абсолютно сходящийся степенной ряд:

$$f(x, y, \mu) = \sum_{p,q=0}^{\infty} f^{(p,q)}(x)(y - y^0)^p (\mu - \mu^*)^q,$$

где $p = (p_1, \ldots, p_n)$, $q = (q_1, \ldots, q_m)$, $p_i, q_j \in \mathbb{Z}_+$, $z^s = z_1^{s_1} \ldots z_l^{s_l}$, векторные коэффициенты $f^{(p,q)}(x)$ — это вещественные непрерывные в некоторой окрестности точки x_0 функции.

Теорема Ляпунова–Пуанкаре (о разложении решения в ряд по степеням начальных данных и параметров). *Пусть в системе* (3.15) *выполнены предположения, сделанные выше для функции* $f(x, y, \mu)$, *и пусть "расчетная" система* (3.15*) $y' = f(x, y, \mu^*)$ *имеет решение* $y = \varphi(x, \mu^*)$, *определенное на отрезке* $[a, b]$. *Тогда* $\exists\, \rho > 0$ *такое, что решение системы* (3.15) $y = y(x, x_0, y^0, \mu)$ *определено и непрерывно на множестве* $[a, b] \times [a, b] \times K_\rho(\varphi(x_0), \mu^*)$ *и для любых* $x, x_0 \in [a, b]$ *является вещественно-аналитической функцией переменных* y^0, μ *в поликруге* $K_\rho(\varphi(x_0), \mu^*) = \{(y^0, \mu) :$ $\|y^0 - \varphi(x_0)\| < \rho,\ \|\mu - \mu^*\| < \rho\}$, *т. е. решение* $y = y(x, x_0, y^0, \mu)$ *раскладывается в сходящийся степенной ряд:*

$$y(x, x_0, y^0, \mu) = \sum_{p,q=0}^{\infty} y^{(p,q)}(x, x_0)(y^0 - \varphi(x_0))^p (\mu - \mu^*)^q,$$

где коэффициенты $y^{(p,q)}(x, x_0)$ *непрерывны по* $x, x_0 \in [a, b]$.

Доказательство теоремы см., например, в [1, гл. 6, § 2, т. 6.2.1].

4^0. Аналитичность решений по независимой переменной. До сих пор, рассматривая систему (3.15) $y' = f(x, y, \mu)$, мы последовательно улучшали зависимость функции f от y и от μ, получая улучшение свойств решений по начальным данным и параметрам, не затрагивая при этом зависимость f от x.

Здесь этот пробел будет восполнен, причем, поскольку зависимость f от параметра μ использоваться не будет, вернемся к рассмотрению исходной нормальной системы (3.1) $y' = f(x, y)$.

Теорема Коши (об аналитичности решения задачи Коши аналитической системы). *Пусть в системе* (3.1) $f(x, y)$ *является аналитической функцией* x, y *в области* G, *т. е. для любой точки* $(x_0, y^0) \in G$ *функция* f *раскладывается в этой точке в сходящийся степенной ряд*

$$f(x, y) = \sum_{k,p=0}^{\infty} f^{(k,p)}(x - x_0)^k (y - y^0)^p$$

с радиусом сходимости $r = r(x_0, y^0)$. *Тогда решение системы* (3.1) $y = y(x, x_0, y^0)$ *раскладывается в точке* x_0 *в сходящийся степенной ряд*

$$y(x, x_0, y^0) = \sum_{m=0}^{\infty} a^{(m)}(x - x_0)^m$$

с радиусом сходимости $\rho = \rho(x_0)$, причем $a^{(0)} = y^0$.

Доказательство теоремы см. например, в [1, гл. 6, § 4, т. 6.4.1]. Следует иметь в виду, что радиус сходимости ρ ряда $y(x, x_0, y^0)$ вне зависимости от величины радиуса сходимости r может быть достаточно мал.

ДОПОЛНЕНИЯ К ГЛАВЕ III.

Дополнение 3_1. Векторы и вектор-функции.

Хорошо известно, что векторная запись многих математических объектов, в том числе нормальных систем, очень удобна, так как существенно сокращает и облегчает теоретические выкладки. Но прежде чем ее использовать, давайте вспомним некоторые факты, касающиеся действий с векторами и вектор-функциями.

Вообще говоря, вектор размерности n — это упорядоченный набор из n чисел, чаще всего вещественных, но возможно целых, рациональных, комплексных. При необходимости различают

$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$ — вектор-столбец и $a = (a_1, \dots, a_n)$ — вектор-строка.

Множество векторов размерности n образует n-мерное линейное пространство над полем вещественных, если $a_j \in \mathbb{R}$, или комплексных, если $a_j \in \mathbb{C}$, чисел $(j = \overline{1, n})$.

В отличие от геометрии, где обычно используется евклидова норма вектора или норма ℓ_2 : $\|a\| = \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}$, в дифференциальных уравнениях удобно использовать норму ℓ_∞ : $\|a\| = \max\limits_{j=1,\ldots,n} |a_j|$.

Поэтому, например, множество $\|a\| \le 1$ при $n = 3$ в геометрии — это шар радиуса единица, а в дифференциальных уравнениях — куб, ребро которого имеет длину равную двум.

Очевидно, что для обеих норм выполняются все три свойства, являющиеся аксиомами нормы:

1) $\|a\| \ge 0$, $\|a\| = 0 \Rightarrow a = \mathbf{0}\,(= (0, \ldots, 0))$;

2) $\forall\, \alpha \in \mathbb{C}$: $\|\alpha\; a\| = |\alpha| \cdot \|a\|$; 3) $\|a + b\| \le \|a\| + \|b\|$.

Отметим, что "привычные" свойства нормы $\|a\| \ge 0$, $\|a\| = 0 \;\Leftrightarrow\; a = \mathbf{0}$ не входят в определение нормы, а вытекают из него.

Действительно, согласно 2) $\|\mathbf{0}\| = \|0 \cdot \mathbf{0}\| = 0 \cdot \|\mathbf{0}\| = 0$ и теперь согласно 3) $\forall\, a$: $0 = \|\mathbf{0}\| = \|a - a\| \le \|a\| + \|-a\| = 2\|a\|$.

Норма позволяет определить расстояние между векторами: $\rho(a, b) = \|a - b\|$.

Df. *Последовательность векторов* $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(k)}, \ldots$ *сходится к вектору* a, *если* $\|a^{(k)} - a\| \to 0$ *при* $k \to +\infty$.

Т. е. сходимость векторов означает покомпонентную сходимость.

Df. *Функция* $y(x)$ *— вектор-функция скалярного аргумента, если* $y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \ldots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$, *где* $y_1, \ldots, y_n$ *— скалярные функции.*

Вектор-функция скалярного аргумента $y(x)$ непрерывна, дифференцируема или интегрируема, если непрерывны, дифференцируемы или интегрируемы все ее компоненты, и

$$\int_a^b y(x)dx = \begin{pmatrix} \int_a^b y_1(x)dx \\ \ldots \\ \int_a^b y_n(x)dx \end{pmatrix}, \quad y'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ \ldots \\ y_n'(x) \end{pmatrix}.$$

В частности, легко проверить, что $\left\| \int_a^b y(x)\,dx \right\| \leq \left| \int_a^b \|y(x)\|\,dx \right|$.

Df. *Функция* $y(x)$ *является скалярной функцией векторного аргумента, если* $x = (x_1, \ldots x_m)$, *т. е.* $y = y(x_1, \ldots x_m)$.

Скалярная функция векторного аргумента $y(x)$ непрерывна, если она непрерывна по совокупности аргументов, и непрерывно дифференцируема, если существуют и непрерывны частные производные по всем компонентам x. При этом
$y'(x) = \left(\dfrac{\partial y(x)}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial y(x)}{\partial x_m}\right)$.

Df. *Функция* $y(x)$ *является векторной функцией векторного аргумента, если* $y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x_1, \ldots, x_m) \\ \ldots \\ y_n(x_1, \ldots, x_m) \end{pmatrix}$.

Следуя ранее введенным определениям, заключаем, что

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1(x)}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial y_1(x)}{\partial x_m} \\ \cdots \\ \dfrac{\partial y_n(x)}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial y_n(x)}{\partial x_m} \end{pmatrix} \text{— матрица Якоби размерности } n \times m.$$

Если при этом $m = n$, то $\det\left(\dfrac{d\,y(x)}{d\,x}\right)$ — это Якобиан.

Дополнение 3_2. Поведение решений вблизи границ $\mathbf{I_{max}}$. Приведем еще одно используемое на протяжении ряда лет доказательство теоремы о поведении интегральной кривой решения системы (3.1) при стремлении его аргумента к какой-либо из границ максимального интервала существования.

Теорема (о поведении интегральной кривой полного решения). *Пусть в системе* (3.1) $f(x,y) \in C(G)$, *тогда при стремлении аргумента любого решения к границе своего максимального интервала существования интегральная кривая стремится к границе области* G, *т. е. покидает любой компакт* $\overline{H} \subset G$ *и никогда в него не возвращается.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $y = \varphi(x)$ — произвольное решение системы (3.1), определенное на максимальном интервале существования (α, β). Надо показать, что для $\forall\, \overline{H} \subset G$ найдется такое $\sigma \in (\alpha, \beta)$, что для $\forall\, x \in (\sigma, \beta)$ точки $(x, \varphi(x))$ интегральной кривой γ лежат в множестве $G \backslash \overline{H}$.
Или, другими словами,

$$\forall\, \overline{H} \subset G, \ \ \forall \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in (\alpha, \beta): \ \ x_k \to \beta \ \Rightarrow$$
$$\exists K > 0: \ \forall\, k > K \ \Rightarrow \ \gamma_k = (x_k, \varphi(x_k)) \in G \backslash \overline{H}.$$

Доказывая от противного, предположим, что

$$\exists\,\overline{H}_1 \subset G,\ \ \exists\,\{x_k\}_{k=1}^{\infty},\ \ x_k \to \beta:\ \forall\, k \in \mathbb{N}\ \Rightarrow\ \gamma_k \in \overline{H}_1.$$

Отсюда сразу же вытекает, что $\beta < +\infty$, так как в противном случае последовательность x_k оказывается неограниченной, и найдется индекс k^* такой, что точка γ_{k^*} интегральной кривой γ будет лежать вне компакта $\overline{H}_1$.
Возьмем теперь любой компакт $\overline{H}_2$ такой, что $\overline{H}_1 \subsetneqq \overline{H}_2 \subset G$. Это значит, что если Γ_1, Γ_2 — границы $\overline{H}_1, \overline{H}_2$, то $d = \rho(\Gamma_1, \Gamma_2) > 0$, где расстояние $\rho(\Gamma_1, \Gamma_2) = \min\limits_{\forall\,\xi\in\Gamma_1,\,\forall\,\eta\in\Gamma_2} \{\|\xi - \eta\|\}$.
Покажем, что при $x \to \beta$ интегральная кривая $\gamma(x)$ покидает компакт $\overline{H}_2$ хотя бы один раз.
В противном случае (второй раз "от противного")

$$\forall\, x_0 \in (\alpha, \beta),\ \forall\, x \in [x_0, \beta)\ \Rightarrow\ \gamma \in \overline{H}_2.$$

Покажем, что при этом предположении решение $y = \varphi(x)$ можно продолжить вправо за границу максимального интервала существования, для чего докажем существование $\lim\limits_{x\to\beta-} \varphi(x) = \eta$.

Если допустить, что такой предел отсутствует (в третий раз "от противного"), то найдутся такие последовательности аргументов $x_k^*,\, x_k^0 \in [x_0, \beta)$, что $x_k^*,\, x_k^0 \to \beta$, $\varphi(x_k^*) \to y^*$, $\varphi(x_k^0) \to y^0$ при $k \to \infty$ и $y^* \neq y^0$.
Поскольку точки $(x, \varphi(x)) \in \overline{H}_2$ при $x \in [x_0, \beta)$, то предельные точки $(\beta, y^*), (\beta, y^0) \in \overline{H}_2$, а значит, y^*, y^0 ограничены по норме и $\|y^* - y^0\| = \delta > 0$. Поэтому существует число $K_1 > 0$ такое, что $\|\varphi(x_k^*) - \varphi(x_k^0)\| \geq \delta/2$ для всякого $k > K_1$.

С другой стороны, поскольку обе последовательности аргументов стремятся к одному пределу β, то для любого $\varepsilon > 0$ существует число $K_2 > 0$ такое, что $|x_k^* - x_k^0| < \varepsilon$ для всякого $\forall\, k > K_2$.

Пусть $M = \max_{\overline{H}_2} \|f(x, y)\|$.

Выбирая $\varepsilon = \delta/(2M)$ и $l > K_1, K_2$, приходим к противоречию:

$$\frac{\delta}{2} \leq \|\varphi(x_l^*) - \varphi(x_l^0)\| \leq \left| \int_{x_l^0}^{x_l^*} \|f(s, \varphi(s))\|\, ds \right| \leq M|x_l^* - x_l^0| < M\varepsilon = \frac{\delta}{2}.$$

Итак, $\exists \lim\limits_{x\to\beta-} \varphi(x) = \eta$ и точка $(\beta, \eta) \in \overline{H}_2 \subset G$, так как любой компакт содержит все свои предельные точки.
Мы попали в условие леммы о продолжении решения за интервал, согласно которой (α, β) не будет являться максимальным интервалом существования для решения $y = \varphi(x)$. !!!
Следовательно, γ покидает компакт $\overline{H}_2$ хотя бы один раз, т. е. $\exists\, \chi \in [x_0, \beta): \quad (\chi, \varphi(\chi)) \notin \overline{H}_2$.

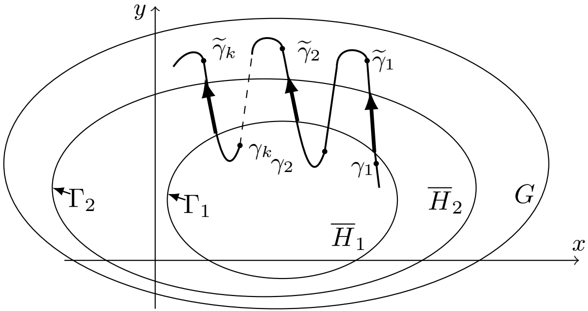
Поскольку x_0 — произвольная точка из (α, β), для $\forall\, k \geq 1$ рассмотрим последовательность точек $x_0^k = \beta - (\beta - \alpha)/(k+1)$, лежащую в (α, β) и стремящуюся к β.
По доказанному выше существует $\{\chi_k\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что $\chi_k \in [x_0^k, \beta)$ $(\chi_k \to \beta$ при $k \to \infty)$ и $\tilde{\gamma}_k = (\chi_k, \varphi(\chi_k)) \notin \overline{H}_2$ для $\forall\, k \geq 1$.

Разряжая при необходимости точки последовательностей $\{x_k\}$ и $\{\chi_k\}$, сделаем перенумерацию так, чтобы они чередовались:

$$x_1 < \chi_1 < x_2 < \chi_2 < x_3 < \dots\ ,$$

и для $\forall\, k \geq 1$ рассмотрим интервалы (x_k, χ_k).
Существуют моменты $t_k^1, t_k^2 \in (x_k, \chi_k)$ такие, что $(t_k^i, \varphi(t_k^i)) \in \Gamma_i$ и для $\forall\, x \in (t_k^1, t_k^2)$ точка $(x, \varphi(x)) \in H_2 \backslash \overline{H}_1$.

Оценим длину промежутков времени $[t_k^1, t_k^2]$.
По построению $\|(t_k^2, \varphi(t_k^2)) - (t_k^1, \varphi(t_k^1))\| \geq d > 0$
или по определению нормы
$\max\{t_k^2 - t_k^1, |\varphi_1(t_k^2) - \varphi_1(t_k^1)|, \ldots, |\varphi_n(t_k^2) - \varphi_n(t_k^1)|\} \geq d.$



Следовательно или $t_k^2 - t_k^1 > d$, или существует индекс j такой,

что $d \leq |\varphi_j(t_k^2)) - \varphi_j(t_k^1))| \leq \displaystyle\int_{t_k^1}^{t_k^2} |f_j(s, \varphi(s))|\, ds \leq M(t_k^2 - t_k^1),$

откуда $t_k^2 - t_k^1 \geq d/M.$

Поэтому в любом случае $t_k^2 - t_k^1 \geq \tilde{d} = \min\{d, d/M\}$.

Поскольку число β конечно, существует номер $\tilde{k}$ такой, что $\sum_{k=2}^{\tilde{k}}(t_k^2 - t_k^1) \geq \tilde{k}\tilde{d} > \beta$, а значит, $t_{\tilde{k}}^2 > \beta$, но $t_{\tilde{k}}^2 \in (\alpha, \beta)$. !!!

Рассуждения для левого конца интервала (α, β) аналогичны. $\square$

Следствие. *Пусть* $G = (a, b) \times D$, *где* D *— область фазового пространства* $\mathbb{R}^n$. *Тогда либо решение* $y = \varphi(x)$ *системы* (3.1) *определено на всем интервале* (a, b), *либо при стремлении аргумента* x *к границе максимального интервала существования его интегральная кривая покидает любой компакт* $\overline{D}_1 \subset D$ *и никогда в него не возвращается.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если, например, у максимального интервала существования (α, β) решения $y = \varphi(x)$ правый конец $\beta < b$, то β конечно. Если допустить, что найдется $\overline{D}_1 \subset D$, что $\varphi(x) \in \overline{D}_1$ для $\forall x \in [x_0, \beta)$, то $(x, \varphi(x)) \in [x_0, \beta] \times \overline{D}_1 \subset G$. !!! $\square$

Г Л А В А IV
Линейные дифференциальные уравнения высших порядков

§ 1. СУЩЕСТВОВАНИЕ, ЕДИНСТВЕННОСТЬ И ПРОДОЛЖИМОСТЬ РЕШЕНИЙ, ЗАДАЧА КОШИ

1^0. Объект изучения.

В этой главе будут исследоваться линейное дифференциальное уравнения порядка n $(n \geq 2)$, разрешенное относительно старшей производной

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = q(x), \tag{4.1}$$

в котором функции $p_j(x)$, $q(x)$ $(j = \overline{1,n})$ определены и непрерывны на некотором интервале (a, b) и, если не оговорено противное, принимают на нем вещественные значения.

Если $n = 1$, то получаем линейное уравнение первого порядка $y' + p_1(x)y = q(x)$, общее решение которого найдено в § 5 главы II.

Df. *Линейное уравнение* (4.1) *называется однородным (ЛОУ), если функция* $q(x) \equiv 0$ *на* (a, b), *в противном случае* (4.1) — *неоднородное (ЛНУ), при этом функция* $q(x)$ *называется неоднородностью.*

Очевидно, что любое ЛОУ имеет тривиальное решение $y(x) \equiv 0$.

ЛНУ (4.1), очевидно, является частным случаем ОДУ порядка n, разрешенного относительно старшей производной, (3.2) $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$.
К сожалению уже для ЛОУ II порядка $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$ не удается в общем виде выписать общее решение, как это сделано в формуле Коши для ЛОУ первого порядка.
Кроме того, для линейных уравнений высокого порядка нельзя применять векторную запись. Именно поэтому многие формулы и доказательства будут более громоздкими по сравнению с аналогами, которые будут получены для линейных систем, хотя уравнения и являются их частным случаем.

2^0. Применение к ЛНУ фундаментальных теорем.

Стандартная замена (3.3) $y = y_1,\ y' = y_2,\ \ldots,\ y^{(n-1)} = y_n$ сводит ЛНУ к частному случаю нормальной системы (3.4), а именно: линейной неоднородной системе (ЛНС) порядка n

$$y_1' = y_2,\ \ \ldots\ \ y_{n-1}' = y_n,\ \ y_n' = -p_n(x)y_1 - \ldots - p_1(x)y_n + q(x). \quad (4.2)$$

Как уже отмечалось, система (4.2) эквивалентна уравнению (4.1) в следующем смысле: если $(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$ является решением системы (4.2), то функция $y = \varphi_1(x)$ — решение уравнения (4.1). И, наоборот, если $y = \varphi(x)$ является решением уравнения (4.1), то вектор $(\varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x))$ — это решение системы (4.2).

Если записать ЛНС (4.2) в векторном виде $y' = P(x)y + q_0(x)$, то

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -p_n & -p_{n-1} & -p_{n-2} & \ldots & -p_1 \end{pmatrix}, \quad q_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ q \end{pmatrix}.$$

Вспоминая, как ставится задача Коши для произвольной линейной системы (3.14) и возвращаясь к уравнению (4.1) при помощи стандартной замены (3.3), получаем постановку задачи Коши для уравнения: надо найти такое решение $y = \varphi(x)$, что $\varphi(x_0) = y_0^0$, $\varphi'(x_0) = y_1^0, \ldots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}^0$, где $x_0 \in (a, b)$, $y_0^0, \ldots, y_{n-1}^0 \in \mathbb{R}^1$.

Теорема (о существовании, единственности и продолжимости решений линейных уравнений). *Для любого* $x_0 \in (a, b)$ *и любых* $y_0^0, \ldots, y_{n-1}^0 \in \mathbb{R}^1$ *существует и единственно решение задачи Коши линейного уравнения* (4.1) *с начальными данными* $x_0, y_0^0, \ldots, y_{n-1}^0$, *продолжимое на весь интервал* (a, b).

Доказательство. По теореме о существовании и единственности решений линейных систем решение задачи Коши уравнения (4.1), равносильного линейной системе (4.2), существует на отрезке Пеано и единственно. По теореме о продолжимости решений линейных систем это решение продолжимо на (a, b). $\square$

3^0. Комплексные линейные уравнения.

Если в линейном уравнении (4.1) $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ и $q(x)$ — комплекснозначные функции вещественного аргумента x, то решение уравнения (4.1) $y = y(x)$ также будет иметь комплексные значения.

Возникает естественный вопрос о существовании, единственности и продолжимости такого решения.

Пусть $y = u(x) + \mathrm{i}v(x)$, $p_j = r_j(x) + \mathrm{i}s_j(x)$, $q = g(x) + \mathrm{i}h(x)$.

По определению решения, подставляя $y(x)$ в уравнение (4.1), получаем тождество на интервале (a, b)

$$u^{(n)} + \mathrm{i}v^{(n)} + (r_1 + \mathrm{i}s_1)(u^{(n-1)} + \mathrm{i}v^{(n-1)}) + \ldots + (r_n + \mathrm{i}s_n)(u + \mathrm{i}v) \equiv g + \mathrm{i}h.$$

Выделяя вещественную и мнимую части в этом тождестве, получаем систему из двух линейных уравнений порядка n с вещественными коэффициентами

$$\begin{aligned} u^{(n)} + r_1 u^{(n-1)} - s_1 v^{(n-1)} + \ldots + r_n u - s_n v = g, \\ v^{(n)} + s_1 u^{(n-1)} + r_1 v^{(n-1)} + \ldots + s_n u + r_n v = h. \end{aligned}$$

Сделав двойную стандартную замену вида (3.3)

$$u = u_1,\ u' = u_2,\ \ldots,\ u^{(n-1)} = u_n,\ v = v_1,\ v' = v_2,\ \ldots,\ v^{(n-1)} = v_n,$$

установим, что функции $u_1(x), \ldots, u_n(x), v_1(x), \ldots, v_n(x)$ удовлетворяют вещественной линейной системе порядка $2n$ с непрерывными на (a, b) коэффициентами, к которой можно применить теоремы о существовании и единственности и продолжимости решений.

