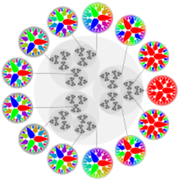
# Mathematische Alternativuniversen

Ingo Blechschmidt

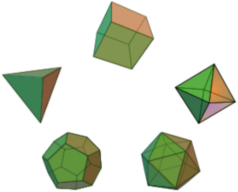
Forschungskolloquium der Augsburger Stipendiatengruppe

13. Januar 2017

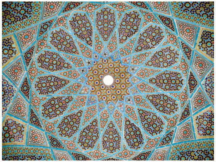
# Über Wahrheit



„Es gibt unendlich viele Primzahlen."



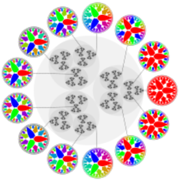
„Es gibt nur fünf platonische Körper."



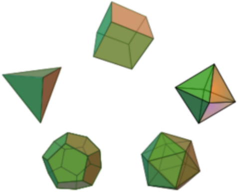
„Der goldene Schnitt ist die irrationalste Zahl."

- Mathematische Aussagen werden als völlig objektiv und unabhängig von menschlichen Stimmungen angesehen.

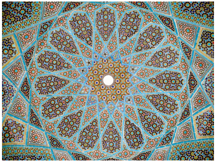
# Über Wahrheit



„Es gibt unendlich viele Primzahlen."



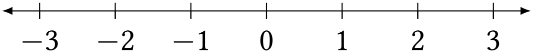
„Es gibt nur fünf platonische Körper."



„Der goldene Schnitt ist die irrationalste Zahl."

- Mathematische Aussagen werden als völlig objektiv und unabhängig von menschlichen Stimmungen angesehen.
- Tatsächlich hängt ihr Wahrheitsgehalt aber von der Wahl des **mathematischen Universums** ab:
  1. Die üblichen Axiome legen das Spiel nicht eindeutig fest.
  2. Wir können die Axiome auch modifizieren.

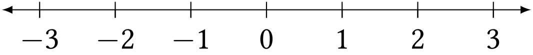
# Größenvergleiche im Unendlichen




Welche Zahlenmenge ist größer?

- die Menge der natürlichen Zahlen: $0,\ 1,\ 2,\ \ldots$
- die Menge der ganzen Zahlen: $\ldots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

# Größenvergleiche im Unendlichen




Welche Zahlenmenge ist größer?

- die Menge der natürlichen Zahlen: $0, 1, 2, \ldots$
- die Menge der ganzen Zahlen: $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$

# Größenvergleiche im Unendlichen

Sie sind **gleich groß**.

| alle nat. Zahlen | | alle ganzen Zahlen |
|---|---|---|
| $0$ | $\longleftrightarrow$ | $0$ |
| $1$ | $\longleftrightarrow$ | $1$ |
| $2$ | $\longleftrightarrow$ | $-1$ |
| $3$ | $\longleftrightarrow$ | $2$ |
| $4$ | $\longleftrightarrow$ | $-2$ |
| $5$ | $\longleftrightarrow$ | $3$ |
| $6$ | $\longleftrightarrow$ | $-3$ |
| $\vdots$ | | $\vdots$ |

# Wie viele reelle Zahlen gibt es?

Welche Zahlenmenge ist größer?

- die Menge der natürlichen Zahlen: $0,\ 1,\ 2,\ \ldots$
- die Menge der reellen Zahlen: $0{,}25,\ \frac{1}{3},\ \pi,\ \sqrt{2},\ \ldots$

# Wie viele reelle Zahlen gibt es?

Welche Zahlenmenge ist größer?

- die Menge der natürlichen Zahlen: $0,\ 1,\ 2,\ \ldots$
- die Menge der reellen Zahlen: $0{,}25,\ \frac{1}{3},\ \pi,\ \sqrt{2},\ \ldots$

**Es gibt mehr reelle Zahlen als natürliche.**

# Wie viele reelle Zahlen gibt es?

Welche Zahlenmenge ist größer?

