



## Zirkelzettel vom 30. November 2013

### Aufgabe 1. Goldener Schnitt

Der *goldene Schnitt* ist die positive Lösung der quadratischen Gleichung

$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0.$$

- Stelle  $\Phi$  als Wurzel ausdruck dar.
- Weise folgende kuriose Beziehungen nach:  $\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$ ,  $(1/\Phi)^2 = 1 - (1/\Phi)$ .
- Informiere dich über geometrische Interpretationen von  $\Phi$ .

### Aufgabe 2. Geometrische Reihe

- Beweise folgende Summenformel für Potenzen einer beliebigen Zahl  $q$ :

$$q^0 + q^1 + q^2 + \cdots + q^{n-2} + q^{n-1} + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

*Tipp:* Multipliziere beide Seiten mit  $(1 - q)$ .

- Sei  $0 \leq q < 1$ . Mache folgende Formel über eine *unendliche Summe* plausibel:

$$q^0 + q^1 + q^2 + \cdots = \frac{1}{1 - q}.$$

- Gilt diese Formel auch, wenn  $-1 < q \leq 0$ ?
- Was passiert bei  $q \geq 1$  oder  $q \leq -1$ ?
- Berechne  $q^2 + q^3 + \cdots$  im Spezialfall  $q := 1/\Phi$ . (Konventionsgemäß gilt  $q^0 := 1$ .)

### Aufgabe 3. Conways Armee

Ein unendlich ausgedehntes Damebrett sei in zwei Hälften zerteilt (siehe Rückseite). Im unteren Teil darf man beliebig viele Damesteine platzieren. Ziel des Spiels ist es, einen Damestein möglichst hoch in das obere Spielfeld zu bringen. Dabei darf nur folgender Spielzug angewendet werden: Ein Stein darf einen (horizontal oder vertikal) benachbarten Stein überspringen, wenn das Zielfeld unbesetzt ist. Der übersprungene Stein wird dann aus dem Spiel entfernt.

- Mit wie vielen Steinen in der unteren Bretthälfte muss man beginnen, um Höhe 1, Höhe 2, Höhe 3 oder Höhe 4 über der Trennlinie zu erreichen?

Wenn ein Stein die „Taxi“-Entfernung  $n$  zum angepeilten Zielstein hat, weisen wir ihm den Wert  $x^n$  zu. Dabei ist  $x$  eine Konstante, die wir später festlegen werden. Der angepeilte Zielstein selbst hat also den Wert  $x^0 = 1$ , seine vier unmittelbaren Nachbarn haben den Wert  $x^1 = x$ .

- Wie ändert sich die Summe der Steinwerte bei einem Zug? (Unterscheide drei Arten von Sprüngen.)

Wir setzen nun  $x := 1/\Phi$ , wobei  $\Phi$  der goldene Schnitt aus Aufgabe 1 ist.

- ★ c) Berechne den Gesamtwert einer *vollständig mit Steinen besetzten Zeile*, die sich eine Ebene unterhalb des Zielsteins befindet.
- ★ d) Was ist der Gesamtwert einer *vollständig besetzten unteren Bretthälfte*?
- ★ e) Folgere: Höhe 5 ist nur mit unendlich vielen Steinen erreichbar.
- ★ f) Vielleicht möchtest du Conways Armee im Computer implementieren.

