Matheschülerzirkel
Universität Augsburg
Schuljahr 2014/2015
Klassen 10/11/12

Der Residuensatz

Zirkelzettel vom 20. März 2015

Inhaltsverzeichnis

1 Das komplexe Kurvenintegral

In der Schule integriert man Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ längs Intervallen, also gewissen Ausschnitten der reellen Zahlengerade. Man schreibt dafür

$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{oder} \qquad \int\limits_{[a,b]} f(x)\,dx.$$

Wir möchten nun Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ längs *Kurven in der komplexen Zahlenebene* integrieren. Die Werte solcher Funktionen sind also komplexe Zahlen, die von einem komplexen (statt reellen) Parameter abhängen. Ist L eine solche Kurve, so schreiben wir

$$\int_L f(z)\,dz$$

für das Integral von f längs L. Im Spezialfall, dass L *geschlossen ist* (also Anfangs- und Endpunkt von L übereinstimmen), so schreiben wir zur Betonung gelegentlich

$$\oint_L f(z)\,dz.$$

Wie berechnet man ein solches Integral? Wie ist ein solches Integral überhaupt definiert? Dafür verwendet man *Parametrisierungen.* Eine Parametrisierung einer Kurve L ist eine bijektive Abbildung $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, deren Werte genau die Punkte von L ablaufen. Hat man eine solche Parametrisierung gefunden, so definiert man

$$\int_L f(z)\,dz := \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt.$$

Bemerkung 1.1. Ein und dieselbe Kurve L kann durch mehrere verschiedene Abbildungen parametrisiert werden. Man kann zeigen, dass der Wert des Kurvenintegrals aber bei jeder Parametrisierung der gleiche ist.

Bemerkung 1.2. Für die Ableitung γ' einer komplexwertigen Funktion γ gelten dieselben Rechenregeln wie für die aus der Schule bekannten reellwertigen Funktionen. Zum Beispiel ist die Ableitung der Funktion γ mit $\gamma(t) = 7t + it^2$ die Funktion γ' mit $\gamma'(t) = 7 + 2ti$. Die Zahl i wird also einfach als Konstante betrachtet.

Aufgabe 1. *Beispiele für Parametrisierungen*

Welche Kurven werden durch die folgenden Abbildungen parametrisiert?

a) $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C},\ t \mapsto 3 + t.$

b) $\gamma : [0, 2] \to \mathbb{C},\ t \mapsto t + it^2.$

c) $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\ t \mapsto e^{it}.$

Tipp für Teilaufgabe c): Es gilt $e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$. Wo liegt diese Zahl in der komplexen Zahlenebene?

Aufgabe 2. *Parametrisierungen von Kreisen*

Finde eine Parametrisierung des …

a) Einheitskreises (damit ist immer gemeint: entgegen des Uhrzeigersinns),

b) um den Faktor r vergrößerten Einheitskreises,

c) Kreises mit Radius r und Mittelpunkt p.

Aufgabe 3. *Die Mutter aller komplexen Kurvenintegrale*

Berechne das Integral von $1/z$ längs des Einheitskreises.

Aufgabe 4. *Weitere wichtige komplexe Kurvenintegrale*

Der Integrationsweg L sei in den folgenden Fällen stets der Einheitskreis.

a) Was ist $\oint_L z\,dz$?

b) Was ist $\oint_L z^2\,dz$?

c) Was ist $\oint_L \frac{1}{z^2}\,dz$?

Aufgabe 5. *Vergleich mit dem gewöhnlichen Integral*

Sei $[a, b]$ ein Intervall auf der reellen Zahlengerade. Dieses können wir auch als (ungekrümmte) Kurve L in der komplexen Zahlenebene auffassen. Was ist der Zusammenhang zwischen dem altbekannten Integral $\int_a^b$ und dem Kurvenintegral $\int_L$? Beweise deine Vermutung, indem du eine Parametrisierung von L angibst und die Definition des Kurvenintegrals verwendest!

2 Die Laurentwicklung von komplexen Funktionen

Eine *Laurentreihe* mit Entwicklungspunkt c ist eine Reihe der Form

$$\cdots + a_{-2}(z-c)^{-2} + a_{-1}(z-c)^{-1} + a_0 + a_1(z-c) + a_2(z-c)^2 + \cdots ,$$

wobei die Koeffizienten a_n beliebige komplexe Zahlen sein können. Eine Laurentreihe mit Entwicklungspunkt 0 ist also von der Form

$$\cdots + a_{-2}z^{-2} + a_{-1}z^{-1} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots .$$

Viele komplexe Funktionen lassen sich auf diese Form bringen.

Beispiel 2.1. Die Laurentreihe des Polynoms $5z^2 - 3z + 8$ mit Entwicklungspunkt 0 lässt sich sofort ablesen: Die meisten Koeffizienten sind Null. Die einzigen Ausnahmen sind $a_0 = 8$, $a_1 = -3$ und $a_2 = 5$.

