Matheschülerzirkel
Universität Augsburg
Schuljahr 2013/2014
Klasse 11./12., Gruppe 2

Zirkelzettel vom 21. Dezember 2013

Konventionen

Die *Menge der natürlichen Zahlen* ist $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Die *leere Menge* $\{\} = \emptyset$ enthält kein einziges Element.

Alle Elemente der Menge der Elefanten in diesem Raum können π auswendig.

Regeln für surreale Zahlen

1. *Konstruktionsprinzip.* Sind L und R Mengen surrealer Zahlen und ist kein Element von $L \geq$ irgendeinem Element von R, so ist $\{L \mid R\}$ ebenfalls eine surreale Zahl. Alle surrealen Zahlen entstehen auf diese Art.
2. *Notation.* Für $x = \{L \mid R\}$ bezeichnen wir ein typisches Element von L mit „x^L", ein typisches Element von R mit „x^R". (Das hat mit Potenzieren nichts zu tun.) Wenn wir „$\{a, b, c, \ldots \mid d, e, f, \ldots\}$" schreiben, meinen wir die Zahl $\{L \mid R\}$, sodass $a, b, c, \ldots$ die typischen Elemente von L und $d, e, f, \ldots$ die typischen Elemente von R sind.
3. *Anordnung.*

   Wir sagen genau dann $x \geq y$, falls kein $x^R \leq y$ und $x \leq$ keinem y^L.

   Wir sagen genau dann $x \not\leq y$, wenn $x \leq y$ nicht gilt.

   Wir sagen genau dann $x < y$, wenn $x \leq y$ und $y \not\leq x$.

   Wir sagen genau dann $x \leq y$, wenn $y \geq x$.

   Wir sagen genau dann $x > y$, wenn $y < x$.
4. *Gleichheit.* Wir sagen genau dann $x = y$, wenn $x \leq y$ und $y \leq x$.
5. *Rechenoperationen.*

$$\begin{aligned}
x + y &:= \{x^L + y,\ x + y^L \mid x^R + y,\ x + y^R\}. \\
-x &:= \{-x^R \mid -x^L\}. \\
x - y &:= x + (-y). \\
xy &:= \{x^L y + x y^L - x^L y^L,\ x^R y + x y^R - x^R y^R \mid \\
&\qquad x^L y + x y^R - x^L y^R,\ x^R y + x y^L - x^R y^L\}.
\end{aligned}$$

