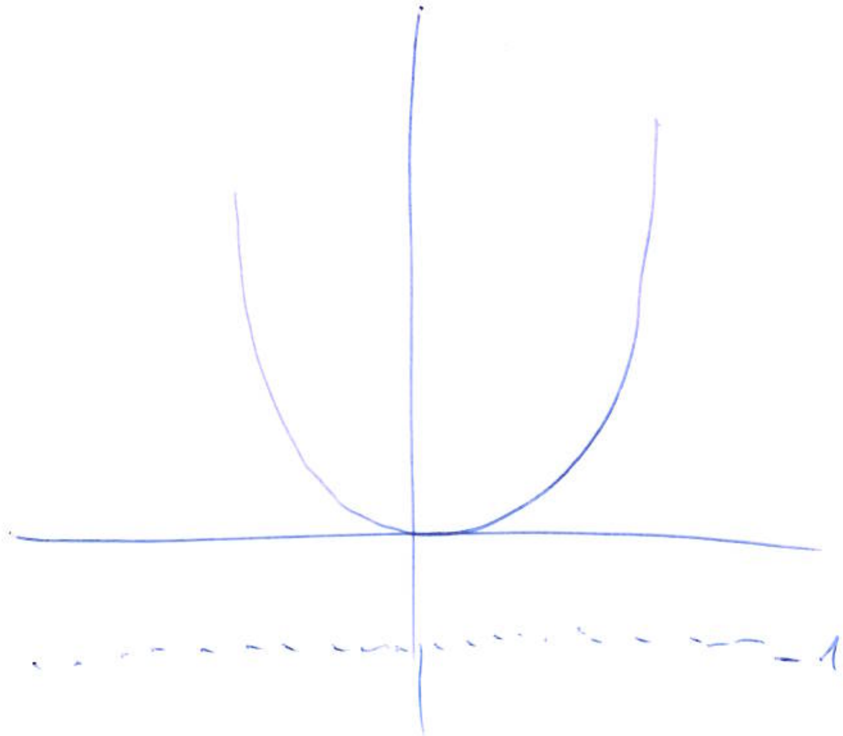
Komplexe Zahlen

~1700

