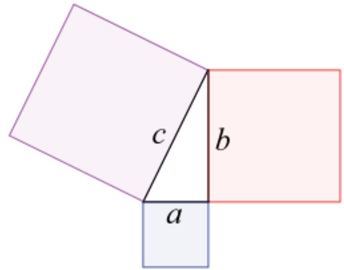
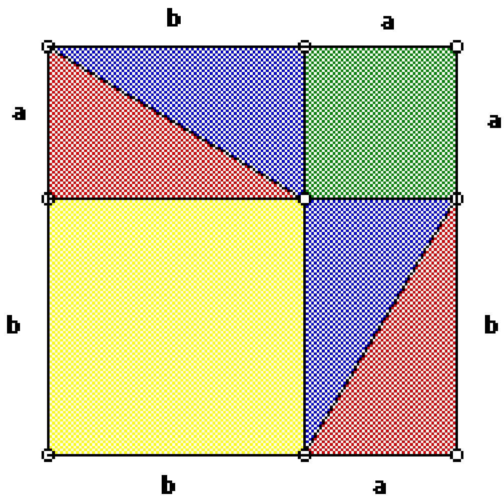
Satz des Pythagoras

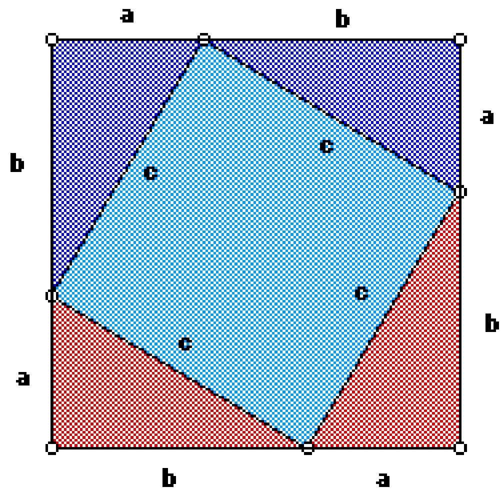
Der *Satz des Pythagoras* besagt: Errichtet man auf den drei Kanten eines rechtwinkligen Dreiecks jeweils ein Quadrat, so sind die beiden kleineren Quadrate zusammengenommen genauso groß wie das größte Quadrat (siehe Skizze rechts). Als Formel:

$$a \cdot a + b \cdot b = c \cdot c.$$



Wieso ist das so? Das sollen die beiden anderen Skizzen beantworten. Kannst du diesen Beweis erklären?



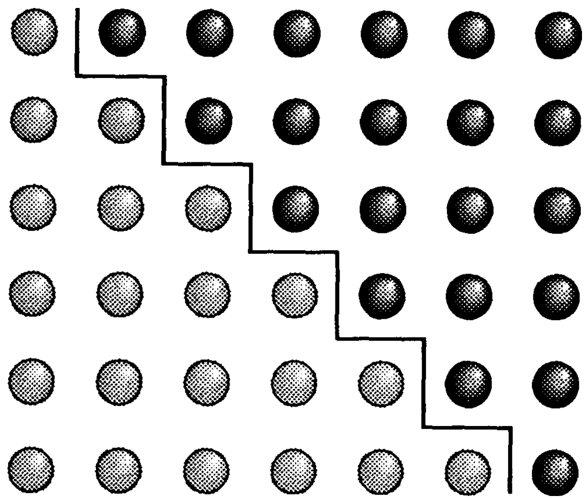


Summe der natürlichen Zahlen I

Was ist $1+2+3+4$? Was ist $1+2+3+4+5+6+7+8$? Das zu berechnen, wird immer mühsamer. Zum Glück gibt es eine einfache Formel, die das Ergebnis sofort liefert:

$$\begin{aligned} 1+2+3+4+5+6 \quad\quad\quad\quad &= 6 \cdot 7 : 2 \\ 1+2+3+4+5+6+7+8 &= 8 \cdot 9 : 2 \\ 1+2+3+4+\cdots+97+98+99+100 &= 100 \cdot 101 : 2 \end{aligned}$$

Die Formel funktioniert auch mit jeder anderen Obergrenze als 100. *Wieso stimmt die Formel?* Das soll die Skizze beantworten. Bei ihr ist die Obergrenze 6. Kannst du den Beweis erklären?