- die Menge der natürlichen Zahlen: $0,\ 1,\ 2,\ \ldots$
- die Menge der reellen Zahlen: $0{,}25,\ \frac{1}{3},\ \pi,\ \sqrt{2},\ \ldots$

**Es gibt mehr reelle Zahlen als natürliche.**

| alle nat. Zahlen | | alle reellen Zahlen |
|---|---|---|
| 0 | $\longleftrightarrow$ | 0 , 2 5 0 0 0 0 ... |
| 1 | $\longleftrightarrow$ | 3 , 1 4 1 5 9 2 ... |
| 2 | $\longleftrightarrow$ | 1 , 4 1 4 2 1 3 ... |
| 3 | $\longleftrightarrow$ | 1 , 2 3 4 5 6 7 ... |
| $\vdots$ | | $\vdots$ |

# Wie viele reelle Zahlen gibt es?

Welche Zahlenmenge ist größer?

- die Menge der natürlichen Zahlen: $0,\ 1,\ 2,\ \ldots$
- die Menge der reellen Zahlen: $0{,}25,\ \frac{1}{3},\ \pi,\ \sqrt{2},\ \ldots$

**Es gibt mehr reelle Zahlen als natürliche.**

$$\begin{array}{ccc}
\underline{\text{alle nat. Zahlen}} & & \underline{\text{alle reellen Zahlen}} \\
0 & \longleftrightarrow & \boxed{0}\,,\ 2\ 5\ 0\ 0\ 0\ 0\ \ldots \\
1 & \longleftrightarrow & 3\,,\ \boxed{1}\ 4\ 1\ 5\ 9\ 2\ \ldots \\
2 & \longleftrightarrow & 1\,,\ 4\ \boxed{1}\ 4\ 2\ 1\ 3\ \ldots \\
3 & \longleftrightarrow & 1\,,\ 2\ 3\ \boxed{4}\ 5\ 6\ 7\ \ldots \\
\vdots & & \vdots
\end{array}$$

# Wie viele reelle Zahlen gibt es?

Welche Zahlenmenge ist größer?

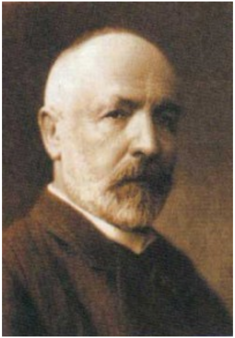
- die Menge der natürlichen Zahlen: $0,\ 1,\ 2,\ \ldots$
- die Menge der reellen Zahlen: $0{,}25,\ \frac{1}{3},\ \pi,\ \sqrt{2},\ \ldots$

**Es gibt mehr reelle Zahlen als natürliche.**

$$\begin{array}{ccc}
\underline{\text{alle nat. Zahlen}} & & \underline{\text{alle reellen Zahlen}} \\
0 & \longleftrightarrow & \boxed{0}\,,\ 2\ 5\ 0\ 0\ 0\ 0\ \ldots \\
1 & \longleftrightarrow & 3\ ,\boxed{1}\ 4\ 1\ 5\ 9\ 2\ \ldots \\
2 & \longleftrightarrow & 1\ ,\ 4\ \boxed{1}\ 4\ 2\ 1\ 3\ \ldots \\
3 & \longleftrightarrow & 1\ ,\ 2\ 3\ \boxed{4}\ 5\ 6\ 7\ \ldots \\
\vdots & & \vdots
\end{array}$$

Was ist mit $1{,}225\ldots$?

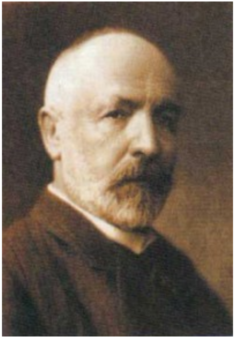
# Die Kontinuumshypothese



Georg Cantor (* 1845, † 1918)

Gibt es eine Zwischenstufe zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$?

# Die Kontinuumshypothese



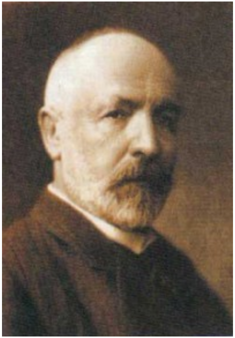
Georg Cantor (* 1845, † 1918)

Kurt Gödel (* 1906, † 1978)

Gibt es eine Zwischenstufe zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$?