В результате доказано, что решение линейного уравнения (4.1) с комплексными коэффициентами существует, единственно и продолжимо на весь интервал существования самого уравнения (4.1).

§ 2. ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1^0. Линейность пространства решений.

В этом параграфе будут изучаться вещественные ЛОУ

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=0 \text{ или } Ly=0. \quad (4.3)$$

все решения которых, как было установлено, определены на (a,b). Пусть $Ly=y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y$ — это линейный дифференциальный оператор. Он действует на пространстве n раз непрерывно дифференцируемых функций, т. е. на пространстве функций $y(x)\in C^n((a,b))$, и линеен в силу линейности операции дифференцирования, т. е. $L(\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2)=\alpha_1 Ly_1+\alpha_2 Ly_2$.

Следовательно, ЛОУ (4.3) при желании можно записать в виде $Ly=0$, и его решения образуют линейное пространство. Действительно, если $\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ — это решения ЛОУ (4.3), то для $\forall\,\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}^1$ линейная комбинация $\alpha_1\varphi_1(x)+\alpha_2\varphi_2(x)$ также является решением.

2^0. Линейная зависимость и независимость решений, определитель Вронского.

Хорошо известно, что n функций $\psi_1(x),\ldots,\psi_n(x)$, определенных на интервале (a,b), называются линейно зависимыми на (a,b), если существует постоянный вектор $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\neq 0$, что

$$\alpha_1\psi_1(x)+\ldots+\alpha_n\psi_n(x) \overset{(a,b)}{\equiv} 0. \tag{4.4}$$

А функции, не являющиеся линейно зависимыми на (a,b), называются линейно независимыми.

Тем самым, функции $\psi_1(x),\ldots,\psi_n(x)$ линейно независимы на интервале (a,b), если (4.4) выполняется только при $\alpha=0$.

Пусть $\psi_1(x),\ldots,\psi_n(x)\in C^{n-1}((a,b))$. Составим матрицу $\Psi(x)$:

$$\Psi(x)=\begin{pmatrix} \psi_1(x) & \ldots & \psi_n(x) \\ \psi_1'(x) & \ldots & \psi_n'(x) \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ \psi_1^{(n-1)}(x) & \ldots & \psi_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}.$$

Df. *Функция* $W(x) = \det\Psi(x)$ *называется определителем Вронского (ОВ), построенном на системе функций* $\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x)$.

Лемма (о связи между линейной зависимостью функций и ОВ). *Если* $n-1$ *раз непрерывно дифференцируемые на* (a,b) *функции* $\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x)$ *линейно зависимы на* (a,b), *то ОВ* $W(x) \overset{(a,b)}{\equiv} 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть существует такой вектор $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq 0$, что справедливо тождество (4.4). Дифференцируя его $n-1$ раз, получаем линейную однородную алгебраическую систему $\begin{cases} \alpha_1\psi_1(x) + \ldots + \alpha_n\psi_n(x) = 0 \\ \quad \ldots \\ \alpha_1\psi_1^{(n-1)}(x) + \ldots + \alpha_n\psi_n^{(n-1)}(x) = 0 \end{cases}$ или $\Psi(x)\alpha = 0$, имеющую для $\forall\, x \in (a,b)$ нетривиальное решение α. Следовательно определитель этой системы $W(x) \overset{(a,b)}{\equiv} 0$. $\square$

Обратное утверждение неверно.

Пусть, например, $n=2$, $\psi_1 = \begin{bmatrix} x^3 \ (x \geq 0) \\ 0 \ \ (x \leq 0) \end{bmatrix}$, $\psi_2 = \begin{bmatrix} 0 \ \ (x \geq 0) \\ x^3 \ (x \leq 0) \end{bmatrix}$.

Тогда $W(x) = \begin{vmatrix} \psi_1(x) & \psi_2(x) \\ \psi_1'(x) & \psi_2'(x) \end{vmatrix} \overset{(a,b)}{\equiv} 0$, так как один из столбцов определителя всегда равен нулю. Но функции ψ_1, ψ_2, очевидно, линейно независимы на (a,b).

Однако для решений ЛОУ (4.3) обратное утверждение верно.

Теорема (о связи между ОВ и линейной зависимостью решений ЛОУ). *Пусть* $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ *— решения ЛОУ* (4.3) *и существует* $x_0 \in (a,b)$, *что* $W(x_0)=0$, *тогда* $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ *линейно зависимы на* (a,b).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть определитель Вронского, построенный на решениях $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$, обращается в нуль в некой точке $x_0 \in (a,b)$. Тогда линейная однородная

алгебраическая система $\begin{cases} \alpha_1\varphi_1(x_0) + \ldots + \alpha_n\varphi_n(x_0) = 0 \\ \quad \ldots \\ \alpha_1\varphi_1^{(n-1)}(x_0) + \ldots + \alpha_n\varphi_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$

или $\Phi(x_0)\alpha = 0$, где

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \dots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

и $\det \Phi(x_0) = W(x_0) = 0$, имеет решение $\alpha^0 = (\alpha_1^0, \dots, \alpha_n^0) \neq 0$. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = \alpha_1^0 \varphi_1(x) + \ldots + \alpha_n^0 \varphi_n(x)$, которая согласно п. 1^0 является решением уравнение (4.3).

При $x = x_0$ имеем: $\varphi(x_0) = 0$, $\varphi'(x_0) = 0, \dots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = 0$.

С другой стороны тривиальное решение $y(x) \equiv 0$ ЛОУ имеет в точке x_0 те же нулевые начальные данные. Поэтому по теореме единственности $\varphi(x) \equiv 0$ или $\alpha_1^0 \varphi_1(x) + \ldots + \alpha_n^0 \varphi_n(x) \equiv 0$ на (a, b), что означает линейную зависимость $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ на (a, b). $\square$

Следствие. *Если определитель Вронского* $W(x)$, *построенный на решениях ЛОУ* (4.3), *обращается в нуль хотя бы в одной точке интервала* (a,b), *то* $W(x) \equiv 0$ *на* (a,b). *И наоборот, если* $\exists\, x_0 \in (a,b)$, *что* $W(x_0) \neq 0$, *то* $W(x) \neq 0$ *для* $\forall\, x \in (a,b)$.
Второе утверждение следствия легко доказывается от противного. Таким образом, если решения $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ линейно независимы, то построенный на них ОВ $W(x)$ является знакоопределенной на интервале (a,b) функцией.

3^0. Фундаментальная система решений, формула общего решения.

Df. *Фундаментальной системой решений линейного однородного уравнения (4.3) называются любые* n *линейно независимых на* (a,b) *решений этого уравнения.*

Теорема (о существовании ФСР). *Фундаментальная система решений ЛОУ* (4.3) *существует.*

Доказательство будет проведено конструктивно, т. е. ФСР будет построена такой, какая может потребоваться в дальнейшем. Выберем произвольным образом неособую постоянную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{0\,1} & \cdots & a_{0\,n} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n-1\,1} & \cdots & a_{n-1\,n} \end{pmatrix} \quad (\det A \neq 0) \text{ и точку } x_0 \text{ из } (a, b).$$

По теореме существования для $\forall\, j = \overline{1, n}$ существует решение $y = \varphi_j(x)$ с начальными данными $x_0,\ a_{0\,j}, \ldots, a_{n-1\,j}$. Возникшие таким образом решения $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ ЛОУ (4.3) линейно независимы на (a, b), поскольку $W(x_0) = \det A \neq 0$. $\square$

Фундаментальную систему решений обычно называют нормированной, если в качестве A выбрана единичная матрица E. У такой ФСР $W(x_0) = 1$.

Теорема (об общем решении ЛОУ). *Пусть* $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ *— фундаментальная система решений, тогда непрерывная функция* $\varphi(x, C_1, \ldots, C_n) = C_1\varphi_1(x) + \ldots + C_n\varphi_n(x)$ *является общим решением ЛОУ* (4.3) *в области* $G = (a, b) \times \mathbb{R}^n$.

Доказательство. Поскольку любая линейная комбинация решений ЛОУ (4.3) есть решение, то для любых вещественных констант $C_1, \ldots, C_n$ функция $y = \varphi(x, C_1, \ldots, C_n)$ будет решением уравнения (4.3) на интервале (a, b). Дифференцируя эту функцию $n-1$ раз по x, получаем линейную алгебраическую систему

$$\begin{cases} \varphi(x, C_1, \ldots, C_n) = C_1\varphi_1(x) + \ldots + C_n\varphi_n(x) \\ \varphi'(x, C_1, \ldots, C_n) = C_1\varphi_1'(x) + \ldots + C_n\varphi_n'(x) \\ \quad \ldots \\ \varphi^{(n-1)}(x, C_1, \ldots, C_n) = C_1\varphi_1^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n\varphi_n^{(n-1)}(x) \end{cases} \tag{4.6}$$

из n уравнений с n неизвестными $C_1, \ldots, C_n$.

Поскольку $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ образуют ФСР, $\det \Phi(x) = W(x) \neq 0$ для $\forall\, x \in (a, b)$, где матрица Φ системы (4.6) введена (4.5).

Выберем произвольный набор начальных данных для задачи Коши из области G, т. е. $x_0 \in (a, b)$, $y_0^0, \ldots, y_{n-1}^0 \in \mathbb{R}^1$ и покажем, что найдется единственный набор констант $C_1^0, \ldots, C_n^0$, при котором $\varphi(x_0, C_1^0, \ldots, C_n^0) = y_0^0$, $\ldots$, $\varphi^{(n-1)}(x_0, C_1^0, \ldots, C_n^0) = y_{n-1}^0$.

Подставляя начальные данные в (4.6), получаем систему

$$\begin{cases} y_0^0 = C_1\varphi_1(x_0) + \ldots + C_n\varphi_n(x_0) \\ y_1^0 = C_1\varphi_1'(x_0) + \ldots + C_n\varphi_n'(x_0) \\ \quad \ldots \\ y_{n-1}^0 = C_1\varphi_1^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_n\varphi_n^{(n-1)}(x_0) \end{cases} ,$$

у которой определитель матрицы $\Phi(x_0)$, как было установлено, отличен от нуля вне зависимости от выбора точки x_0. Следовательно система имеет единственное решение $C_1^0, \ldots, C_n^0$. В результате $y = \varphi(x, C_1^0, \ldots, C_n^0)$ — это решение задачи Коши ЛОУ (4.3) с начальными данными x_0, $y_0^0, \ldots, y_{n-1}^0$, определенное на интервале (a, b), в чем легко убедиться, подставив набор констант $C_1^0, \ldots, C_n^0$ в систему (4.6). $\square$

Теорема (о размерности пространства решений ЛОУ). *Множество вещественных решений ЛОУ* (4.3) *образует* n *-мерное вещественное линейное пространство над полем вещественных чисел.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ — какая-либо ФСР. Тогда по теореме об общем решении функция $y = C_1\varphi_1(x) + \ldots + C_n\varphi_n(x)$ является общим решением ЛОУ (4.3), а значит, для любого решения $y = \varphi^*(x)$ существует и единственен вещественный вектор $C^* = (C_1^*, \ldots, C_n^*)$, что $\varphi^*(x) = C_1^*\varphi_1(x) + \ldots + C_n^*\varphi_n(x)$.

Таким образом, любое решение ЛОУ можно отождествить с вектором $C \in \mathbb{R}^n$, компоненты которого являются координатами точки линейного пространства $\mathbb{R}^n$ в базисе $\varphi^{(1)} = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_1^{(n-1)}(x)), \ \ldots \varphi^{(n)} = (\varphi_n(x), \ldots, \varphi_n^{(n-1)}(x))$. $\square$

Следствие. *Линейное однородное уравнение порядка* n *не может иметь более чем* n *линейно независимых решений.*

4^0. Овеществление фундаментальной системы решений.

Хотя ЛОУ (4.3) предполагается вещественным, оно вполне может иметь комплексные решения, которые могут входить в ФСР.
Но интерес, естественно, представляют вещественные ФСР.

Оказывается, что ФСР всегда можно овеществить.
Чтобы это доказать, отметим сначала три очевидных свойства комплексных решений.
Пусть $y(x) = u(x) + \mathrm{i}v(x)$ — решение уравнения (4.3) (функции $u(x), v(x)$ вещественны), тогда $u(x)$, $v(x)$ — также решения ЛОУ.
Действительно, пользуясь тем, что $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ вещественны, в тождестве $u^{(n)} + \mathrm{i}v^{(n)} + p_1(u^{(n-1)} + \mathrm{i}v^{(n-1)}) + \ldots + p_n(u + \mathrm{i}v) \equiv 0$ достаточно выделить вещественную и мнимую части.
Кроме того, $\overline{y}(x) = u(x) - \mathrm{i}v(x)$ является решением и при этом $y(x)$ и $\overline{y}(x)$ линейно независимы на (a, b). Поэтому, в частности, к комплексному решению из какой-либо ФСР всегда можно добавить комплексно сопряженное, заменив им любое другое решение.

Лемма (об овеществлении ФСР ЛОУ). *Пусть набор функций* $\Theta_1 = \{\varphi_1(x), \overline{\varphi}_1(x), \ldots, \varphi_l(x), \overline{\varphi}_l(x), \varphi_{2l+1}(x), \ldots, \varphi_n(x)\}$ $(1 \le l \le n/2)$, *где* $\varphi_j = u_j + \mathrm{i}v_j$ $(j = \overline{1, l})$, *а* $\varphi_{2l+1}, \ldots, \varphi_n$ *вещественны, образуют фундаментальную систему решений ЛОУ* (4.3). *Тогда набор* $\Theta_2 = \{u_1(x), v_1(x), \ldots, u_l(x), v_l(x), \varphi_{2l+1}(x), \ldots, \varphi_n(x)\}$ *является вещественной фундаментальной системой решений.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку набор Θ_1 — ФСР, то построенный по ним определитель Вронского $W_1(x) \neq 0$.

Набор Θ_2 состоит из n вещественных решений.

Остается установить их линейную независимость, т. е. доказать, что построенный по ним определитель Вронского $W_2(x) \neq 0$ для любого $x \in (a, b)$.

Имеет место следующая цепочка равенств, основанная на свойствах определителей:

$$0 \neq W_1(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \overline{\varphi}_1 & \dots & \varphi_n \\ \varphi_1' & \overline{\varphi}_1' & \dots & \varphi_n' \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 + \mathfrak{i}v_1 & u_1 - \mathfrak{i}v_1 & \dots & \varphi_n \\ u_1' + \mathfrak{i}v_1' & u_1' - \mathfrak{i}v_1' & \dots & \varphi_n' \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_1 - \mathfrak{i}v_1 & \dots & \varphi_n \\ u_1' & u_1' - \mathfrak{i}v_1' & \dots & \varphi_n' \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \end{vmatrix} + \mathfrak{i} \begin{vmatrix} v_1 & u_1 - \mathfrak{i}v_1 & \dots & \varphi_n \\ v_1' & u_1' - \mathfrak{i}v_1' & \dots & \varphi_n' \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_1 & \dots & \varphi_n \\ u_1' & u_1' & \dots & \varphi_n' \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \end{vmatrix} - \mathfrak{i} \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & \dots & \varphi_n \\ u_1' & v_1' & \dots & \varphi_n' \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \end{vmatrix} + \mathfrak{i} \begin{vmatrix} v_1 & u_1 & \dots & \varphi_n \\ v_1' & u_1' & \dots & \varphi_n' \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} v_1 & v_1 & \dots & \varphi_n \\ v_1' & v_1' & \dots & \varphi_n' \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \end{vmatrix} = (-2\mathfrak{i}) \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & u_2 + \mathfrak{i}v_2 & u_2 - \mathfrak{i}v_2 & \dots & \varphi_n \\ u_1' & v_1' & u_2' + \mathfrak{i}v_2' & u_2' - \mathfrak{i}v_2' & \dots & \varphi_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \end{vmatrix} =$$

$$(-2\mathfrak{i})^l \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & \dots & u_l & v_l & \varphi_{2l+1} & \dots & \varphi_n \\ u_1' & v_1' & \dots & u_l' & v_l' & \varphi_{2l+1}' & \dots & \varphi_n' \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \end{vmatrix} = (-2\mathfrak{i})^l W_2(x). \quad \square$$

5^0. Обратная задача.

Можно ли построить линейное однородное уравнение, имеющее в качестве ФСР заранее заданный набор функций? Если можно, то сколько и какого порядка?

Конструктивный ответ на поставленные вопросы дает следующее утверждение.

Теорема (о построении ЛОУ по заданному набору функций). *Пусть* $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ *— набор из* n *раз непрерывно дифференцируемых на интервале* (a, b) *функций и построенный по ним определитель Вронского* $W(x) \neq 0$ *для* $\forall\, x \in (a, b)$. *Тогда существует и единственно линейное однородное уравнение* (4.3), *для которого* $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ *— фундаментальная система решений на* (a, b).

Д о к а з а т е л ь с т в о.
Единственность. Предположим, что помимо уравнения (4.3) найдется еще одно ЛОУ порядка n
$y^{(n)} + q_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + q_n(x)y = 0$ с $q_1(x), \ldots, q_n(x) \in C((a,b))$, имеющее ту же ФСР $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$. Тогда найдется τ — наименьшее натуральное число такое, что $p_\tau(x) \not\equiv q_\tau(x)$ на (a,b).

В силу непрерывности коэффициентов уравнений найдется интервал $(\alpha, \beta) \subset (a,b)$, на котором $p_\tau(x) \neq q_\tau(x)$.

Следовательно, каждое из решений $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ удовлетворяет разности двух уравнений:
$(p_\tau - q_\tau)y^{(n-\tau)} + \ldots + (p_n - q_n)y = 0$, которую для $\forall\, x \in (\alpha, \beta)$ можно поделить на $p_\tau - q_\tau$, получая ЛОУ
$y^{(n-\tau)} + \ldots + \tilde{p}_{n-\tau}(x)y = 0$ порядка меньшего чем n.
Однако, это уравнение имеет n линейно независимых на (α, β) решений, что невозможно в силу следствия из п. 3^0.

Существование. Покажем, что ЛОУ порядка n, имеющее указанный в формулировке теоремы набор $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ в качестве ФСР, может быть записано в виде

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \ldots & \varphi_n(x) & y \\ \varphi_1'(x) & \ldots & \varphi_n'(x) & y' \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(x) & y^{(n-1)} \\ \varphi_1^{(n)}(x) & \ldots & \varphi_n^{(n)}(x) & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0 \qquad (x \in (a,b)). \qquad (4.7)$$

Действительно, разлагая определитель по элементам последнего столбца, получаем уравнение
$W(x)y^{(n)} + r_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + r_n(x)y = 0$ с непрерывными на (a,b) коэффициентами $r_1(x), \ldots, r_n(x)$, причем

$$r_1(x) = -\begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \ldots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \ldots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-2)}(x) & \ldots & \varphi_n^{(n-2)}(x) \\ \varphi_1^{(n)}(x) & \ldots & \varphi_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}.$$

Разделив теперь это уравнение на $W(x)$, получим ЛОУ (4.3) порядка n, в котором, в частности, $p_1(x) = r_1(x)/W(x)$. Остается проверить, что $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ — это его решения. Но это — очевидно, поскольку при подстановке любой функции $\varphi_j(x)$ в левую часть уравнения (4.7) она будет обращаться в нуль, так как в определителе появятся два одинаковых столбца. $\square$

6^0. Формула Лиувилля.

Оказывается, что вычислить определитель Вронского удается, даже не зная ФСР, по которой он строится. Достаточно только задать начальные данные для решений, входящих в ФСР, или $W(x_0)$.

Для вывода требуемой формулы напомним правило дифференцирования определителя.

Если матрица $\Phi(x)=\{\varphi_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{n}$, то

$$|\Phi(x)|'=\begin{vmatrix}\varphi'_{11} & \dots & \varphi'_{1n}\\ \varphi_{21} & \dots & \varphi_{2n}\\ \vdots & \dots & \vdots\\ \varphi_{n1} & \dots & \varphi_{nn}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\varphi_{11} & \dots & \varphi_{1n}\\ \varphi'_{21} & \dots & \varphi'_{2n}\\ \vdots & \dots & \vdots\\ \varphi_{n1} & \dots & \varphi_{nn}\end{vmatrix}+\ldots+\begin{vmatrix}\varphi_{11} & \dots & \varphi_{1n}\\ \varphi_{21} & \dots & \varphi_{2n}\\ \vdots & \dots & \vdots\\ \varphi'_{n1} & \dots & \varphi'_{nn}\end{vmatrix}.$$

Поэтому

$$W'(x)=\begin{vmatrix}\varphi_1 & \dots & \varphi_n\\ \varphi'_1 & \dots & \varphi'_n\\ \vdots & \dots & \vdots\\ \varphi_1^{(n-2)} & \dots & \varphi_n^{(n-2)}\\ \varphi_1^{(n-1)} & \dots & \varphi_n^{(n-1)}\end{vmatrix}'=\begin{vmatrix}\varphi'_1 & \dots & \varphi'_n\\ \varphi'_1 & \dots & \varphi'_n\\ \vdots & \dots & \vdots\\ \varphi_1^{(n-2)} & \dots & \varphi_n^{(n-2)}\\ \varphi_1^{(n-1)} & \dots & \varphi_n^{(n-1)}\end{vmatrix}+\ldots$$

$$\ldots+\begin{vmatrix}\varphi_1 & \dots & \varphi_n\\ \varphi'_1 & \dots & \varphi'_n\\ \vdots & \dots & \vdots\\ \varphi_1^{(n-1)} & \dots & \varphi_n^{(n-1)}\\ \varphi_1^{(n-1)} & \dots & \varphi_n^{(n-1)}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\varphi_1 & \dots & \varphi_n\\ \varphi'_1 & \dots & \varphi'_n\\ \vdots & \dots & \vdots\\ \varphi_1^{(n-2)} & \dots & \varphi_n^{(n-2)}\\ \varphi_1^{(n)} & \dots & \varphi_n^{(n)}\end{vmatrix}=-r_1(x),$$

так как в сумме все определители, кроме последнего, имеют по две одинаковые строки.

В итоге получили ЛОУ первого порядка $W'(x) = -p_1(x)W(x)$.

