Matheschülerzirkel
Universität Augsburg
Schuljahr 2013/2013
Klasse 11./12., Gruppe 2

Zirkelzettel vom 21. Dezember 2013

Konventionen

Die *Menge der natürlichen Zahlen* ist $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Die *leere Menge* $\{\} = \emptyset$ enthält kein einziges Element.

Alle Elemente der Menge der Elefanten in diesem Raum können π auswendig.

Regeln für surreale Zahlen

1. *Konstruktionsprinzip.* Sind L und R Mengen surrealer Zahlen und ist kein Element von $L \geq$ irgendeinem Element von R, so ist $\{L \mid R\}$ ebenfalls eine surreale Zahl. Alle surrealen Zahlen entstehen auf diese Art.
2. *Notation.* Für $x = \{L \mid R\}$ bezeichnen wir ein typisches Element von L mit „x^L“, ein typisches Element von R mit „x^R“. Wenn wir „$\{a, b, c, \ldots \mid d, e, f, \ldots\}$“ schreiben, meinen wir die Zahl $\{L \mid R\}$, sodass $a, b, c, \ldots$ die typischen Elemente von L und $d, e, f, \ldots$ die typischen Elemente von R sind.
3. *Anordnung.*

   Wir sagen genau dann $x \geq y$, falls kein $x^R \leq y$ und $x \leq$ keinem y^L.

   Wir sagen genau dann $x \not\leq y$, wenn $x \leq y$ nicht gilt.

   Wir sagen genau dann $x < y$, wenn $x \leq y$ und $y \not\leq x$.

   Wir sagen genau dann $x \leq y$, wenn $y \geq x$.

   Wir sagen genau dann $x > y$, wenn $y < x$.
4. *Gleichheit.* Wir sagen genau dann $x = y$, wenn $x \leq y$ und $y \leq x$.
5. *Addition.* $x + y := \{x^L + y, x + y^L \mid x^R + y, x + y^R\}$.
6. *Negation.* $-x := \{-x^R \mid -x^L\}$.
7. *Multiplikation.* $xy = \{x^L y + x y^L - x^L y^L, x^R y + x y^R - x^R y^R \mid x^L y + x y^R - x^L y^R, x^R y + x y^L - x^R y^L\}$.

Aufgabe 1. *Erste Beispiele für surreale Zahlen*

Zu Beginn ist uns keine einzige surreale Zahl bekannt. Trotzdem kennen wir eine *Menge* surrealer Zahlen: nämlich die leere Menge. So können wir nach dem Konstruktionsprinzip eine erste surreale Zahl bauen:

$$0 := \{\,|\,\} \quad (\text{also } L = R = \emptyset)$$

Wir haben diese Zahl „0“ genannt, weil sie die Rolle der Null einnehmen wird. Mit dieser Zahl an der Hand können wir eine weitere surreale Zahl bauen:

$$1 := \{0\,|\,\} \quad (\text{also } L = \{0\}, R = \emptyset)$$

a) Überzeuge dich davon, dass sie so definierte Zahlen 0 und 1 wirklich surreale Zahlen sind, dass also die Voraussetzung in der Konstruktionsvorschrift jeweils erfüllt war.

b) Überprüfe, dass gemäß der Definitionen tatsächlich $0 \leq 1$ gilt.

c) Mit der bereits konstruierten Zahl 0 kann man insgesamt drei Ausdrücke angeben:

$$\{0\,|\,\}, \quad \{\,|\,0\}, \quad \{0\,|\,0\}.$$

Welche der beiden hinteren Ausdrücke sind Zahlen?

d) Sortiere alle bis jetzt gefundenen Zahlen und überlege dir so geeignete Bezeichnungen für die neuen Zahlen aus c).

e) Konstruiere ein paar weitere Zahlen, sortiere sie in die bereits gefundenen Zahlen ein und überlege dir geeignete Namen für sie.

Aufgabe 2. *Erste Rechnungen mit surrealen Zahlen (benötigt Aufgabe 1)*

a) Überprüfe, dass gemäß der Definitionen gilt: $0 + 1 = 1$.

b) Berechne $(-1) + 1$ und vergleiche das Ergebnis mit 0.

Aufgabe 3. *Mex-Operation*

Ist S eine endliche Menge natürlicher Zahlen, so ist $\operatorname{mex} S$ die *kleinste* natürliche Zahl, die *nicht* in S liegt (minimum excluded number).

a) Überzeuge dich von der Richtigkeit folgender Beispiele:

$$\operatorname{mex}\{0,1,4,7\} = 2, \quad \operatorname{mex}\{1,4,7\} = 0, \quad \operatorname{mex}\emptyset = 0.$$

b) Berechne das Mex von deiner Lieblingsteilmenge natürlicher Zahlen.

Aufgabe 4. *Nimber-Addition (benötigt Aufgabe 3)*

Die *Nimber-Addition* ist in mengentheoretischer Notation wie folgt rekursiv definiert:

$$n \oplus m := \operatorname{mex}\Big(\{n' \oplus m \,|\, n' < n\} \cup \{n \oplus m' \,|\, m' < m\}\Big).$$

Wenn man also den Wert von $n \oplus m$ herausfinden möchte, muss man zunächst die Werte von $n' \oplus m$ für alle kleineren Zahlen $n' < n$ und die Werte von $n \oplus m'$ für alle kleineren Zahlen $m' < m$ herausfinden. Der Wert von $n \oplus m$ ergibt sich dann als Mex dieser Zahlen.

a) Ergänze unten stehende Tabelle für die Nim-Addition.

⋆ b) Wenn du schon die Beweistechnik der Induktion kennst, kannst du dich an folgenden Behauptungen für alle $n \in \mathbb{N}$ versuchen:

$$0 \oplus n = n$$
$$n \oplus n = 0$$

$n \setminus m$	0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
0	0	1	2						
1		0	3						
2									
3							4		
4			6						
5									
6									
7						2			
$\vdots$									

Aufgabe 5. *Falsche binomische Formel*

…wäre schön, benötigt aber Multiplikation; hat daher hohen technischen Aufwand.