DER EFF. TOPOS

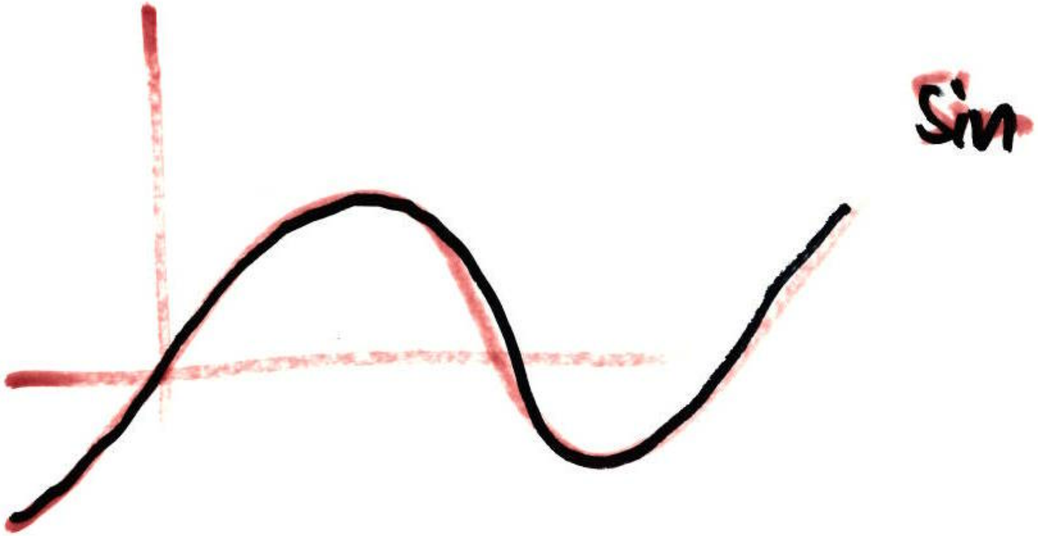
1. Erster Einblick in den effektiven Topos
2. Wie man im eff. Topos arbeitet
3. Mathematisches Schließen im eff. Topos
4. Nutzen

1. ERSTER EINBLICK

der Standard-topos

Aussage	in Set	in Eff
$1+1=2$	✓	✓
Jede nat. Zahl ist prim oder nicht prim.	trivialerweise wahr	wahr (nicht trivial)
Jede Fkt. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist die Nullfkt. oder nicht die Nullfkt.	trivialerweise wahr	falsch
Jede Fkt. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist berechenbar.	falsch (nicht trivial)	trivialerweise wahr
Jede Fkt. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig.	trivialerweise falsch	wahr (nicht trivial)

2a



Nullfunktion

$f(x) = 0$

Def.: Eine Fkt. $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist genau dann **berechenbar**, wenn es eine Turingmaschine gibt, die bei Eingabe einer jeden nat. Zahl n mit dem Wert $f(n)$ als Ausgabe terminiert.

Bsp.: $f(x) = x^2$ ist berechenbar.

2c

Bsp: $f(n) = 1$ oder 0, je nachdem, ob die n-te TM anhält oder nicht

„Halteproblem"

Liste alle TM:

0. a
1. b
2. c

⋮

26. z
27. aa
28. ab

⋮

Diese Fkt. f ist nicht berechenbar: Es gibt kein Halteorakel.