Разделяя переменные и интегрируя по s от x_0 до x $(x_0, x \in (a,b))$, имеем: $-\displaystyle\int_{x_0}^{x} p_1(s)\,ds = \int_{x_0}^{x} \frac{dW(s)}{W(s)} = \ln\frac{W(x)}{W(x_0)}$, откуда

$$W(x) = W(x_0)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} p_1(s)\,ds\right) \quad \text{— формула Лиувилля.}$$

Таким образом оказалось, что определитель Вронского не зависит от коэффициентов $p_2(x), \ldots, p_n(x)$ ЛОУ (4.3).

§ 3. ЛИНЕЙНЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1^0. Структура общего решения ЛНУ.

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение (4.1) порядка n:
$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = q(x)$ или $Ly = q$.

Пусть $y = \psi(x)$ решение ЛНУ (4.1) на (a, b), т. е. $L\psi \equiv q$.

Используя его, сведем (4.1) к линейному однородному уравнению (4.3). Для этого сделаем "сдвигающую" замену $y = z + \psi(x)$.

Имеем: $L(z + \psi) = q \;\Leftrightarrow\; Lz + L\psi = q \;\Leftrightarrow\; Lz = 0$.

Пусть $z = \varphi(x, C_1, \ldots, C_n)$ — общее решение ЛОУ $Lz = 0$.
Тогда, подставляя его в замену, устанавливаем, что функция

$$y = \varphi(x, C_1, \ldots, C_n) + \psi(x) \tag{4.8}$$

является общим решением ЛНУ (4.1).
Иными словами, общее решение ЛНУ есть сумма общего решения ЛОУ и частного решения ЛНУ.

2^0. Метод вариации произвольной постоянной.

Теорема (о нахождении частного решения ЛНУ). *Пусть набор $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ является фундаментальной системой решений ЛОУ (4.3) на (a, b). Тогда частное решение $y = \psi(x)$ ЛНУ (4.1) может быть найдено в виде квадратур от $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$, коэффициентов $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ и неоднородности $q(x)$.*

Доказательство. Частное решение будем искать в виде

$$\psi(x) = C_1(x)\varphi_1(x) + \ldots + C_n(x)\varphi_n(x), \tag{4.9}$$

где функции $C_1(x), \ldots, C_n(x) \in C^1((a, b))$, т. е. варьировать произвольные константы из формулы общего решения $\varphi(x, C_1, \ldots, C_n) = C_1\varphi_1(x) + \ldots + C_n\varphi_n(x)$ ЛОУ (4.3). Подставляя решение $y = \psi(x)$ в виде (4.9) в ЛНУ (4.1), получаем только одну связь на n неизвестных функций $C_1(x), \ldots, C_n(x)$. Остается возможность разумным образом наложить еще $(n-1)$-у связь на эти функции, рассчитывая затем их однозначно определить из появившейся системы из n уравнений.

Идея выбора связей заключается в недопущении роста числа слагаемых в ходе нахождения производных функции $\psi(x)$, необходимых для подстановки их в ЛНУ.
Итак,

$$
\begin{aligned}
\psi(x) &= C_1\varphi_1 + \ldots + C_n\varphi_n, \\
\psi'(x) &= C_1\varphi_1' + \ldots + C_n\varphi_n' + \overbrace{C_1'\varphi_1 + \ldots + C_n'\varphi_n}^{=0}, \\
\psi''(x) &= C_1\varphi_1'' + \ldots + C_n\varphi_n'' + \overbrace{C_1'\varphi_1' + \ldots + C_n'\varphi_n'}^{=0}, \\
\ldots & \\
\psi^{(n-1)}(x) &= C_1\varphi_1^{(n-1)} + \ldots + C_n\varphi_n^{(n-1)} + \overbrace{C_1'\varphi_1^{(n-2)} + \ldots + C_n'\varphi_n^{(n-2)}}^{=0}, \\
\psi^{(n)}(x) &= C_1\varphi_1^{(n)} + \ldots + C_n\varphi_n^{(n)} + C_1'\varphi_1^{(n-1)} + \ldots + C_n'\varphi_n^{(n-1)},
\end{aligned}
$$

т. е. в ходе дифференцирования ψ на $C_1', \ldots, C_n'$ была наложена ровно $(n-1)$-а связь.

Теперь для подстановки решения в уравнение домножим левую и правую части первого равенства на $p_n(x)$, второго — на $p_{n-1}(x)$ и так далее, предпоследнего — на $p_1(x)$ и последнего — на единицу, после чего все равенства сложим и приравняем к $q(x)$.

В результате получим:

$L\psi = C_1 L\varphi_1 + \ldots + C_n L\varphi_n + C_1'\varphi_1^{(n-1)} + \ldots + C_n'\varphi_n^{(n-1)} = q.$

Но $L\varphi_j \equiv 0$ $(j = \overline{1,n})$, поскольку $\varphi_j(x)$ — решения ЛОУ (4.3).

Собрав вместе все связи на $C_1', \ldots, C_n'$, получим линейную неоднородную алгебраическую систему n уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} C_1'\varphi_1(x) + \ldots + C_n'\varphi_n(x) = 0 \\ \quad \ldots \\ C_1'\varphi_1^{(n-2)}(x) + \ldots + C_n'\varphi_n^{(n-2)}(x) = 0 \\ C_1'\varphi_1^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n'\varphi_n^{(n-1)}(x) = q(x) \end{cases} . \qquad (4.10)$$

Определитель ее матрицы $\Phi(x)$, выписанный в (4.5), — это ОВ $W(x)$, который отличен от нуля при $\forall\, x \in (a,b)$, так как по условию $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ является фундаментальной системой решений.

Следовательно, система (4.10) по формуле Крамера имеет единственное решение $C_j' = A_{nj}(x)\, q(x)/W(x) \quad (j = \overline{1,n})$, где A_{nj} — алгебраическое дополнение n-й строки и j-о столбца матрицы Φ.

Согласно (4.9) частное решение $\displaystyle \psi(x) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x) \int_{x_0}^{x} \frac{A_{nj}(s)}{W(s)} q(s)\, ds$ для любых $x_0, x \in (a,b)$. $\square$

§ 4. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

1^0. ЛОУ с постоянными коэффициентами.

Пусть в ЛОУ (4.3) коэффициенты $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ постоянны, тогда оно имеет вид

$$L^c y = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \quad (a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^1). \tag{4.3^c}$$

При этом, очевидно, что любое решение уравнения (4.3^c) определено на всей вещественной оси.

Общее решение ЛОУ (4.3^c) с постоянными коэффициентами можно всегда найти в явном виде, в отличие ЛОУ (4.3) с произвольными непрерывными коэффициентами, структура общего решения которых исследована в § 2, ФСР существует, но отсутствуют способы гарантированного нахождения в явном виде решений из ФСР.

Для того чтобы решить ЛОУ (4.3^c), предварительно потребуются два технических результата.

Утверждение 1. *Функции* $x^{k_1}e^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{k_n}e^{\lambda_n x}$, *где* $k_j \in \mathbb{Z}_+$, $(k_j, \lambda_j) \neq (k_l, \lambda_l) \quad (j, l = \overline{1, n},\ j \neq l)$, *линейно независимы на* $\mathbb{R}^1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Следуя определению, покажем, что $\alpha_1 x^{k_1}e^{\lambda_1 x} + \ldots + \alpha_n x^{k_n}e^{\lambda_n x} \overset{\mathbb{R}^1}{\equiv} 0$ верно только при $\alpha_1, \ldots, \alpha_n = 0$. Приводя в этом тождестве подобные члены при одинаковых показателях экспоненты, получаем

$$\sum\nolimits_{s=1}^{m} P^{(s)}(x)e^{\lambda_s^* x} \equiv 0 \qquad (1 \leq m \leq n), \tag{4.11}$$

где $\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*$ различны и любой коэффициент многочленов $P^{(s)}$ — какое-либо α_j из набора $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, так как пары (k_j, λ_j) различны.

Докажем методом математической индукции по m, что в тождестве (4.11) многочлены $P^{(1)}(x), \ldots, P^{(m)}(x) \equiv 0$, а значит, равны нулю все их коэффициенты, и набор $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ тривиален.

При $m=1$ в (4.11) имеется одно слагаемое: $P^{(1)}(x)e^{\lambda_1^* x} \equiv 0$, поэтому $P^{(1)} \equiv 0$.

Предположим, что из (4.11) вытекает, что $P^{(1)}, \ldots, P^{(m)} \overset{\mathbb{R}^1}{\equiv} 0$.
Рассмотрим тождество $\sum_{s=1}^{m+1} P^{(s)}(x)e^{\lambda_s^* x} \equiv 0$.
После деления на $e^{\lambda_{m+1}^* x}$ оно равносильно тождеству

$$\sum_{s=1}^{m} P^{(s)}(x)e^{(\lambda_s^*-\lambda_{m+1}^*)x} + P^{(m+1)}(x) \equiv 0 \qquad (\lambda_s^* - \lambda_{m+1}^* \neq 0).$$

Продифференцировав его по x на один раз больше, чем степень $\mathfrak{m}$ многочлена $P^{(m+1)}(x)$, получим $\sum_{s=1}^{m} Q^{(s)}(x)e^{(\lambda_s^*-\lambda_{m+1}^*)x} \equiv 0$, при этом все многочлены $Q^{(s)}(x)$ имеют ту же степень, что и $P^{(s)}(x)$, поскольку коэффициент при старшей степени $Q^{(s)}$ равен коэффициенту при старшей степени $P^{(s)}$ (какому-либо α_{j^s}), умноженному на $(\lambda_s^* - \lambda_{m+1}^*)^{\mathfrak{m}+1}$.
По индукционному предположению все $Q^{(s)} \equiv 0$, следовательно все $P^{(s)} \equiv 0$, а тогда и все $P^{(m+1)} \equiv 0$. $\square$

При $n=1$ ЛОУ (4.3^c) имеет вид $y'+a_1y=0$, а его общее решение $y=Ce^{-a_1x}$. Поэтому, чтобы выяснить какие решения может иметь уравнение (4.3^c) при $n\geq 2$, подставим в него функцию $y=e^{\lambda x}$ с пока что произвольным показателем λ. Чтобы $e^{\lambda x}$ оказалось решением, должно выполняться тождество

$$L^c e^{\lambda x} = (\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n)e^{\lambda x} \equiv 0. \qquad (4.12)$$

Df. *Функция* $g(\lambda)=\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$ *называется характеристическим многочленом ЛОУ* (4.3^c), *а его нули или корни характеристического уравнения* $g(\lambda)=0$ *называются характеристическими числами.*

По основной теореме высшей алгебры характеристическое уравнение имеет n корней $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, причем комплексные корни могут появляться только комплексно сопряженными парами из-за предположения о вещественности коэффициентов уравнения. Благодаря тождеству (4.12) ясно, что функции $e^{\lambda_1 x},\ldots,e^{\lambda_n x}$ являются решениями ЛОУ (4.3^c) тогда и только тогда, когда показатели $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ — характеристические числа.

Кроме того, если характеристические показатели различны (у них всех кратность — единица), то набор $e^{\lambda_1 x},\ldots,e^{\lambda_n x}$ является ФСР, правда, не обязательно вещественной ЛОУ (4.3^c).

А что делать, если кратность k_0 какого-либо характеристического числа, обозначим его λ_0, окажется больше единицы? Как тогда набрать n линейно независимых решений?

Утверждение 2. *Пусть* λ_0 *— характеристическое число кратности* k_0, *тогда ЛОУ* (4.3^c) *имеет следующие линейно независимые решения:* $e^{\lambda_0 x}, xe^{\lambda_0 x}, \ldots, x^{k_0-1}e^{\lambda_0 x}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно (4.12) $L^c e^{\lambda x} = g(\lambda)e^{\lambda x}$. Продифференцируем это равенство k раз по λ, тогда в левой части с учетом линейности оператора L^c получим: $d^k(L^c e^{\lambda x})/d\lambda^k = L^c\left(d^k e^{\lambda x}/d\lambda^k\right) = L^c(x^k e^{\lambda x})$, а в правой части k-я производная произведения дает: $d^k(g(\lambda)e^{\lambda x})/d\lambda^k = \sum_{\nu=0}^{k} C_k^\nu\, g^{(\nu)}(\lambda)x^{k-\nu}e^{\lambda x}$.
В итоге

$$L^c(x^k e^{\lambda x}) = \sum_{\nu=0}^{k} C_k^\nu\, g^{(\nu)}(\lambda)x^{k-\nu}e^{\lambda x}. \tag{4.13}$$

Но $g(\lambda_0) = g'(\lambda_0) = \ldots = g^{(k_0-1)}(\lambda_0) = 0$, а $g^{(k_0)}(\lambda_0) \neq 0$, так как корень λ_0 имеет кратность k_0.
Поэтому при $\lambda = \lambda_0$ и $k = \overline{0, k_0-1}$ в (4.13) $L^c(x^k e^{\lambda_0 x}) = 0$. $\square$

Теорема (о ФСР ЛОУ с постоянными коэффициентами). *Пусть характеристическое уравнение ЛОУ* (4.3^c) *имеет корни* λ_j *кратности* $k_j \quad (j = \overline{1,m})$. *Тогда ФСР уравнения* (4.3^c) *имеет вид:*

$$e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{k_1 - 1} e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_m x}, xe^{\lambda_m x}, \ldots, x^{k_m - 1} e^{\lambda_m x}. \quad (4.14)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предложенный набор содержит n функций $(k_1 + \ldots + k_n = n)$, они линейно независимы на $\mathbb{R}^1$ по утверждению 1 и являются решениями (4.3^c) по утверждению 2. $\square$

Замечание 2. *Если ЛОУ* (4.3^c) *имеет вещественные коэффициенты, то комплексные решения из ФСР (4.14) следует овеществить, как это делается в лемме об овеществлении ФСР. В частности, если* $\lambda = \alpha + \mathfrak{i}\beta$, *то* $\mathrm{Re}\,(x^k e^{\lambda x}) = x^k e^{\alpha x} \cos \beta x$, $\mathrm{Im}\,(x^k e^{\lambda x}) = x^k e^{\alpha x} \sin \beta x$.

Пример 1. *Рассмотрим ЛОУ второго порядка*

$$y'' + \beta^2 y = 0 \qquad (\beta > 0),$$

описывающее свободные колебания математического маятника без трения, так как отсутствует слагаемое с y'.

Характеристический многочлен этого уравнения $g(\lambda) = \lambda^2 + \beta^2$, *характеристические числа* $\lambda_{1,2} = \pm \mathrm{i}\beta$, *ФСР образуют* $e^{\mathrm{i}\beta x}, e^{-\mathrm{i}\beta x}$, *а вещественную ФСР —* $\cos\beta x, \sin\beta x$.

В результате общее вещественное решение имеет вид:

$$y = C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}^1).$$

2^0. Метод неопределенных коэффициентов.
Рассмотрим ЛНУ с постоянными коэффициентами

$$L^c y = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = q(x), \qquad (4.1^c)$$

в котором $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^1$, а неоднородность $q(x) \in C((a,b))$.

Общее решение соответствующего (4.1^c) ЛОУ (4.3^c) известно — это линейная комбинация решений из ФСР (4.14). Поэтому частное решение ЛНУ (4.1^c) всегда может быть найдено в квадратурах методом вариации произвольной постоянной и явный вид общего решения ЛНУ (4.1^c) даст формула (4.8).

Однако метод вариации весьма громоздок. Согласно (4.9) частное решение приходится раскладывать в сумму из n произведений и в каждое произведение, помимо решений ЛОУ, входят функции $C_j(x)$, для вычисления которых требуется решать систему (4.10) и затем n раз интегрировать. При этом на практике после приведения подобных членов в формуле (4.9) формула частного решения существенно упрощается.

Существует еще один метод нахождения частного решения ЛНУ (4.1^c), не связанный со знанием ФСР ЛОУ и интегрированием, что является его несомненным достоинством. Это — метод неопределенных коэффициентов, при котором, зная только корни характеристического уравнения, удается указать структуру частного решения с точностью до тех самых неопределенных коэффициентов, задающих многочлены, входящие в искомое решение.
"Расплатой" за сравнительную простоту метода неопределенных коэффициентов является отсутствие универсальности.
Метод можно применять только в случае, когда неоднородность q имеет специальный вид: $q(x) = p(x)e^{\lambda x}$, где $\lambda \in \mathbb{C}$, а $p(x)$ — многочлен, возможно, с комплексными коэффициентами.
Итак, рассмотрим ЛНУ с постоянными коэффициентами

$$L^c y = p(x)e^{\lambda x}, \tag{4.15}$$

в котором λ_j — нуль характеристического многочлена кратности $k_j \quad (j = \overline{1, m})$, многочлен $p(x) = \sum_{j=0}^{l} p_j x^j$.

Df. *Говорят, что в уравнении* (4.15) *имеет место резонанс порядка* k, *если* $\lambda = \lambda_k$ *кратности* k $\quad (k = \overline{1,m})$, *и резонанс отсутствует (его порядок равен нулю), если* $\lambda \neq \lambda_j \quad (j = \overline{1,m})$.

Теорема (о построении решения ЛНУ методом неопределенных коэффициентов). *Пусть показатель* λ *из правой части* (4.15) *совпадает с корнем характеристического уравнения кратности* k. *Тогда существует и единственно частное решение ЛНУ* (4.15)

$$\psi(x) = x^k r(x) e^{\lambda x},$$

где $r(x) = \sum_{s=0}^{l} r_s x^s$ *— некий многочлен.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем искать пока еще неопределенные коэффициенты r_s многочлена $r(x)$. Для этого подставим решение $y = \psi(x)$ в (4.15), получая тождество по x на $\mathbb{R}^1$

$$L^c\left(\sum_{s=0}^{l} r_s x^{k+s} e^{\lambda x}\right) \equiv \sum_{j=0}^{l} p_j x^j e^{\lambda x}. \tag{4.16}$$

Используя линейность L^c и равенство (4.13), преобразуем левую часть тождества (4.16): $L^c\left(\sum\limits_{s=0}^{l} r_s x^{k+s} e^{\lambda x}\right) = \sum\limits_{s=0}^{l} r_s L^c(x^{k+s} e^{\lambda x}) =$ $\sum\limits_{s=0}^{l} r_s \sum\limits_{\nu=0}^{k+s} C_{k+s}^{\nu}\, g^{(\nu)}(\lambda) x^{k+s-\nu} e^{\lambda x}.$

Сокращая теперь в (4.16) обе части на $e^{\lambda x}$ и учитывая, что $g(\lambda) = g'(\lambda) = \ldots = g^{(k-1)}(\lambda) = 0$, а $g^{(k)}(\lambda) \neq 0$, получаем тождество

$$\sum_{s=0}^{l} r_s \sum_{\nu=k}^{k+s} C_{k+s}^{\nu}\, g^{(\nu)}(\lambda) x^{k+s-\nu} \equiv \sum_{j=0}^{l} p_j x^j, \tag{4.17}$$

в котором, как легко заметить, степень переменной x в обеих частях не превосходит l.

Приравняем в (4.17) коэффициенты при различных степенях x, начиная со старшей степени l.

Пусть в левой части степень икса $k+s-\nu=l$ или $k-\nu=l-s$. Но $l \geq s$, поэтому $k \geq \nu$, а значит, $\nu=k$, откуда $s=l$. В результате при x^l в (4.17) имеем равенство $r_l C_{k+l}^k\, g^{(k)}(\lambda)=p_l$, из которого однозначно находим коэффициент r_l.

Предположим теперь, что однозначно найдены коэффициенты $r_{l-1}, \ldots, r_{i+1} \quad (0 \leq i \leq l-1)$, и будем искать коэффициент r_i, стоящий при x^i.
Пусть в левой части (4.17) $k+s-\nu=i$ или $k-\nu=i-s \leq 0$, а значит, индекс s может принимать значения $i, i+1, \ldots, l$. Если $s=i$, то $\nu=k$ и в левой части (4.17) при x^i имеется только одно слагаемое с таким s — это $r_i C_{k+i}^k\, g^{(k)}(\lambda)$. А если $s>i$, то в любое слагаемое множителем входит r_s, который по индукционному предположению уже однозначно найден. Следовательно, при x^i из тождества (4.17) получаем равенство $r_i C_{k+i}^k\, g^{(k)}(\lambda)+h(r_{i+1}, \ldots, r_l)=p_i$ с известной функцией h и из него однозначно находим коэффициент r_i. $\square$

Приведем два соображения, которые полезны при практическом нахождении частного решения ЛНУ (4.1^c).
Первое соображение обычно называют "принцип суперпозиции". Он применяется к уравнениям (4.1^c) вида

$$L^c y = q_0(x) + q_1(x) + \ldots + q_m(x) \qquad (m \geq 0) \tag{4.18}$$

и заключается в следующем: если ψ_j — частное решение уравнения $L^c y = q_j(x) \quad (j = \overline{0, m})$, то функция $\psi(x) = \psi_0(x) + \ldots + \psi_m(x)$ будет частным решением (4.18).
Действительно, $L^c(\psi) = L^c\Big(\sum_{j=0}^m \psi_j\Big) = \sum_{j=0}^m L^c(\psi_j) = \sum_{j=0}^m q_j$.
Чтобы использовать этот принцип, произвольную неоднородность $q(x)$ разбивают в сумму неоднородностей $q_0(x), q_1(x), \ldots, q_m(x)$, в которой для $\forall\, i = \overline{1, m}$ функции $q_i(x)$ имею вид неоднородности из правой части уравнения (4.15), т. е. $q_i(x) = p^{(i)}(x) e^{\lambda^{(i)} x}$, и частное решение $y = \psi_i(x)$ каждого из уравнений (4.15) ищется методом неопределенных коэффициентов, а частное решение уравнения $L^c y = q_0(x)$ ищется методом вариации произвольной постоянной. После этого все найденные решения складываются. Разумеется, при $m \geq 1$ возможно, что $q_0(x) \equiv 0$.

Второе соображение связано с решением вещественных линейных неоднородных уравнений (4.1^c). Метод неопределенных коэффициентов в них применим для
$q(x) = p_1(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + p_2(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$.
Введем $\tilde{\lambda} = \alpha + \mathrm{i}\beta$, $\tilde{q}(x) = (p_1(x) - \mathrm{i}p_2(x))e^{\tilde{\lambda}x}$. Тогда $q = \operatorname{Re}\tilde{q}$ и, если $y = \tilde{\psi}(x)$ — какое-либо частное (комплексное) решение уравнения $L^c y = \tilde{q}$, то функция $y = \operatorname{Re}\tilde{\psi}$ будет частным решением вещественного уравнения
$L^c y = p_1(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + p_2(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Пример 2. *Рассмотрим ЛНУ второго порядка*

$$y'' + \beta^2 y = b\cos\omega x \qquad (\beta, \omega > 0,\ b \in \mathbb{R}^1), \tag{4.19}$$

описывающее вынужденные колебания математического маятника под воздействием $2\pi/\omega$ *-периодической возмущающей силы.В примере 1 было найдено* $2\pi/\beta$ *-периодическое общее решение* $y = A\sin(\beta x + \theta)$ *с* $A = (C_1^2 + C_2^2)^{1/2}$, $\theta = \operatorname{arctg}(C_1/C_2)$ *ЛОУ* $y'' + \beta^2 y = 0$, *имеющего характеристические числа* $\lambda_{1,2} = \pm \mathrm{i}\beta$. *Следуя изложенному выше соображениям, рассмотрим ЛНУ*

$$y'' + \beta^2 y = be^{\mathrm{i}\omega x}, \tag{4.20}$$

вещественная часть неоднородности которого совпадает с правой частью уравнения (4.19).