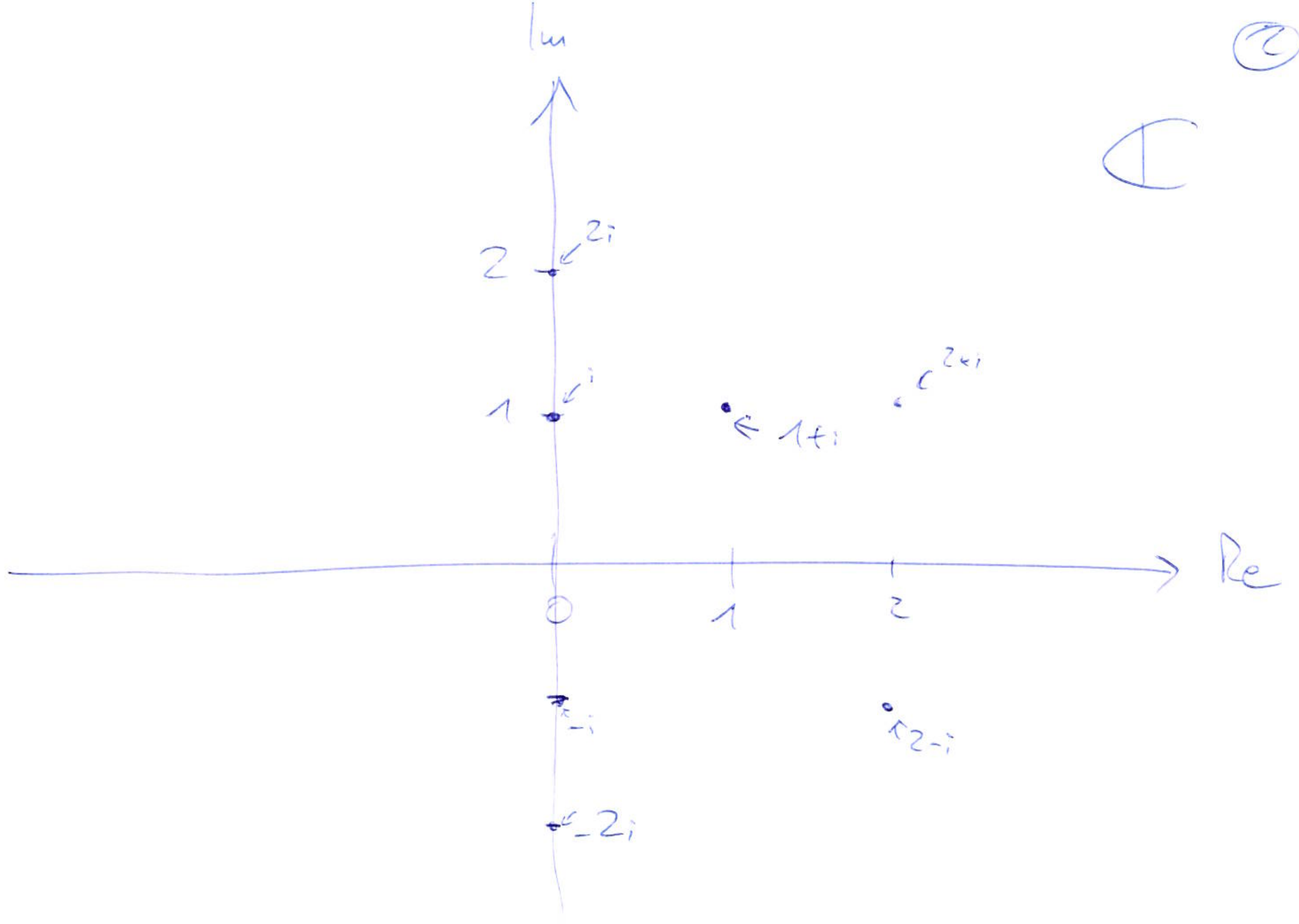
$$x^2 = -1$$

Neue Zahl erfinden:

