Matheschülerzirkel
Universität Augsburg
Schuljahr 2013/2013
Klasse 11./12., Gruppe 2

Zirkelzettel vom 21. Dezember 2013

Konventionen

Die *Menge der natürlichen Zahlen* ist $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Die *leere Menge* $\{\} = \emptyset$ enthält kein einziges Element.

Alle Elemente der Menge der Elefanten in diesem Raum können π auswendig.

Regeln für surreale Zahlen

1. *Konstruktionsprinzip.* Sind L und R Mengen surrealer Zahlen und ist kein Element von $L \geq$ irgendeinem Element von R, so ist $\{L \mid R\}$ ebenfalls eine surreale Zahl. Alle surrealen Zahlen entstehen auf diese Art.
2. *Notation.* Für $x = \{L \mid R\}$ bezeichnen wir ein typisches Element von L mit „x^L", ein typisches Element von R mit „x^R". Wenn wir „$\{a, b, c, \ldots \mid d, e, f, \ldots\}$" schreiben, meinen wir die Zahl $\{L \mid R\}$, sodass $a, b, c, \ldots$ die typischen Elemente von L und $d, e, f, \ldots$ die typischen Elemente von R sind.
3. *Anordnung.*

   Wir sagen genau dann $x \geq y$, falls kein $x^R \leq y$ und $x \leq$ keinem y^L.

   Wir sagen genau dann $x \not\leq y$, wenn $x \leq y$ nicht gilt.

   Wir sagen genau dann $x < y$, wenn $x \leq y$ und $y \not\leq x$.

   Wir sagen genau dann $x \leq y$, wenn $y \geq x$.

   Wir sagen genau dann $x > y$, wenn $y < x$.
4. *Gleichheit.* Wir sagen genau dann $x = y$, wenn $x \leq y$ und $y \leq x$.
5. *Rechenoperationen.*

$$\begin{aligned}
x + y &:= \{x^L + y,\ x + y^L \mid x^R + y,\ x + y^R\}. \\
-x &:= \{-x^R \mid -x^L\}. \\
x - y &:= x + (-y). \\
xy &:= \{x^L y + x y^L - x^L y^L,\ x^R y + x y^R - x^R y^R \mid \\
&\qquad\qquad x^L y + x y^R - x^L y^R,\ x^R y + x y^L - x^R y^L\}.
\end{aligned}$$