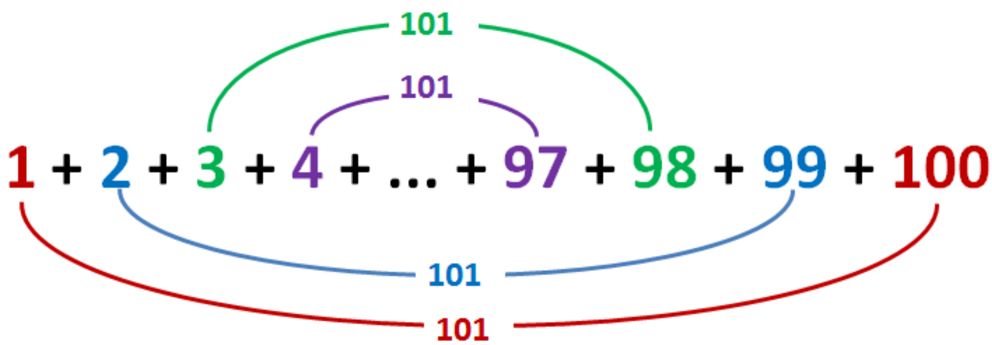


Summe der natürlichen Zahlen II

Was ist $1+2+3+4$? Was ist $1+2+3+4+5+6+7+8$? Das zu berechnen, wird immer mühsamer. Zum Glück gibt es eine einfache Formel, die das Ergebnis sofort liefert:

$$1+2+3+4+5+6+7+8 = 8 \cdot 9 : 2$$
$$1+2+3+4+\cdots+97+98+99+100 = 100 \cdot 101 : 2$$

Die Formel funktioniert auch mit jeder anderen Obergrenze als 100. *Wieso stimmt die Formel?* Das soll die Skizze beantworten. Bei ihr ist die Obergrenze 100. Kannst du den Beweis erklären?

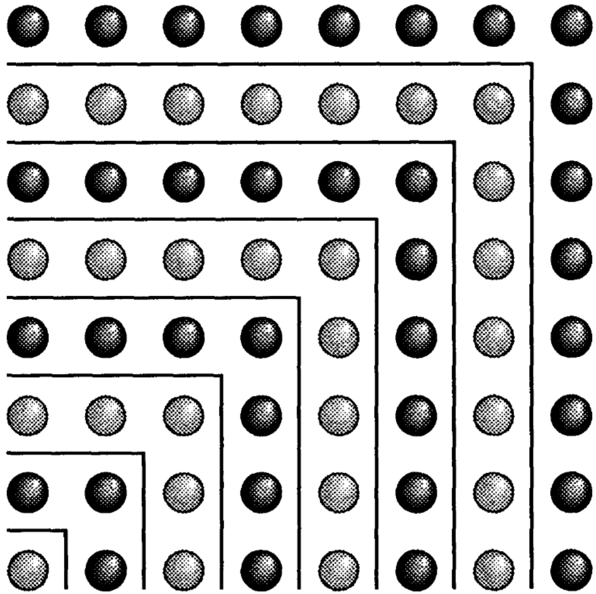


Summe der ungeraden Zahlen

Was ist $1+3+5+7+9$? Was ist $1+3+5+7+9+11+13+15$? Das zu berechnen, wird immer mühsamer. Zum Glück gibt es eine einfache Formel, die das Ergebnis sofort liefert:

$$\begin{aligned}
1+3+5+7+9+11 &= 6\cdot 6 = 36\\
1+3+5+7+9+11+13 &= 7\cdot 7 = 49\\
1+3+5+7+9+11+13+15 &= 8\cdot 8 = 64
\end{aligned}$$

Wieso stimmt die Formel? Das soll die Skizze beantworten. Kannst du diesen Beweis erklären?