Вид частного решения уравнения (4.20) зависит от величины ω.
1) $\omega \neq \beta$ — *частота вынужденных колебаний не совпадает с частотой свободных колебаний, поэтому резонанс отсутствует. Тогда частное решение уравнения (4.20) согласно теореме о построении решения ЛНУ методом неопределенных коэффициентов ищем в виде* $\tilde{\psi} = ae^{i\omega x}$.
Подставляя $\tilde{\psi}$ *и* $\tilde{\psi}'' = -a\omega^2 e^{i\omega x}$ *в (4.20), имеем* $-a\omega^2 + a\beta^2 = b$, *откуда* $\tilde{\psi}(x) = b(\beta^2 - \omega^2)^{-1} e^{i\omega x}$.
Выделяя вещественную часть $\tilde{\psi}$, *находим общее решение (4.19)* $y = A\sin(\beta x + \theta) + b(\beta^2 - \omega^2)^{-1}\cos\omega x$ — *ограниченная функция.*

2) $\omega = \beta$ — *частота вынужденных колебаний совпадает с частотой свободных колебаний, поэтому имеет место резонанс. Тогда частное решение ЛНУ (4.20) надо искать в виде* $\tilde{\psi} = axe^{i\omega x}$.
Подставляя $\tilde{\psi}$ *и* $\tilde{\psi}'' = (2ia\omega - a\omega^2)e^{i\omega x}$ *в (4.20), имеем* $2ia\omega = b$, *откуда* $\tilde{\psi}(x) = b(2i\omega)^{-1} x e^{i\omega x}$.
Выделяя вещественную часть $\tilde{\psi}$, *находим общее решение (4.19)* $y = A\sin(\beta x + \theta) + b(2\beta^2)^{-1} x \sin\beta x$ — *не ограничено с ростом* x.

Г Л А В А V
Линейные системы

§ 1. ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ

1^0. Объект изучения.

В параграфе 5 главы III было введено понятие линейной системы $y' = P(x)y + q(x)$, доказаны теоремы о существовании, единственности и продолжимости ее решений в области $G = (a, b) \times \mathbb{R}^n$ при условии, что элементы матрицы $P(x)$ и компоненты вектора $q(x)$, называемого неоднородностью системы, непрерывны на (a, b).

В этом параграфе будут изучаться вещественная ЛОС

$$\begin{cases} y_1' = p_{11}(x)y_1 + ... + p_{1n}(x)y_n \\ \quad \dots \\ y_n' = p_{n1}(x)y_1 + ... + p_{nn}(x)y_n \end{cases} \tag{5.1}$$

или $y' = P(x)y$, где матрица $P = \{p_{ij}(x)\}_{i,j=1}^n$ непрерывна на (a, b).

Любое решение ЛОС (5.1) — это непрерывно дифференцируемая на интервале (a, b) n-мерная вектор-функция $y = \varphi(x)$, для которой на (a, b) выполняется тождество $\varphi'(x) \equiv P(x)\varphi(x)$. При этом решения ЛОС (5.1) образуют линейное пространство, т. е. если $\varphi^{(1)}(x), \varphi^{(2)}(x)$ — решения (5.1), то для $\forall\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^1$ линейная комбинация $\alpha_1\varphi^{(1)}(x) + \alpha_2\varphi^{(2)}(x)$ также является решением системы.

Замечание 1. *В дальнейшем для удобства любую матрицу будем обозначать заглавной буквой, а любой вектор — прописной.*

2^0. Линейная зависимость и независимость решений. Рассмотрим произвольные вектор-функции $\psi^{(1)}(x), \ldots, \psi^{(k)}(x)$, заданные на интервале (a, b). Они линейно зависимы на (a, b), если найдется такой постоянный вектор $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \neq 0$, что

$$\alpha_1\psi^{(1)}(x) + \ldots + \alpha_k\psi^{(k)}(x) \overset{(a,b)}{\equiv} 0.$$

А если это тождество справедливо только при $\alpha = 0$, то вектор-функции $\psi^{(1)}(x), \ldots, \psi^{(k)}(x)$ линейно независимы на (a, b).

Очевидно, что если в какой-либо точке $x_0 \in (a, b)$ постоянные векторы $\psi^{(1)}(x_0), \ldots, \psi^{(k)}(x_0)$ — линейно независимы, то функции $\psi^{(1)}(x), \ldots, \psi^{(k)}(x)$ линейно независимы на (a, b) (от противного).

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. А именно, если для $\forall\, x_0 \in (a, b)$ векторы $\psi^{(1)}(x_0), \ldots, \psi^{(k)}(x_0)$ линейно зависимы, то функции $\psi^{(1)}(x), \ldots, \psi^{(k)}(x)$ не обязательно линейно зависимы. Например, функции $\psi^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$, $\psi^{(2)}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix}$ поточечно линейно зависимы для каждого $x \in \mathbb{R}^1$, но при разных x линейная комбинация $\psi^{(1)}$ и $\psi^{(2)}$ обращается в нуль при разных α_1 и α_2.

Однако для решений системы (5.1) обратное утверждение верно.

Теорема (о линейной зависимости решений ЛОС).
Предположим, что $\varphi^{(1)}(x), \ldots, \varphi^{(k)}(x)$ *— решения системы* (5.1) *и имеется такая точка* $x_0 \in (a, b)$, *в которой векторы* $\varphi^{(1)}(x_0), \ldots, \varphi^{(k)}(x_0)$ *линейно зависимы. Тогда вектор-функции* $\varphi^{(1)}(x), \ldots, \varphi^{(k)}(x)$ *линейно зависимы на* (a, b).

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию найдутся $x_0 \in (a, b)$ и $\alpha^0 = (\alpha_1^0, \ldots, \alpha_k^0) \neq 0$ такие, что $\alpha_1^0 \varphi^{(1)}(x_0) + \ldots + \alpha_k^0 \varphi^{(k)}(x_0) = 0$.

Тогда в силу линейности пространства решений функция $\varphi(x) = \alpha_1^0 \varphi^{(1)}(x) + \ldots + \alpha_k^0 \varphi^{(k)}(x)$ будет решением системы (5.1) на (a, b), причем $\varphi(x_0) = 0$. Но тривиальное решение ЛОС $y(x) \equiv 0$ имеет те же начальные данные.
Значит, по теореме единственности $\varphi(x) \equiv 0$, т. е.
$\alpha_1^0 \varphi^{(1)}(x) + \ldots + \alpha_k^0 \varphi^{(k)}(x) \overset{(a,b)}{\equiv} 0$ с $\alpha^0 \neq 0$. $\square$

3^0. Определитель Вронского (ОВ).
Пусть $\varphi^{(1)}(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)$ — произвольные решения системы (5.1), определенные на (a, b). Составим из них квадратную матрицу

$$\Phi(x) = (\varphi^{(1)}(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)) = \{\varphi_i^{(j)}(x)\}_{i,j=1}^n,$$

т. е. столбцами матрицы $\Phi(x)$ являются решения системы (5.1).

Df. *Функция* $W(x) = \det \Phi(x)$ *называется определителем Вронского, построенном на решениях* $\varphi^{(1)}(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)$ *ЛОС* (5.1).

Теорема (о связи между линейной зависимостью решений и ОВ). *Для того чтобы решения* $\varphi^{(1)}(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)$ *ЛОС* (5.1) *были линейно зависимы на* (a, b), *необходимо и достаточно, чтобы построенный на них определитель Вронского* $W(x)$ *обращался в нуль хотя бы в одной точке* $x_0 \in (a, b)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточность. Пусть решения $\varphi^{(1)}(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)$ ЛОС линейно зависимы на (a, b), т. е. $\exists\, \alpha^0 \neq 0: \ \alpha_1^0 \varphi^{(1)}(x) + \ldots + \alpha_n^0 \varphi^{(n)}(x) \overset{(a,b)}{\equiv} 0$ или линейная однородная алгебраическая система $\Phi(x)\alpha = 0$ имеет нетривиальное решение α^0 для $\forall\, x \in (a, b)$. Тогда $W(x_0) = 0$ для $\forall\, x_0 \in (a, b)$ (доказали больше).

Необходимость. Пусть $W(x_0) = 0$. Тогда $\exists\, \alpha^0 \neq 0: \ \Phi(x_0)\alpha^0 = 0$ или $\alpha_1^0 \varphi^{(1)}(x_0) + \ldots + \alpha_n^0 \varphi^{(n)}(x_0) = 0$, т. е. линейно зависимы векторы $\varphi^{(1)}(x_0), \ldots, \varphi^{(n)}(x_0)$, а значит, по теореме о линейной зависимости решений ЛОС вектор-функции $\varphi^{(1)}(x), \ldots, \varphi^{(k)}(x)$ линейно зависимы на (a, b). $\square$

Следствие. *Для того чтобы n решений системы (5.1) были линейно независимы на (a, b), необходимо и достаточно чтобы ОВ $W(x)$ не обращался в нуль хотя бы в одной точке (a, b).*

Доказательство следствия в обе стороны — от противного.

4^0. Фундаментальная система решений (ФСР), формула общего решения.

Df. *Фундаментальной системой решений называют любые* n *линейно независимых на* (a,b) *решений* $\varphi^{(1)}(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)$ *системы* (5.1).

Составленную из ФСР матрицу $\Phi(x) = \{\varphi_i^{(j)}(x)\}_{i,j=1}^{n}$ *называют фундаментальной матрицей (ФМ).*

Таким образом, столбцами ФМ являются решения системы (5.1), линейно независимые на (a,b).
Из следствия 1 вытекает, что решения $\varphi^{(1)}(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)$ ЛОС образуют ФСР, если $\exists\, x_0 \in (a,b)$, что векторы $\varphi^{(1)}(x_0), \ldots, \varphi^{(n)}(x_0)$ линейно независимы, т. е. $W(x_0) = \det\Phi(x_0) \neq 0$.

Следующее простое утверждение названо теоремой в связи с важностью его осознания.

Теорема (о существовании ФСР). *Фундаментальная система решений ЛОС* (5.1) *существует.*

Д о к а з а т е л ь с т в о будет проведено конструктивно, т. е. будет заключаться в непосредственном построении ФСР.

Выберем произвольным образом неособую постоянную матрицу $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ и точку $x_0 \in (a,b)$.
По теореме существования для $\forall\, j = \overline{1,n}$ существует решение $y = \varphi^{(j)}(x)$ с начальными данными x_0, $a_{1j}, \ldots, a_{nj}$.

Возникшие таким образом решения $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ ЛОС (5.1) линейно независимы на (a,b), поскольку $W(x_0) = \det A \neq 0$. $\square$

Df. *Фундаментальная матрица* $\Phi(x)$ *называется нормированной в точке* $x_0 \in (a,b)$, *если* $\Phi(x_0) = E$.

Теорема (об общем решении ЛОС). *Пусть* $\varphi^{(1)}(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)$ *— фундаментальная система решений, тогда непрерывная вектор-функция* $\varphi(x, c_1, \ldots, c_n) = c_1\varphi^{(1)}(x) + \ldots + c_n\varphi^{(n)}(x)$ *— это общее решение ЛОС* (5.1) *в области* $G = (a, b) \times \mathbb{R}^n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку линейная комбинация решений ЛОС (5.1) есть решение, то для любого постоянного вещественного вектора $c = (c_1, \ldots, c_n)$ функция $y = \varphi(x, c)$ из условия теоремы будет решением системы (5.1) на (a, b). Выберем произвольные начальные данные x_0, y^0 из области G, т. е. $x_0 \in (a, b)$, $y^0 = (y_1^0, \ldots, y_n^0) \in \mathbb{R}^n$, и подставляем их в формулу $y = \varphi(x, c)$, получая линейную алгебраическую систему

$$y^0 = c_1\varphi^{(1)}(x_0) + \ldots + c_n\varphi^{(n)}(x_0) \quad \text{или} \quad \Phi(x_0)c = y^0$$

относительно вектора c, у которой определитель матрицы $\Phi(x_0)$ отличен от нуля вне зависимости от выбора точки x_0, так как $\Phi(x) = (\varphi^{(1)}(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x))$ и $\det\Phi(x) = W(x) \neq 0$ для $\forall\, x \in (a, b)$.

Следовательно линейная алгебраическая система имеет единственное решение $c^0 = (c_1^0, \ldots, c_n^0)$ и функция $y = \varphi(x, c^0)$ — это решение задачи Коши ЛОС (5.1) с начальными данными x_0, y^0, определенное на интервале (a, b). $\square$

Очевидно, что в векторной записи общее решение ЛОС имеет вид:

$$y = \Phi(x)c.$$

5^0. Овеществление фундаментальной системы решений.

Хотя ЛОС (5.1) предполагается вещественной, она вполне может иметь комплексные решения, которые могут входить в ФСР. Но интерес, естественно, представляют вещественные ФСР.

Покажем, что от комплексной ФСР ЛОС (5.1) так же, как и от комплексной ФСР ЛОУ (4.3), всегда можно перейти к вещественной.

Для этого используем очевидные свойства комплексных решений системы (5.1) с вещественной матрицей $P(x)$.
А именно, если вектор-функция $y(x) = u(x) + \mathrm{i}v(x)$ — решение (5.1), то вещественные функции $u(x)$, $v(x)$ наряду с функцией $\overline{y}(x) = u(x) - \mathrm{i}v(x)$ являются решениями ЛОС, причем комплексно-сопряженные решения $y(x)$ и $\overline{y}(x)$ линейно независимы на (a, b).

Лемма (об овеществлении ФСР ЛОС). *Пусть набор* $\Theta_1 = \{\varphi^{(1)}(x), \overline{\varphi}^{(1)}(x), \ldots, \varphi^{(l)}(x), \overline{\varphi}^{(l)}(x), \varphi^{(2l+1)}(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)\}$ $(1 \le l \le n/2)$, *где* $\varphi^{(j)} = u^{(j)} + \mathrm{i}v^{(j)}$ $(j = \overline{1, l})$, $\varphi^{(2l+1)}, \ldots, \varphi^{(1)}$ *вещественны, образуют фундаментальную систему решений ЛОС* (5.1). *Тогда набор* $\Theta_2 = \{u^{(1)}(x), v^{(1)}(x), \ldots, u^{(l)}(x), v^{(1)}(x), \varphi^{(2l+1)}(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)\}$ *является вещественной фундаментальной системой решений.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку набор Θ_1 — это ФСР, построенный по нему определитель Вронского $W_1(x) \neq 0$.

Набор Θ_2 состоит из n вещественных решений. Остается установить их линейную независимость, т. е. доказать, что построенный по ним определитель Вронского $W_2(x) \neq 0$ для $\forall\, x \in (a, b)$.

Имеет место следующая цепочка равенств, основанная на свойствах определителей:

$$0 \neq W_1(x) = |u^{(1)} + \mathrm{i}v^{(1)}, u^{(1)} - \mathrm{i}v^{(1)}, \ldots, \varphi^{(n)}| =$$
$$|u^{(1)}, u^{(1)} - \mathrm{i}v^{(1)}, \ldots, \varphi^{(n)}| + \mathrm{i}\,|v^{(1)}, u^{(1)} - \mathrm{i}v^{(1)}, \ldots, \varphi^{(n)}| =$$
$$|u^{(1)}, u^{(1)}, \ldots, \varphi^{(n)}| - \mathrm{i}\,|u^{(1)}, v^{(1)}, \ldots, \varphi^{(n)}| + \mathrm{i}\,|v^{(1)}, u^{(1)}, \ldots, \varphi^{(n)}| +$$
$$|v^{(1)}, v^{(1)}, \ldots, \varphi^{(n)}| = -2\mathrm{i}\,|u^{(1)}, v^{(1)}, u^{(2)} + \mathrm{i}v^{(2)}, u^{(2)} - \mathrm{i}v^{(2)} \ldots, \varphi^{(n)}| =$$
$$(-2\mathrm{i})^l\,|u^{(1)}, v^{(1)}, \ldots, u^{(l)}, v^{(l)}, \varphi^{(2l+1)}, \ldots, \varphi^{(n)}| = (-2\mathrm{i})^{2l} W_2(x). \quad \square$$

6^0. Формула Лиувилля.

Оказывается, что вычислить определитель Вронского удается, даже не зная ФСР, по которой он строится. Достаточно только задать начальные данные для решений, входящих в ФСР, или $W(x_0)$.

Пусть $\Phi(x) = \{\varphi_i^{(j)}(x)\}_{i,j=1}^n$ — ФМ ЛОС (5.1) на (a, b). Тогда ОВ $W(x) = \det\Phi(x) \neq 0$ для $\forall\, x \in (a, b)$.

Для $\forall\, i = \overline{1, n}$ ОВ $W(x)$ разложим по элементам i-й строки:

$$W(x) = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}(x)\varphi_i^{(j)}(x),$$

где A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента $\varphi_i^{(j)}$.

Это позволяет рассматривать $W(x)$ как сложную функцию, т. е. как функцию от элементов матрицы $\Phi(x)$, которые, в свою очередь, являются функциями x.

Поэтому $\partial W(\varphi_1^{(1)},\ldots,\varphi_1^{(n)},\ldots,\varphi_n^{(1)},\ldots,\varphi_n^{(n)})/\partial\varphi_i^{(j)} = A_{ij}(x)\,.$
С другой стороны, для $\forall\, j=\overline{1,n}$ решение $y=\varphi^{(j)}(x)$ ЛОС (5.1) по определению удовлетворяет тождеству $\varphi^{(j)\prime}(x)\equiv P(x)\varphi^{(j)}(x)$ или покомпонентно: $\varphi_i^{(j)\prime}(x)\equiv\sum_{k=1}^n p_{ik}(x)\varphi_k^{(j)}\quad(i=\overline{1,n})$.
По правилу дифференцирования сложной функции имеем:

$$W'(x)=\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial W}{\partial\varphi_i^{(j)}}\varphi_i^{(j)\prime}=\sum_{i,j=1}^n A_{ij}\sum_{k=1}^n p_{ik}\varphi_k^{(j)}=\sum_{i,k=1}^n p_{ik}\sum_{j=1}^n A_{ij}\varphi_k^{(j)}.$$

Но произведение элемента одной строки на алгебраическое дополнение элемента другой строки равно нулю, т. е. $\sum_{j=1}^n A_{ij}\varphi_{kj}=0$, если $i\neq k$.

Следовательно,

$$W'(x) = \sum_{i=1}^{n} p_{ii}(x) \sum_{j=1}^{n} A_{ij}(x)\varphi_i^{(j)}(x) = \sum_{i=1}^{n} p_{ii}(x)W(x).$$

Разделяя в этом уравнении переменные и интегрируя по s от x_0 до x, получаем формулу Лиувилля

$$W(x) = W(x_0)\exp\left(\int_{x_0}^{x} Tr\, P(s)\, ds\right),$$

в которой $Tr\, P$ — это след матрицы P.

Таким образом, если задать $\Phi(x_0)$ — начальные данные для фундаментальной системы решений, то по формуле Лиувилля, не зная самих решений выбранной ФСР, можно на всем интервале (a, b) в явном виде вычислить $W(x) = \det \Phi(x)$, который зависит только от диагональных элементов матрицы $P(x)$ системы (5.1).

7^0. Матричные уравнения.

В этом пункте дадим ответы на два простых, но очень важных вопроса: как из одной фундаментальной матрицы получить другую и как связаны между собой любые две фундаментальные матрицы?

Но сначала напомним правила дифференцирования матриц. Положим $\Phi(x) = \{\varphi_{ij}(x)\}_{i,j=1}^n$, тогда $\Phi'(x) = \{\varphi'_{ij}(x)\}_{i,j=1}^n$.

Кроме того, поскольку $\Phi(x)\Psi(x) = \Big\{ \sum_{k=1}^n \varphi_{ik}(x)\psi_{kj}(x) \Big\}_{i,j=1}^n$, то $(\Phi(x)\Psi(x))' = \{\sum_{k=1}^n(\varphi'_{ik}(x)\psi_{kj}(x) + \varphi_{ik}(x)\psi'_{kj}(x)\}_{i,j=1}^n = \Phi'\Psi + \Phi\Psi'$.

Пусть $\varphi^{(1)}(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)$ — любые n решений системы (5.1), а $\Phi(x)$ — матрица, столбцами которой являются эти решения. Тогда $\Phi'(x) = \{\varphi_i^{(j)'}(x)\}_{i,j=1}^n = \{\sum_{k=1}^n p_{ik}(x)\varphi_k^{(j)}(x)\}_{i,j=1}^n = P(x)\Phi(x)$.

Следовательно матрица $\Phi(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\Theta' = P(x)\Theta, \tag{5.1^m}$$

где $\Theta = \Theta(x)$ — это матрица размерности $n \times n$.

Df. *Матрица* $\Phi(x)$, *удовлетворяющая матричному уравнению* (5.1^m) , *называется матричным решением системы* (5.1).

Теорема (о связи между фундаментальными матрицами ЛОС).
Пусть $\Phi(x)$ — *ФМ системы* (5.1), *тогда*
1) *для любой постоянной квадратной матрицы* C *матрица* $\Psi(x) = \Phi(x)C$ *является решением уравнения* (5.1^m), *при этом, если* $\det C \neq 0$, *то* $\Psi(x)$ – *фундаментальная матрица;*
2) *для любого матричного решения* $\Psi(x)$ *системы* (5.1) *найдется такая постоянная квадратная матрица* C, *что* $\Psi(x) = \Phi(x)C$, *при этом, если* $\Psi(x)$ — *ФМ, то матрица* C — *неособая.*

Д о к а з а т е л ь с т в о.
1) Дифференцируя матрицу $\Psi(x)$, получаем

$$\Psi' = (\Phi C)' = \Phi' C + \Phi C' = (P\Phi)C + 0 = P(\Phi C) = P\Psi.$$

Следовательно $\Psi(x)$ удовлетворяет уравнению (5.1^m) и $\det\Psi \neq 0$, если $\det C \neq 0$.

2) Поскольку определитель любой ФМ отличен от нуля, можно ввести матрицу $C(x) = \Phi^{-1}(x)\Psi(x)$.

Покажем, что $C(x)$ — постоянная матрица.

Имеем $\Phi C = \Psi$. Дифференцируя это равенство по x, получаем

$\Phi' C + \Phi C' = \Psi'$, или $P\Phi C + \Phi C' = P\Psi = P\Phi C$, откуда $\Phi C' = 0$.