Literatur

J. H. Conway. *On Numbers and Games.* Zweite Auflage. A K Peters, 2001.

D. Knuth. *Surreal Numbers.* Addison Wesley, 1974.

C. Tøndering. *Surreal Numbers.* 2013. `http://www.tondering.dk/claus/sur16.pdf`

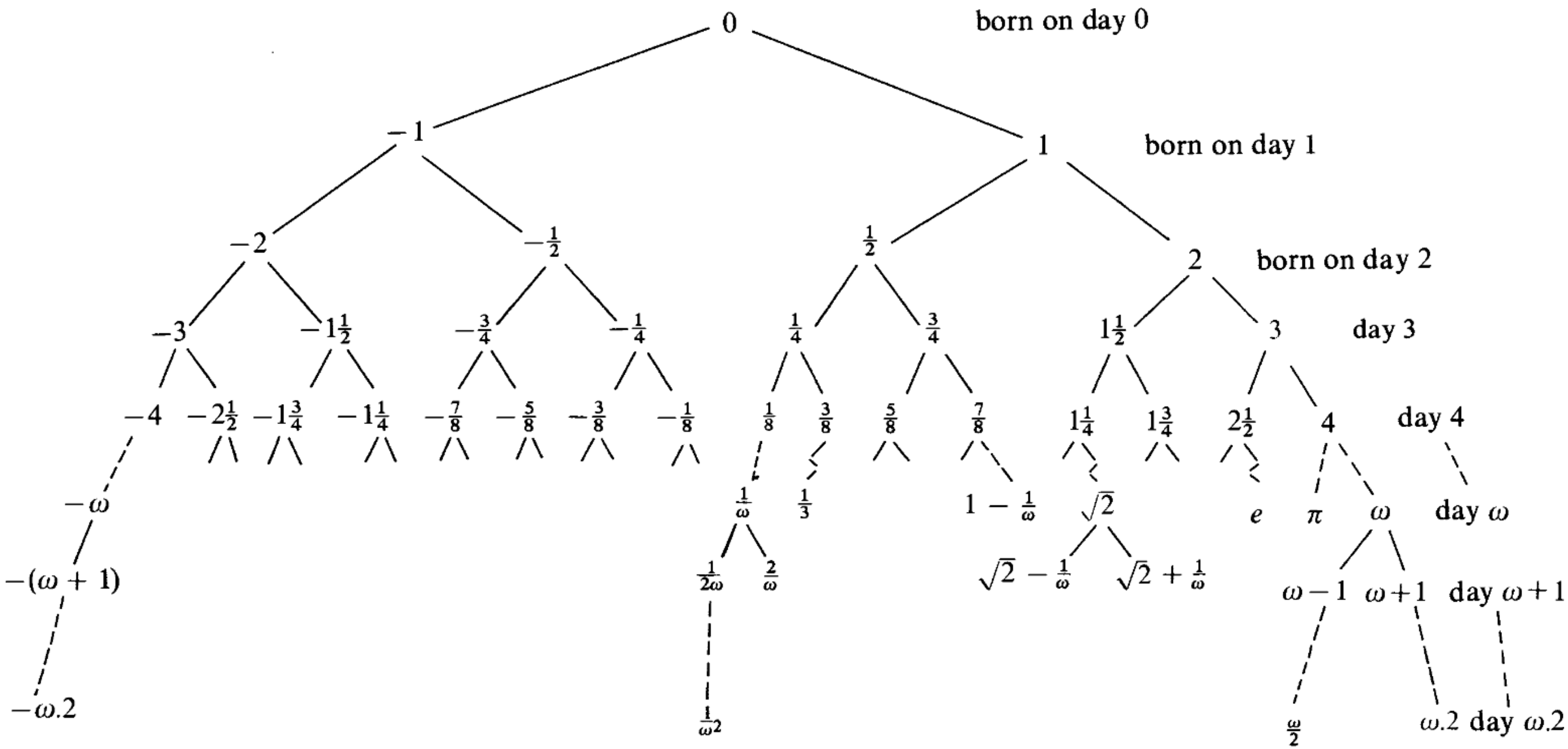

Abbildung 0 aus Conways Buch: Wann die ersten Zahlen geboren wurden.

Der kuriose Rechenbereich der surrealen Zahlen

Aufgabe 0. *Erste Beispiele für surreale Zahlen*

Zu Beginn ist uns keine einzige surreale Zahl bekannt. Trotzdem kennen wir eine *Menge* surrealer Zahlen: nämlich die leere Menge. So können wir nach dem Konstruktionsprinzip eine erste surreale Zahl bauen:

$$0 := \{ | \} \quad (\text{also } L = R = \emptyset)$$

Wir haben diese Zahl „0“ genannt, weil sie die Rolle der Null einnehmen wird. Mit dieser Zahl an der Hand können wir eine weitere surreale Zahl bauen:

$$1 := \{0 \, | \} \quad (\text{also } L = \{0\}, R = \emptyset)$$

a) Überzeuge dich davon, dass die so definierten Zahlen 0 und 1 wirklich surreale Zahlen sind, dass also die Voraussetzung in der Konstruktionsvorschrift jeweils erfüllt war.

b) Überprüfe, dass gemäß der Definitionen tatsächlich $0 \leq 1$ gilt.

c) Mit der bereits konstruierten Zahl 0 kann man insgesamt drei Ausdrücke angeben:

$$\{0 \, |\}, \quad \{| \, 0\}, \quad \{0 \mid 0\}.$$

Welche der beiden hinteren Ausdrücke sind Zahlen?

d) Sortiere alle bis jetzt gefundenen Zahlen und überlege dir so geeignete Bezeichnungen für die neuen Zahlen aus c).

e) Konstruiere ein paar weitere Zahlen, sortiere sie in die bereits gefundenen Zahlen ein und überlege dir geeignete Namen für sie.