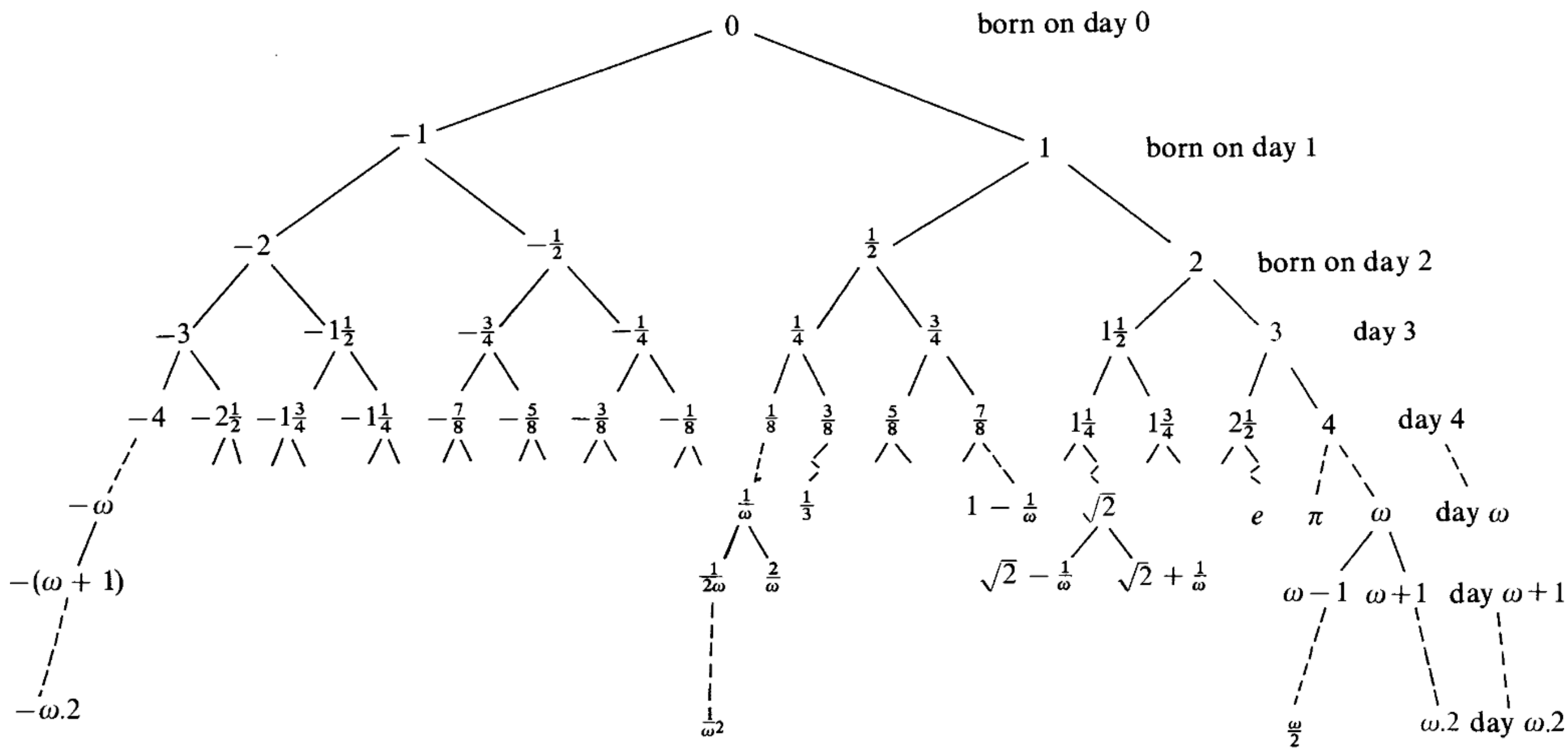


Abbildung 0 aus Conways Buch: Wann die ersten Zahlen geboren wurden.

Literatur:

J. H. Conway. *On Numbers and Games.* Zweite Auflage. A K Peters, 2001.

D. Knuth. *Surreal Numbers.* Addison Wesley, 1974.

C. Tøndering. *Surreal Numbers.* 2013. `http://www.tondering.dk/claus/sur16.pdf`

Der kuriose Rechenbereich der surrealen Zahlen

Aufgabe 0. *Erste Beispiele für surreale Zahlen*

Zu Beginn ist uns keine einzige surreale Zahl bekannt. Trotzdem kennen wir eine *Menge* surrealer Zahlen: nämlich die leere Menge. So können wir nach dem Konstruktionsprinzip eine erste surreale Zahl bauen:

$$0 := \{|\} \quad (\text{also } L = R = \emptyset)$$

Wir haben diese Zahl „0“ genannt, weil sie die Rolle der Null einnehmen wird. Mit dieser Zahl an der Hand können wir eine weitere surreale Zahl bauen:

$$1 := \{0\,|\} \quad (\text{also } L = \{0\}, R = \emptyset)$$

a) Überzeuge dich davon, dass die so definierten Zahlen 0 und 1 wirklich surreale Zahlen sind, dass also die Voraussetzung in der Konstruktionsvorschrift jeweils erfüllt war.

b) Überprüfe, dass gemäß der Definitionen tatsächlich $0 \leq 1$ gilt.

c) Mit der bereits konstruierten Zahl 0 kann man insgesamt drei Ausdrücke angeben:

$$\{0\,|\}, \quad \{|\,0\}, \quad \{0 \mid 0\}.$$

Welche der beiden hinteren Ausdrücke sind Zahlen?

d) Sortiere alle bis jetzt gefundenen Zahlen und überlege dir so geeignete Bezeichnungen für die neuen Zahlen aus c).

e) Konstruiere ein paar weitere Zahlen, sortiere sie in die bereits gefundenen Zahlen ein und überlege dir geeignete Namen für sie.

