Gelangweilt?

Aufgabe 1. *Der binomische Lehrsatz*

Zeige mit Induktion über n, dass für alle Zahlen a und b gilt:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n.$$

Tipp: $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$.

Aufgabe 2. *Kettenbruchentwicklungen*

Der *goldene Schnitt* ist die Zahl $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Als Teilungsverhältnis kommt Φ an erstaunlich vielen Orten in der Natur und in der Kunst vor. Zeige:

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}, \qquad \sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}.$$

Hinweis: Du darfst voraussetzen, dass die unendlichen Kettenbrüche überhaupt Sinn ergeben, d. h. konvergieren. Wie man das beweist, lernt man in Analysis I.

Aufgabe 3. *Die 10-adischen Zahlen*

Bei den gewöhnlichen reellen Zahlen stehen in ihrer Dezimalschreibweise vor dem Komma nur endlich viele Ziffern, hinter dem Komma aber gelegentlich unendlich viele Ziffern. Bei den 10-adischen Zahlen ist es genau umgekehrt: Vor dem Komma dürfen unendlich viele Ziffern stehen, hinter dem Komma dagegen nur endlich viele. Die Rechenverfahren zur Addition, Subtraktion und Multiplikation, wie man sie aus der Schule kennt, funktionieren weitestgehend unverändert. Die Division wird etwas komplizierter.

a) Vollziehe folgende Rechnung nach: $\ldots 13562 + \ldots 90081 = \ldots 03643$.

b) Was ist $\ldots 99999 + 1$? Dabei ist $1 = \ldots 00001$.

c) Was ist -123?

d) Finde eine 10-adische Zahl x – weder Null noch Eins – mit $x^2 = x$.

Bemerkung: Die Gleichung in Teilaufgabe d) kann man zu $x \cdot (x-1) = 0$ umstellen. In den 10-adischen Zahlen kann also ein Produkt Null sein, ohne dass einer der Faktoren Null ist. Wegen dieser schlechten Eigenschaft werden die 10-adischen Zahlen kaum verwendet. *Allerdings:* Verwendet man als Basis nicht 10, sondern eine Primzahl, so gibt es dieses Problem nicht. Die 2-adischen Zahlen werden gelegentlich in der Informatik und die p-adischen Zahlen, wobei p irgendeine Primzahl ist, überall in der Zahlentheorie verwendet. Dort gibt es beispielsweise folgendes mächtiges „lokal-zu-global" Prinzip: Eine Gleichung einer bestimmten Art hat genau dann eine Lösung in $\mathbb{Z}$, wenn sie eine Lösung in $\mathbb{R}$ und jeweils eine Lösung in allen p-adischen Zahlen hat.

Lösungsbesprechung individuell per Mail (iblech@web.de) oder persönlich im Büro 2031/L1