Matheschülerzirkel
Universität Augsburg
Schuljahr 2013/2014
Klasse 11./12., Gruppe 2

Zirkelzettel vom 31. Mai 2014: Synthetische Differentialgeometrie

1 Einleitung

Eine *infinitesimale Zahl* ε ist eine Zahl, deren Quadrat Null ist: $\varepsilon^2 = 0$. In der gewöhnlichen mathematischen Welt gibt es nur eine einzige infinitesimale Zahl, nämlich die Zahl 0. Für gewisse Anwendungen wäre es aber schön, wenn es auch interessantere infinitesimale Zahlen gäbe. Ähnlich wie bei den komplexen Zahlen kann man solche Zahlen *künstlich* konstruieren; anders als bei den komplexen Zahlen muss man dafür aber gleich ein ganzes neues *mathematisches Universum* errichten.

Das Teilgebiet der Mathematik, in dem man solche Universen studiert, heißt *synthetische Differentialgeometrie* und ist ein relativ junges Forschungsgebiet. Erste Ideen gehen auf die alten Griechen und Versuche des dänischen Mathematikers Johannes Hjelmslev zurück (* 1873, † 1950), richtig initiiert wurde das Gebiet aber erst in den 1970er Jahren durch Anders Kock, ebenfalls Däne.

Im Folgenden werden wir lernen, wozu infinitesimale Zahlen nützlich sind; wie man in dem alternativen Universum arbeiten kann; und schließlich inwieweit Resultate, die man in der neuen mathematischen Welt erzielt, auch in der gewöhnlichen mathematischen Welt Gültigkeit haben. Ohne diesen letzten Punkt wäre unser Unterfangen ein reines Gedankenexperiment ohne Nutzen.

Dreh- und Angelpunkt für synthetische Differentialgeometrie ist ein Axiom, das *klassisch* – das heißt im gewöhnlichen mathematischen Universum – falsch ist:

Axiom der Mikroaffinität. Sei $\Delta := \{\varepsilon \in \mathbb{R} \,|\, \varepsilon^2 = 0\}$ die *infinitesimale Monade* um 0. Sei $f : \Delta \to \mathbb{R}$ eine beliebige Abbildung. Dann gibt es gewisse eindeutig bestimmte reelle Zahlen a und b, sodass für alle Zahlen ε in Δ folgende Gleichung gilt:

$$f(\varepsilon) = a + b\varepsilon.$$

Wir werden etwas Zeit benötigen, um zunächst die Aussage dieses Axioms zu verstehen und dann seine Konsequenzen zu überblicken.

2 Motivation für infinitesimale Zahlen

In Abbildung **??** sind zwei Situationen skizziert, bei denen sich jeweils zwei Kurven schneiden. (Gerade Linien zählen auch als *Kurven*.) Es ist offensichtlich, dass sich im ersten Bild die beiden Geraden in genau einem Punkt schneiden. Die Schnittsituation beim zweiten Bild ist dagegen weniger klar. In klassischer Mathematik konstatiert man, der Schnitt bestehe ebenfalls aus nur genau einem Punkt, nämlich dem Ursprung. In der Tat könnte man keinen weiteren Punkt benennen, der ebenfalls auf beiden Kurven liegen würde. Anschaulich scheint es aber ja doch einen Unterschied zu geben – man benötigt infinitesimale Zahlen, um ihn auf direkte Art und Weise mathematisch einzufangen.[1]

Aufgabe 1. *Schnittberechnung*

Die Gleichungen der beiden Kurven im ersten Bild sind

$$\begin{cases} y = 2x, & (1) \\ y = 0. & (2) \end{cases}$$

Die erste Gleichung gehört zur schrägen Gerade, die zweite zur x-Achse (auf der alle Punkte als y-Koordinate Null haben). Die Gleichungen der Kurven im zweiten Bild sind

$$\begin{cases} y = x^2, & (3) \\ y = 0. & (4) \end{cases}$$

a) Löse das erste Gleichungssystem, um zu beweisen: Der einzige Schnittpunkt $(x|y)$ hat die Koordinaten $x = 0$ und $y = 0$. Wieso entspricht das Schneiden der beiden Kurven rechnerisch der Lösungsmenge des kombinierten Gleichungssystems?

b) Löse das zweite Gleichungssystem, um zu beweisen, dass ein Punkt $(x|y)$ genau dann im Schnittbereich des zweiten Bilds liegt, wenn seine x-Koordinate Null und seine y-Koordinate eine infinitesimale Zahl ist (also $y^2 = 0$ erfüllt).

   Hierbei ist es wichtig, mit Absicht langsam zu rechnen, um nicht durch zu schnelles Vereinfachen die Pointe vorwegzunehmen. In klassischer Mathematik gilt die Regel „wenn $y^2 = 0$, dann auch $y = 0$”; erst mit dieser Regel vereinfacht sich das Ergebnis, zu demselben wie in Teilaufgabe a).

[1] Indirekt geht es auch in klassischer Mathematik: Die Parabel hat bei der Stelle $x = 0$ eine *doppelte Nullstelle*. Das bedeutet, dass nicht nur der Funktionswert dort Null ist, sondern auch noch seine erste Ableitung.