Aufgabe 1. *Erste Rechnungen mit surrealen Zahlen (benötigt Aufgabe 0)*

a) Überprüfe, dass gemäß der Definitionen gilt: $0 + 0 = 0$.

b) Überprüfe, dass gemäß der Definitionen gilt: $0 + 1 = 1$.

c) Berechne $(-1) + 1$ und vergleiche das Ergebnis mit 0.

d) Erkläre, wieso im Lichte von Teilaufgabe c) die spezielle Gleichheitsregel nötig ist: Wieso nennt man zwei surreale Zahlen nicht einfach genau dann gleich, wenn ihre linken und rechten Mengen übereinstimmen?

e) Berechne $1+1$, berechne $(1+1)+1$ und so weiter (so lange du magst). Die Ergebnisse nennen wir fortan 2, 3 und so weiter.

Aufgabe 2. *Eine praktische Vereinfachungsregel (benötigt Aufgabe 0)*

Es gilt folgendes Lemma: Ohne den Zahlenwert zu verändern, kann man aus der linken Menge einer surrealen Zahl eine Zahl a entfernen, sofern es in der linken Menge noch eine größere Zahl als a gibt. Analog kann man aus der rechten Menge einer surrealen Zahl eine Zahl b entfernen, sofern es in der rechten Menge noch eine kleinere Zahl als b gibt.

a) Überzeuge dich davon, dass folgende Beispielrechnung stimmt:

$$\{0, 1, 2 \mid 6, 7, 11\} = \{0, 2 \mid 6\} = \{2 \mid 6\}.$$

b) Vereinfache nach Lust und Laune weitere Zahlen.

Aufgabe 3. *Geburtstage von Zahlen (benötigt Aufgabe 0)*

Der *Geburtstag* $b(x)$ einer surrealen Zahl ist wiederum eine surreale Zahl, definiert als

$$b(x) := \{b(x^L), b(x^R) \mid\}.$$

Wir sagen auch: „Die Zahl x wurde am Tag $b(x)$ geboren."

a) Überzeuge dich davon, dass die Zahl 0 am Tag 0 geboren wurde.

b) Berechne den Geburtstag von einigen surrealen Zahlen.

c) Wieso ergibt die Bezeichnung Sinn? (Vergleiche mit deiner Lösung von Aufgabe 0.)

d) Beweise, dass der Geburtstag einer surrealen Zahl wirklich eine surreale Zahl ist.

Bemerkung. Vielleicht hast du in deiner Bearbeitung von Teilaufgabe b) gesehen, dass der Geburtstag zweier verschieden aussehender, aber trotzdem gleicher surrealen Zahlen nicht gleich ist. Das ist ein Manko an obiger Definition des Geburtstags.

Aufgabe 4. *Zahlenwerte erraten (benötigt Aufgabe 3)*

Es gilt folgendes Lemma: Eine Zahl $x = \{x^L \mid x^R\}$ beschreibt die *einfachste* – das heißt *frühest geborene* – Zahl, die größer als alle x^L und kleiner als alle x^R ist.

a) Überprüfe, dass dieses Lemma bei den dir bereits bekannten Zahlen stimmt.

b) Errate mit dem Lemma die Werte folgender Zahlen (manche kennst du vielleicht auch schon):

$$\{1 \mid\}, \qquad \{2 \mid\}, \qquad \{-3, 1 \mid 2\}, \qquad \{0 \mid \tfrac{1}{2}\}, \qquad \{-1 \mid -\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2}\}.$$

Aufgabe 5. *Rechtfertigung einer Bezeichnung (benötigt Aufgabe 1)*

Wir definieren $\frac{1}{2} := \{0 \mid 1\}$. In dieser Aufgabe wollen wir diese Bezeichnung rechtfertigen.

a) Berechne $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ gemäß der Definitionen.

b) Beweise, dass das Ergebnis aus Teilaufgabe a) gleich $1 = \{0 \mid\}$ ist.

   Tipp. Wenn du Zeit sparen möchtest, kannst du dazu das Lemma aus Aufgabe 4 verwenden. Streng genommen ist das aber ein gefährlicher Handel: Denn hier haben wir ja keinen Beweis dieses Lemmas diskutiert. Deine Rechnung basiert dann daher auf der Annahme, dass ich das Lemma richtig angegeben habe.

