Matheschülerzirkel
Universität Augsburg
Schuljahr 2013/2014
Klasse 11./12., Gruppe 2

Zirkelzettel vom 31. Mai 2014: Synthetische Differentialgeometrie

1 Einleitung

Eine *infinitesimale Zahl* ε ist eine Zahl, deren Quadrat Null ist: $\varepsilon^2 = 0$. In der gewöhnlichen mathematischen Welt gibt es nur eine einzige infinitesimale Zahl, nämlich die Zahl 0. Für gewisse Anwendungen wäre es aber schön, wenn es auch interessantere infinitesimale Zahlen gäbe. Ähnlich wie bei den komplexen Zahlen kann man solche Zahlen *künstlich* konstruieren; anders als bei den komplexen Zahlen muss man dafür aber gleich ein ganzes neues *mathematisches Universum* errichten.

Das Teilgebiet der Mathematik, in dem man solche Universen studiert, heißt *synthetische Differentialgeometrie* und ist ein relativ junges Forschungsgebiet. Erste Ideen gehen auf die alten Griechen und Versuche des dänischen Mathematikers Johannes Hjelmslev zurück (* 1873, † 1950), richtig initiiert wurde das Gebiet aber erst in den 1970er Jahren durch Anders Kock, ebenfalls Däne.

Im Folgenden werden wir lernen, wozu infinitesimale Zahlen nützlich sind; wie man in dem alternativen Universum arbeiten kann; und schließlich inwieweit Resultate, die man in der neuen mathematischen Welt erzielt, auch in der gewöhnlichen mathematischen Welt Gültigkeit haben. Ohne diesen letzten Punkt wäre unser Unterfangen ein reines Gedankenexperiment ohne Nutzen.

Dreh- und Angelpunkt für synthetische Differentialgeometrie ist ein Axiom, das *klassisch* – das heißt im gewöhnlichen mathematischen Universum – falsch ist:

Axiom der Mikroaffinität. Sei $\Delta := \{\varepsilon \in \mathbb{R} \,|\, \varepsilon^2 = 0\}$ die *infinitesimale Monade* um 0. Sei $f : \Delta \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion. Dann gibt es gewisse eindeutig bestimmte reelle Zahlen a und b, sodass für alle Zahlen ε in Δ folgende Gleichung gilt:

$$f(\varepsilon) = a + b\varepsilon.$$

Wir werden etwas Zeit benötigen, um zunächst die Aussage dieses Axioms zu verstehen und dann seine Konsequenzen zu überblicken.

2 Motivation für infinitesimale Zahlen

In Abbildung **??** sind zwei Situationen skizziert, bei denen sich jeweils zwei Kurven schneiden. (Gerade Linien zählen auch als *Kurven*.) Es ist offensichtlich, dass sich im ersten Bild die beiden Geraden in genau einem Punkt schneiden. Die Schnittsituation beim zweiten Bild ist dagegen weniger klar. In klassischer Mathematik konstatiert man, der Schnitt bestehe ebenfalls aus nur genau einem Punkt, nämlich dem Ursprung. In der Tat könnte man keinen weiteren Punkt benennen, der ebenfalls auf beiden Kurven liegen würde. Anschaulich scheint es aber ja doch einen Unterschied zu geben – man benötigt infinitesimale Zahlen, um ihn auf direkte Art und Weise mathematisch einzufangen.[1]

Aufgabe 1. *Schnittberechnung*

Die Gleichungen der beiden Kurven im ersten Bild sind

$$\begin{cases} y = 2x, & (1) \\ y = 0. & (2) \end{cases}$$

Die erste Gleichung gehört zur schrägen Gerade, die zweite zur x-Achse (auf der alle Punkte als y-Koordinate Null haben). Die Gleichungen der Kurven im zweiten Bild sind

$$\begin{cases} y = x^2, & (3) \\ y = 0. & (4) \end{cases}$$

a) Löse das erste Gleichungssystem, um zu beweisen: Der einzige Schnittpunkt $(x|y)$ hat die Koordinaten $x = 0$ und $y = 0$. Wieso entspricht das Schneiden der beiden Kurven rechnerisch der Lösungsmenge des kombinierten Gleichungssystems?

b) Löse das zweite Gleichungssystem, um zu beweisen, dass ein Punkt $(x|y)$ genau dann im Schnittbereich des zweiten Bilds liegt, wenn seine x-Koordinate Null und seine y-Koordinate eine infinitesimale Zahl ist (also $y^2 = 0$ erfüllt).

