Düstere Ecken der Logik

Ingo Blechschmidt

Curry Club Augsburg

7. September 2017

Abschnitt I

Gödels Unvollständigkeitssatz

Es gibt wahre Aussagen, die nicht beweisbar sind.

Abschnitt I

Gödels Unvollständigkeitssatz

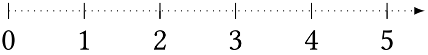
Es gibt wahre Aussagen, die nicht beweisbar sind.

Zum Beispiel folgende:
„Diese Aussage ist nicht beweisbar."

Vereinbarungen zur Metaebene

Auf der Metaebene wissen wir, …

1. wie man mit endlichen syntaktischen Objekten operiert,
2. was die natürlichen Zahlen sind,

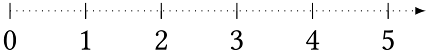


3. was es bedeutet, dass eine Zahl mit einer gewissen Eigenschaft existiert oder dass eine Behauptung für alle Zahlen stimmt.

Vereinbarungen zur Metaebene

Auf der Metaebene wissen wir, …

1. wie man mit endlichen syntaktischen Objekten operiert,
2. was die natürlichen Zahlen sind,



3. was es bedeutet, dass eine Zahl mit einer gewissen Eigenschaft existiert oder dass eine Behauptung für alle Zahlen stimmt.

Mögliche Wahlen der Metaebene:

- Gesunder Menschenverstand mit Platonismus
- Gesunder Menschenverstand mit Formalismus
- Diverse formale Systeme

Beweisbarkeit und Wahrheit

Syntaktisch

Eine Aussage A heißt genau dann **beweisbar**, wenn es in einem fixierten formalen System einen **formalen Beweis** von A gibt:

$$\mathrm{PA} \vdash A$$

Semantisch

Eine Aussage A heißt genau dann **wahr**, wenn sie im **Standardmodell** gilt: $\mathbb{N} \models A$

Beweisbarkeit und Wahrheit

Syntaktisch

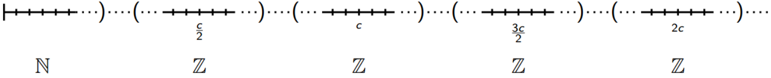
Eine Aussage A heißt genau dann **beweisbar**, wenn es in einem fixierten formalen System einen **formalen Beweis** von A gibt:

$$\mathrm{PA} \vdash A$$

Semantisch

Eine Aussage A heißt genau dann **wahr**, wenn sie im **Standardmodell** gilt: $\mathbb{N} \models A$

- Jede beweisbare Aussage ist wahr.
- Nicht alle wahren Aussagen sind beweisbar.
- Es gibt **Nichtstandardmodelle**:



Quines

Wir schreiben $\ulcorner A \urcorner$ für die **Gödelnummer** einer Aussage A.

Reflexion von Beweisbarkeit

Es gibt eine Aussageform $\mathrm{Prov}(n)$, sodass für jede Aussage A genau dann $\mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner)$ wahr ist, wenn A beweisbar ist:

$$\mathbb{N} \models \mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner) \quad \text{genau dann, wenn} \quad \mathrm{PA} \vdash A.$$

Quines

Wir schreiben $\ulcorner A \urcorner$ für die **Gödelnummer** einer Aussage A.

Reflexion von Beweisbarkeit

Es gibt eine Aussageform $\mathrm{Prov}(n)$, sodass für jede Aussage A genau dann $\mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner)$ wahr ist, wenn A beweisbar ist:

$$\mathbb{N} \models \mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner) \quad \text{genau dann, wenn} \quad \mathrm{PA} \vdash A.$$

Mit dem **Diagonallemma** gibt es eine Aussage A mit

$$\mathrm{PA} \vdash (A \leftrightarrow \neg(\mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner))).$$

Quines

Wir schreiben $\ulcorner A \urcorner$ für die **Gödelnummer** einer Aussage A.