Summe der Kubikzahlen I

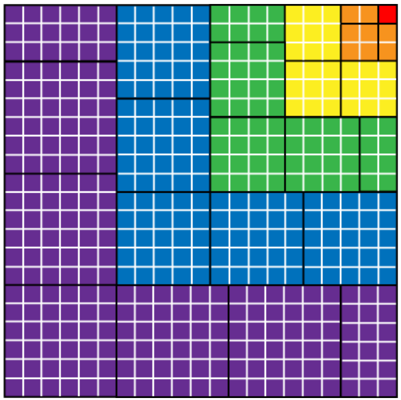
Für das mehrfache Multiplizieren gibt es eine Kurzschreibweise mit *Potenzen*:

$$4^2 = 4 \cdot 4 = 16$$
$$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$$
$$2^6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$$

Was passiert, wenn man die *Kubikzahlen* aufsummiert? Dafür gibt es eine interessante Formel:

$$\begin{aligned}
1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 &= (1 + 2 + 3 + 4 + 5)^2 \\
1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 &= (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)^2 \\
1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 &= (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7)^2 \\
1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 &= (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8)^2
\end{aligned}$$

Wieso gilt diese Formel? Das soll die Skizze beweisen. Kannst du den Beweis erklären?



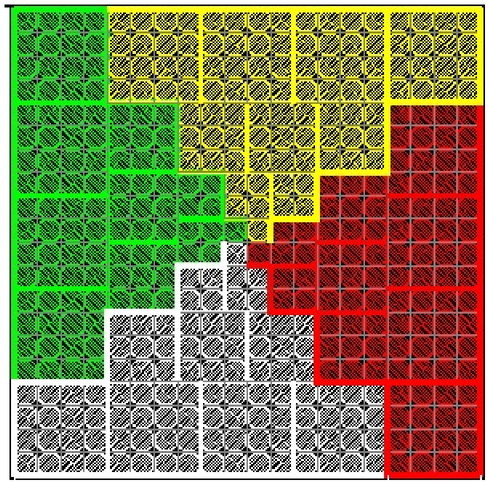
Summe der Kubikzahlen II

Für das mehrfache Multiplizieren gibt es eine Kurzschreibweise mit *Potenzen*:

$$4^2 = 4 \cdot 4 = 16$$
$$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$$
$$2^6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$$

Was passiert, wenn man die *Kubikzahlen* aufsummiert? Dafür gibt es eine interessante Formel:

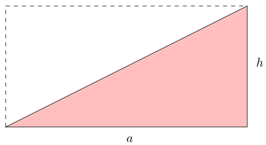
$$\begin{aligned}
1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 &= (4 \cdot 5) \cdot (4 \cdot 5) : 4 \\
1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 &= (5 \cdot 6) \cdot (5 \cdot 6) : 4 \\
1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 &= (6 \cdot 7) \cdot (6 \cdot 7) : 4 \\
1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 &= (7 \cdot 8) \cdot (7 \cdot 8) : 4 \\
1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 &= (8 \cdot 9) \cdot (8 \cdot 9) : 4
\end{aligned}$$



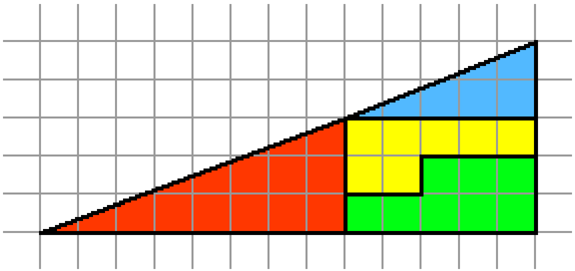
Wieso gilt diese Formel? Das soll die Skizze beweisen. Kannst du den Beweis erklären?

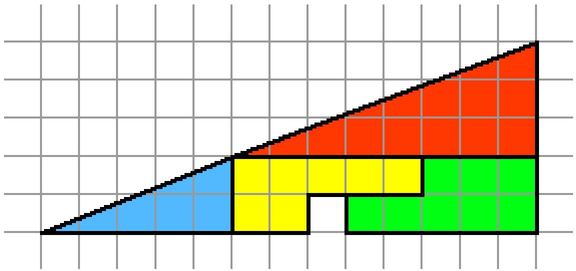
Ein Kästchen verschwindet

Der Flächeninhalt eines Rechtecks mit den Seitenlängen a und b ist $a \cdot b$. Der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks mit Grundseite a und Höhe h ist $a \cdot h : 2$ (siehe Skizze rechts). Diese beiden Formeln helfen dir vielleicht für die Aufgabe (oder auch nicht, es gibt mehrere Lösungswege).