i $\boxed{i^2 = -1}$



$\mathbb{C}$



Quaternionen 4D-Zahlen Hamilton

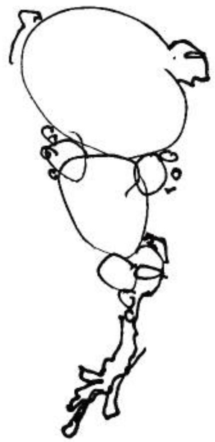
Oktaven 8D-Zahlen Cayley

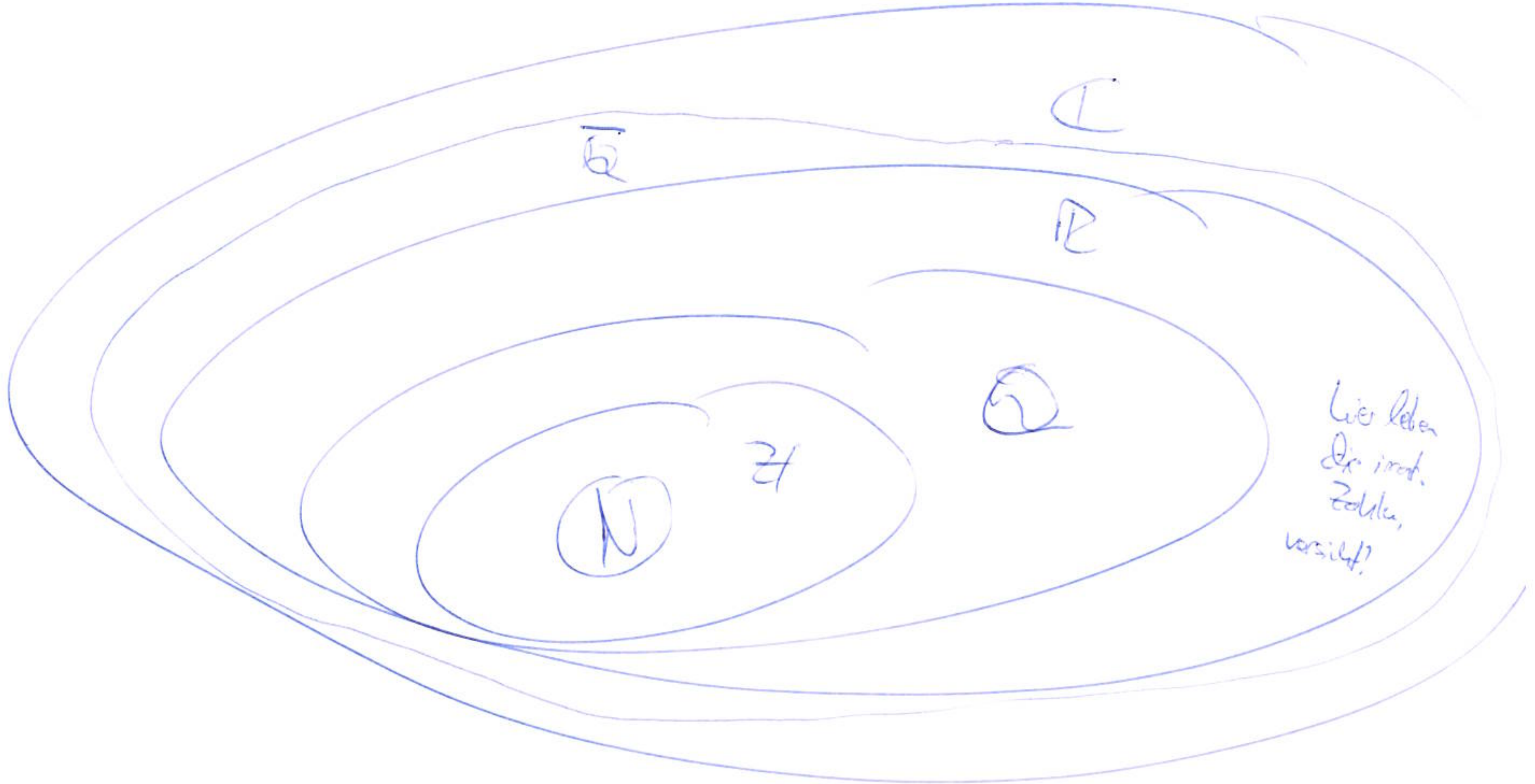
falls man an best. Gesetzen hängt

nur 1D, 2D, 4D, 8D: Satz von Hurwitz

mit bestem Dank
an Alex! ♡

Bsp.: $2, \; 17, \; 3-5i, \; 7i \in \mathbb{C}$

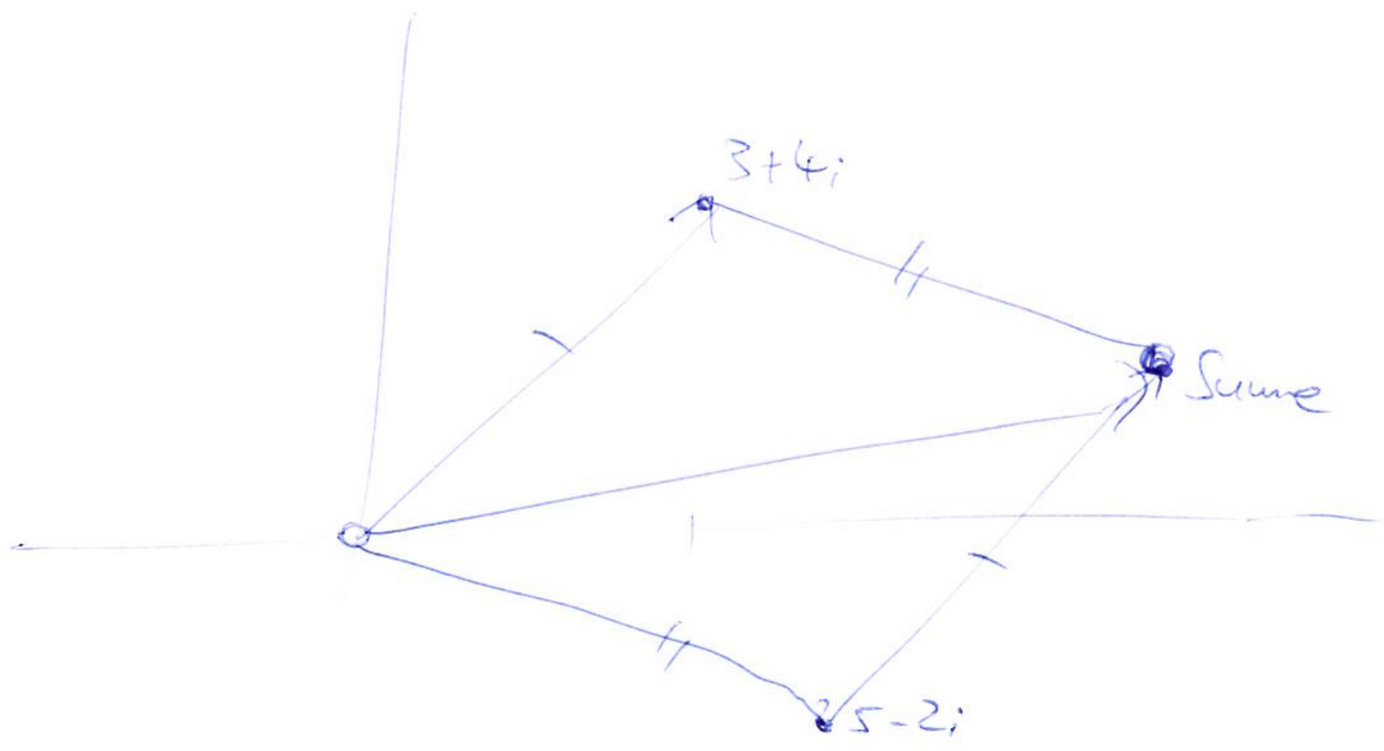




Def.: $7 + 30 \cdot i$ i: „imag. Einheit"

7: Realteil, 30: Imaginärteil

Bsp: $(3+4i) + (5-2i) = 8+2i$



⑥

Bsp.: $(3+4i)\cdot(5-2i) = 15 - 6i + 20i \underbrace{-8i^2}_{=+8}$

$$= 23 + 14i$$

Bsp.: $(-i)^2 = (-i)\cdot(-i) = \underbrace{(-1)(-1)}_{=+1}\cdot \underbrace{i\cdot i}_{=-1} = -1$