Reflexion von Beweisbarkeit

Es gibt eine Aussageform $\mathrm{Prov}(n)$, sodass für jede Aussage A genau dann $\mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner)$ wahr ist, wenn A beweisbar ist:

$$\mathbb{N} \models \mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner) \quad \text{genau dann, wenn} \quad \mathrm{PA} \vdash A.$$

Mit dem **Diagonallemma** gibt es eine Aussage A mit

$$\mathrm{PA} \vdash (A \leftrightarrow \neg(\mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner))).$$

1. Angenommen $\mathrm{PA} \vdash A$.

Quines

Wir schreiben $\ulcorner A \urcorner$ für die **Gödelnummer** einer Aussage A.

Reflexion von Beweisbarkeit

Es gibt eine Aussageform $\mathrm{Prov}(n)$, sodass für jede Aussage A genau dann $\mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner)$ wahr ist, wenn A beweisbar ist:

$$\mathbb{N} \models \mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner) \quad \text{genau dann, wenn} \quad \mathrm{PA} \vdash A.$$

Mit dem **Diagonallemma** gibt es eine Aussage A mit

$$\mathrm{PA} \vdash (A \leftrightarrow \neg(\mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner))).$$

1. Angenommen $\mathrm{PA} \vdash A$. Dann $\mathrm{PA} \vdash \neg(\mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner))$,

Quines

Wir schreiben $\ulcorner A \urcorner$ für die **Gödelnummer** einer Aussage A.

Reflexion von Beweisbarkeit

Es gibt eine Aussageform $\mathrm{Prov}(n)$, sodass für jede Aussage A genau dann $\mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner)$ wahr ist, wenn A beweisbar ist:

$$\mathbb{N} \models \mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner) \quad \text{genau dann, wenn} \quad \mathrm{PA} \vdash A.$$

Mit dem **Diagonallemma** gibt es eine Aussage A mit

$$\mathrm{PA} \vdash (A \leftrightarrow \neg(\mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner))).$$

1. Angenommen $\mathrm{PA} \vdash A$. Dann $\mathrm{PA} \vdash \neg(\mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner))$, also $\mathbb{N} \models \neg(\mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner))$,

Quines

Wir schreiben $\ulcorner A \urcorner$ für die **Gödelnummer** einer Aussage A.

Reflexion von Beweisbarkeit

Es gibt eine Aussageform $\mathrm{Prov}(n)$, sodass für jede Aussage A genau dann $\mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner)$ wahr ist, wenn A beweisbar ist:

$$\mathbb{N} \models \mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner) \quad \text{genau dann, wenn} \quad \mathrm{PA} \vdash A.$$

Mit dem **Diagonallemma** gibt es eine Aussage A mit

$$\mathrm{PA} \vdash (A \leftrightarrow \neg(\mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner))).$$

1. Angenommen $\mathrm{PA} \vdash A$. Dann $\mathrm{PA} \vdash \neg(\mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner))$, also $\mathbb{N} \models \neg(\mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner))$, also nicht $\mathbb{N} \models \mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner)$,

Quines

Wir schreiben $\ulcorner A \urcorner$ für die **Gödelnummer** einer Aussage A.

Reflexion von Beweisbarkeit

Es gibt eine Aussageform $\mathrm{Prov}(n)$, sodass für jede Aussage A genau dann $\mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner)$ wahr ist, wenn A beweisbar ist:

$$\mathbb{N} \models \mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner) \quad \text{genau dann, wenn} \quad \mathrm{PA} \vdash A.$$

Mit dem **Diagonallemma** gibt es eine Aussage A mit

$$\mathrm{PA} \vdash (A \leftrightarrow \neg(\mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner))).$$

1. Angenommen $\mathrm{PA} \vdash A$. Dann $\mathrm{PA} \vdash \neg(\mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner))$, also $\mathbb{N} \models \neg(\mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner))$, also nicht $\mathbb{N} \models \mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner)$, also ist A nicht beweisbar,

Quines

Wir schreiben $\ulcorner A \urcorner$ für die **Gödelnummer** einer Aussage A.