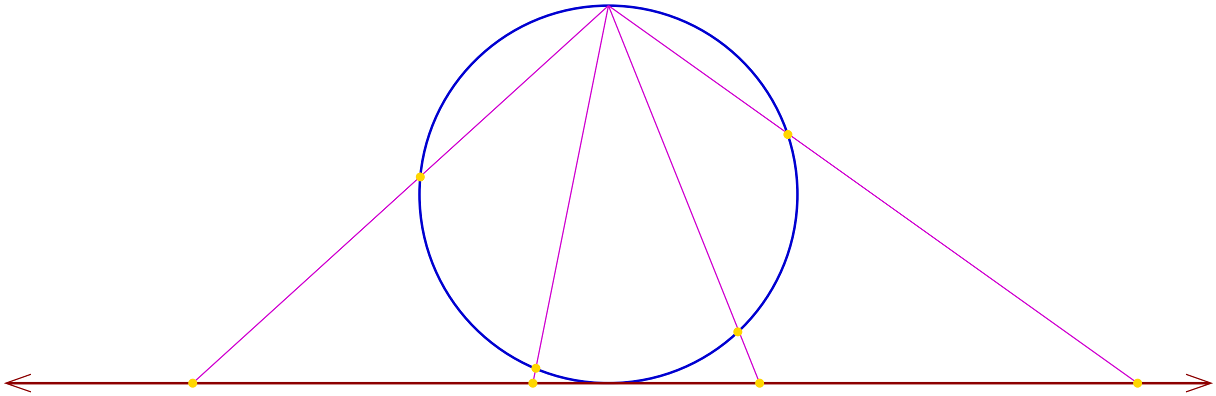
In den unteren beiden Skizzen ist irgendwo der Wurm drin. Denn die beiden Figuren scheinen *denselben Flächeninhalt* zu haben, setzen sie doch aus gleichen Bestandteilen zusammen, aber trotzdem scheint doch die linke offensichtlich aus einem Kästchen mehr als die rechte zu bestehen! Kannst du erklären, was schief läuft?





Anzahl der Punkte auf Kreis und Gerade

Ein Kreis hat sicher einen viel kürzeren Umfang als eine unendliche Gerade. Trotzdem besteht ein Kreis (ohne seinen obersten Punkt) aus *gleich vielen Punkten* wie eine Gerade. Das soll die Skizze demonstrieren. Kannst du den Beweis erklären?



Summe der Dreier-Potenzen

Für wiederholte Produkte gibt es eine Kurzschreibweise mit *Potenzen*:

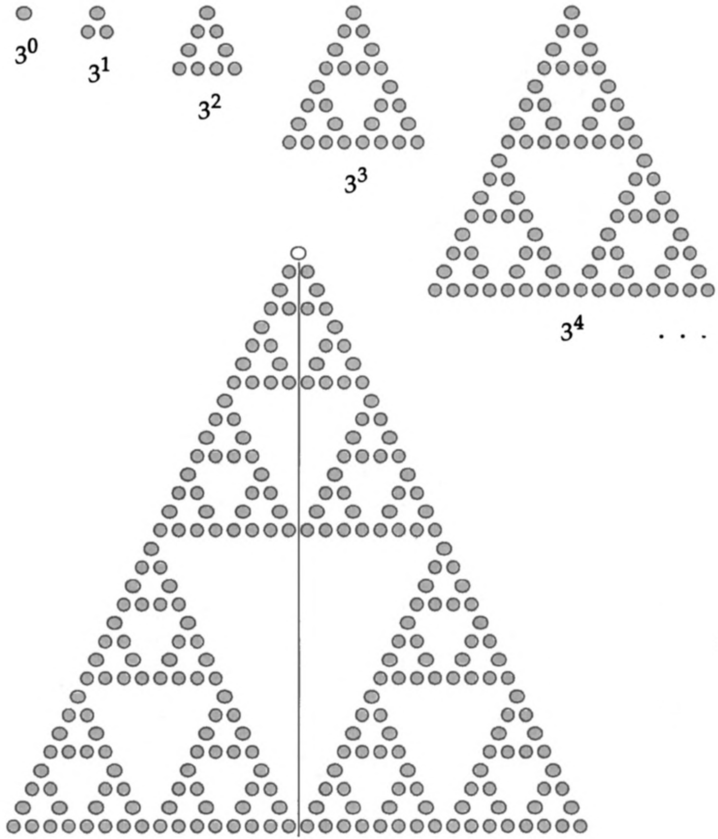
$$5^0 = 1$$
$$5^1 = 5$$
$$5^2 = 5 \cdot 5 = 25$$
$$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$$
$$5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$$