Домножим слева на Φ^{-1}, тогда $C' = 0$ и $C(x)$ — постоянна.

Если Ψ — неособая, то и матрица $C = \Phi^{-1}\Psi$ — неособая. $\square$

§ 2. ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

1^0. Объект изучения и постановка задачи.

Итак, в § 1 была изучена ЛОС (5.1) $y' = P(x)y$ с непрерывной на интервале (a, b) матрицей $P(x)$. Было сделано следующее:
доказано существование и единственность решения с произвольными начальными данными $x_0 \in (a, b)$, $y^0 \in \mathbb{R}^n$ и его продолжимость на весь интервал (a, b);
доказано существование n линейно независимых на интервале (a, b) решений ЛОС (5.1), называемых фундаментальной системой решений (ФСР), и возможность овеществления любой ФСР;
установлена простая структура общего решения, которым является линейная комбинация решений из любой ФСР;
выведена формула Лиувилля, позволяющая вычислять определитель Вронского (ОВ) $W(x)$, являющийся определителем фундаментальной матрицы, столбцы которой образуют решения ФСР, через коэффициенты $p_{11}(x), \ldots, p_{nn}(x)$ исходной ЛОС.

Однако, решить произвольную ЛОС (5.1) в явном виде не удается, так как не удается вывести формулы, определяющие n линейно независимых решений такой системы непосредственно через элементы матрицы $P(x)$, используя для этого только элементарные функции.
Однако имеется важнейший класс систем (5.1), любую систему из которого всегда можно проинтегрировать, — это класс линейных однородных систем с постоянными коэффициентами.
Займемся решением такой задачи.
Рассмотрим ЛОС порядка n с постоянными коэффициентами

$$y' = Ay \qquad (5.1^c),$$

где вектор $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ — постоянная матрица.
Поскольку постоянная матрица непрерывна на всей вещественной оси, по теореме о продолжимости ЛОС любое решение системы (5.1^c) продолжимо на $\mathbb{R}^1$.
Для того чтобы в явном виде выписать ФСР системы (5.1^c), потребуется ряд результатов из теории матриц, связанных с подобными матрицами, жордановой матрицей, матричными многочленами и аналитическими функциями от матриц.

2^0 Подобные матрицы.

Первым шагом на пути решения системы (5.1^c) является естественная попытка максимально ее упростить при помощи обратимой линейной замены переменных с постоянной квадратной матрицей S.
Поэтому сделаем в системе (5.1^c) замену

$$y = Sz \qquad (\det S \neq 0),$$

в результате которой $Sz' = ASz$ или

$$z' = Bz \qquad (B = S^{-1}AS).$$

Df. *Матрицы A и B, связанные соотношением $B = S^{-1}AS$, называются подобными матрицами, что обозначается $A \sim B$.*

Таким образом, линейная неособая замена преобразует матрицу коэффициентов системы (5.1^c) в подобную, поэтому наиболее простую матрицу для системы (5.1^c) придется искать среди подобных матриц.

Напомним, что множество постоянных неособых $n \times n$ матриц образует некоммутативное кольцо с единицей по умножению.

Нейтральный элемент кольца "единица" представлен единичной матрицей E, а некоммутативность означает, что, вообще говоря, $AB \neq BA$. Именно поэтому при умножении матричного выражения на какую-либо матрицу надо указывать слева или справа это действие будет производиться (аналогично при вынесении из сумм).

Приведем четыре свойства подобных матриц.
1) Эквивалентность.

Утверждение 1. *Отношение подобия является отношением эквивалентности.*
Доказательство. Очевидным образом для подобных матриц выполняются при свойства отношения эквивалентности: $A \sim A$ — рефлексивность, $A \sim B \Leftrightarrow B \sim A$ — симметричность, $A \sim B$ и $B \sim C \;\Rightarrow\; A \sim C$ — транзитивность. $\square$

2) Полиномы от матриц.

Df. *Функция* $P_m(A) = a_0E + a_1A + a_2A^2 + \ldots + a_mA^m = \sum\limits_{k=0}^{m} a_kA^k$ *называется полином степени* m *от матрицы* A.

Утверждение 2. *Пусть* $B = S^{-1}AS$, тогда $P_m(B) = S^{-1}P(A)S$.

Доказательство.
$P_m(B) = \sum_{k=0}^{m} a_kB^k = \sum_{k=0}^{m} a_k(S^{-1}AS)^k$. Но
$(S^{-1}AS)^k = \underbrace{(S^{-1}AS)(S^{-1}AS)\ldots(S^{-1}AS)}_{k} = S^{-1}A^kS$ в силу транзитивности произведения. Вынося из каждого слагаемого суммы матрицу S^{-1} влево, а матрицу S вправо, получаем:

$P_m(B) = \sum_{k=0}^{m} a_kS^{-1}A^kS = S^{-1}(\sum_{k=0}^{m} a_kA^k)S = S^{-1}P_m(A)S.$ $\square$

3) Характеристический полином матрицы.

Df. *Функция* $f_A(\lambda) = det(A - \lambda E)$ *называется характеристическим полином матрицы* A.

Непосредственно из определения определителя матрицы вытекает, что $f_A(\lambda) = (-\lambda)^n + c_1(-\lambda)^{n-1} + \cdots + c_n$,
причем $c_1 = \operatorname{Tr} A$, $c_n = \det A$.
Кроме того, нули характеристического полинома $f_A(\lambda)$ — это собственные числа матрицы A.

Утверждение 3. *Если* $A \sim B$, *то* $f_A(\lambda) = f_B(\lambda)$.

Доказательство. Пусть $B = S^{-1}AS$, тогда
$\det(B - \lambda E) = \det(S^{-1}AS - \lambda S^{-1}ES) = \det(S^{-1}(A - \lambda E)S) = \det(S^{-1}) \cdot \det(A - \lambda E) \cdot \det S = \det(A - \lambda E)$. $\square$
Следовательно, $\operatorname{Tr} A = \operatorname{Tr} B$, $\det A = \det B$.

4) <u>Жорданова форма матрицы.</u>

Рассмотрим блочно-диагональную матрицу $J = \mathrm{diag}\,\{J_0, \ldots, J_q\}$, где $J_0 = \mathrm{diag}\,\{\lambda_0^{(1)}, \ldots, \lambda_0^{(p)}\}$ — диагональная матрица, для

$$\nu = \overline{1, q} \text{ матрица } J_\nu = \begin{pmatrix} \lambda_\nu & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_\nu & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_\nu & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_\nu \end{pmatrix}_{r_\nu \times r_\nu} \quad (r_\nu \geq 2) \qquad \text{или}$$

$$J_\nu = \lambda_\nu E + Z_\nu, \quad \text{причем} \quad Z_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{r_\nu \times r_\nu} \qquad \text{— это}$$

нильпотентная матрица, т. е. Z_ν^2 имеет все нули, кроме единичной второй наддиагонали, и т. д., наконец, $Z_\nu^{r_\nu - 1}$ сохраняет единственную единицу в правом верхнем углу, а Z_ν в степени r_ν и, очевидно, в больших степенях — это нулевые матрицы.

Df. *Матрица J указанной структуры называется жордановой или жордановой формой.*

Утверждение 4 (теорема Жордана). *Любая матрица A подобна некоторой жордановой форме J, т. е. $\exists\, S: \; J = S^{-1}AS$.*

Из алгебры хорошо известно, что должным выбором матрицы S порядок жордановых клеток можно менять так же, как и создавать поддиагонали вместо наддиагоналей из единиц или $\forall\, \sigma \neq 0$.

Поскольку собственные числа у подобных матриц совпадают, то $c_1 = TrA = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i, \quad c_n = \det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$, где c_1 и c_n — это коэффициенты характеристического полинома $f_A(\lambda)$, а $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — собственные числа матриц A и J.

3^0. Матричные степенные ряды.

Рассмотрим бесконечную последовательность матриц $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$, в которой $A_k = \{a_{ij}^{(k)}\}_{i,j=1}^{n}$, а элементы $a_{ij}^{(k)} \in \mathbb{R}^1$ (или $\in \mathbb{C}$).

Df. *Матричная последовательность* $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ *имеет предел* $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$, *если для* $\forall\, i, j = \overline{1, n}$ *элементы* $a_{ij}^{(k)} \to a_{ij}$ *при* $k \to \infty$.

Таким образом, сходимость последовательности матриц означает поэлементную сходимость.

Пусть степенной ряд $\mathfrak{F}_z = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ скалярного аргумента z абсолютно сходится при $|z| < \rho$, где ρ — радиус сходимости $\mathfrak{F}_z$.

Рассмотрим бесконечный степенной ряд от матрицы A:

$$\mathfrak{F}_A = \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k = a_0 E + a_1 A + a_2 A^2 + \dots\,,$$

тогда матрица $S_m(A) = \sum_{k=0}^{m} a_k A^k$ — это его m-я частичная сумма.

Df. *Матричный степенной ряд* $\mathfrak{F}_A$ *сходится, если сходится последовательность его частичных сумм,*
т. е. $\exists \lim\limits_{m\to\infty} S_m(A) = F(A)$, *называемый суммой ряда* $\mathfrak{F}_A$. *В этом случае пишут* $\mathfrak{F}_A = F(A)$.

Замечание 2. К сожалению, в случае сходимости матричного степенного ряда $\mathfrak{F}_A$, как правило, $F(A) \neq \{F(a_{ij})\}_{i,j=1}^{n}$.

Выяснять, чему равняется сумма матричного степенного ряда, станем в чуть более общей ситуации, рассматривая ряды

$$\mathfrak{F}_{Ax} = \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} a_k (Ax)^k = a_0 E + a_1 Ax + a_2 (Ax)^2 + \ldots \quad (x \in \mathbb{R}^1),$$

поскольку именно такие ряды будут использоваться в дальнейшем. При этом изложенное ниже останется справедливым и для случая, когда переменная $x \in \mathbb{C}$.

Задачу нахождения суммы $\mathfrak{F}_{Ax}$ будем решать поэтапно.

1) Пусть J — жорданова форма матрицы A, тогда найдется неособая матрица S такая, что $J = S^{-1}AS$ или $A = SJS^{-1}$, тогда $Ax = S(Jx)S^{-1}$.
С учетом утверждения 2 имеем: $S_m(Ax) = \sum_{k=0}^{m} a_k(S(Jx)S^{-1})^k = S(\sum_{k=0}^{m} a_k(Jx)^k)S^{-1} = SS_m(Jx)S^{-1}$.
Следовательно, $F(Ax)$ существует одновременно с $F(Jx)$ и, если они существуют, то $F(Ax) = SF(Jx)S^{-1}$.

2) По определению $J = \mathrm{diag}\,\{J_0, J_1, \ldots, J_q\}$.
Поскольку возведение в любую степень блочно-диагональной матрицы означает возведение в степень каждого ее блока с охранением имеющейся блочной структуры и все последующие суммы конечны, справедлива следующая цепочка равенств:

$$S_m(Jx) = \sum_{k=0}^{m} a_k(\mathrm{diag}\,\{J_0x, \ldots, J_qx\})^k =$$
$$= \sum_{k=0}^{m} a_k \cdot \mathrm{diag}\,\{(J_0x)^k, \ldots, (J_qx)^k\} =$$
$$= \mathrm{diag}\,\{\, \sum_{k=0}^{m} a_k(J_0x)^k, \ldots, \sum_{k=0}^{m} a_k(J_qx)^k \,\}.$$

В результате $S_m(Jx) = \mathrm{diag}\,\{S_m(J_0x), \ldots, S_m(J_qx)\}$.
Поэтому $F(Jx)$ существует одновременно с $F(J_0x), \ldots, F(J_qx)$ и, если все они существуют, то $F(Jx) = \mathrm{diag}\,\{F(J_0x), \ldots, F(J_qx)\}$.

3) Матрица $J_0x = \operatorname{diag}\{\lambda_0^{(1)}x, \ldots, \lambda_0^{(p)}x\}$ — диагональная.
Поэтому матрица $F(J_0x) = \operatorname{diag}\{F(\lambda_0^{(1)}x), \ldots, F(\lambda_0^{(p)}x)\}$, если все собственные числа $\lambda_0^{(1)}x, \ldots, \lambda_0^{(p)}x$ матрицы J_0x попадают в круг сходимости абсолютно сходящегося степенного ряда $\mathfrak{F}_z$.
В противном случае $F(J_0x)$ не существует.

4) Матрица $J_\nu x = \lambda_\nu xE + xZ_\nu \quad (\nu = \overline{1,q})$ — двухдиагональная, имеет размерность $r_\nu \times r_\nu \quad (r_\nu \geq 2)$ и все ее собственные числа равны числу $\mu_\nu = \lambda_\nu x$.

По определению $S_m(J_\nu x) = \sum_{k=0}^{m} a_k(\mu_\nu E + xZ_\nu)^k$.
Поскольку матрицы E и Z_ν коммутируют, $(\mu_\nu E + xZ_\nu)^k$ можно разложить по формуле бинома:
$(\mu_\nu E + xZ_\nu)^k = \sum_{j=0}^{k} C_k^j \mu_\nu^{k-j}(xZ_\nu)^j$.

Но матрица Z_ν нильпотентна, а значит, для всякого k последняя сумма содержит не более чем r_ν слагаемых $(Z_\nu^{r_\nu} = 0)$.

Поэтому

$$(\mu_\nu E + xZ_\nu)^k = \mu_\nu^k E + k\mu_\nu^{k-1} xZ_\nu + \ldots + C_k^{r_\nu - 1} \mu_\nu^{k - r_\nu + 1} (xZ_\nu)^{r_\nu - 1} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mu_\nu^k & \dfrac{kx}{1!}\mu_\nu^{k-1} & \ldots & \dfrac{k(k-1)\ldots(k-r_\nu+2)x^{r_\nu-1}}{(r_\nu-1)!}\mu_\nu^{k-r_\nu+1} \\ 0 & \mu_\nu^k & \ldots & \dfrac{k(k-1)\ldots(k-r_\nu+3)x^{r_\nu-2}}{(r_\nu-2)!}\mu_\nu^{k-r_\nu+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \dfrac{kx}{1!}\mu_\nu^{k-1} \\ 0 & 0 & \ldots & \mu_\nu^k \end{pmatrix},$$

так как $C_k^j = \dfrac{k!}{j!(k-j)!} = \dfrac{k(k-1)\ldots(k-j+1)}{j!}$.

В результате $S_m(J_\nu x) =$

$$= \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=0}^{m} a_k \mu_\nu^k & \frac{x}{1!} \sum\limits_{k=0}^{m} a_k k \mu_\nu^{k-1} & \dots & \frac{x^{r_\nu - 1}}{(r_\nu - 1)!} \sum\limits_{k=0}^{m} a_k c_k^{(r_\nu - 1)} \mu_\nu^{k - r_\nu + 1} \\ 0 & \sum\limits_{k=0}^{m} a_k \mu_\nu^k & \dots & \frac{x^{r_\nu - 2}}{(r_\nu - 2)!} \sum\limits_{k=0}^{m} a_k c_k^{(r_\nu - 2)} \mu_\nu^{k - r_\nu + 2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{x}{1!} \sum\limits_{k=0}^{m} k a_k \mu_\nu^{k-1} \\ 0 & 0 & \dots & \sum\limits_{k=0}^{m} a_k \mu_\nu^k \end{pmatrix}.$$

где $c_k^{(j)} = k(k-1)\dots(k-j+1)$, а $\mu_\nu = \lambda_\nu x$.
В полученном равенстве перейдем к пределу при $m \to \infty$.

Если $|\mu_\nu| < \rho$ для $\forall\, \nu = \overline{1, q}$, где ρ — радиус сходимости ряда $\mathfrak{F}_z$, то предел существует:

$$F(J_\nu x) = \begin{pmatrix} F(\mu_\nu) & \dfrac{x}{1!}F'(\mu_\nu) & \dots & \dfrac{x^{r_\nu-1}}{(r_\nu-1)!}F^{(r_\nu-1)}(\mu_\nu) \\ 0 & F(\mu_\nu) & \ddots & \dfrac{x^{r_\nu-2}}{(r_\nu-2)!}F^{(r_\nu-2)}(\mu_\nu) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dfrac{x}{1!}F'(\mu_\nu) \\ 0 & 0 & \dots & F(\mu_\nu) \end{pmatrix}_{r_\nu \times r_\nu}$$

или

$$F(J_\nu x) = \begin{pmatrix} F(\lambda_\nu x) & \dfrac{1}{1!}F'(\lambda_\nu x) & \dots & \dfrac{1}{(r_\nu-1)!}F^{(r_\nu-1)}(\lambda_\nu x) \\ 0 & F(\lambda_\nu x) & \ddots & \frac{1}{(r_\nu-2)!}F^{(r_\nu-2)}(\lambda_\nu x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dfrac{1}{1!}F'(\lambda_\nu x) \\ 0 & 0 & \dots & F(\lambda_\nu x) \end{pmatrix},$$

здесь производная берется по λ_ν, а x считается константой.

Сформулируем основные полученные результаты в виде теоремы.

Теорема (об аналитических функциях от матриц). *Пусть степенной ряд* $\mathfrak{F}_z = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ *абсолютно сходится при* $|z| < \rho$, A *— произвольная постоянная* $n \times n$ *матрица, имеющая собственные числа* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. *Тогда для* $\forall\, x \in \mathbb{R}^1\, (\in \mathbb{C}^1)$ *такого, что* $|\lambda_k x| < \rho \quad (k = \overline{1, n})$, *матричный степенной ряд* $\mathfrak{F}_{Ax} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (Ax)^k$ *сходится и его сумма* $F(Ax) = SF(Jx)S^{-1}$, *где* $J = S^{-1}AS$ *— это жорданова форма матрицы* A. *В свою очередь матрица* $F(Jx) = \operatorname{diag}\{F(J_0 x), F(J_1 x), \ldots, F(J_q x)\}$ *является верхнетреугольной, ее главная диагональ образована значениями функции* F *от собственных чисел матрицы* Jx.

Отметим, что положив $x = 1$, получим аналитическую функцию $\mathfrak{F}$ непосредственно от матрицы A при условии, что модули всех собственных чисел A попадают в круг сходимости $\mathfrak{F}_z$.

4^0. Экспонента и логарифм матрицы.

а) Определим экспоненту матрицы следующим образом.

Df. $$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\, A^k = E + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{6} + \dots\ .$$

Ряд e^λ сходится при всех λ, поэтому все собственные числа матрицы A попадают в круг сходимости ($\rho = +\infty$).
Таким образом e^A определена для любой матрицы A и ее определитель, равный произведению экспонент от собственных чисел A, отличен от нуля.
Отметим также, что $e^{A+B} = e^A e^B$, если $AB = BA$.

б) Вспомним сначала, как определяется логарифм комплексной переменной.
Для $\forall z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ по определению функция $\operatorname{Ln} z$ такова, что $e^{\operatorname{Ln} z} = z$. Тогда $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + \mathfrak{i} \operatorname{Arg} z$, где многозначная функция $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z})$.
Тем самым, для каждого k получаем свою ветвь аргумента и действительно $e^{\operatorname{Ln} z} = e^{\ln|z|} e^{\mathfrak{i} \arg z} e^{2\pi k \mathfrak{i}} = |z| e^{\mathfrak{i} \arg z} = z$.
Кроме того, степенной ряд $\ln(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} k^{-1} z^k$ сходится, если $|z| < 1$.

Определим логарифм неособой матрицы аналогичным образом.

Df. *Матрица* $\operatorname{Ln} A$ *называется логарифмом матрицы* A, *если* $\det A \neq 0$ *и* $e^{\operatorname{Ln} A} = A$.

Докажем существование $\operatorname{Ln} A$, поэтапно упрощая матрицу A, как это делалось в предыдущем пункте.
Пусть $A = SJS^{-1}$, где J — жорданова форма A.
Допустим, что $\operatorname{Ln} J$ существует. Тогда матрица

$$\operatorname{Ln} A = S \operatorname{Ln} J S^{-1},$$

так как с учетом п. $3^0_{1)}$
$e^{\operatorname{Ln} A} = e^{S \operatorname{Ln} J S^{-1}} = S e^{\operatorname{Ln} J} S^{-1} = SJS^{-1} = A.$
Пусть $J = \operatorname{diag}\{J_0, \ldots, J_q\}$, и допустим, что существуют матрицы $\operatorname{Ln} J_0, \ldots, \operatorname{Ln} J_q$. Тогда матрица

$$\operatorname{Ln} J = \operatorname{diag}\{\operatorname{Ln} J_0, \ldots, \operatorname{Ln} J_q\},$$

так как с учетом п. $3^0, 2)$
$e^{\operatorname{diag}\{\operatorname{Ln} J_0, \ldots, \operatorname{Ln} J_q\}} = \operatorname{diag}\{e^{\operatorname{Ln} J_0}, \ldots, e^{\operatorname{Ln} J_q}\}.$

Пусть $J_0 = \operatorname{diag}\{\lambda_0^{(1)}, \ldots, \lambda_0^{(p)}\}$ и $\lambda_0^{(1)}, \ldots, \lambda_0^{(p)} \neq 0$. Тогда матрица

$$\operatorname{Ln} J_0 = \operatorname{diag}\{\operatorname{Ln}\lambda_0^{(1)}, \ldots, \operatorname{Ln}\lambda_0^{(p)}\},$$

поскольку $e^{\operatorname{diag}\{\operatorname{Ln}\lambda_0^{(1)}, \ldots, \operatorname{Ln}\lambda_0^{(p)}\}} = \operatorname{diag}\{e^{\operatorname{Ln}\lambda_0^{(1)}}, \ldots, e^{\operatorname{Ln}\lambda_0^{(p)}}\} = J_0$.
Пусть $J_\nu = \lambda_\nu E + Z$, где $\nu = \overline{1, q}$, $\lambda_\nu \neq 0$, матрицы E, Z имеют размерность $r_\nu \geq 2$, коммутируют и Z нильпотентна.
В сложившейся ситуации можно воспользоваться формулой логарифма произведения, записав матрицу J_ν в виде произведения двух матриц: $J_\nu = \lambda_\nu E(E + \lambda_\nu^{-1} Z)$. Тогда

$$\operatorname{Ln} J_\nu = \operatorname{Ln}\lambda_\nu E + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} k^{-1} \lambda_\nu^{-k} Z^k \qquad (\nu = \overline{1, q}).$$

Убедимся в этом.
Вопрос о сходимости разложения функции $\operatorname{Ln}(E + \lambda_\nu^{-1} Z)$ в степенной ряд по аналогии с $\operatorname{Ln}(1 + z)$ не стоит, поскольку этот ряд конечен в силу нильпотентности Z, и определяется он однозначно.