   Hierbei ist es wichtig, mit Absicht langsam zu rechnen, um nicht durch zu schnelles Vereinfachen die Pointe vorwegzunehmen. In klassischer Mathematik gilt die Regel „wenn $y^2 = 0$, dann auch $y = 0$”; erst mit dieser Regel vereinfacht sich das Ergebnis, dann zu demselben wie in Teilaufgabe a).

Infinitesimale Zahlen sind ferner in der Physik nützlich. Dort hat man es manchmal mit „sehr kleinen“ (aber nicht verschwindenden) Größen wie etwa Differenzen Δx zu tun. Da das Quadrat einer kleinen Zahl nochmals kleiner und „wirklich winzig“ ist, erlaubt man sich, in Rechnungen Quadrate von Δx einfach wegzulassen. Das ist mathematisch natürlich nicht zulässig – trotzdem haben die Physikerinnen und Physiker mit diesem Vorgehen offensichtlich großen Erfolg!

Mathematiker sollten die physikalischen Methoden nicht blind verurteilen, sondern sie ernst nehmen und Möglichkeiten finden, sie mathematisch sauber und rigoros zu verstehen. Infinitesimale Zahlen bieten eine solche Möglichkeit.sie ernst nehmen und Möglichkeiten finden, sie mathematisch sauber und rigoros zu verstehen. Infinitesimale Zahlen bieten eine solche Möglichkeit.

Aufgabe 2. *Quadrate großer und kleiner Zahlen*

a) Sei x eine reelle Zahl, die größer als 1 ist. Zeige: Das Quadrat x^2 ist größer als x.

[1] Indirekt geht es auch in klassischer Mathematik: Die Parabel hat bei der Stelle $x = 0$ eine *doppelte Nullstelle*. Das bedeutet, dass nicht nur der Funktionswert dort Null ist, sondern auch noch seine erste Ableitung.

b) Sei x eine reelle Zahl zwischen 0 und 1. Zeige: Das Quadrat x^2 ist kleiner als x.

Wenn die Dezimalentwicklung von x mit n Nullen nach dem Komma beginnt, mit etwa wie vielen Nullen beginnt dann die Dezimalentwicklung von x^2?

Infinitesimale Zahlen sind ferner fürs Differenzieren nützlich: Sie ermöglichen es nämlich, auf gewisse Grenzwertprozesse zu verzichten und gleichzeitig näher an der Anschauung zu bleiben. Zur Erinnerung wollen wir die übliche Definition der Ableitung rekapitulieren:

Definition 2.1. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$ eine Stelle. Falls der Grenzwert

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon}$$

existiert, so heißt f an der Stelle x_0 *differenzierbar* und die Ableitung $f'(x_0)$ ist per Definition dieser Grenzwert.

Aufgabe 3. *Intuition zum Differentialquotienten*

Erinnere dich, inwieweit der Bruch

$$\frac{f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon}$$

eine *Sekantensteigung* angibt, und erkläre anhand einer Skizze, wieso der Grenzwert für $\varepsilon \to 0$ anschaulich die Steigung der Tangente an den Graphen von f durch den Punkt $(x_0|f(x_0))$ angibt.

Um die Definition besser zu verstehen, wollen wir ohne Verwendung der bekannten Ableitungsregeln die Ableitung der Quadratfunktion bestimmen.