$$3^7 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

Was passiert, wenn man die *Dreier-Potenzen* aufsummiert? Dafür gibt es eine kurze Formel:

$$\begin{aligned}
3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 &= (3^5 - 1) : 2 \\
3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 &= (3^6 - 1) : 2 \\
3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6 &= (3^7 - 1) : 2 \\
3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7 &= (3^8 - 1) : 2
\end{aligned}$$

Wieso gilt diese Formel? Das soll die Skizze beweisen. Kannst du den Beweis erklären?

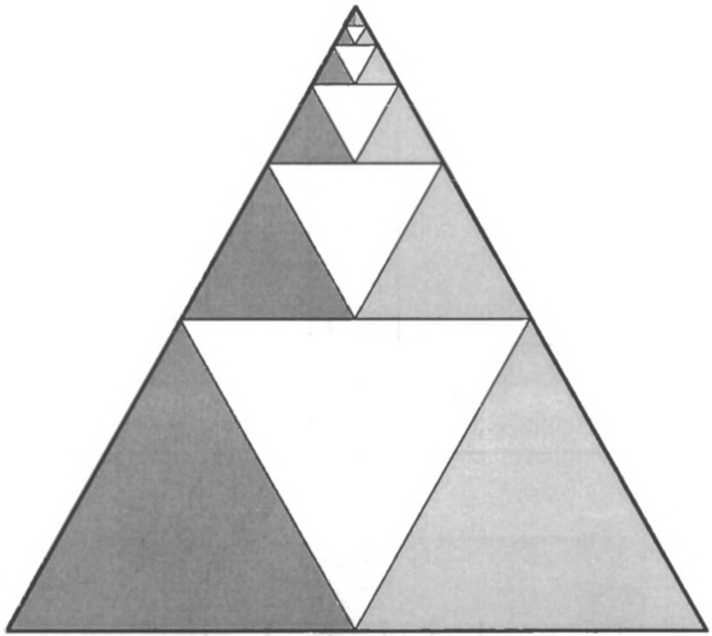


Unendliche Summe der Viertel-Potenzen I

Diesen Beweis kann man leider nur verstehen, wenn man bereits Brüche wie $\frac{3}{7}$ kennt. Den Wert der folgenden unendlichen Reihe kann man explizit angeben:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \frac{1}{1024} + \cdots = \frac{1}{3}$$

Die Skizze soll das beweisen. Kannst du den Beweis erklären?

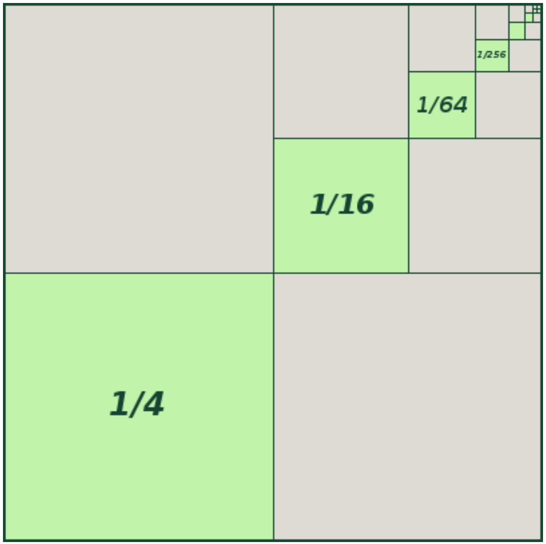


Unendliche Summe der Viertel-Potenzen II

Diesen Beweis kann man leider nur verstehen, wenn man bereits Brüche wie $\frac{3}{7}$ kennt. Den Wert der folgenden unendlichen Reihe kann man explizit angeben:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \frac{1}{1024} + \cdots = \frac{1}{3}$$

Die Skizze soll das beweisen. Kannst du den Beweis erklären?