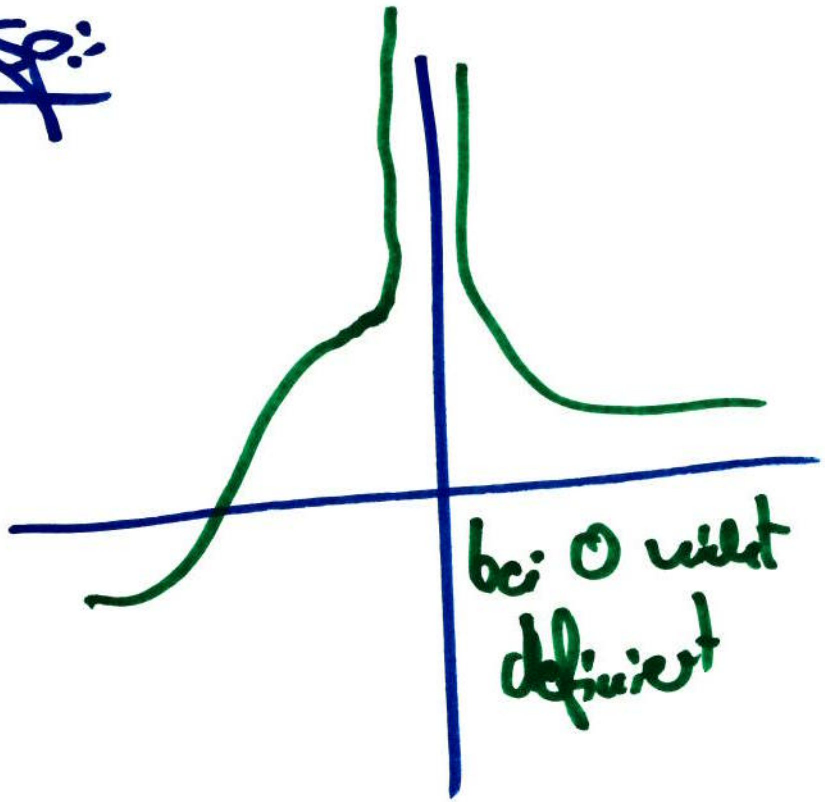
2d

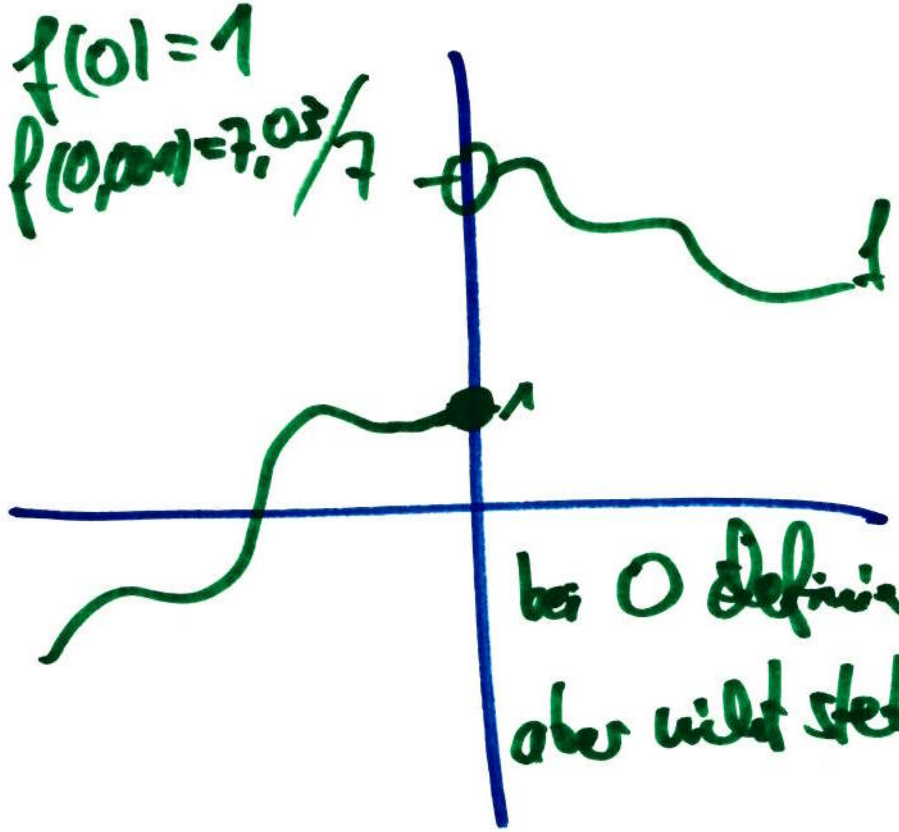
Bem.: Es gibt überabzählbar unendl. viele Fkt. $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, aber nur abzählbar viele TM.