Aufgabe 6. *Beispiele für Laurententwicklungen*

Finde jeweils eine Laurententwicklung mit Entwicklungspunkt 0 von …

a) $\frac{1}{1-z}$,

b) $\frac{1}{1-z^2}$,

c) $e^{\frac{1}{z}}$,

d) $\frac{1}{(z-i)(z+i)}$.

Tipp: Verwende die Formel für die geometrische Reihe, $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$. Für Teilaufgabe c) ist die Identität $e^z = 1 + z + z^2/2 + z^3/3! + z^4/4! + \cdots$ nützlich.

Der Koeffizient a_{-1} ist besonders wichtig. Er heißt auch *Residuum* der Laurentreihe an dem gegebenen Entwicklungspunkt. Für die Integration längs eines beliebig kleinen Kreises K um den Ursprung gilt nämlich

$$\oint_K (\cdots + a_{-1}z^{-1} + \cdots)\, dz = 2\pi i \cdot a_{-1}.$$

All die anderen Koeffizienten spielen also keine Rolle!

Aufgabe 7. *Baby-Version des Residuensatzes*

Beweise diese Formel.

Eine *holomorphe Funktion* ist eine, in deren Laurententwicklungen (um jeden Punkt) nur nicht-negative Exponenten vorkommen. Solche Funktionen sind also *überall definiert* und besitzen keine Polstellen. Unter anderem sind folgende Funktionen holomorph:

- Jedes Polynom, zum Beispiel $5z^2 - 3z + 8$.
- Die Exponentialfunktion.
- Die Summe zweier holomorphen Funktionen.
- Das Produkt zweier holomorphen Funktionen.
- Die Verkettung zweier holomorphen Funktionen.

Der Quotient zweier holomorpher Funktionen hat im Allgemeinen Polstellen – nämlich dort, wo der Nenner Nullstellen hat. Solche Funktionen heißen *meromorph*. In deren Laurententwicklung dürfen endlich viele – aber nicht unendlich viele! – negative Exponenten vorkommen. Zum Beispiel sind die Funktionen

$$\frac{1}{z} \qquad \frac{z^2-3}{z^2-1} \qquad \frac{1}{z^2+1}$$

meromorph. Die Funktion $\frac{z^2-2z+1}{z-1}$ scheint ebenfalls nur meromorph zu sein, tatsächlich aber ist sie holomorph (wieso?).

Aufgabe 8. *Formeln fürs Residuum*

a) Sei f eine holomorphe Funktion. Erkläre, wieso das Residuum von f an jeder Stelle Null ist.

b) Sei f eine meromorphe Funktion, die an einem Punkt c eine *einfache Polstelle* besitzt. Das bedeutet, dass die Laurententwicklung von f um c so aussieht:

$$f(z) = a_{-1}(z-c)^{-1} + a_0 + a_1(z-c) + a_2(z-c)^2 + \cdots .$$

Zeige, dass das Residuum von f bei c, also a_{-1}, über folgende Formel berechnet werden kann:

$$a_{-1} = \lim_{z \to c} \big((z-c)f(z)\big).$$

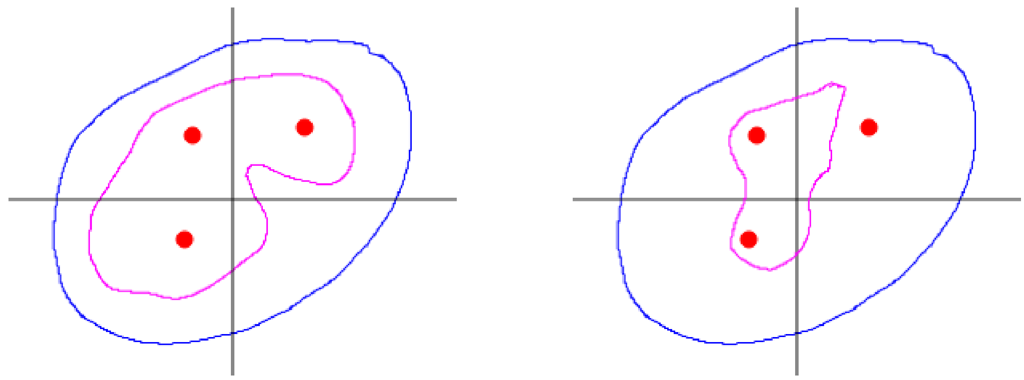
c) Sei f eine meromorphe Funktion mit $f(z) = g(z)/h(z)$. Sei $h(c) = 0$ und $h'(c) \neq 0$. (Somit besitzt f eine einfache Polstelle bei c.) Zeige, dass das Residuum von f bei c dann gleich $g(c)/h'(c)$ ist.

3 Der Residuensatz

Das tolle an holomorphen und meromorphen Funktionen ist, dass man bei der Berechnung des Kurvenintegrals den Integrationsweg deformieren kann, ohne dass sich der Integralwert ändert! Das ist etwas ganz besonderes, zu dem es auch kein reelles Analogon gibt – schließlich lassen sich Intervalle auf der eindimensionalen reellen Zahlengerade auch gar nicht deformieren.