Also hat die Gl. $x^2 = -1$ in den
kx. Z. <u>zwei Lsg.</u>, i und $-i$.

Bem.: Es gibt **keine** Mögl., eine Ordnung auf $\mathbb{C}$ zu definieren, die die üblichen Rechengesetze erfüllt.

„totale Ordnungsrelation"

Wenn $a < b$, $\Rightarrow$ dann $a + c < b + c$.

Wenn $a < b$ und $c > 0$, dann $ac < bc$.

Bew.: Angenommen, es geht doch.

1. Falls $i = 0$: $\underbrace{i^2}_{= 0 \cdot 0 = 0} = -1$ ↯

2. Falls $i > 0$: $i > 0 \quad | \cdot i$

$$\underbrace{i \cdot i}_{= -1} > \underbrace{i \cdot 0}_{= 0} \quad ↯$$

3. Fall $i < 0$: $i < 0 \quad | \cdot i$

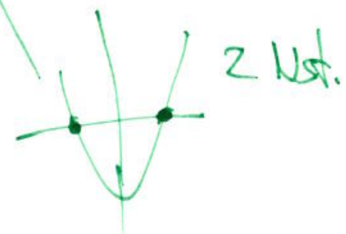
$$\underbrace{i \cdot i}_{= -1} > \underbrace{i \cdot 0}_{= 0} \quad ↯$$