Bemerkung. Längere Rechnungen überlässt man lieber dem Computer, als sie per Hand durchzuführen.

Aufgabe 6. *Unendlich große Zahlen (benötigt Aufgabe 4)*

Wir definieren die surreale Zahl $\omega := \{0, 1, 2, \dots \mid\}$.

a) Überzeuge dich davon, dass ω wirklich eine surreale Zahl ist.

b) Zeige: Für jede natürliche Zahl n gilt $n < \omega$.

c) Berechne $\omega + 1$.

d) Berechne $\omega - 1$.

e) Zeige: Für jede natürliche Zahl n gilt $n < \omega - 1$.

Aufgabe 7. *Unendlich kleine Zahlen (benötigt Aufgabe 4)*

Wir definieren die surreale Zahl $\varepsilon := \{0 \mid 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\}$.

a) Überzeuge dich davon, dass ε wirklich eine surreale Zahl ist.

b) Beweise: Die Zahl ε ist größer als 0, aber kleiner als jede gewöhnliche positive reelle Zahl. Dabei darfst du verwenden, dass jede reelle Zahl in einem geeigneten Sinn auch als surreale Zahl angesehen werden kann und dass zu jeder positiven reellen Zahl r eine Zweierpotenz n mit $\frac{1}{n} < r$ existiert.

c) Bewundere Ausdrücke wie $\omega + \varepsilon$, $\omega \cdot \varepsilon$, ε^2, $\frac{1}{\omega}$, $\frac{1}{\varepsilon}$. Gib Vermutungen ab, wo sich diese Zahlen auf der surrealen Zahlengerade einordnen lassen.

Aufgabe 8. *Induktionsbeweise mit surrealen Zahlen (benötigt Aufgabe 0)*

Wenn man für *alle* surrealen Zahlen $x = \{x^L \mid x^R\}$ eine bestimmte Aussage beweisen möchte, kann man dazu so vorgehen: *Unter der Annahme, dass die Aussage für alle x^L und alle x^R schon stimmt, zeigt man, dass sie auch für x stimmt.* Dieses Beweisprinzip heißt auch *Induktion* und ermöglicht, in einem Aufwasch eine Behauptung für alle surrealen Zahlen zu beweisen.

Auf den ersten Blick scheint dieses Prinzip zirkulär – man kann doch nicht das, was man beweisen möchte, schon voraussetzen! Tatsächlich aber ist dieses Beweisprinzip durchaus gerechtfertigt. Das wollen wir in dieser Aufgabe verstehen.

a) Welche besondere Annahme darf man laut Induktionsprinzip treffen, wenn man den Fall $x = 0 = \{|\}$ beweisen möchte?

b) Im Sinn von Aufgabe 3 sind für jede Zahl $x = \{x^L \mid x^R\}$ die Zahlen x^L und x^R schon *an früheren Tagen* konstruiert worden. Mache dir mit dieser Erkenntnis und Teilaufgabe a) klar, dass das Induktionsprinzip zulässig ist.

c) Wenn du das Induktionsprinzip für natürliche Zahlen schon kennst, wunderst du dich vielleicht, dass man hier nur eine Art Induktionsschritt, aber keinen Induktionsanfang benötigt. Wieso ist trotzdem alles in Ordnung?

Aufgabe 9. *Beispiele für Induktionsbeweise (benötigt das Prinzip aus Aufgabe 8)*

a) Beweise für alle surrealen Zahlen x: $x + 0 = x$.

b) Beweise für alle surrealen Zahlen x: $x \cdot 0 = 0$.

c) Beweise für alle surrealen Zahlen x: $x \geq x$.

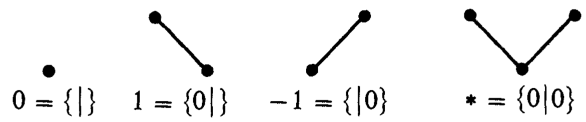
d) Beweise für alle surrealen Zahlen x und y: $x + y = y + x$.