Aufgabe 1. *Erste Rechnungen mit surrealen Zahlen (benötigt Aufgabe 0)*

a) Überprüfe, dass gemäß der Definitionen gilt: $0 + 0 = 0$.

b) Überprüfe, dass gemäß der Definitionen gilt: $0 + 1 = 1$.

c) Berechne $(-1) + 1$ und vergleiche das Ergebnis mit 0.

d) Erkläre, wieso im Lichte von Teilaufgabe b) die spezielle Gleichheitsregel nötig ist: Wieso nennt man zwei surreale Zahlen nicht einfach genau dann gleich, wenn ihre linken und rechten Mengen übereinstimmen?

Aufgabe 2. *Eine praktische Vereinfachungsregel (benötigt Aufgabe 0)*

Es gilt folgendes Lemma: Ohne den Zahlenwert zu verändern, kann man aus der linken Menge einer surrealen Zahl eine Zahl a entfernen, sofern es in der linken Menge noch eine größere Zahl als a gibt. Analog kann man aus der rechten Menge einer surrealen Zahl eine Zahl b entfernen, sofern es in der rechten Menge noch eine kleinere Zahl als b gibt.

a) Überzeuge dich davon, dass folgende Beispielrechnung stimmt:

$$\{0, 1, 2 \mid 6, 7, 11\} = \{0, 2 \mid 6\} = \{2 \mid 6\}.$$

b) Vereinfache nach Lust und Laune weitere Zahlen.

Aufgabe 3. *Geburtstage von Zahlen (benötigt Aufgabe 0)*

Der *Geburtstag* $b(x)$ einer surrealen Zahl ist wiederum eine surreale Zahl, definiert als

$$b(x) := \{b(x^L), b(x^R) \mid\}.$$

Wir sagen auch: „Die Zahl x wurde am Tag $b(x)$ geboren."

a) Überzeuge dich davon, dass die Zahl 0 am Tag 0 geboren wurde.

b) Berechne den Geburtstag von einigen surrealen Zahlen.

c) Wieso ergibt die Bezeichnung Sinn? (Vergleiche mit deiner Lösung von Aufgabe 1.)

⋆ d) Beweise, dass der Geburtstag einer Zahl stets ≥ 0 ist. (Geht einfacher mit Aufgabe 4.)

Aufgabe 4. *Zahlenwerte erraten (benötigt Aufgabe 3)*

Es gilt folgendes Lemma: Eine Zahl $x = \{x^L \mid x^R\}$ beschreibt die *einfachste* – das heißt *frühest geborene* – Zahl, die größer als alle x^L und kleiner als alle x^R ist.

a) Überprüfe, dass dieses Lemma bei den dir bereits bekannten Zahlen stimmt.

b) Errate mit dem Lemma die Werte folgender Zahlen (manche kennst du vielleicht auch schon):

$$\{1 \mid\}, \qquad \{2 \mid\}, \qquad \{-3, 1 \mid 2\}, \qquad \{0 \mid \tfrac{1}{2}\}, \qquad \{-1 \mid -\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2}\}.$$

Aufgabe 5. *Unendlich große Zahlen (benötigt Aufgabe 4)*

Wir definieren die surreale Zahl

$$\omega := \{0, 1, 2, \ldots \mid\}.$$

a) Überzeuge dich davon, dass ω wirklich eine surreale Zahl ist.

b) Zeige: Für jede natürliche Zahl n gilt $n < \omega$.

c) Berechne $\omega + 1$.

d) Berechne $\omega - 1$.

e) Zeige: Für jede natürliche Zahl n gilt $n < \omega - 1$.

Aufgabe 6. *Unmenge surrealer Zahlen (benötigt Aufgabe 0)*

In einem gewissen Sinn gibt es *zu viele* surreale Zahlen, als dass sie noch eine Menge bilden könnten; sie bilden nur noch etwas, was man *echte Klasse* nennt.