Далее, $e^{\operatorname{Ln}(1+z)} = \sum\limits_{l=0}^{\infty} l!^{-1} \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} k^{-1} z^k \right)^l = 1 + z.$

Поэтому $e^{\operatorname{Ln} J_\nu} = e^{\operatorname{Ln} \lambda_\nu E} e^{\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} k^{-1} \lambda_\nu^{-k} Z^k} = \lambda_\nu E (E + \lambda_\nu^{-1} Z),$ так как после подстановки ряда $\operatorname{Ln}(E + \lambda_\nu^{-1} Z)$ в разложение экспоненты и переразложения полученного ряда по степеням матрицы Z коэффициенты, стоящие при этих степенях, вычисляются по тем же формулам, что и $e^{\operatorname{Ln}(1+z)}$.

Итак, при условии, что все собственные числа матриц J или A отличны от нуля, построена многозначная функция $\operatorname{Ln} J$ — блочно-диагональная верхнетреугольная матрица, на главной диагонали которой стоят логарифмы собственных чисел, у которых можно выбирать произвольную ветвь аргумента, но одну и ту же для каждого блока $\operatorname{Ln} J_\nu$, а наддиагональные элементы определены однозначно.
Кроме того, блочно-диагональная структура у матриц J и $\operatorname{Ln} J$ совпадает, а значит, элементарные делители их собственных чисел имеют одни и те же кратности.

5^0. ФМ ЛОС с постоянными коэффициентами. Ознакомившись в предыдущих пунктах с аналитическими функциями от матриц, вернемся к системе (5.1^c) $\quad y' = Ay$ для того, чтобы в явном виде выписать ее общее решение.

Теорема (о фундаментальной матрице ЛОС с постоянными коэффициентами). *Матрица* e^{Ax} *является ФМ системы* (5.1^c).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Продифференцируем сначала произвольную квадратную матрицу $\Psi(x)$. По определению производной

$$\Psi'(x) = \{\psi'_{ij}(x)\}_{i,j=1}^n = \{\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\psi_{ij}(x+\Delta x) - \psi_{ij}(x)}{\Delta x}\}_{i,j=1}^n =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\{\frac{1}{\Delta x}(\psi_{ij}(x+\Delta x)-\psi_{ij}(x)\}_{i,j=1}^n = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}(\Psi(x+\Delta x)-\Psi(x)).$$

Вычислим производную e^{Ax}, учитывая, что $e^{A(x+\Delta x)} = e^{A\Delta x}e^{Ax}$:

$$(e^{Ax})' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}(e^{A(x+\Delta x)} - e^{Ax})) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}(e^{A\Delta x} - E)e^{Ax}.$$

Но экспонента любой квадратной матрицы (см. пример 1) раскладывается в сходящийся степенной ряд, поэтому $(e^{A\Delta x} - E)/\Delta x = (A\Delta x + A^2\Delta x^2/2! + \ldots)/\Delta x \to A$ при $\Delta x \to 0$. В итоге матрица e^{Ax} для $\forall x \in \mathbb{R}^1$ удовлетворяет матричному уравнению (5.1^m), т. е. $(e^{Ax})' = Ae^{Ax}$ и $\det e^{Ax} \neq 0$. $\square$

Следствие. *Общее решение ЛОС* (5_1^c) *имеет вид* $\varphi(x,c) = e^{Ax}c$, *где* $c = (c_1, \ldots, c_n)$ *— произвольный постоянный вектор.*

6^0. Структура элементов фундаментальной матрицы.
Разберемся, как выглядит произвольный элемент произвольной фундаментальной матрицы ЛОС с постоянными коэффициентами, для чего сначала упростим фундаментальную матрицу e^{Ax}.

Пусть J — жорданова форма A. Тогда $J = S^{-1}AS$, $A = SJS^{-1}$. Учитывая свойства степенных рядов от подобных матриц, имеем: $e^{Ax} = e^{SJS^{-1}x} = Se^{Jx}S^{-1}$ или $e^{Ax}S = Se^{Jx}$.
По теореме о связи между фундаментальными матрицами ЛОС $e^{Ax}S$ — это ФМ, следовательно Se^{Jx} — также ФМ и структурно ее элементы не отличаются от элементов матрицы e^{Ax}.

Итак, рассмотрим матрицу $\Phi(x) = (\varphi^{(1)}(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)) = Se^{Jx}$, в которой $S = (s^{(1)}, \ldots, s^{(n)})$, $s^{(j)}$ — постоянные векторы, а матрица $e^{Jx} = \operatorname{diag}\{e^{J_0 x}, \ldots, e^{J_q x}\}$.
Тогда

$$(\varphi^{(1)}(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)) = (s^{(1)}, \ldots, s^{(n)}) \cdot \begin{pmatrix} e^{J_0 x} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & e^{J_1 x} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & e^{J_q x} \end{pmatrix},$$

где, как было установлено,

$$e^{J_0 x} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_0^{(1)} x} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_0^{(2)} x} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & e^{\lambda_0^{(p)} x} \end{pmatrix}_{p \times p},$$

$$e^{J_1 x} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & x e^{\lambda_1 x} & \dots & \dfrac{x^{r_1-1}}{(r_1-1)!} e^{\lambda_1 x} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x e^{\lambda_1 x} \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_1 x} \end{pmatrix}_{r_1 \times r_1 \ (r_1 \geq 2)}$$

и матрицы $e^{J_2 x}, \dots, e^{J_q x}$ аналогичны $e^{J_1 x}$.
Согласно определению произведения матриц j-й столбец $\varphi^{(j)}(x)$ из левой части равенства равен сумме произведений i-й компоненты j-го столбца матрицы e^{Jx} на i-й столбец $s^{(i)}$ матрицы S из правой части равенства $(i, j = \overline{1, n})$. Поэтому

$$\begin{aligned}
&\varphi^{(1)}(x) = s^{(1)} e^{\lambda_0^{(1)} x}, \dots, \varphi^{(p)}(x) = s^{(p)} e^{\lambda_0^{(p)} x}; \\
&\varphi^{(p+1)}(x) = s^{(p+1)} e^{\lambda_1 x},\ \varphi^{(p+2)}(x) = (s^{(p+1)} x + s^{(p+2)}) e^{\lambda_1 x}, \dots, \\
&\varphi^{(p+r_1)}(x) = (s^{(p+1)} x^{r_1-1}/(r_1-1)! + \dots + s^{(p+r_1-1)} x + s^{(p+r_1)}) e^{\lambda_1 x}; \\
&\varphi^{(p+r_1+1)}(x) = s^{(p+r_1+1)} e^{\lambda_2 x}, \dots .
\end{aligned}$$

Таким образом, любой элемент фундаментальной матрицы $\Phi = Se^{Jx}$ имеет вид:

$$\varphi_i^{(j)}(x) = p_{ij}(x)e^{\lambda_k x},$$

где $p_{ij}(x)$ — многочлен степени, не превосходящей $n-1$, а λ_k — одно из собственных чисел матрицы A.
По теореме о связи между фундаментальными матрицами ЛОС произвольная фундаментальная матрица $\Psi(x) = \Phi(x)C$, поэтому любой ее элемент — это линейная комбинация произведений многочленов ограниченной степени на экспоненты собственных чисел A, умноженных на x.
Что касается нахождения постоянной матрицы S, столбцами которой являются собственные векторы матрицы A, то из равенства $AS = SJ$ или
$A \cdot (s^{(1)}, \ldots, s^{(n)}) = (s^{(1)}, \ldots, s^{(n)}) \cdot \operatorname{diag}\{J_0, \ldots, J_q\}$ получаем:
$As^{(1)} = \lambda_0^{(1)} s^{(1)}, \ldots, As^{(p)} = \lambda_0^{(p)} s^{(p)}$;
$As^{(p+1)} = \lambda_1 s^{(p+1)}$, $As^{(p+2)} = \lambda_1 s^{(p+2)} + s^{(p+1)}$ и т. д.
При этом необходимо следить, чтобы вычисляемый набор векторов $s^{(1)}, \ldots, s^{(n)}$ оказался линейно независимым.

7^0. Оценка фундаментальной матрицы на бесконечности.

Введем следующим образом норму матрицы $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$:

$$\|A\| = \max_{i,j=\overline{1,n}} \{|a_{ij}|\}.$$

Легко проверить, что введенная таким образом норма матрицы удовлетворяет всем трем свойствам из определения функции норма:

1) $\|A\| \geq 0, \quad A = 0 \;\Leftrightarrow\; \|A\| = 0;$

2) $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|;$ 3) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|.$

Но, следует иметь в виду, что эта норма не является согласованной с нормой вектора $(\|a\| = \max_{i=\overline{1,n}} |a_i|)$, используемой нами, поскольку, как опять же легко проверить, $\|AB\| \leq n \cdot \|A\| \cdot \|B\|.$

У согласованной нормы матрицы $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$

В нашем случае согласованной оказалась бы норма матрицы, введенная следующим образом: $\|A\| = \max_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$

Теорема (об оценке нормы фундаментальной матрицы). *Пусть* $\lambda_* = \max\{\operatorname{Re}\lambda_1, \ldots, \operatorname{Re}\lambda_n\}$, *где* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *— собственные числа матрицы* A *системы* (5.1^c), *тогда для любого* $\lambda_0 > \lambda_*$ *и для любой фундаментальной матрицы* $\Phi(x)$ *этой системы*

$$\forall\, x_0 \in \mathbb{R}^1 \;\; \exists\, K > 0: \; \forall\, x \in [x_0, +\infty) \;\Rightarrow\; \|\Phi(x)\| \le K e^{\lambda_0 x}.$$

Доказательство. Система (5.1^c) имеет ФМ e^{Ax}.
Если $\Psi(x)$ — другая фундаментальная матрица этой системы, то по теореме о связи между фундаментальными матрицами существует постоянная неособая матрица C такая, что $\Psi(x) = e^{Ax}C$.

Имеем: $\|\Psi(x)\| \le n\,\|C\| \cdot \|e^{Ax}\|$. Поэтому достаточно доказать теорему, например, для фундаментальной матрицы $\Phi(x) = Se^{Jx}$.

Как было установлено, любой элемент матрицы $\Phi(x)$ имеет вид $\varphi_i^{(j)}(x) = p_{ij}(x)e^{\lambda_k x}$ $(i, j = 1\ldots, n)$, причем степень многочленов p_{ij} ограничена. Оценим $p_{ij}(x)e^{\lambda_k x}$ на промежутке $[x_0, +\infty)$.

Пусть $\varepsilon_0 = \lambda_0 - \lambda_* > 0$, тогда $\operatorname{Re}\lambda_1, \ldots, \operatorname{Re}\lambda_n \leq \lambda_0 - \varepsilon_0$. Отсюда

$$|\varphi_i^{(j)}(x)| = |p_{ij}(x)e^{(\operatorname{Re}\lambda_k + \mathrm{i}\operatorname{Im}\lambda_k)x}| \leq |p_{ij}(x)|e^{\lambda_0 x}e^{-\varepsilon_0 x}|e^{\mathrm{i}\operatorname{Im}\lambda_k x}|.$$

Но $|e^{\mathrm{i}\operatorname{Im}\lambda_k x}| = 1$, а $\lim\limits_{x\to+\infty} |p_{ij}(x)|e^{-\varepsilon_0 x} = 0$, поэтому найдется такое $K_0 > 0$, что $\|\Phi(x)\| = \max_{i,j=\overline{1,n}} |\varphi_i^{(j)}(x)| \leq K_0 e^{\lambda_0 x}$ для $\forall x \geq x_0$. $\Box$

Следствие. *Если все собственные числа матрицы* A *имеют отрицательные вещественные части, то* $\lim\limits_{x\to+\infty} \|\Phi(x)\| = 0$, *где* $\Phi(x)$ *— произвольная фундаментальная матрица системы* (5.1^c).

Действительно, в этом случае λ_0 можно выбрать отрицательным.

§ 3. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ (ТЕОРИЯ ФЛОКЕ)

1^0. Объект изучения.

В предыдущих параграфах исследовалась произвольная линейная однородная система (5.1) $y' = P(x)y$ с непрерывной на интервале (a, b) матрицей $P(x)$, а также ее важнейший частный случай — ЛОС с постоянными коэффициентами (5.1^c) $y' = Ay$, чье общее решение удается найти в явном виде.

Рассмотрим еще один важный частный случай ЛОС (5.1) — линейную однородную систему с периодическими коэффициентами

$$y' = A(x)y, \tag{5.1^p}$$

в которой $A(x)$ — непрерывная на $\mathbb{R}^1$ ω-периодическая матрица, т. е. $\exists\, \omega > 0 : \ \forall x \in \mathbb{R}^1 \ \Rightarrow \ A(x+\omega) = A(x)$.
Иными словами, любой элемент $a_{ij}(x)$ $(i, j = \overline{1, n})$ является непрерывной ω-периодической функцией на вещественной оси.

2^0. Матрица монодромии.

Пусть $\Phi(x)$ — ФМ системы (5.1^p).
Положим $\Psi(x) = \Phi(x+\omega)$ и подставим ее в систему (5.1^p) :

$$\Psi'(x) = \frac{d\Phi(x+\omega)}{dx} = \frac{d\Phi(x+\omega)}{d(x+\omega)} = A(x+\omega)\Phi(x+\omega) = A(x)\Psi(x).$$

Таким образом, $\Psi(x)$ удовлетворяет матричной системе (5.1^m) и $\det\Phi(x+\omega) \neq 0$, а значит, для $\forall\, x \in \mathbb{R}^1$ матрица $\Psi(x)$ — неособая.
Следовательно, $\Psi(x)$ наряду с $\Phi(x)$ является ФМ.

По теореме о связи между фундаментальными матрицами существует такая постоянная неособая матрица M, что $\Psi(x) = \Phi(x)M$.

Df. *Постоянная матрица* M *с* $\det M \neq 0$, *удовлетворяющая уравнению* $\Phi(x+\omega) = \Phi(x)M$, *называется матрицей монодромии фундаментальной матрицы* $\Phi(x)$.

3^0. Вид фундаментальной матрицы системы (5.1^p). Оказывается, что любая фундаментальная матрица ЛОС с периодическими коэффициентами, хотя и не может быть найдена в явном виде, но имеет определенную структуру.

Теорема (о структуре фундаментальной матрицы ЛОС с периодическими коэффициентами). *Любая ФМ* $\Phi(x)$ *системы* (5.1^p) *может быть записана в виде*

$$\Phi(x) = P(x)e^{Rx},$$

где $P(x)$ *—* ω *-периодическая, а* R *— постоянная матрица.*

Доказательство. Пусть M — матрица монодромии произвольной фундаментальной матрицы $\Phi(x)$ системы (5.1^p). т. е. $\Phi(x+\omega) = \Phi(x)M$ и M — неособая, а значит, все ее собственные числа отличны от нуля.
Положим

$$R = \omega^{-1}\operatorname{Ln} M, \quad P(x) = \Phi(x)e^{-Rx}.$$

Тем самым, по определению логарифма матрицы $M = e^{R\omega}$.

Для $\forall\, x \in \mathbb{R}^1$ имеем:

$$P(x+\omega) = \Phi(x+\omega)e^{-R(x+\omega)} = \Phi(x)Me^{-R\omega}e^{-Rx} = \Phi(x)e^{-Rx} = P(x),$$

т. е. $P(x)$ — ω-периодическая матрица. $\square$

4^0. Мультипликаторы.

Пусть M и M_1 — матрицы монодромии фундаментальных матриц $\Phi(x)$ и $\Phi_1(x)$ соответственно.
К сожалению, каждая из них является характеристикой только своей фундаментальной матрицы, а не характеристикой системы.
Установим, что общего имеется у всех матриц монодромии.

Имеем: $\Phi(x+\omega) = \Phi(x)M$, $\Phi_1(x+\omega) = \Phi_1(x)\cdot M_1$.

По теореме о связи между фундаментальными матрицами существует такая постоянная неособая матрица S, что $\Phi_1(x) = \Phi(x)S$.
Тогда $\Phi_1(x+\omega) = \Phi(x+\omega)S = \Phi(x)MS$. С другой стороны $\Phi_1(x+\omega) = \Phi_1(x)M_1 = \Phi(x)SM_1$. Поэтому $MS = SM_1$.

Утверждение 5. *Если* $\Phi(x), \Phi_1(x)$ *— произвольные ФМ системы* (5.1^p) *и* $\Phi_1(x) = \Phi(x)S$, *то их матрицы монодромии* M, M_1 *подобны, т. е.*

$$M_1 = S^{-1}MS.$$

Df. *Собственные числа* $\mu_1, \ldots, \mu_n$ *любой матрицы монодромии ЛОС* (5.1^p) *называются мультипликаторами.*

Таким образом, мультипликаторы, будучи инвариантами подобных матриц, являются уже характеристикой самой системы (5.1^p).

Теорема (о характеристическом свойстве мультипликаторов). *Число* μ *является мультипликатором системы* (5.1^p) *тогда и только тогда, когда существует решение* $y = \varphi(x)$ *системы* (5.1^p) *такое, что* $\varphi(x + \omega) = \varphi(x)\mu$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть μ — мультипликатор системы, а $\Phi(x)$ — ее фундаментальная матрица. Тогда $\Phi(x+\omega) = \Phi(x)M$.

Существует неособая постоянная матрица S такая, что матрица $J = S^{-1}MS$ — жорданова с собственными числами $\mu_1, \ldots, \mu_n$. Тогда $\Phi_1(x) = \Phi(x)S$ является фундаментальной матрицей.

Согласно утверждению 5 J — матрица монодромии для $\Phi_1(x)$: $\Phi_1(x+\omega) = \Phi_1(x)J$. Или, если $\Phi_1(x) = (\varphi^{(1)}(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x))$, то

$$(\varphi^{(1)}(x+\omega), \ldots, \varphi^{(n)}(x+\omega)) =$$

$$(\varphi^{(1)}(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)) \cdot \begin{pmatrix} \mu_1 & \sigma_1 & \ldots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \sigma_{n-1} \\ 0 & 0 & \ldots & \mu_n \end{pmatrix},$$

где $\sigma_i = 0$ $(i = \overline{1, n-1})$, если $\mu_i \neq \mu_{i+1}$.

По условию теоремы найдется j такое, что $\mu = \mu_j$, а потому найдется k такое, что в k-ом столбце матрицы J единственным ненулевым элементом будет μ_j. Но тогда $\varphi^{(k)}(x+\omega) = \varphi^{(k)}(x)\mu_j$.

Предположим теперь, что существует решение $y = \varphi(x)$ такое, что $\varphi(x+\omega) = \varphi(x)\mu$, и построим фундаментальную матрицу $\Phi(x) = (\varphi(x), \varphi^{(2)}(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x))$, имеющую матрицу монодромии $M = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$. Имеем: $(\varphi(x+\omega), \varphi^{(2)}(x+\omega), \ldots, \varphi^{(n)}(x+\omega)) =$

$$(\varphi(x), \varphi^{(2)}(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)) \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \ldots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \ldots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \ldots & m_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тогда $\varphi(x+\omega) = \varphi(x)m_{11} + \varphi^{(2)}(x)m_{21} + \ldots + \varphi^{(n)}(x)m_{n1} = \varphi(x)\mu$ или $\varphi(x)(m_{11} - \mu) + \varphi^{(2)}(x)m_{21} + \ldots + \varphi^{(n)}(x)m_{n1} = 0$.
Но векторы $\varphi(x), \varphi^{(2)}(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)$ линейно независимы на $\mathbb{R}^1$, поэтому $\mu = m_{11}$, $m_{21}, \ldots, m_{n1} = 0$. В результате μ — собственное число матрицы монодромии M, а значит, мультипликатор. $\square$

Следствие. *Система* (5.1^p) *имеет периодическое решение тогда и только тогда, когда хотя бы один из ее мультипликаторов равен единице.*

Пусть $\Phi_0(x)$ — нормированная фундаментальная матрица системы (5.1^p) при $x_0 = 0$, т. е. $\Phi_0(0) = E$, тогда $\Phi_0(\omega) = EM = M$ — матрица монодромии для $\Phi_0(x)$.

По формуле Лиувилля $\det \Phi_0(x) = \exp\left\{\int_0^x \operatorname{Tr} A(s)\, ds\right\}$, поэтому произведение мультипликаторов $\mu_1 \ldots \mu_n = \exp\left\{\int_0^\omega \operatorname{Tr} A(s)\, ds\right\}$.

Пример 3. *Рассмотрим периодическое ЛОУ второго порядка*

$$\ddot{y} + p(x)y = 0,$$

в котором $p(x)$ — *непрерывная* ω *-периодическая функция.*

После стандартной замены $y = y_1$, $\dot{y} = y_2$ оно равносильно ЛОС $\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -p(x)y_1 \end{cases}$ с $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p(x) & 0 \end{pmatrix}$, и нулевым следом.

Следовательно, произведение мультипликаторов $\mu_1\mu_2 = 1$.

5^0. Структура элементов фундаментальной матрицы.

Пусть $\Phi(x) = P(x)e^{Rx}$ — произвольная ФМ системы (5.1^p), тогда $\Phi(x+\omega) = \Phi(x)M$, $R = \omega^{-1}\mathrm{Ln}\, M$.
Пусть $J = S^{-1}RS$ — жорданова форма матрицы R, тогда по доказанному выше $\Phi(x) = P(x)Se^{Jx}S^{-1}$ или

$$\Phi_1(x) = P_1(x) \cdot e^{Jx},$$

где матрица $\Phi_1(x) = \Phi(x)S$ — фундаментальная, а матрица $P_1(x) = P(x)S$ — ω-периодическая.
Пусть M_1 — матрица монодромии для Φ_1, тогда $J = \omega^{-1}\mathrm{Ln}\, M_1$, кроме того, $M_1 = S^{-1}MS$ согласно утверждению 5.
Если $\mu_1, \ldots, \mu_n$ — мультипликаторы M_1, то по теореме о логарифме матрицы $\lambda_1 = \omega^{-1}\mathrm{Ln}\, \mu_1, \ldots, \lambda_n = \omega^{-1}\mathrm{Ln}\, \mu_n$ — собственные числа матрицы J или подобной ее матрицы R.

Df. *Собственные числа матрицы R называются характеристическими показателями ЛОС* (5.1^p).
Важно, что вещественные части характеристических показателей определены однозначно.