Aufgabe 10. *Unmenge surrealer Zahlen (benötigt Aufgabe 0)*

In einem gewissen Sinn gibt es *zu viele* surreale Zahlen, als dass sie noch eine Menge bilden könnten; sie bilden nur noch etwas, was man *echte Klasse* nennt.

Zeige: Wenn die surrealen Zahlen doch eine Menge bilden würden, gäbe es eine surreale Zahl, die größer als alle surrealen Zahlen wäre, insbesondere also auch größer als sich selbst.

Kombinatorische Spiele



In diesem Abschnitt wollen wir rundenbasierte Zwei-Personen-Spiele betrachten, die von einem *linken* und einem *rechten Spieler* bestritten werden, keinerlei Zufallselemente enthalten und nicht mit verborgenen Informationen arbeiten: Alle möglichen Züge sind für beide Spieler erkennbar. Verlierer ist derjenige, der keinen Zug mehr tätigen kann. Das Mühlespiel ist etwa ein solches Spiel, Fußball und viele Kartenspiele nicht.

Die jeweils vorliegenden Spielsituationen, genannt *Positionen*, wollen wir mathematisch mit sog. *Games* beschreiben, einer leichten Verallgemeinerung der surrealen Zahlen. Die Konstruktionsregel der Games ist im Vergleich zur surrealen Variante freigiebiger:

Konstruktionsregel für Games. Sind L und R Mengen von Games, so ist $\{L \mid R\}$ ebenfalls ein Game. Alle Games entstehen auf diese Art.

Die restlichen Regeln für Games sind dieselben wie für die surrealen Zahlen, und das Induktionsprinzip (siehe Aufgabe 8) gilt ebenfalls.

Die linke Menge eines Games stellen wir uns als die Menge derjenigen Positionen vor, in die der linke Spieler ziehen darf, wenn er am Zug ist. Analog beschreibt die rechte Menge eines Games diejenigen Positionen, in die der rechte Spieler ziehen darf, wenn er am Zug ist. Fortan wollen wir den linken Spieler auch einfach *Links* und den rechten *Rechts* nennen.

Das einfachste Zwei-Personen-Spiel ist das sog. *Nullspiel*: Der Spieler, der an der Reihe ist, verliert sofort. In diesem Spiel haben also beide Spieler keine erlaubten Züge – die Menge ihrer erlaubten Züge sind also jeweils leer. Diese Situation wird daher durch das Game $\{|\} = 0$ beschrieben.

Die zweite Abbildung oben zeigt eine Spielsituation, in dem (ausgehend vom Wurzelknoten unten) Links einen erlaubten Zug durchführen kann. Das soll die nach links geneigte Kante andeuten. Rechts hat keinerlei erlaubte Züge. Daher ist die rechte Menge des zugehörigen Games leer. Die linke Menge enthält genau ein Element, nämlich das Game, das die Spielsituation nach Tätigung des einzigen erlaubten Zugs beschreibt. Da diese das Nullspiel ist, gilt also $L = \{0\}$. Somit beschreibt das Game $\{0\ |\} = 1$ die Spielsituation.

Dual dazu beschreibt das Game $\{|\ 0\} = -1$ eine Spielsituation, in dem Links keinerlei erlaubte Züge hat (also sofort verliert, wenn er oder sie an der Reihe ist) und Rechts mit einem Zug in das Nullspiel ziehen darf, in dem dann Links verliert, da Links keinen Zug mehr tätigen kann.

Die Games 0, 1 und -1 sind sogar surreale Zahlen. Das Game, das die Spielsituation der vierten Abbildung oben beschreibt, ist daher unser erstes Beispiel für ein Game, das keine surreale Zahl ist. Beide Spieler haben genau einen erlaubten Zug, der jeweils zum Nullspiel führt. Als Kurzschreibweise definieren wir $\star := \{0 \mid 0\}$.

Aufgabe 11. *Gewinnstrategien bei den vier einfachsten Spielen*

Mache dir klar:

a) Im Spiel 1 gibt es eine Gewinnstrategie für Links – unabhängig davon, welcher Spieler beginnt.

b) Im Spiel -1 gibt es eine Gewinnstrategie für Rechts – unabhängig davon, welcher Spieler beginnt.

c) Im Spiel $\star$ gibt es eine Gewinnstrategie für den beginnenden Spieler, wer immer das auch sein mag.

d) Im Spiel 0 gibt es eine Gewinnstrategie für den zweiten Spieler.