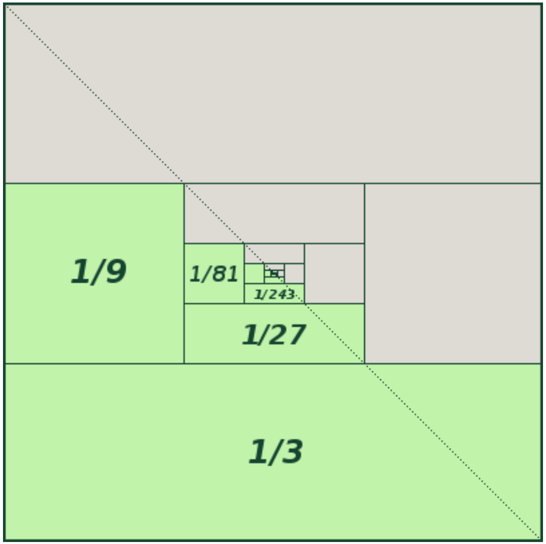


Unendliche Summe der Drittel-Potenzen

Diesen Beweis kann man leider nur verstehen, wenn man bereits Brüche wie $\frac{3}{7}$ kennt. Den Wert der folgenden unendlichen Reihe kann man explizit angeben:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} + \cdots = \frac{1}{2}$$

Die Skizze soll das beweisen. Kannst du den Beweis erklären?



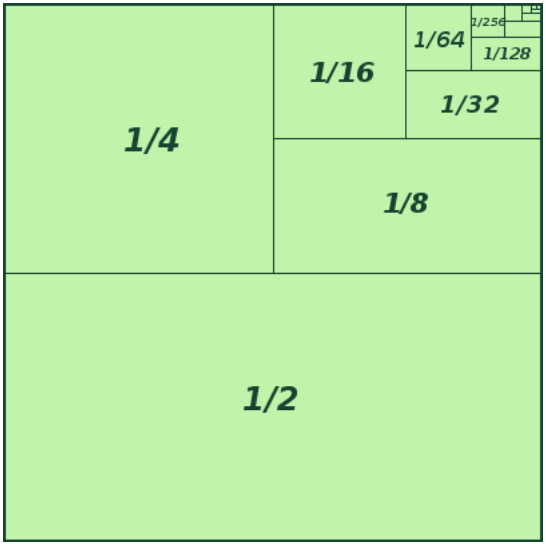
Unendliche Summe der Potenzen von $\frac{1}{2}$

Diesen Beweis kann man leider nur verstehen, wenn man bereits Brüche wie $\frac{3}{7}$ kennt. Den Wert der folgenden unendlichen Reihe kann man explizit angeben:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \cdots = 1$$

Die Skizze soll das beweisen. Kannst du den Beweis erklären?

Übrigens: Im Dualsystem hat die Reihe eine interessante Interpretation. Sie ist dann analog zur Zahl $0{,}999\ldots$ im Zehnersystem.



Summe der quadrierten Fibonacci-Zahlen

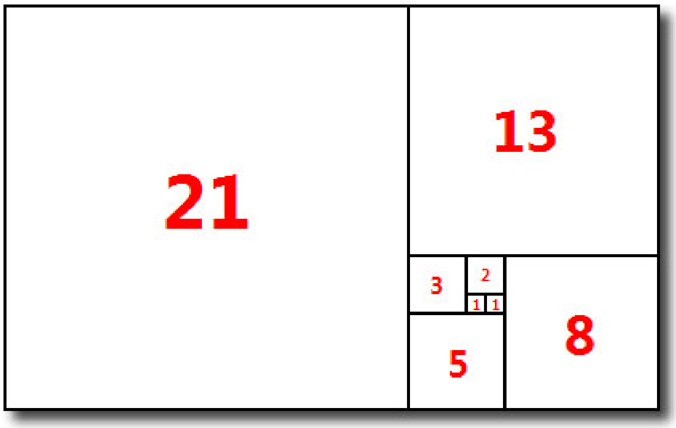
Bei den *Fibonacci-Zahlen* ergibt die Summe zweier benachbarter Zahlen die nächste:

$$1, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 5, \quad 8, \quad 13, \quad 21, \quad 34, \quad 55, \quad 89, \quad \ldots$$