Пусть $\Phi_1(x)=(\varphi^{(1)}(x),\ldots,\varphi^{(n)}(x))$, $P_1(x)=(p^{(1)}(x),\ldots,p^{(n)}(x))$, причем все векторы $p^{(j)}(x)$ — ω-периодические.
Тогда, как и для ЛОС с постоянными коэффициентами, из равенства $(\varphi^{(1)}(x),\ldots,\varphi^{(n)}(x))=(p^{(1)}(x),\ldots,p^{(n)}(x))\cdot e^{Jx}$ получаем:

$$\begin{aligned}
&\varphi^{(1)}=p^{(1)}(x)e^{\lambda_0^{(1)}x},\ldots,\varphi^{(p)}(x)=p^{(p)}(x)e^{\lambda_0^{(p)}x};\\
&\varphi^{(p+1)}=p^{(p+1)}(x)e^{\lambda_1 x},\ \varphi^{(p+2)}(x)=(p^{(p+1)}(x)x+p^{(p+2)}(x))e^{\lambda_1 x},\ldots,\\
&\varphi^{(p+r_1)}=(p^{(p+1)}(x)x^{r_1-1}/(r_1-1)!+\ldots+p^{(p+r_1-1)}(x)x+\\
&\qquad\qquad p^{(p+r_1)}(x))e^{\lambda_1 x};\quad \varphi^{(p+r_1+1)}=s^{(p+r_1+1)}e^{\lambda_2 x},\ldots,
\end{aligned}$$

т. е. любой элемент ФМ $\Phi_1(x)=P(x)Se^{Jx}$ имеет вид:

$$\varphi_i^{(j)}(x)=p_{ij}(x)e^{\lambda_k x},$$

где $p_{ij}(x)$ — многочлен от x степени, не превосходящей $n-1$, с коэффициентами, являющимися ω-периодическими функциями x, а λ_k — один из характеристических показателей системы.

Поэтому для ЛОС с периодическими коэффициентами, как и для ЛОС с постоянными коэффициентами, справедлива теорема об оценке нормы ФМ и следствие 3 из нее, но вместо собственных чисел постоянный матрицы A надо использовать характеристические показатели, т. е. собственные числа R.

6^0. Приводимость периодических ЛОС.

Пусть $\Phi(x)$ — ФМ системы (5.1^p), тогда $P(x) = \Phi(x)e^{-Rx}$ — это неособая периодическая матрица.

Сделаем линейную обратимую ω-периодическую замену

$$y = P(x)z, \tag{5.2}$$

которая преобразует систему (5.1^p) в систему $P'z + Pz' = APz$ или

$$z' = (P^{-1}(x)A(x)P(x) - P^{-1}(x)P'(x))z.$$

Вычислим полученную матрицу. Имеем: $P^{-1}(x) = e^{Rx}\Phi^{-1}(x)$, $P'(x) = \Phi'(x)e^{-Rx} + \Phi(x)(-R)e^{-Rx} = A(x)\Phi(x)e^{-Rx} - \Phi(x)Re^{-Rx}$.

Поэтому $P^{-1}(x)A(x)P(x) - P^{-1}(x)P'(x) = e^{Rx}\Phi^{-1}(x)A(x)\Phi e^{-Rx} - e^{Rx}\Phi^{-1}(x)A(x)\Phi(x)e^{-Rx} + e^{Rx}\Phi^{-1}(x)\Phi(x)Re^{-Rx} = e^{Rx}Re^{-Rx} = R$, так как матрицы R и e^{Rx} коммутируют.
Таким образом, из периодичной системы (5.1^p) заменой (5.2) удалось получить ЛОС с постоянными коэффициентами

$$z' = Rz. \tag{5.3}$$

чьи собственные числа, очевидно, являются характеристическими показателями ω-периодической системы (5.1^p).

Df. *Линейная система* (5.1) *называется приводимой, если существует линейная неособая замена, преобразующая ее в систему с постоянными коэффициентами.*

Если в системе (5.1^p) матрица $A(x)$ вещественна, естественно, хотелось бы получить систему (5.3), т. е. ее матрицу R, также вещественной, но этого удается достичь далеко не всегда.
В самом деле, фундаментальную матрицу $\Phi(x)$ в системе (5.1^p) всегда можно выбрать вещественной. а значит, и матрицу монодромии M тоже. Но матрица $R = \omega^{-1}\operatorname{Ln} M$ вещественна, если только все ее мультипликаторы $\mu_1, \dots, \mu_n$ положительны.

Если же среди мультипликаторов найдется хотя бы один комплексный или отрицательный, то $\operatorname{Ln} M$, очевидно, будет комплексной матрицей.
Но, если предположить, что все мультипликаторы вещественны (и отличны от нуля), т. е. допустить отрицательные мультипликаторы, то, пожертвовав качеством замены (5.2) и сделав ее 2ω - периодический, можно всегда получить вещественную матрицу R.

Действительно, всегда можно считать, что ω-периодическая матрица $A(x)$ системы (5.1^p) имеет период 2ω. Тогда для $\forall\, x \in \mathbb{R}^1$ матрица $\Phi(x+2\omega) = \Phi(x+\omega)M = \Phi(x)M^2$. Но матрица M^2 имеет положительные мультипликаторы и ее логарифм вещественен.
Таким образом, существует линейная обратимая вещественная замена с 2ω-периодическими коэффициентами, преобразующая систему с ω-периодическими коэффициентами (5.1^p) в вещественную систему (5.3) с постоянными коэффициентами.

§ 4. ЛИНЕЙНЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ

1^0. Формула общего решения ЛНС.

Рассмотрим линейную неоднородную систему (3.14) из гл. III, § 5

$$y' = P(x)y + q(x), \tag{5.4}$$

в которой матрица P и неоднородность q непрерывны на (a, b).
Пусть $y = \psi(x)$ — какое-либо частное решение системы (5.4), т. е. $\psi'(x) = P(x)\psi(x) + q(x)$ для $\forall\, x \in (a, b)$.
Сделаем замену $y = z + \psi(x)$. Дифференцируя ее по x в силу системы (5.4), получаем $z' + \psi'(x) = P(x)z + P(x)\psi(x) + q(x)$ или

$$z' = P(x)z. \tag{5.5}$$

Пусть $\Phi(x)$ — ФМ системы (5.5), тогда по теореме об общем решении ЛОС $z = \Phi(x)c$ — общее решение (5.5) (c — произвольный постоянный вектор), поэтому общее решение ЛНС (5.4) имеет вид:

$$y = \Phi(x)c + \psi(x).$$

2^0. Метод вариации произвольной постоянной.
Зная фундаментальную матрицу $\Phi(x)$ линейной однородной системы, частное решение $y = \psi(x)$ линейной неоднородной системы всегда можно найти в квадратурах, т. е. с точностью до неберущихся интегралов, методом вариации произвольной постоянной.

Теорема (о нахождении частного решения ЛНС). *Пусть* $\Phi(x) = (\varphi^{(1)}(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x))$ *— это фундаментальная матрица ЛОС (5.5), тогда частное решение ЛНС (5.4) может быть найдено в квадратурах от* $\varphi_i^{(j)}(x)$, $p_{ij}(x)$, $q_i(x)$ $(i, j = \overline{1, n})$.

Доказательство. Частное решение $y = \psi(x)$ системы (5.4) будем искать, варьируя произвольную постоянную — вектор $c = (c_1, \ldots, c_n)$ — в формуле общего решения $z = \Phi(x)c$ линейной однородной системы. Положим

$$\psi(x) = \Phi(x)c(x),$$

где $c(x)$ – непрерывно дифференцируемая на (a, b) вектор-функция.

Подставим $\psi(x)$ в систему (5.4): $\Phi' c + \Phi c' = P\Phi c + q$.
Но ФМ $\Phi(x)$ удовлетворяет матричной системе (5.1^m), а значит, $\Phi'(x) = P(x)\Phi(x)$. Поэтому $\Phi c' = q$ или $c' = \Phi^{-1}(x)q(x)$.

Для $\forall\, x, x_0 \in (a,b)$ проинтегрируем полученное равенство по s от x_0 до x, находя вектор-функцию $c(x) = \int_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(s)q(s)\,ds$, а вместе с ней и частное решение ЛНС (5.4):

$$\psi(x) = \Phi(x)\int_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(s)q(s)\,ds. \quad \square$$

В результате общее решение системы (5.4) имеет вид:

$$y(x) = \Phi(x)c + \Phi(x)\int_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(s)q(s)\,ds$$

где Φ — ФМ линейной однородной системы (5.5).

3^0. Общее решение ЛНС с постоянными коэффициентами. Рассмотрим систему

$$y' = Ay + q(x), \tag{5.6}$$

в которой матрица A постоянна, а неоднородность $q(x) \in C((a, b))$.

По теореме о фундаментальной матрице ЛОС с постоянными коэффициентами матрица $\Phi(x) = e^{Ax}$ является фундаментальной для системы (5.1^c) $y' = Ay$, а $\Phi^{-1}(x) = e^{-Ax}$. Поэтому

$$y_{\text{он}}(x) = e^{Ax}c + e^{Ax} \int_{x_0}^{x} e^{-As} q(s)\, ds$$

— формула общего решения ЛНС (5.6).

Для любых начальных данных $x_0 \in (a, b)$ и $y^0 \in \mathbb{R}^n$ формула

$$y = e^{A(x-x_0)} y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{A(x-s)} q(s)\, ds \qquad (c = e^{-Ax_0} y^0) \tag{5.7}$$

задает решение задачи Коши с выбранными начальными данными на интервале (a, b) и называется формулой Коши.

Г Л А В А VI
Автономные системы

§ 1. СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ И ТРАЕКТОРИЙ

1^0. Объект изучения.

Df. *Нормальная система (3.1)* $y' = f(x, y)$ *называется автономной, если ее правая часть не зависит от независимой переменной* x, *т. е. система имеет вид* $y' = f(y)$. *В противном случае система (3.1) — неавтономная.*

Автономную систему обычно сразу записывают так, как это принято в механике (см. систему (3.1_m)) :

$$\dot{x} = X(x), \tag{6.1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\dot{x} = dx/dt$, $X = (X_1, \ldots, X_n)$, и предполагают, что вектор-функция $X(x)$ определена, непрерывна и удовлетворяет условию Липшица локально по x в области $D \subset \mathbb{R}^n$.

Тогда по теореме о существовании и единственности решений нормальных систем из Гл. 3, § 3, п. 2 область $G = \mathbb{R}^1 \times D$ — это область существования и единственности решений автономной системы, т. е. для любых начальных данных $t_0 \in \mathbb{R}^1$, $x^0 \in D$ существует и единственно решение задачи Коши системы (6.1) с выбранными начальными данными, которое определено на отрезке Пеано $P_h(t_0, x^0)$.

2^0. Механическая интерпретация автономных систем. В Гл. 3, § 1, п. 4 отмечено, что в механике независимая переменная t трактуется как время, а решение $x = \varphi(t)$ системы (6.1), определенное на максимальном интервале существования I_{max}, — как движение материальной точки в фазовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Тогда вектор-функция $X(x)$ задает вектор скорости материальной точки $x = \varphi(t)$, который у автономных систем не зависит от времени и непрерывно изменяется с изменением x. Таким образом, автономная система индуцирует непрерывное векторное поле $X(x)$ в области D фазового пространства $\mathbb{R}^n$. Обратно: любая вектор-функция $V(x) \in C(D)$ задает автономную систему $\dot{x} = V(x)$, для которой V является полем скоростей.

Кривая $\gamma = \{(t,x)\colon\, x = \varphi(t),\, t \in I_{max}\}$, лежащая в области $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$, называется интегральной кривой движения $x = \varphi(t)$ и является графиком функции $x = \varphi(t)$.
Кривая $L = \{x\colon\, x = \varphi(t),\, t \in I_{max}\}$, лежащая в области $D \subset \mathbb{R}^n$, называется траекторией движения $x = \varphi(t)$ и является проекцией интегральной кривой γ вдоль оси времени на фазовое пространство.
В этом случае говорят, движение $x = \varphi(t)$ порождает или параметризует траекторию L.

3^0. Инвариантность решений относительно сдвигов по t.
Пусть $x = \varphi(t, t_0, p)$ — это решение задачи Коши системы (6.1) с начальными данными t_0, p, определенное на интервале (a,b), т. е. $\dot{\varphi}(t, t_0, p) \overset{(a,b)}{\equiv} X(\varphi(t, t_0, p))$.

Лемма (об инвариантности решений относительно сдвигов по t). *Пусть $x = \varphi(t, t_0, p)$ — решение системы (6.1) на интервале (a,b), тогда для $\forall \tau \in \mathbb{R}^1$ вектор-функция $\psi(t) = \varphi(t+\tau, t_0, p)$ также является решением системы (6.1) для $\forall\, t \in (a-\tau, b-\tau)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о.
$$\frac{d\,\psi(t)}{dt} = \frac{d\,\varphi(t+\tau,t_0,p))}{d(t+\tau)} \overset{(a-\tau,b-\tau)}{\equiv} X(\varphi(t+\tau,t_0,p)) = X(\psi(t)). \ \square$$
Естественно, доказательство основано на единственном отличии автономной системы от нормальной: система (6.1) не меняется при сдвиге независимой переменной t на любую константу τ, поскольку правая часть X системы не зависит от t.

Следствие. *Пусть* $x = \varphi(t, t_0, p)$ *— решение системы (6.1) на интервале* (a, b), *тогда*

$$\forall\tau \in \mathbb{R}^1 : \quad \varphi(t+\tau, t_0+\tau, p) \overset{(a,b)}{\equiv} \varphi(t, t_0, p). \tag{6.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем в качестве начальных данных $t_0 + \tau$ и p. Это сделать возможно, так как область $G = \mathbb{R}^1 \times D$. Рассмотрим решение $x = \varphi(t, t_0+\tau, p)$ с выбранными начальными данными. По лемме решением системы (6.1) будет также вектор-функция $x = \varphi(t+\tau, t_0+\tau, p)$.
Но при $t = t_0$ решения $x = \varphi(t, t_0, p)$ и $x = \varphi(t+\tau, t_0+\tau, p)$ попадают в одну и ту же точку $p \in D$. Следовательно по теореме единственности эти решения совпадают на (a, b). $\square$

Положим $\varphi(t, p) = \varphi(t, 0, p)$, т. е. будем для краткости опускать второй аргумент решения, если $t_0 = 0$.
Рассмотрим решение $x = \varphi(t, t_0, p)$ системы (6.1).
Выберем в следствии 1 константу $\tau = -t_0$. Тогда согласно (6.2)

$$\varphi(t, t_0, p) = \varphi(t - t_0, t_0 - t_0, p) = \varphi(t - t_0, p).$$

Формально это означает, что в автономных системах начальное данное по времени можно вносить в первый аргумент решения в виде аддитивной постоянной, а фактически — что положение движущейся материальной точки определяется точкой старта p и временем движения $t - t_0$, но не зависит от времени старта.
Иными словами, стартуя из точки p в момент времени t_0, в момент t материальная точка окажется там же, где будет в случае старта в момент времени 0 за время движения $t - t_0$.

4^0. Групповое свойство решений.

Пусть решение $x=\varphi(t-t_0,p)$ определено на $I_{max}=(\alpha,\beta)$. Выберем произвольный момент времени $t_1\in(\alpha,\beta)$ и положим $q=\varphi(t_1-t_0,p)$.

Рассмотрим решение $x=\varphi(t-t_1,q)$. При $t=t_1$ оно наряду с решением $x=\varphi(t-t_0,p)$ попадает в точку q. Следовательно по теореме единственности эти решения совпадают:

$$\forall\, t_1\in(\alpha,\beta):\quad \varphi(t-t_0,p)\overset{(\alpha,\beta)}{\equiv}\varphi(t-t_1,\varphi(t_1-t_0,p)). \tag{6.3}$$

Полученное тождество называется групповым свойством решений автономной системы. Поясним, откуда взялось это название. Положим $\varphi_t(p)=\varphi(t,p)$ для $\forall\, p\in D$, тогда функцию $q=\varphi_t(p)$ можно рассматривать как преобразование области D в себя с параметром t, причем $\varphi_0(p)$ является тождественным преобразованием.

Предположим, что все решения системы (6.1) продолжимы на все вещественные t.
Выбирая в тождестве (6.3) $t_0 = -s$ и $t_1 = t - s$, получаем

$$\varphi(t+s,p) = \varphi(s,\varphi(t,p)) \quad \text{или} \quad \varphi_{t+s} = \varphi_s \circ \varphi_t \quad \text{для} \ \forall\, t,s \in \mathbb{R}^1.$$

Следовательно φ_t образуют однопараметрическую группу относительно композиции преобразований. Говорят также, что в этом случае автономная система порождает непрерывный *фазовый поток* или *динамическую систему* в области G.
Предположение о продолжимости всех решений системы (6.1) на $\mathbb{R}^1$ далеко не всегда является ограничением. Желающим разобраться с этим вопросом поможет дополнение VI.

5^0. Основное свойство траекторий автономных систем. Геометрическое отличие траекторий автономных и неавтономных систем заключается в том, что траектории неавтономных систем могут касаться друг друга или пересекаться, а траектории автономных систем не могут.

Теорема (о единственности для траекторий автономных систем). *Если траектории автономной системы (6.1) имеют общую точку, то они совпадают.*

Доказательство.

Предположим, что траектории движений $x = \varphi(t - t_0, p)$ и $x = \tilde{\varphi}(t - \tilde{t}_0, \tilde{p})$ системы (6.1) имеют общую точку $q \in D$, т. е. найдутся моменты времени $t_1, \tilde{t}_1$ такие, что $q = \varphi(t_1 - t_0, p) = \tilde{\varphi}(\tilde{t}_1 - \tilde{t}_0, \tilde{p})$.

Для того чтобы оба решения попадали в точку q в один и тот же момент времени, например, в момент $\tilde{t}_1$, осуществим сдвиг по времени в первом решении, применив групповое свойство.

Согласно тождеству (6.3) $\varphi(t - t_0, p) = \varphi(t - \tilde{t}_0, p_*)$, где $p_* = \varphi(\tilde{t}_0 - t_0, p)$. Следовательно, графики движений $x = \tilde{\varphi}(t - \tilde{t}_0, \tilde{p})$ и $x = \varphi(t - \tilde{t}_0, p_*)$ или, что то же самое, их интегральные кривые проходят через точку $(\tilde{t}_1, q)$, а значит, по теореме единственности они совпадают. Но тогда совпадают и их траектории. $\square$

$\mathbf{6^0}$. Особые точки и циклы.

Среди множества всех траекторий автономной системы имеются два типа, занимающие особое место — это точки покоя и циклы.

Df. *Если для* $\forall\, t \in \mathbb{R}^1$ *движение* $\varphi(t, p) = p$, *то точка* p, *являющаяся траекторией этого движения, называется точкой покоя, или особой точкой, или положением равновесия системы* (6.1).

Выделим очевидное, но очень важное утверждение.

Утверждение 1. *Точка* $p \in D$ *является точкой покоя тогда и только тогда, когда в системе* (6.1) $X(p) = 0$.
Df. *Точка* $p \in D$ *называется обыкновенной или неособой, если* $X(p) \neq 0$.

В частности, из теоремы о единственности для траекторий вытекает, что материальная точка, движущаяся по какой либо траектории, отличной от положения равновесия, не может достигнуть точки покоя за конечной время.

Df. *Если* $\exists\, \omega > 0$ *такое, что для* $\forall\, t \in \mathbb{R}^1$ *движение* $\varphi(t, p) = \varphi(t + \omega, p)$, *то замкнутая кривая* l, *являющаяся траекторией этого движения, называется циклом.*
Таким образом точка покоя порождается постоянным движением системы (6.1), а цикл — ω-периодическим. И множество точек покоя совпадает с множеством нулей непрерывной вектор-функции $X(x)$.

7^0. Топологические типы траекторий.

Еще одно геометрическое отличие траекторий автономных систем от неавтономных заключается в том, что траектории неавтономной системы могут самопересекаться под любыми углами, а траектории автономной системы в случае самопересечения образуют цикл, т. е. их параметризуют периодические решения.

Теорема (о типах траекторий автономных систем). *Траектории автономных систем бывают трех типов: 1) точка покоя* p *, 2) цикл* l *(простая замкнутая кривая), 3) незамкнутая траектория* L *без самопересечений (гомеоморфный образ прямой или простая параметрическая кривая).*

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Пусть точка $p \in D$ — обыкновенная и траектория l движения $x = \varphi(t, p)$ $(\varphi(0, p) = p,\ I_{max} = (\alpha, \beta))$ имеет в ней самопересечение, т. е. в системе (6.1) $X(p) \neq 0$ и $\exists \tau > 0 :$ $\varphi(\tau, p) = p.$

Рассмотрим непрерывную при $t > 0$ функцию $h(t) = \varphi(t,p) - p$. По определению решения $\dfrac{d\varphi(t,p)}{dt} \overset{(\alpha,\beta)}{\equiv} X(\varphi(t,p))$. В частности, $d\varphi(0)/dt = X(p) \neq 0$. Поэтому $\exists\,\theta > 0$, что $h(t) \neq 0$ при $t \in (0,\theta)$. Таким образом множество нулей функции $h(t)$ замкнуто, не пусто, так как в нем содержится τ, и ограничено снизу числом θ. Следовательно оно имеет минимальный элемент ω и $[0,\omega] \in (\alpha,\beta)$.

В результате $\varphi(t,p) \neq p$ при $t \in (0,\omega)$ и $\varphi(\omega,p) = \varphi(0,p) = p$.

Применим групповое свойство решений.

Согласно тождеству (6.3) с $t_0 = 0$, $t_1 = \omega$ для $\forall\,t \in (\alpha,\beta)$ имеем:

$$\varphi(t,p) = \varphi(t-\omega, \varphi(\omega,p)) = \varphi(t-\omega,p).$$

Таким образом в случае самопересечения движение $x = \varphi(t,p)$ — ω-периодическое и определено для $\forall\,t \in \mathbb{R}^1$, а его траектория l — замкнутая кривая, называемая циклом.

Г Л А В А VII
Теория устойчивости движения

§ 1. ПОНЯТИЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ

1^0. Устойчивость — как попытка обобщения теоремы об интегральной непрерывности на бесконечный промежуток времени.

В этой главе для нормальной системы (3.1) будем использовать механическую запись (3.1_m) и сделаем дополнительное предположение о структуре области G. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{7.1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, f определена, непрерывна и удовлетворяет локальному условию Липшица по x в области $G = (c, +\infty) \times D$, а D — область фазового пространства $\mathbb{R}^n$.

Пусть $x = \varphi(t)$ — решение или, как говорят, движение системы (7.1), определенное на промежутке $[t_0, +\infty)$, где $t_0 > c$. Зафиксируем начальный момент времени t_0 и через $x = x(t, x^0)$ обозначим решение или возмущенное движение системы (7.1) с начальными данными $t_0, x^0 \quad (x^0 \in D)$, определенное на максимальном интервале существования $(\alpha, \beta) \ni t_0$.

Возьмем произвольный момент времени $T > t_0$ и рассмотрим выделенное решение $x = \varphi(t)$ на отрезке $[t_0, T]$.
По теореме об интегральной непрерывности для всякого достаточно малого $\sigma > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любого $x^0\colon\ \|x^0 - \varphi(t_0)\| < \delta$ возмущенное движение $x(t, x^0)$ определено на $[t_0, T]$ и $x(t, x^0) \in \overline{U}_\sigma$, т. е. $\|x(t, x^0) - \varphi(t)\| < \sigma$ при всех $t \in [t_0, T]$. Здесь левый конец отрезка $[a, b]$ из теоремы выбран совпадающим с t_0 и зависимость функции f от μ не учитывается $(\mu = const)$.
Таким образом, функция $x(t, x^0)$ оказалась непрерывной по x^0 равномерно относительно $t \in [t_0, T]$.
Очевидно, что с увеличением T, т. е. длины промежутка, на котором обязана работать теорема об интегральной непрерывности, δ может вынужденно уменьшаться, и может так случиться, что при T стремящемся к бесконечности δ будет стремиться к нулю.