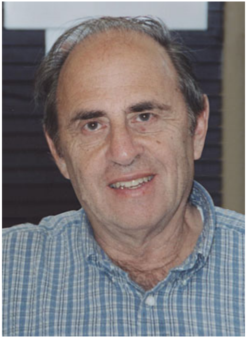
Es gibt keinen Beweis, dass es eine Zwischenstufe gibt.

# Die Kontinuumshypothese



Georg Cantor (* 1845, † 1918)

Kurt Gödel (* 1906, † 1978)



Paul Cohen (* 1934, † 2007)

Gibt es eine Zwischenstufe zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$?

Es gibt keinen Beweis, dass es eine Zwischenstufe gibt.

Es gibt keinen Beweis, dass es keine Zwischenstufe gibt.

# Beispiele für Alternativuniversen

In **Gödels Topos** gilt:
Es gibt keine Zwischenstufe zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$.

In **Cohens Topos** gilt:
Es gibt eine Zwischenstufe zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$.

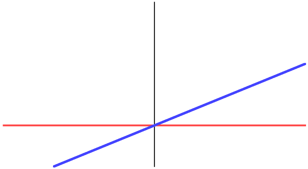
# Beispiele für Alternativuniversen

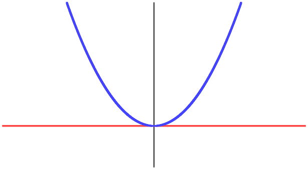
In **Gödels Topos** gilt:
Es gibt keine Zwischenstufe zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$.

In **Cohens Topos** gilt:
Es gibt eine Zwischenstufe zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$.

---

Im **glatten Topos** gilt:
Es gibt infinitesimale Zahlen $\varepsilon$ mit $\varepsilon^2 = 0$, aber $\varepsilon \neq 0$.





# Beispiele für Alternativuniversen

In **Gödels Topos** gilt:
Es gibt keine Zwischenstufe zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$.

In **Cohens Topos** gilt:
Es gibt eine Zwischenstufe zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$.

---

Im **glatten Topos** gilt:
Es gibt infinitesimale Zahlen $\varepsilon$ mit $\varepsilon^2 = 0$, aber $\varepsilon \neq 0$.

Im **effektiven Topos** gilt:
Jede Funktion $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist durch ein Programm berechenbar.

# Beispiele für Alternativuniversen

In **Gödels Topos** gilt:
Es gibt keine Zwischenstufe zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$.

In **Cohens Topos** gilt:
Es gibt eine Zwischenstufe zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$.

---

Im **glatten Topos** gilt:
Es gibt infinitesimale Zahlen $\varepsilon$ mit $\varepsilon^2 = 0$, aber $\varepsilon \neq 0$.

Im **effektiven Topos** gilt:
Jede Funktion $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist durch ein Programm berechenbar.

Im **Zariski-Topos** gilt:
Jede Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist ein Polynom.

# Wieso sich mit Topoi befassen?

Weil sie …

- existieren,
- einen Beitrag zur Philosophie der Mathematik leisten,
- das Studium kurioser Traumaxiome ermöglichen,
- Querverbindungen innerhalb der Mathematik herstellen und
- mathematische Probleme vereinfachen können:
  für jede Situation den passenden Topos.

# Bildquellen

http://news.stanford.edu/news/2007/april4/gifs/Cohen.jpg
https://financialtribune.com/sites/default/files/field/image/december/486.jpg
https://lh3.googleusercontent.com/-Jsof3lfHsyA/VW64yVjabWI/AAAAAAAAACY/B25Obl8geoA/w1448-h2048/PosterToposIHES.jpg
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/6/60/Roof_hafez_tomb.jpg/1280px-Roof_hafez_tomb.jpg
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/c/ce/3-adic_integers_with_dual_colorings.svg/220px-3-adic_integers_with_dual_colorings.svg.png
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/en/4/42/Kurt_g%C3%B6del.jpg
http://us.123rf.com/450wm/clairev/clairev1501/clairev150100029/35432850-haufen-von-spielzeug.jpg?ver=6
http://www.calctool.org/CALC/math/solids/platonic.png
http://www.storyofmathematics.com/images2/cantor.jpg
http://www.ufointernationalproject.com/wp-content/uploads/2015/11/a23.jpg