Die *Quadrate* der Fibonacci-Zahlen erfüllen eine interessante Rechenregel:

$$\begin{aligned}
1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 3 + 5\cdot 5 &= 5\cdot 8\\
1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 3 + 5\cdot 5 + 8\cdot 8 &= 8\cdot 13\\
1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 3 + 5\cdot 5 + 8\cdot 8 + 13\cdot 13 &= 13\cdot 21
\end{aligned}$$

Erkennst du das Muster? Wieso die Formeln stimmen, soll die Skizze beweisen. Kannst du den Beweis erklären? *Übrigens:* In die Skizze kann man die *goldene Spirale* einzeichnen. Diese kommt in der Natur an vielen Stellen vor – hole dir bei mir Beispielbilder ab.



Mersenne-Primzahlen und perfekte Zahlen

Eine *perfekte Zahl* ist eine Zahl, die gleich der Summe ihrer echten Teiler ist. Die kleinsten perfekten Zahlen sind 6, 28 und 496:

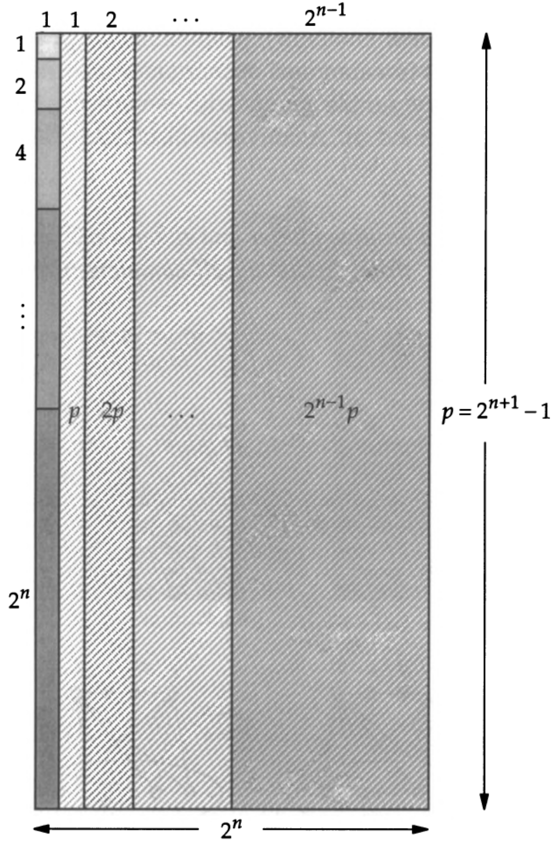
$$\begin{aligned} 6 &= 1+2+3 \\ 28 &= 1+2+4+7+14 \\ 496 &= 1+2+4+8+16+31+62+124+248 \end{aligned}$$

Bisher hat man nur gerade perfekte Zahlen gefunden. Man weiß noch nicht, ob es auch ungerade perfekte Zahlen gibt – das ist ein offenes Forschungsproblem.

Eine *Mersenne-Primzahl* ist eine Primzahl der Form $p = 2^m - 1$. Die ersten Mersenne-Primzahlen sind:

$$\begin{aligned} 2^2 - 1 &= 3 \\ 2^3 - 1 &= 7 \\ 2^5 - 1 &= 31 \\ 2^7 - 1 &= 127 \\ 2^{13} - 1 &= 8191 \end{aligned}$$

In der Zahlentheorie gibt es folgendes Theorem: Ist $p = 2^{n+1} - 1$ eine Mersenne-Primzahl, so ist die Zahl $N = 2^n \cdot p$ eine perfekte Zahl. Die Skizze soll das beweisen. Kannst du den Beweis erklären?



$1 + 2 + \cdots + 2^n + p + 2p + \cdots + 2^{n-1}p = 2^n p = N$