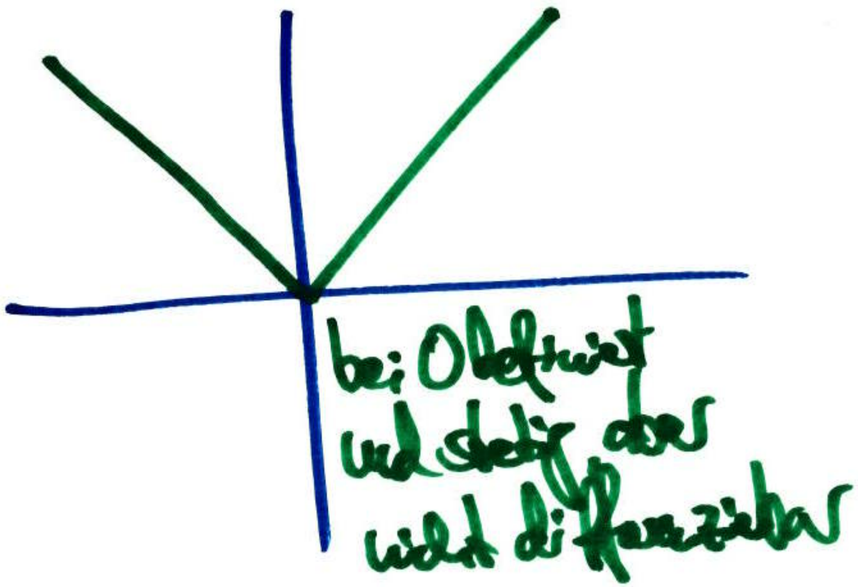
Also sind überabz. unendl. viele Fkt. nicht berechenbar.

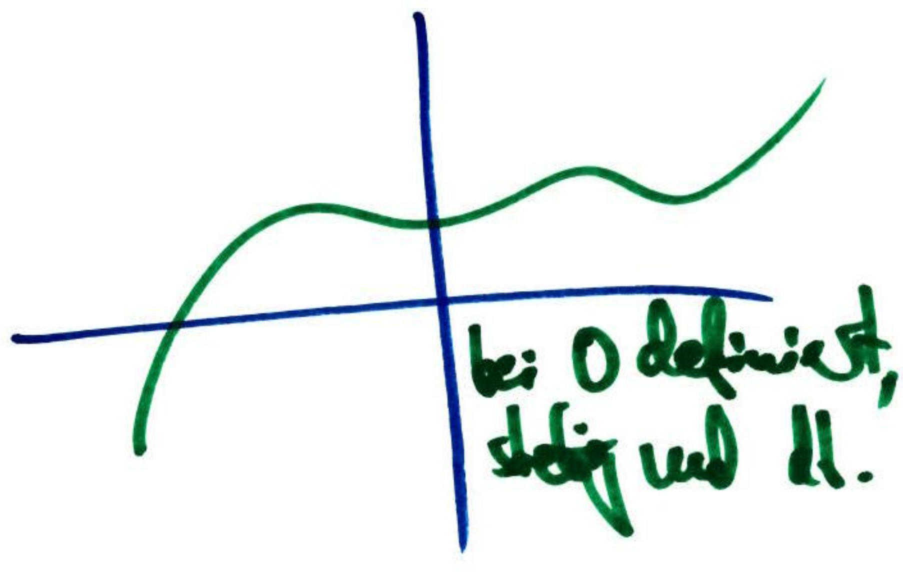
2e

Bsp.:


bei 0 nicht
definiert


f(0) = 1
f(0,001) = 1,03
1
1
bei 0 definiert,
aber nicht stetig


bei 0 definiert
und stetig aber
nicht differenzierbar


bei 0 definiert,
stetig und db.