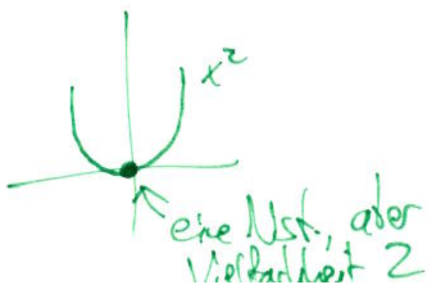
Satz: (Fundamentalsatz der Algebra)

Ein Polynom vom Grad n hat in den kx. Zahlen **stets** n ~~Lös~~ Nullstellen (mit Vielfachheiten gezählt).

$n=5$: $7x^5 - \pi x^4 + \sqrt{2}x^3 - x + 8$

~~$\sin(e^x) + 12\tan(x)$~~





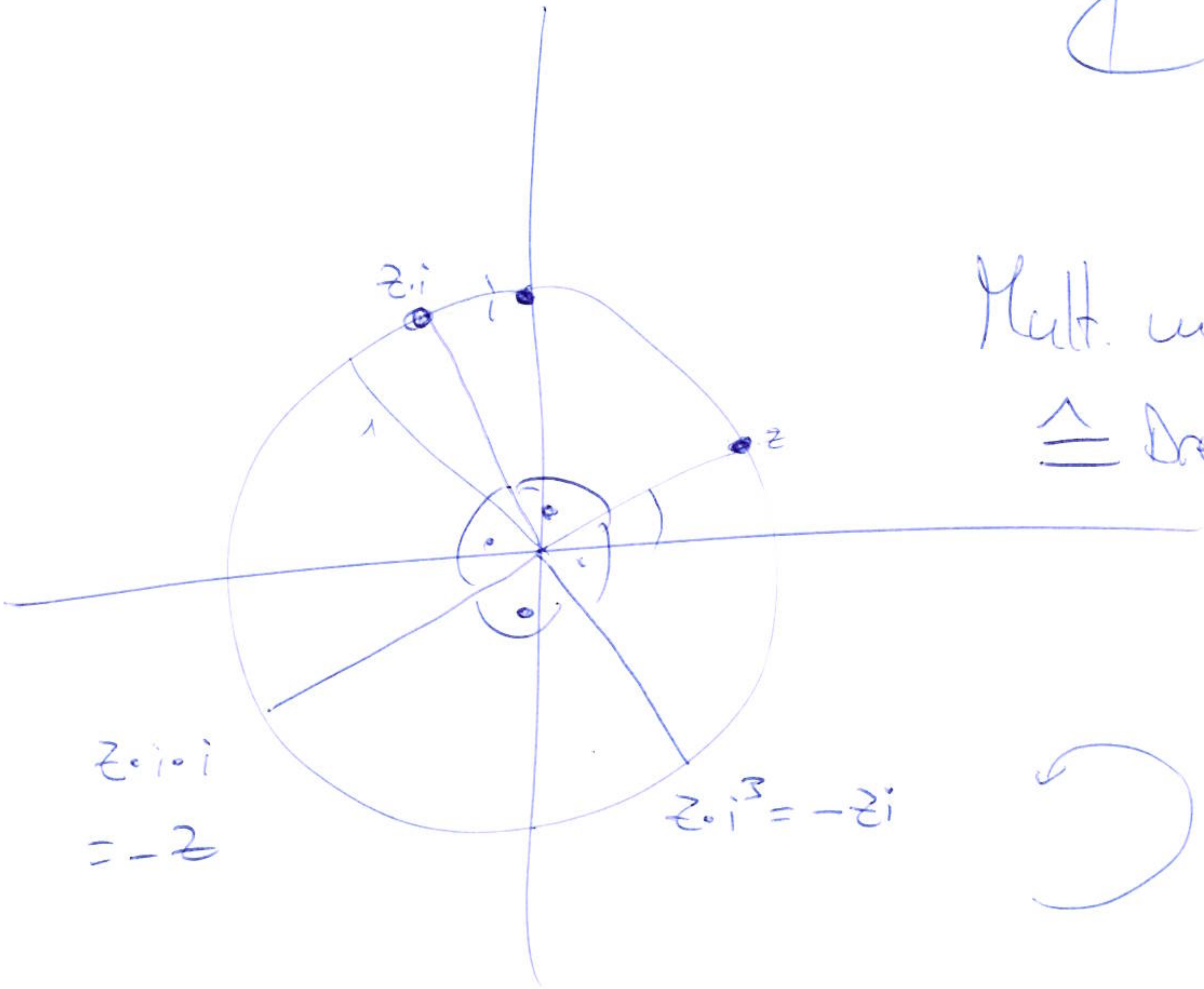
Bsp: Welche Lösungen hat $x^2 = -4$?