Свойство устойчивости движения $x = \varphi(t)$ состоит в том, что величина δ, наличие которой для любого фиксированного T гарантирует теорема, вообще не зависит от выбора T, а значит, функция $x(t, x^0)$ непрерывна по x^0 равномерно не только по t, но и по T.

Следует сразу отметить, что речь идет не об устойчивости системы (7.1), а только об устойчивости какого-либо ее решения.

Мы выделяем движение $x = \varphi(t)$, продолжимое по времени до бесконечности, и смотрим, как ведут себя все решения системы (7.1), достаточно близкие к нему в начальный момент времени t_0. А именно, продолжимы ли они все на бесконечный промежуток $[t_0, +\infty)$ и, если это так, то остаются ли они близки к $\varphi(t)$ при $t \to +\infty$.

2^0. Основные определения.

Df. *Выбранное движение* $x = \varphi(t)$ *системы (7.1), определенное на промежутке* $[t_0, +\infty)$, *называется невозмущенным. Остальные движения* $x = x(t, x^0)$ *— возмущенные. При этом* $\|x^0 - \varphi(t_0)\|$ *называется возмущением.*

Df. *Невозмущенное движение* $x = \varphi(t)$, *определенное на* $[t_0, +\infty)$, *называется устойчивым по Ляпунову, если*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \text{ такое, что } \forall\, x^0 : \quad \|x^0 - \varphi(t_0)\| < \delta \;\Rightarrow$$
$$\forall\, t \in [t_0, +\infty) \text{ верно неравенство } \|x(t, x^0) - \varphi(t)\| < \varepsilon.$$

Замечание 1. Устойчивость движения не зависит от выбора начального данного по времени t_0. Докажите это самостоятельно, используя теорему об интегральной непрерывности.

Df. *Невозмущенное движение* $x = \varphi(t)$ *называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво по Ляпунову и*

$$\exists\, \delta_0 > 0 \text{ такое, что } \forall\, x^0 : \quad \|x^0 - \varphi(t_0)\| < \delta_0 \;\Rightarrow$$
$$\|x(t, x^0) - \varphi(t)\| \to 0 \text{ при } t \to +\infty.$$

Легко привести пример, когда выполняется второе условие из определения асимптотической устойчивости, но при этом невозмущенное движение не будет устойчивым по Ляпунову.

Df. *Областью притяжения асимптотически устойчивого движения* $x = \varphi(t)$ *называется множество точек* $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ *фазового пространства таких, что если* x^0 *— точка из этого множества,* $x(t, x^0) \to \varphi(t)$ *при* $t \to +\infty$.

В частности, непосредственно из определения асимптотической устойчивости движения вытекает, что область его притяжения содержит n-мерный куб с длиной ребра $2\delta_0$.

Df. *Асимптотически устойчивое движение называется устойчивым в целом, если его область притяжения совпадает со всем фазовым пространством* $\mathbb{R}^n$.

Df. *Невозмущенное движение* $x = \varphi(t)$ *называется неустойчивым, если оно не является устойчивым по Ляпунову.*

Смысл последнего определения заключается в том, что третьего не дано: любое движение системы (7.1), продолжимое на промежуток $[t_0, +\infty)$, либо устойчиво по Ляпунову (возможно асимптотически), либо неустойчиво.

Через "ε, δ" определение неустойчивости движения $x = \varphi(t)$ записывается следующим образом:

$$\exists\, \varepsilon_* > 0 \;\text{ такое, что }\; \forall\, \delta > 0 \;\Rightarrow$$
$$\exists\, x^0\colon\; \|x^0 - \varphi(t_0)\| < \delta \;\text{ и }\; \exists\, t_* > t_0, \;\text{ что }\; \|x(t_*, x^0) - \varphi(t_*)\| = \varepsilon_*.$$

В заключение еще раз отметим, что устойчивость — это локальное свойство, относящееся к отдельным решениям системы.

3^0. Алгоритм исследования устойчивости движения. На практике для начала исследование невозмущенного движения $x = \varphi(t)$ стандартным образом заменяют на исследование тривиального решения. Для этого в системе (7.1) делают сдвигающую замену переменных $x = y + \varphi(t)$, получая систему

$$\dot{y} = g(t, y), \tag{7.2}$$

в которой $g(t, y) = f(t, y + \varphi(t)) - f(t, \varphi(t))$ и которая имеет решение $y \equiv 0$ при $t \in [t_0, +\infty)$. Тем самым, вектор-функция g определена по y в некоторой окрестности начала координат фазового пространства $y_1, \ldots, y_n$, а по t — на $[t_0, +\infty)$, там же непрерывна и удовлетворяет локальному условию Липшица по y и $g(t, 0) \equiv 0$.

Очевидно, что при указанной сдвигающей замене свойства устойчивости по Ляпунову, асимптотической устойчивости и неустойчивости для невозмущенного движения $x = \varphi(t)$ системы (7.1) равносильны тем же свойствам тривиального решения системы (7.2). А все определения для тривиального решения $y \equiv 0$ выглядят значительно проще.

Например, движение $y \equiv 0$ устойчиво по Ляпунову, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ такое, что } \forall y^0 : \; \|y^0\| < \delta \;\Rightarrow$$
$$\forall t \in [t_0, +\infty) \text{ верно неравенство } \|y(t, y^0)\| < \varepsilon.$$

Следующим шагом является выделение в системе (7.2) линейной части. Для этого достаточно слегка усилить ограничение на функцию f исходной системы (7.1), потребовав вместо условия Липшица ее непрерывную дифференцируемость по x в G. Тогда этим же свойством будет обладать и функция g в некоторой области $G_0 = (c, +\infty) \times D_0$, где $D_0 = \{y \mid \|y\| < c_0\}$ и c_0 достаточно мало. А значит, в g можно выделить линейный член ее разложения в ряд Тейлора и записать систему (7.2) в виде

$$\dot{y} = P(t)y + Y(t, y), \tag{7.3}$$

где матрица $P(t) = \left. \dfrac{\partial g(t, y)}{\partial y} \right|_{y=0}$ и для любого $t \in [t_0, +\infty)$ отношение $\|Y(t, y)\| / \|y\| \to 0$ при $\|y\| \to 0$, т. е. стремление к нулю отношения — поточечное. При этом, очевидно, $Y(t, 0) \equiv 0$.

Систему (7.3) обычно называют возмущенной, а линейную систему $\dot{y} = P(t)y$ — невозмущенной. Возмущение $Y(t, y)$ системы (7.3) при малых y сколь угодно мало по сравнению с линейной частью невозмущенной системы.
Исследовать устойчивость движений невозмущенной системы значительно проще и этому будет посвящен следующий параграф.

А дальше возникает естественный вопрос: когда из устойчивости или неустойчивости тривиального решения линейной системы вытекает устойчивость или не устойчивость тривиального решения возмущенной системы (7.3)? Этот вопрос был поставлен и решен в конце девятнадцатого века А. М. Ляпуновым. Его теорема об устойчивости по первому приближению будет доказана в § 3.
В § 4 будут изложены основы так называемого Второго метода Ляпунова, разработанного им для случаев, когда не работают теоремы об устойчивости или не устойчивости по первому приближению.

§ 2. УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

1^0. Инвариантность свойства устойчивости для линейных систем.

Пусть в линейной однородной системе

$$\dot{y} = P(t)y \tag{7.4}$$

матрица $P(t)$ определена и непрерывна на интервале $(c, +\infty)$, тогда по теореме о продолжимости решений почти линейных систем все решения системы (7.4) продолжимы на весь интервал $(c, +\infty)$.

Рассмотрим произвольное невозмущенное решение $x = \varphi(t)$ системы (7.4) и осуществим его сдвиг в тривиальное решение посредством замены $y = u + \varphi(t)$.

Имеем: $\dot{y} = \dot{u} + \dot{\varphi}$, но $\dot{\varphi}(t) \equiv P(t)\varphi(t)$, поэтому $P(t)(u + \varphi(t)) = \dot{u} + P(t)\varphi(t)$ или $\dot{u} = P(t)u$.

В результате получена та же система (7.4), а значит, любое ее решение при помощи сдвига сводится к тривиальному решению $y \equiv 0$.

Но непосредственно из определения устойчивости вытекает, что сдвиг не может повлиять на устойчивость движения. Следовательно вопрос об устойчивости произвольного невозмущенного движения линейной однородной системы равносилен вопросу об устойчивости ее тривиального решения.

Иными словами все решения системы (7.4) устойчивы, асимптотически устойчивы или неустойчивы одновременно, и сама линейная система устойчива, асимптотически устойчива или неустойчива в зависимости от обладания одним из этих свойств любого и, в частности, тривиального решения.

2^0. Связь устойчивости с ограниченностью фундаментальной матрицы.

Теорема (об устойчивости линейных систем). *Система (7.4) устойчива по Ляпунову тогда и только тогда, когда у нее существует фундаментальная матрица, ограниченная на промежутке* $[t_0, +\infty)$ $\quad (t_0 > c)$.

Доказательство. Пусть тривиальное решение $y \equiv 0$, рассматриваемое на промежутке $[t_0, +\infty)$, устойчиво по Ляпунову.

Выберем нормированную фундаментальную матрицу $\Phi_0(t)$, т. е. $\Phi_0(t_0) = E$. Тогда любое возмущенное решение системы (7.4) с начальными данными t_0, y^0 задается формулой

$y(t, y^0) = \Phi_0(t) y^0$.

По определению устойчивости для $\forall\, \varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для $\forall\, y^0 : \ \|y^0\| < \delta$ будет для $\forall\, t \in [t_0, +\infty)$ выполняться неравенство $\|\Phi_0(t) y^0\| < \varepsilon$.

Пусть $\Phi_0 = (\varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(n)})$. Выберем сначала $y^0 = (\delta/2, 0, \ldots, 0)$, тогда $\|\varphi_1 \delta/2\| < \varepsilon$ или $\|\varphi_1\| < 2\varepsilon/\delta$ для $\forall\, t \geq t_0$.
Аналогичные неравенства можно получить для $\varphi^{(2)}, \ldots, \varphi^{(n)}$.
Поэтому $\|\Phi_0\| = \max_{i,j=\overline{1,n}} |\varphi_i^{(j)}| < 2\varepsilon/\delta$, т. е. ограничена.

Пусть теперь у системы (7.4) существует фундаментальная матрица $\Phi(t)$, ограниченная на промежутке $[t_0, +\infty)$.
По теореме о связи между фундаментальными матрицами существует такая постоянная неособая матрица C, что $\Phi_0(t) = \Phi(t)C$. Тогда $\|\Phi_0(t)\| \leq n\|\Phi(t)\| \cdot \|C\|$, а значит, $\|\Phi_0(t)\| \leq K$ для $\forall t \geq t_0$.
Теперь для $\forall \varepsilon > 0$ выберем $\delta = \varepsilon/(nK)$ и для $\forall\, y^0 \colon \|y^0\| < \delta$ оценим решение $y(t, y^0) = \Phi_0(t) y^0$. Для $\forall t \in [t_0, +\infty)$ имеем: $\|y(t, y^0)\| \leq n\|\Phi_0(t)\| \cdot \|y^0\| < nK\delta = \varepsilon$. Следовательно тривиальное решение $y(t) \equiv 0$ системы (7.4) устойчиво по Ляпунову. $\Box$

3^0. Устойчивость линейных систем
с постоянными и периодическими коэффициентами.
Рассмотрим отдельно линейные однородные системы с постоянными и ω-периодическими коэффициентами, структуры фундаментальных матриц которых известны.
Если в системе (7.4) $P(t)$ является постоянной матрицей A, то ее фундаментальная матрица $\Phi(t) = e^{At}$ (см. (5.11)), а если $P(t)$ — ω-периодическая матрица, то ФМ $\Phi(t) = Q(t)e^{Rt}$ и матрица $Q(t)$ — также ω-периодическая (см.(5.21)).
Когда эти $\Phi(t)$ ограничены, если известно, что любой их элемент $\varphi_{ij}(t) = s_{ij}(t)e^{\lambda_k t}$, где $s_{ij}(t)$ — это многочлен с постоянными или периодическими коэффициентами степени, не превосходящей $n-1$, а λ_k — одно из собственных чисел матриц A или R?
Множество векторов собственных чисел $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ этих матриц удобно разбить на три непересекающихся множества:
$M_1 = \{\lambda \,|\, \operatorname{Re}\lambda_k < 0 \ \ (k = \overline{1,n})\}$;
$M_2 = \{\lambda \,|\, \exists\, k_*\colon \ \operatorname{Re}\lambda_{k_*} > 0\}$;
$M_3 = \{\lambda \,|\, \operatorname{Re}\lambda_k \le 0 \ \ (k = \overline{1,n}),\ \exists\, k_0\colon \ \operatorname{Re}\lambda_{k_0} = 0\}$.

Исследуем устойчивость ЛОС с постоянными или периодическими коэффициентами, относящихся к каждому из этих множеств.
1) Если $\lambda \in M_1$, то найдется число λ_0 такое, что $\operatorname{Re}\lambda_k < \lambda_0 < 0$ $(k = \underline{1, n})$. Поэтому по теореме об оценке нормы ФМ для любой фундаментальной матрицы $\Phi(t)$ и для $\forall\, t_0 \in \mathbb{R}^1$ найдется $K > 0$ такое, что $\|\Phi(t)\| \le Ke^{\lambda_0 t}$ для $\forall\, t \in [t_0, +\infty)$.

Теперь непосредственно из теоремы об устойчивости линейных систем вытекает устойчивость по Ляпунову систем (7.4) с постоянной и периодической матрицей $P(t)$, а также асимптотическая устойчивость таких систем, поскольку $\|\Phi(t)\| \to 0$ при $t \to +\infty$, а любое возмущенное движение $y(t, y^0) = \Phi(t)(\Phi^{-1}(t_0)y^0)$.

2) Если $\lambda \in M_2$, то из структуры ФМ вытекает, что одним из ее столбцов является решение $y(t) = s(t)e^{\lambda_* t}$, причем $(\operatorname{Re}\lambda_{k_*} > 0)$. Поэтому всегда найдется такая последовательность моментов времени $t_k \to +\infty$, что $\|y(t_k)\| \to +\infty$, а значит, ФМ не ограничена и линейная система неустойчива.

3) Если $\lambda \in M_3$ и $\operatorname{Re}\lambda_{k_0} = 0$, то система имеет решение $y(t) = s(t)e^{\lambda_{k_0} t} = s(t)(\cos(|\lambda_{k_0}|t) + \mathrm{i}\,\sin(|\lambda_{k_0}|t))$. Поэтому, если векторный полином $s(t)$ (возможно с периодическим по t коэффициентами) имеет ненулевую степень, то $y(t)$ не ограничено, и линейная система неустойчива. А если в фундаментальной матрице нулевую степень имеют все полиномы $s(t)$, которые стоят множителями при $e^{\lambda_k t}$ с $\operatorname{Re}\lambda_k = 0$, то ФМ, очевидно, ограничена, и линейная система является устойчивой по Ляпунову, но не асимптотически устойчивой.

§ 3. УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ

Вернемся к возмущенной системе (7.3) $\dot{y} = P(t)y + Y(t, y)$ и зададимся вопросом: когда возмущение $Y(t, y)$ не сможет повлиять на устойчивость или неустойчивость тривиального решения невозмущенной линейной системы $\dot{y} = P(t)y$?
Такая задача была поставлена и решена А. М. Ляпуновым в конце XIX века. Для этого ему пришлось наложить три дополнительных ограничения на правую часть системы (7.3):
1) матрица $P(t)$ — постоянна;
2) ее собственные числа принадлежат множествам M_1 или M_2;
3) отношение $\|Y(t, y)\| / \|y\|$ стремится к нулю при $y \to 0$, но не поточечно, а равномерно относительно t из промежутка $[t_0, +\infty)$.

Теорема (Ляпунова, об устойчивости по первому приближению). *Рассмотрим систему*

$$\dot{y} = Ay + Y(t, y), \tag{7.5}$$

в которой $Y \in C(G_0)$, $Y \in \mathrm{Lip}_y^{loc}(G_0)$, *где* $G_0 = (c, +\infty) \times D_0$ *и* $D_0 = \{y \mid \|y\| < c_0\}$, $\|Y(t, y)\|/\|y\| \overset{[t_0,\infty)}{\rightrightarrows} 0$ *при* $\|y\| \to 0$. *Тогда тривиальное решение* $y(t) \equiv 0$ *системы (7.5) асимптотически устойчиво, если* $\mathrm{Re}\,\lambda_1, \ldots, \mathrm{Re}\,\lambda_n < 0$, *и неустойчиво, если* $\exists\, k_*$ *такое, что* $\mathrm{Re}\,\lambda_{k_*} > 0$; *здесь* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *— собственные числа матрицы* A.

Доказательство. Пусть $\mathrm{Re}\,\lambda_1 < 0, \ldots, \mathrm{Re}\,\lambda_n < 0$. Рассмотрим произвольное решение $y = y(t)$ системы (7.5) с начальными данными t_0, y^0 из области G_0 $(t_0 > c,\ y(t_0) = y^0)$, определенное на максимальном интервале существования $(\alpha, \beta) \ni t_0$.

Надо доказать, что если $\|y^0\|$ достаточно мала, то решение $y(t)$ продолжимо по времени до $+\infty$, сколь угодно близко к нулю при всех $t \geq t_0$ и стремится к нулю при $t \to +\infty$.

Но как оценивать сверху по норме решение, которое неизвестно? Ведь в явном виде мы умеем интегрировать только линейные системы с постоянными коэффициентами.
Именно поэтому Ляпунов предложил превратить систему (7.5) в линейную неоднородную систему путем подстановки решения $y(t)$ только в ее возмущение.
Итак, очевидно, что $y(t)$ удовлетворяет ЛНС $\dot{y} = Ay + Y(t, y(t))$.
Правда, теперь в неоднородности стоит неизвестная функция $y(t)$, но зато в явном виде можно выписать решение этой системы.
По формуле Коши (5.7) для $\forall\, t \in [t_0, \beta)$

$$y(t) = e^{A(t-t_0)}y^0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}Y(s, y(s))\, ds.$$

Тогда при тех же t

$$\|y(t)\| \leq n\|e^{A(t-t_0)}\|\,\|y^0\| + \int_{t_0}^{t} n\|e^{A(t-s)}\|\,\|Y(s, y(s))\|\, ds. \qquad (7.6)$$

Оценим сверху $\|e^{A(t-t_0)}\|$ и $\|Y(t,y(t))\|$, входящие в (7.6). Поскольку $\operatorname{Re}\lambda_k < 0$ для $\forall k = \overline{1,n}$, найдется такое число $\lambda > 0$, что $\max\limits_{j=\overline{1,n}} \operatorname{Re}\lambda_j < -\lambda$. Тогда по лемме об оценке фундаментальной матрицы ЛОС с постоянными коэффициентами найдется $K \geq 1$ такое, что $\|e^{A(t-t_0)}\| \leq Ke^{-\lambda(t-t_0)}$ для $\forall\, t \in [t_0, +\infty)$.

Из предположения, что $\|Y(t,y)\|/\|y\| \overset{[t_0,\infty)}{\rightrightarrows} 0$ при $\|y\| \to 0$, и определения равномерной сходимости следует, что $\forall\, \varepsilon_0 > 0$ $\exists\, \delta_0 > 0$ такое, что
$\forall\, t \geq t_0:\ \|y(t)\| \leq \delta_0 \ \Rightarrow\ \|Y(t,y(t))\| \leq \varepsilon_0 (nK)^{-1}\|y(t)\|$.

Зафиксируем произвольным образом число $\varepsilon_0 < \lambda$. По нему найдется δ_0 с описанными выше свойствами.

Выберем любое возмущение y^0 такое, что $\|y^0\| < \delta_0/(nK) \leq \delta_0$. Тогда при t близких к t_0 в силу непрерывности решение $y(t)$ с начальными данными t_0, y^0 по норме будет меньше δ_0.

Существуют две возможности:
1) $\exists\, T > t_0: \quad \|y(t)\| < \delta_0$ при всех $t \in [t_0, T)$, а $\|y(T)\| = \delta_0$;
2) $\|y(t)\| < \delta_0$ для $\forall t \in [t_0, +\infty)$, т. е. $T = \beta = +\infty$.

Во всяком случае для $\forall t \in [t_0, T)$ из неравенства (7.6) имеем:

$$\|y(t)\| \le nKe^{-\lambda(t-t_0)}\|y^0\| + \int_{t_0}^{t} nKe^{-\lambda(t-s)}\frac{\varepsilon_0}{nK}\|y(s)\|\,ds.$$

Домножим полученное неравенство на $e^{\lambda(t-t_0)}$, тогда

$$\|y(t)\|e^{\lambda(t-t_0)} \le nK\|y^0\| + \varepsilon_0\int_{t_0}^{t} e^{\lambda(s-t_0)}\|y(s)\|\,ds.$$

По лемме Гронуолла $\|y(t)\|e^{\lambda(t-t_0)} \le nK\|y^0\|e^{\varepsilon_0(t-t_0)}$ или

$$\|y(t)\| \le nK\|y^0\|e^{-(\lambda-\varepsilon_0)(t-t_0)}. \tag{7.7}$$

Допустим, что реализуется первая из возможностей, тогда согласно выбору ε_0, δ_0 и неравенству (7.7) приходим к противоречию: $\delta_0 = \|y(T)\| \le \delta_0 e^{-(\lambda-\varepsilon_0)(T-t_0)} < \delta_0$!!!.
Следовательно неравенство (7.7) выполняется для $\forall\, t \ge t_0$, а из него вытекает как устойчивость по Ляпунову, так и асимптотическая устойчивость тривиального решения $y \equiv 0$.
Действительно, для $\forall\, \varepsilon > 0$ выберем $\delta = \min\{\delta_0, \varepsilon\}/(nK)$. Тогда для $\forall\, y^0$ с $\|y^0\| < \delta$ имеем: $\|y^0\| < \delta_0/(nK)$, а значит, для всех t верно неравенство (7.7) и, в частности, $\|y(t)\| \le nK\|y^0\| < \varepsilon$ для $\forall\, t \in [t_0, +\infty)$ в силу выбора ε_0 и δ.
Кроме того, при том же δ из неравенства (7.7) вытекает, что $\|y(t)\| \to 0$ при $t \to +\infty$.

Неустойчивость тривиального решения при наличии хотя бы одного собственного числа с положительной вещественной частью доказывается построением функции Ляпунова с нужными свойствами, на основании разработанного Ляпуновым Второго метода. $\square$