Zeige: Wenn die surrealen Zahlen doch eine Menge bilden würden, gäbe es eine surreale Zahl, die größer als alle surrealen Zahlen wäre, insbesondere also auch größer als sich selbst.

Kombinatorische Spiele

$0 = \{|\}$ $1 = \{0|\}$ $-1 = \{|0\}$ $* = \{0|0\}$

In diesem Abschnitt wollen wir rundenbasierte Zwei-Personen-Spiele betrachten, die von einem *linken* und einem *rechten Spieler* bestritten werden, keinerlei Zufallselemente enthalten und nicht mit verborgenen Informationen arbeiten: Alle möglichen Züge sind für beide Spieler erkennbar. Verlierer ist derjenige, der keinen Zug mehr tätigen kann.

Die jeweils vorliegenden Spielsituationen, genannt *Positionen*, wollen wir mathematisch mit sog. *Games* beschreiben, einer leichten Verallgemeinerung der surrealen Zahlen. Die Konstruktionsregel der Games ist im Vergleich zur surrealen Variante freigiebiger:

Konstruktionsregel für Games. Sind L und R Mengen von Games, so ist $\{L \mid R\}$ ebenfalls ein Game. Alle Games entstehen auf diese Art.

Die restlichen Regeln für Games sind dieselben wie für die surrealen Zahlen. Die linke Menge eines Games stellen wir uns als die Menge derjenigen Positionen vor, in die der linke Spieler ziehen darf, wenn er am Zug ist. Analog beschreibt die rechte Menge eines Games diejenigen Positionen, in die der rechte Spieler ziehen darf, wenn er am Zug ist.

Das einfachste Zwei-Personen-Spiel ist das sog. *Nullspiel*: Der Spieler, der an der Reihe ist, verliert sofort. In diesem Spiel haben also beide Spieler keine erlaubten Züge – die Menge ihrer erlaubten Züge sind also jeweils leer. Diese Situation wird daher durch das Game $\{|\} = 0$ beschrieben.

Die zweite Abbildung oben zeigt eine Spielsituation, in dem (ausgehend vom Wurzelknoten unten) der linke Spieler einen erlaubten Zug durchführen kann. Das soll die nach links geneigte Kante andeuten. Der rechte Spieler hat keinerlei erlaubte Züge. Daher ist die rechte Menge des zugehörigen Games leer. Die linke Menge enthält genau ein Element, nämlich das Game, das die Spielsituation nach Tätigung des einzigen erlaubten Zugs beschreibt. Da diese das Nullspiel ist, gilt also $L = \{0\}$. Somit beschreibt das Game $\{0 \mid\} = 1$ die Spielsituation.

Dual zu beschreibt das Game $\{\mid 0\} = -1$ eine Spielsituation, in dem der linke Spieler keinerlei erlaubte Züge hat (also sofort verliert, wenn er an der Reihe ist) und der rechte mit einem Zug in das Nullspiel ziehen darf.

Die Games 0, 1 und -1 sind sogar surreale Zahlen. Das Game, das die Spielsituation der vierten Abbildung oben beschreibt, ist daher unser erstes Beispiel für ein Game, das keine surreale Zahl ist. Beide Spieler haben genau einen erlaubten Zug, der jeweils zum Nullspiel führt. Als Kurzschreibweise definieren wir $\star := \{0 \mid 0\}$.

Aufgabe 7. *Gewinnstrategien bei den vier einfachsten Spielen*

Mache dir klar:

a) Im Spiel 1 gibt es eine Gewinnstrategie für Links – unabhängig davon, welcher Spieler beginnt.

b) Im Spiel -1 gibt es eine Gewinnstrategie für Rechts – unabhängig davon, welcher Spieler beginnt.

c) Im Spiel $\star$ gibt es eine Gewinnstrategie für beginnenden Spieler.

d) Im Spiel 0 gibt es eine Gewinnstrategie für den zweiten Spieler.