Antwort: $2i$ und $-2i$.

Probe: $(2i)^2 = 2^2 \cdot i^2 = 4 \cdot (-1) = -4.$

$$(-2i)^2 = (2i)^2 = -4.$$

$\mathbb{C}$



Mult. mit i

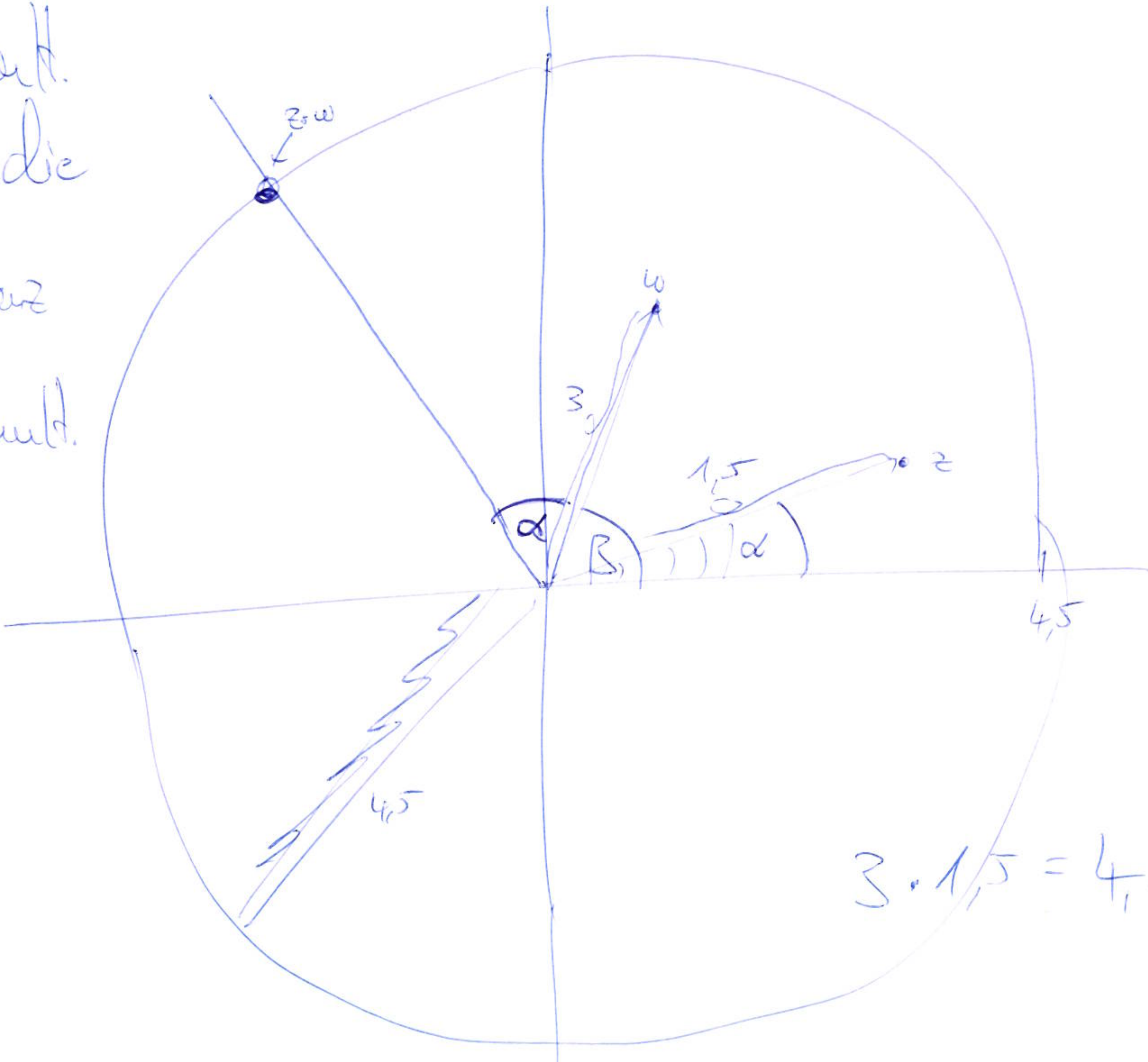
$\triangleq$ Drehung um 90°

gegen den

UZS

11