Proposition 2.2. *Die Quadratfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ ist überall differenzierbar mit Ableitung $f'(x) = 2x$.*

Beweis. In der Schule würde man in einer langen Gleichungskette die Definition so lange vereinfachen, bis der Grenzwert unmittelbar ablesbar ist. Dabei müsste man in jedem Schritt das lim-Symbol mitführen, würde das aber vielleicht auch oftmals vergessen. Übersichtlicher ist folgende Schreibweise:

$$\frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} = \frac{(x+\varepsilon)^2 - x^2}{\varepsilon} = \frac{x^2 + 2x\varepsilon + \varepsilon^2 - x^2}{\varepsilon} = 2x + \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 2x. \qquad \square$$

An diesem Beweis ist an sich nichts auszusetzen. Die Rechnung selbst ist genügend einfach, durch die Grenzwertüberlegung aber trotzdem logisch nicht ganz elementar. Die Physiker haben eine einfachere Möglichkeit, die Aussage zu „beweisen" – eine, die ohne Grenzwerte auskommt:

Physiker-Beweis. Sei ε „sehr klein". Dann gilt:

$$\frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} = \frac{(x+\varepsilon)^2 - x^2}{\varepsilon} = \frac{x^2 + 2x\varepsilon + \varepsilon^2 - x^2}{\varepsilon} = 2x + \varepsilon = 2x. \qquad \square$$

Bemerkenswert ist die schizophrene Natur dieses Arguments: Zum einen lässt man im letzten Schritt den Term ε einfach weg – mit der Begründung, ε sei schließlich „sehr klein“. Andererseits aber teilt man durch ε – das ginge nur, wenn man wüsste, dass ε positiv oder negativ, aber jedenfalls nicht Null ist.

Außerdem sollte man auch zu Beginn der Rechnung die Vereinfachung $f(x+\varepsilon) - f(x) = f(x) - f(x) = 0$ treffen dürfen, wenn man doch am Ende auch einfach ε weglassen durfte. Schließlich sollten sich die Rechengesetze nicht inmitten einer Rechnung ändern. Dann wäre das Ergebnis insgesamt $f'(x) = 0$ – das ist jedoch eine unsinnige Behauptung.

Aus diesen Gründen wird das Physiker-Argument in klassischer Mathematik nicht akzeptiert. Mit den infinitesimalen Zahlen aus synthetischer Differentialgeometrie werden wir aber in der Lage sein, die wesentlichen Ideen des Physiker-Arguments in einen mathematisch einwandfreien Beweis zu gießen. So können wir die Vorteile beider Welten – einfache Rechnungen einerseits und mathematische Rigorosität andererseits – vereinen.

Aufgabe 4. *Ableitung der Kubikfunktion*

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3$ die Kubikfunktion. Verifiziere direkt anhand der mathematischen Definition, dass f überall differenzierbar mit Ableitung $f'(x) = 3x^2$ ist.

Hinweis: Den Ausdruck $(x+\varepsilon)^3$ kann man entweder durch mehrmaliges Ausmultiplizieren oder direkt durch Verwendung der binomischen Formel für Kuben statt Quadrate vereinfachen. (Die Koeffizienten der allgemeinen binomischen Formel stehen im Pascalschen Dreieck.)

Aufgabe 5. *Beispiele für nicht differenzierbare Funktionen*

a) Die Betragsfunktion (siehe Abbildung **??**a) ist an der Stelle $x_0 = 0$ nicht differenzierbar. Anschaulich erkennt man das daran, dass der Graph am Punkt $(0|0)$ keine eindeutige Tangente besitzt.[2] Bestätige diese Beobachtung anhand der Definition über den Differentialquotienten: Die Sekantensteigungen konvergieren für $\varepsilon \to 0$ nicht gegen einen bestimmten Wert, sondern …

Wenn du möchtest, kannst du das auch noch rechnerisch nachvollziehen: Berechne den *links*- und den *rechtsseitigen* Grenzwert des Differenzenquotienten. Nutze dabei folgende Definition der Betragsfunktion:

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0, \\ -x, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

b) Es gibt auch Funktionen, deren Graphen keine offensichtlichen Knickpunkte haben und die trotzdem nicht überall differenzierbar sind. Erkläre anschaulich und zeige rechnerisch, dass folgende Funktion an der Stelle $x_0 = 0$ nicht differenzierbar ist (siehe Abbildung **??**b):

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

(Diese Funktion ist übrigens durchaus *stetig*.)

[2] Man kann an dieser Stelle durchaus Geraden anlegen, es gibt aber keine besonders überzeugende Wahl einer *berührenden* Gerade. Fortgeschrittene Differentialrechnung wird mit dieser Uneindeutigkeit fertig, durch den Begriff der *Subgradienten* von konvexen Funktionen.