Eine präzisere Aussage lautet: Sei f eine meromorphe Funktion. Sei K eine Kurve in der komplexen Zahlenebene. Lasse sich K zu einer anderen Kurve L deformieren, *ohne dabei die Polstellen von f zu überstreichen.* Dann ist $\int_K f(z)\,dz = \int_L f(z)\,dz$.

Seien zum Beispiel die Pole von f wie durch die roten Punkte gekennzeichnet verteilt. Dann spielt es keine Rolle, ob man über die blaue oder die rosa Kurve der linken Skizze integriert. Es macht aber durchaus einen Unterschied, ob man über die blaue oder die rosa Kurve der rechten Seite integriert. Denn bei dieser Deformation hat man den oberen rechten Pol überstrichen.



In der folgenden Aufgabe beweist du den mächtigen Residuensatz. Er erlaubt es, auch Integrale mit komplizierten Integrationswegen ganz einfach zu berechnen.

Aufgabe 9. *Der Residuensatz*

Sei f eine meromorphe Funktion. Sei K eine geschlossene Kurve in der komplexen Zahlenebene, die alle Polstellen von f in ihrem Inneren umfasst. Beweise: Das Integral $\int_K f(z)\,dz$ ist gleich der Summe der Residuen von f an den Polstellen, multipliziert mit $2\pi i$. Als Formel:

$$\oint_K f(z)\,dz = \sum_z \operatorname{Res}(f, z) \cdot 2\pi i.$$

Deformiere dazu den Integrationsweg auf geeignete Art und Weise und verwende Aufgabe 7. Verwende außerdem folgende Rechenregeln: Setzt sich eine Kurve aus mehreren Teilkurven zusammen, so ist das Integral über die Gesamtkurve die Summe der Integrale über die Teilkurven. Kehrt man die Durchlaufrichtung einer Kurve um, so ändert der Integralwert sein Vorzeichen.

Aufgabe 10. *Beispiel zum Residuensatz*

Berechne

$$\oint_K \frac{1}{(z-1)(z^2-4)}\,dz,$$

wobei K eine geschlossene Kurve ist, die in ihrem Inneren alle Polstellen des Integranden umfasst.

4 Berechnung reeller Integrale mit dem Residuensatz

Den Residuensatz kann man verwenden, um reelle Integrale zu berechnen. Wie das geht, soll das folgende Beispiel zeigen. Wir wollen das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

bestimmen. Unsere Strategie liegt darin, dazu den Integrationsweg abzuändern: Anstatt nur von $-R$ nach R zu gehen, ergänzen wir einen großen Halbkreisbogen in der komplexen Zahlenebene („nach oben"), um zurück zu $-R$ zu gelangen. Auf diese Weise erhalten wir ein Integral über eine geschlossene Kurve, die wir mit dem Residuensatz leicht berechnen können. Danach zeigen wir, dass das Integral über den zusätzlich eingefügten Weg im Grenzwert $R \to \infty$ keine Rolle spielt, d. h. gegen Null geht.

Die Polstellen des Integranden f liegen bei i und $-i$. Im Halbkreis liegt nur die Polstelle i. Das Residuum dort können wir mit der Formel aus Aufgabe 8 leicht berechnen:

$$\operatorname{Res}(f,i) = \frac{1}{2i}.$$

Nach dem Residuensatz ist daher das Integral über die Halbkreislinie gleich

$$\frac{1}{2i} \cdot 2\pi i = \pi.$$

Was ist das Integral über den zusätzlich eingefügten Weg L?

$$\begin{aligned}\left|\int_L \frac{1}{z^2+1}\,dz\right| &\leq \int_L \left|\frac{1}{z^2+1}\right|\,dz = \int_L \frac{1}{|z^2+1|}\,dz \leq \int_L \frac{1}{R^2-1}\,dz \\ &= \frac{1}{R^2-1} \cdot \int_L 1\,dz = \frac{1}{R^2-1} \cdot \pi R = \frac{R}{R^2-1} \cdot \pi \xrightarrow{R\to\infty} 0.\end{aligned}$$

Wieso ist wohl $\int_L 1\,dz$ gleich dem Umfang von L, also gleich πR?

Aufgabe 11. *Endgegner I*

Berechne $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2+2x+2}\,dx$ mit dem Residuensatz.

Tipps: Wegen der Formel $e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$ ist das gesuchte Integral der Imaginärteil des Integrals $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+2x+2}\,dx$. Die Nullstellen des Nenners liegen bei $-1+i$ und $-1-i$.

Aufgabe 12. *Endgegner II*

Berechne $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1}\,dx$ mit dem Residuensatz.

Auflösung auf YouTube: `https://www.youtube.com/watch?v=MRLa5bk3_R4`