2. ARBEIT IM EFF. TOPOS

Eff $\models$ „Jede nat. Zahl ist prim oder nicht prim."

im selben Sinn wie TM existiert

bedeutet:

Es gibt (im platon. Ideenhimmel) eine TM, welche bei Eingabe einer nat. Zahl entscheidet, ob diese prim ist oder nicht.

die Eig. platonischer Zahlen, prim zu sein

Diese Aussage stimmt.

Set $\models$ „Jede nat. Zahl ist prim oder nicht prim" 8a

bedeutet:

Jede nat. Zahl ist prim oder nicht prim.

im platon. Ideenhimmel

Eff $\models$ „Jede nat. Zahl besitzt eine Zerlegung in Primfaktoren." (4)

bedeutet:

Es gibt eine TM, welche bei Eingabe einer nat. Zahl eine Liste von Primzahlen ausgibt, welche zusammenmultipliziert die ursprüngliche Zahl ergeben.

Diese Aussage stimmt.

Bsp. F „Zu jeder Zahl n gibt es eine Primzahl ⑤

p, die größer als n ist."

bedeutet:

Es gibt eine TM, welche bei Eingabe

einer nat. Zahl n eine Primzahl p

mit $p > n$ ausgibt.

Diese Aussage stimmt.

Elf $\models$ „Jede Fkt. $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist die Nullfkt. oder nicht die Nullfkt."

6

bedeutet:

Es gibt eine TM, welche

gegeben eine TM M, welche eine Fkt. $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ berechnet,

~~entsch~~ aus

ausgibt, ob M bei jeder Eingabe Null liefert oder nicht.

Diese Aussage ist falsch.

Eff $\models$ „Jede Fkt. $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist berechenbar."

bedeutet:

Es gibt eine TM, welche

gegeben eine TM M, welche eine Fkt. $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ berechnet,

eine TM ausgibt, die f berechnet.

Diese Aussage ist trivialerweise wahr:

$\boxed{\begin{array}{l} \text{① Lese } M \text{ ein.} \\ \text{② Gebe } M \text{ aus.} \end{array}}$

A = { ♡, Haus }

B = { 7, ✧ }

A × B = { (♡ | 7), (♡ | ✧), (Haus | 7), (Haus | ✧) }

„Kartesisches Produkt"

Eff ⊨ „Zu jeder Fkt. $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, welche nicht die Nullfunktion ist, gibt es eine Stelle $n \in \mathbb{N}$ mit $f(n) \neq 0$." (8)

bedeutet:

Es gibt eine TM, welche

ggf. eine TM M, welche eine Fkt. $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ berechnet, die nicht die Nullfkt. ist,

eine Zahl n ausgibt mit $f(n) \neq 0$.

Diese Aussage stimmt, die gesuchte TM lautet:

(1) Berechne mit Hilfe von M $f(\underline{0})$

(2) Falls $f(\underline{0}) \neq 0$, dann gib $\underline{0}$ aus.

(3) Falls $f(0) = 0$, fahre mit Schritt (1) bei $f(1)$ fort.

Aussage auf Seite 6:

alle Funktionswerte Null $\vee$ nicht alle ~~mind. ein~~ Funktionswert ~~nicht~~ Null.

Aussage auf Seite 8:

~~Falls~~ nicht alle Werte Null $\Rightarrow$ mind. ein Wert ist nicht Null.

~~Vergleiche:~~

6 $A \vee \neg B$ „A oder nicht-B"

8 $B \Rightarrow A$

3. SCHLIEẞEN IM EFF. TOPOS

<u>Metatheorem:</u> Sei $\mathcal{E}$ ein Topos (z.B. Set, Eff, ...)