Beim Mult. werden die Längen ganz normal mult. und die Winkel addiert.



$3 \cdot 1{,}5 = 4{,}5$

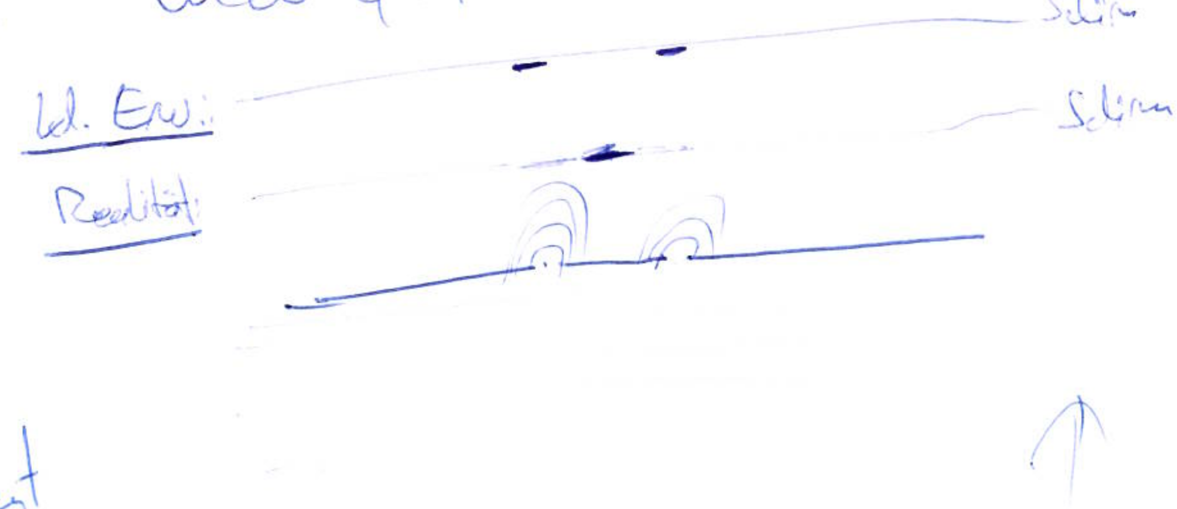
Anwendungen

- innerhalb der Mathematik: nahezu überall

  Grund: viel regelmäßiger (FTA)

- Elektrotechnik: Wechselstromkreise

- Quantenmechanik:

