

# Gelangweilt?

## Harte Bonusaufgaben zum Knobeln.

### Aufgabe 1. Der binomische Lehrsatz

Zeige mit Induktion über  $n$ , dass für alle Zahlen  $a$  und  $b$  gilt:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n.$$

*Tipp:*  $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$ .

### Aufgabe 2. Kettenbruchentwicklung des goldenen Schnitts

Der *goldene Schnitt* ist die Zahl  $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . Als Teilungsverhältnis kommt  $\Phi$  an erstaunlich vielen Orten in der Natur und in der Kunst vor. Zeige:

$$\Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \ddots}}}$$

*Hinweis:* Du darfst voraussetzen, dass der Ausdruck auf der rechten Seite überhaupt Sinn ergibt, d. h. konvergiert. Wie man das beweist, lernt man in Analysis I.

### Aufgabe 3. Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{2}$

Zeige:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \ddots}}}$$

*Hinweis:* Du darfst wieder die Konvergenz des unendlichen Kettenbruchs voraussetzen.

### Aufgabe 4. Die 10-adischen Zahlen

Bei den gewöhnlichen reellen Zahlen kommen in ihrer Dezimalschreibweise vor dem Komma nur endlich viele Ziffern, hinter dem Komma aber gelegentlich unendlich viele Ziffern vor. Bei den 10-adischen Zahlen ist es genau umgekehrt: Vor dem Komma dürfen unendlich viele Ziffern stehen, hinter dem Komma dagegen nur endlich viele. Die Rechenverfahren zur Addition, Subtraktion und Multiplikation, wie man sie aus der Schule kennt, funktionieren weitestgehend unverändert. Die Division wird etwas komplizierter.

- Vollziehe folgende Rechnung nach:  $\dots 13562 + \dots 90081 = \dots 03643$ .
- Was ist  $\dots 99999 + 1$ ? Dabei ist  $1 = \dots 00001$ .
- Was ist  $-123$ ?
- Finde eine 10-adische Zahl  $x$  – weder Null noch Eins – mit der besonderen Eigenschaft  $x^2 = x$ .

*Bemerkung:* Die Gleichung in Teilaufgabe c) kann man zu  $x \cdot (x-1) = 0$  umstellen. In den 10-adischen Zahlen kann also ein Produkt Null sein, ohne dass einer der Faktoren Null ist. Wegen dieser schlechten Eigenschaft werden die 10-adischen Zahlen kaum verwendet. *Allerdings:* Verwendet man als Basis nicht 10, sondern eine Primzahl, so gibt es dieses Problem nicht. Die 2-adischen Zahlen werden gelegentlich in der Informatik und die  $p$ -adischen Zahlen, wobei  $p$  irgendeine Primzahl ist, überall in der Zahlentheorie verwendet. Dort gibt es beispielsweise folgendes mächtiges Prinzip: Eine Gleichung einer bestimmten Art hat genau dann eine Lösung in  $\mathbb{Z}$ , wenn sie eine Lösung in  $\mathbb{R}$  und in allen  $p$ -adischen Zahlen hat.