Existiere ein konstruktiver Beweis von „$A \Rightarrow B$".

„wenn A, dann B"

Gelte $\mathcal{E} \models A$.

Dann gilt auch $\mathcal{E} \models B$.

<u>als Slogan:</u> in allen Topoi gilt konstruktive Logik.

klass. Logik = konstr. Logik + Akzeptanz von Widerspruchsbeweis

+ Akzeptanz von LEM.

Law of Excluded Middle

tertium non datur

Satz vom ausgeschl. Dritten

Jede Aussage stimmt oder stimmt nicht.

Beh.: Es gibt irrationale Zahlen x, y sodass x^y rational ist. (12)

Nachkommaziffern wiederholen sich nicht

Bew.: (nur in klass. Logik)

Entweder ist $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ rational oder nicht.

Im ersten Fall: $x = \sqrt{2}$ und $y = \sqrt{2}$ sind die gesuchten Zahlen.

Im zweiten Fall: $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ und $y = \sqrt{2}$ sind die ges. Zahlen,

denn

$$x^y = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$$

ist rational und x und y sind irrational.

Bew.: (auch in Konstr. Logik)

Nimm $x = \sqrt{2}$ (ist irrational)

und $y = \log_{\sqrt{2}} 3$ (ist irrational).

Dann ist $x^y = (\sqrt{2})^{\log_{\sqrt{2}} 3} = 3$ ist rational.

Bem.: Konstruktiv ist $\neg\neg A$ eine schwächere Aussage als A:

$$A \Rightarrow \neg\neg A \quad ✓$$

$$\neg\neg A \Rightarrow A \quad f.$$

„Doppelnegations-elimination"

Bsp: Wenn wir in der Früh unseren Wohnungsschlüssel (14)
nicht finden, können wir konstruktiv nur

¬ ¬ (Es gibt einen Ort, wo sich der Schlüssel befindet),

nicht aber

Es gibt einen Ort, wo sich der Schlüssel befindet

verteidigen/behaupten.

(Beispiel hinkt, da subjektives Wissen einbezogen wird.)

Doppelnegationsübersetzung:

„Zu jeder Zahl n gibt es eine Primzahl p mit $p > n$"

m-Übers.

„Es ist nicht nicht der Fall,
dass es zu jede Zahl n
nicht nicht eine Zahl p gibt,
welche nicht nicht prim ist und
welche nicht nicht $> n$ ist."

4. NUTZEN

- intellektuelle Neugierde: Es ist interessant und macht Spaß math. Alternativuniversen zu erkunden.
- Der eff. Topos ist eine lehrreiche Spielwiese für Traumaxiome. (z.B.: jede Fkt $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist berechenbar, jede Fkt. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig)
- Der eff. Topos ist ein Bindeglied zw. theoret. Informatik und Logik, insb. zeigt er: Ist eine Existenzaussage konstruktiv beweisbar, so ist sie auch durch eine TM bezeugbar.
- Der eff. Topos ist ein gutes Vehikel zum Vergleich von Modellen von Berechenbarkeit

5. WEITERE ASPEKTE

- Statt Turingmaschinen kann man auch Superturingmaschinen nehmen! Dann sind andere Aussagen wahr und falsch.
- Oder man nimmt Realweltmaschinen.
  - $\mathrm{Eff}(RW) \models$ „Jede Fkt. $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist berechenbar" stimmt genau dann, falls in unserer Welt die Church–Turing-These stimmt (s. Wikipedia).
  - $\mathrm{Eff}(RW) \models$ „Jede Fkt. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig" stimmt, falls in unserer Welt perfekte Black Boxes und private Kommunikationskanäle möglich sind.

- Zu jedem Orakel, das irgendeine Art von eigentlich unlösbarem Problem löst (wie etwa das Halteproblem), gibt es einen Untertopos des effektiven Topos.

Stichwort für Wikipedia: „Turing jump"

19