Jede surreale Zahl ist entweder > 0, $= 0$ oder < 0. Bei Games kann es vorkommen, dass keine dieser Möglichkeiten eintritt. Wir sagen dann, das Game sei *unklar* und schreiben „$\parallel 0$“. Allgemein gilt für ein Game G:

$G > 0$ genau dann, wenn es eine Gewinnstrategie für Links gibt.
$G < 0$ genau dann, wenn es eine Gewinnstrategie für Rechts gibt.
$G = 0$ genau dann, wenn es eine Gewinnstrategie für den zweiten Spieler gibt.
$G \parallel 0$ genau dann, wenn es eine Gewinnstrategie für den ersten Spieler gibt.

Aufgabe 12. *Gewöhnung an unklare Games (benötigt Aufgabe 11)*

Beweise rechnerisch, dass $\star \parallel 0$, beweise also, dass weder $\star \leq 0$ noch $\star \geq 0$ stimmt.

Aufgabe 13. *Gewinnstrategien bei allgemeinen Games (benötigt Aufgabe 11 und viel Ruhe)*

In dieser Aufgabe wollen wir verstehen, wieso für Games G aus > 0, < 0, $= 0$ bzw. $\parallel 0$ schon folgt, dass es eine Gewinnstrategie für Links, Rechts, den zweiten Spieler bzw. den ersten Spieler gibt. Dazu wollen wir diese Aussage über Induktion beweisen; sei also ein Game $G = \{G^L \mid G^R\}$ gegeben und gelte die zu zeigende Behauptung schon für alle Games G^L und G^R.

a) Überzeuge dich von folgenden Beziehungen:

$G > 0$ genau dann, wenn kein $G^R \leq 0$ und $0 \leq$ einem G^L.
$G < 0$ genau dann, wenn $0 \leq$ keinem G^L und ein $G^R \leq 0$.
$G = 0$ genau dann, wenn $0 \leq$ keinem G^L und kein $G^R \leq 0$.
$G \parallel 0$ sonst.

b) Nun wollen wir in jedem der vier Fälle zeigen, dass tatsächlich eine Gewinnstrategie wie behauptet existiert. Vervollständige folgenden Beweisansatz für den Fall $G > 0$:

Falls $G > 0$: Dann ist zu zeigen, dass Links eine Gewinnstrategie besitzt. Falls Links beginnt, so kann er in eine Position $G^L \geq 0$ ziehen. Diese neue Position ist also > 0 oder $= 0$. Im ersten Fall hat er nach Induktionsvoraussetzung eine Gewinnstrategie. Im zweiten Fall hat nach Induktionsvoraussetzung der zweite Spieler eine Gewinnstrategie – dieser ist auch gerade Links. Falls Rechts beginnt, so ...

c) Führe auf ähnliche Art und Weise Beweise in den drei restlichen Fällen. (Der Fall $G \parallel 0$ ist der schwerste.)

Aufgabe 14. *Interpretation der Negation (benötigt Aufgabe 11)*

a) Mache dir klar: Wird eine Spielsituation durch ein Game $G = \{G^L \mid G^R\}$ beschrieben, so beschreibt $-G = \{-G^R \mid -G^L\}$ dieselbe Spielsituation, wobei aber die Rollen des linken und rechten Spielers für den ersten und alle weiteren Züge genau vertauscht sind.

b) Erkläre, wieso die Negation eines unklaren Games wieder ein unklares Game ist.