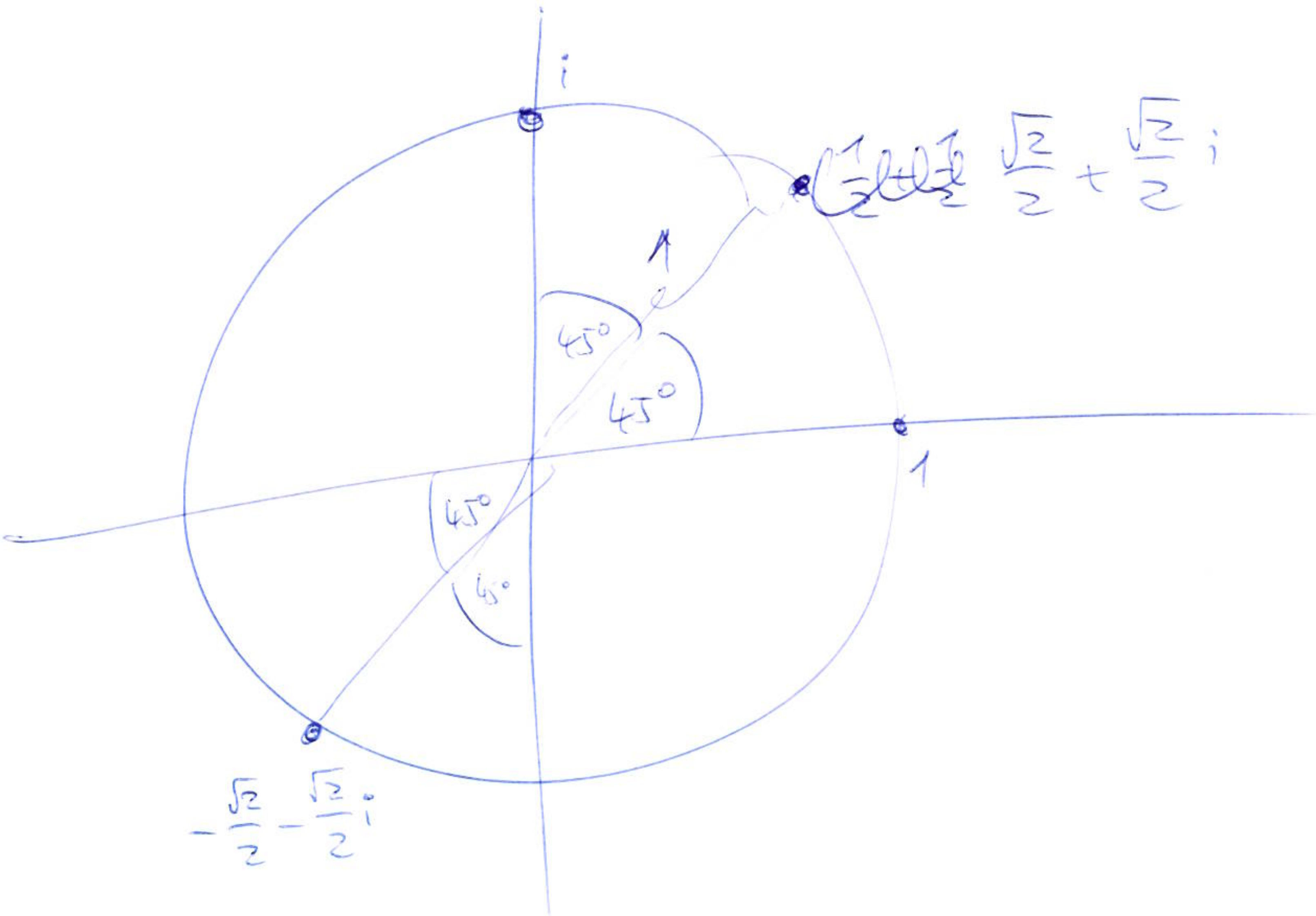
  

  Doppelspaltexperiment

$$-1 \overset{\checkmark}{=} i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)}$$

$$\overset{\checkmark}{=} \sqrt{1} = 1.$$

Bsp.: $x^2 = i$. Lsg.?


i
1
1
45°
45°
45°
45°
$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$
$-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2$$

$$=\frac{2}{4}+\qquad i\qquad-\frac{2}{4}=i.$$