Jede surreale Zahl ist entweder > 0, $= 0$ oder < 0. Bei Games kann es vorkommen, dass keine dieser Möglichkeiten eintritt. Wir sagen dann, das Game sei *unklar* und schreiben „$\| 0$“. Allgemein gilt für ein Game G:

$G > 0$ genau dann, wenn es eine Gewinnstrategie für Links gibt.
$G < 0$ genau dann, wenn es eine Gewinnstrategie für Rechts gibt.
$G = 0$ genau dann, wenn es eine Gewinnstrategie für den zweiten Spieler gibt.
$G \| 0$ genau dann, wenn es eine Gewinnstrategie für den ersten Spieler gibt.

Aufgabe 8. *Gewinnstrategien bei allgemeinen Games*

a) Beweise, dass $\star \| 0$.

$\star$ b) Beweise die aufgeführten Beobachtungen über die Gewinnstrategie mittels Induktion.

Nimbers

Aufgabe 9. *Mex-Operation*

Ist S eine endliche Menge natürlicher Zahlen, so ist $\operatorname{mex} S$ die *kleinste* natürliche Zahl, die *nicht* in S liegt (minimum excludant).

a) Überzeuge dich von der Richtigkeit folgender Beispiele:

$$\operatorname{mex}\{0,1,4,7\} = 2, \quad \operatorname{mex}\{1,4,7\} = 0, \quad \operatorname{mex}\emptyset = 0.$$

b) Berechne das Mex von deiner Lieblingsteilmenge natürlicher Zahlen.

Aufgabe 10. *Nimber-Addition (benötigt Aufgabe 9)*

Die *Nimber-Addition* ist in mengentheoretischer Notation wie folgt rekursiv definiert:

$$n \oplus m := \operatorname{mex}\Big(\{n' \oplus m \,|\, n' < n\} \cup \{n \oplus m' \,|\, m' < m\}\Big).$$

Wenn man also den Wert von $n \oplus m$ herausfinden möchte, muss man zunächst die Werte von $n' \oplus m$ für alle kleineren Zahlen $n' < n$ und die Werte von $n \oplus m'$ für alle kleineren Zahlen $m' < m$ bestimmen. Der Wert von $n \oplus m$ ergibt sich dann als Mex dieser Zahlen.

a) Ergänze unten stehende Tabelle für die Nim-Addition.

$\star$ b) Wenn du schon die Beweistechnik der Induktion kennst, kannst du dich an folgenden Behauptungen für alle $n \in \mathbb{N}$ versuchen:

$$0 \oplus n = n$$
$$n \oplus n = 0$$

$n \setminus m$	0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
0	0	1	2						
1		0	3						
2									
3							4		
4			6						
5									
6									
7						2			
$\vdots$									

Aufgabe 11. *Interpretation der Nimber-Addition im Binärsystem (benötigt Aufgabe 10)*

Im gewöhnlichen Zehnersystem gibt es die Ziffern von 0 bis 9. Der Wert einer Ziffer ergibt sich von rechts nach links über die Zehnerpotenzen: Einer, Zehner, Hunderter, Tausender, usw. Das Binärsystem ist viel einfacher: Da gibt es nur die Ziffern 0 und 1. Der Wert einer Ziffer ergibt sich dann von rechts nach links über die Zweierpotenzen: Einer, Zweier, Vierer, Achter, Sechszehner, usw.

a) Überzeuge dich von der Richtigkeit folgender Beispiele:

$$3 = 11_2, \qquad 6 = 101_2, \qquad 10 = 1010_2, \qquad 16 = 10000_2.$$

b) Überlege dir, wie man im Binärsystem schriftlich addieren kann, und rechne einige Beispiele.

c) Die Nimber-Addition funktioniert nun genau wie die schriftliche Binäraddition, nur dass man *alle Überträge ignoriert*. Rechne mit dieser Einsicht so viele Einträge der Tabelle aus Aufgabe 10 nach, wie du magst.