Aufgabe 15. *Interpretation der Addition (benötigt Aufgabe 11)*

a) Mache dir klar: Werden zwei Spielsituationen durch Games $G = \{G^L \mid G^R\}$ und $H = \{H^L \mid H^R\}$ beschrieben, so beschreibt die Summe $G + H = \{G^L + H,\ G + H^L \mid G^R + H,\ G + H^R\}$ folgende Situation: Die Spiele zu G und H liegen auf dem Tisch. Der beginnende Spieler darf sich nach Belieben eines der beiden Spiele aussuchen und dort einen für ihn erlaubten Zug tätigen. Danach darf der zweite Spieler im gleichen oder im anderen Spiel einen Zug tätigen. Auf diese Weise machen die beiden Spieler so lange weiter, bis einer der Spieler in keinem der beiden Einzelspiele einen Zug tätigen kann; dann hat dieser verloren.

b) Illustriere das Game $1 + 1$.

c) Illustriere das Game $1 + (-1)$ und mache dir klar, dass es spieltechnisch gleich dem Nullspiel ist.

d) Illustriere das Game $\star + \star$ und mache dir klar, dass auch dieses Game spieltechnisch gleich dem Nullspiel ist.

Aufgabe 16. *Interpretation von $G - G$ (benötigt Aufgaben 14 und 15)*

Beweise, dass für jedes Game G das Game $G - G = G + (-G)$ spieltechnisch gleich dem Nullspiel ist.

Weitere Aufgaben werden folgen.

Nimbers

Aufgabe 17. *Mex-Operation*

Ist S eine endliche Menge natürlicher Zahlen, so ist $\operatorname{mex} S$ die *kleinste* natürliche Zahl, die *nicht* in S liegt (minimum excludant).

a) Überzeuge dich von der Richtigkeit folgender Beispiele:

$$\operatorname{mex}\{0, 1, 4, 7\} = 2, \quad \operatorname{mex}\{1, 4, 7\} = 0, \quad \operatorname{mex}\emptyset = 0.$$

b) Berechne das Mex von deiner Lieblingsteilmenge natürlicher Zahlen.

Aufgabe 18. *Nimber-Addition (benötigt Aufgabe 17)*

Die *Nimber-Addition* ist in mengentheoretischer Notation wie folgt rekursiv definiert:

$$n \oplus m := \operatorname{mex}\Big(\{n' \oplus m \,|\, n' < n\} \cup \{n \oplus m' \,|\, m' < m\}\Big).$$

Wenn man also den Wert von $n \oplus m$ herausfinden möchte, muss man zunächst die Werte von $n' \oplus m$ für alle kleineren Zahlen $n' < n$ und die Werte von $n \oplus m'$ für alle kleineren Zahlen $m' < m$ bestimmen. Der Wert von $n \oplus m$ ergibt sich dann als Mex dieser Zahlen.

a) Ergänze unten stehende Tabelle für die Nim-Addition.

$\star$ b) Wenn du die Beweistechnik der Induktion für natürliche Zahlen kennst, kannst du dich beweisen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $0 \oplus n = n$.

$n \setminus m$	0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
0	0	1	2						
1		0	3						
2									
3							4		
4			6						
5									
6									
7						2			
$\vdots$									

Aufgabe 19. *Interpretation der Nimber-Addition im Binärsystem (benötigt Aufgabe 18)*

Im gewöhnlichen Zehnersystem gibt es die Ziffern von 0 bis 9. Der Wert einer Ziffer ergibt sich von rechts nach links über die Zehnerpotenzen: Einer, Zehner, Hunderter, Tausender, usw. Das Binärsystem ist viel einfacher: Da gibt es nur die Ziffern 0 und 1. Der Wert einer Ziffer ergibt sich dann von rechts nach links über die Zweierpotenzen: Einer, Zweier, Vierer, Achter, Sechzehner, usw. Schreibt man eine Zahl im Binärsystem, so macht man das durch einen nachgestellten Index deutlich.

a) Überzeuge dich von der Richtigkeit folgender Beispiele:

$$3 = 11_2, \qquad 6 = 101_2, \qquad 10 = 1010_2, \qquad 16 = 10000_2.$$

b) Überlege dir, wie man im Binärsystem schriftlich addieren kann, und rechne einige Beispiele.

c) Die Nimber-Addition funktioniert nun genau wie die schriftliche Binäraddition, nur dass man *alle Überträge ignoriert*. Rechne mit dieser Einsicht so viele Einträge der Tabelle aus Aufgabe 18 nach, wie du magst.

Weitere Aufgaben werden folgen. Insbesondere werden wir den Zusammenhang zu surrealen Zahlen klären und unendliche Spiele behandeln.