Reflexion von Beweisbarkeit

Es gibt eine Aussageform $\mathrm{Prov}(n)$, sodass für jede Aussage A genau dann $\mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner)$ wahr ist, wenn A beweisbar ist:

$$\mathbb{N} \models \mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner) \quad \text{genau dann, wenn} \quad \mathrm{PA} \vdash A.$$

Mit dem **Diagonallemma** gibt es eine Aussage A mit

$$\mathrm{PA} \vdash (A \leftrightarrow \neg(\mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner))).$$

1. Angenommen $\mathrm{PA} \vdash A$. Dann $\mathrm{PA} \vdash \neg(\mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner))$, also $\mathbb{N} \models \neg(\mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner))$, also nicht $\mathbb{N} \models \mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner)$, also ist A nicht beweisbar, also folgt ein Widerspruch.

Quines

Wir schreiben $\ulcorner A \urcorner$ für die **Gödelnummer** einer Aussage A.

Reflexion von Beweisbarkeit

Es gibt eine Aussageform $\mathrm{Prov}(n)$, sodass für jede Aussage A genau dann $\mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner)$ wahr ist, wenn A beweisbar ist:

$$\mathbb{N} \models \mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner) \quad \text{genau dann, wenn} \quad \mathrm{PA} \vdash A.$$

Mit dem **Diagonallemma** gibt es eine Aussage A mit

$$\mathrm{PA} \vdash (A \leftrightarrow \neg(\mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner))).$$

1. Angenommen $\mathrm{PA} \vdash A$. Dann $\mathrm{PA} \vdash \neg(\mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner))$, also $\mathbb{N} \models \neg(\mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner))$, also nicht $\mathbb{N} \models \mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner)$, also ist A nicht beweisbar, also folgt ein Widerspruch.
2. Also ist A nicht beweisbar,

Quines

Wir schreiben $\ulcorner A \urcorner$ für die **Gödelnummer** einer Aussage A.

Reflexion von Beweisbarkeit

Es gibt eine Aussageform $\mathrm{Prov}(n)$, sodass für jede Aussage A genau dann $\mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner)$ wahr ist, wenn A beweisbar ist:

$$\mathbb{N} \models \mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner) \quad \text{genau dann, wenn} \quad \mathrm{PA} \vdash A.$$

Mit dem **Diagonallemma** gibt es eine Aussage A mit

$$\mathrm{PA} \vdash (A \leftrightarrow \neg(\mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner))).$$

1. Angenommen $\mathrm{PA} \vdash A$. Dann $\mathrm{PA} \vdash \neg(\mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner))$, also $\mathbb{N} \models \neg(\mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner))$, also nicht $\mathbb{N} \models \mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner)$, also ist A nicht beweisbar, also folgt ein Widerspruch.
2. Also ist A nicht beweisbar, somit $\mathbb{N} \models \neg\mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner)$.

Quines

Wir schreiben $\ulcorner A \urcorner$ für die **Gödelnummer** einer Aussage A.

Reflexion von Beweisbarkeit

Es gibt eine Aussageform $\mathrm{Prov}(n)$, sodass für jede Aussage A genau dann $\mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner)$ wahr ist, wenn A beweisbar ist:

$$\mathbb{N} \models \mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner) \quad \text{genau dann, wenn} \quad \mathrm{PA} \vdash A.$$

Mit dem **Diagonallemma** gibt es eine Aussage A mit

$$\mathrm{PA} \vdash (A \leftrightarrow \neg(\mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner))).$$

1. Angenommen $\mathrm{PA} \vdash A$. Dann $\mathrm{PA} \vdash \neg(\mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner))$, also $\mathbb{N} \models \neg(\mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner))$, also nicht $\mathbb{N} \models \mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner)$, also ist A nicht beweisbar, also folgt ein Widerspruch.
2. Also ist A nicht beweisbar, somit $\mathbb{N} \models \neg\mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner)$.
3. Also $\mathbb{N} \models A$, d. h. A ist wahr.

Undefinierbarkeit von Wahrheit

Reflexion von Beweisbarkeit

Es gibt eine Aussageform $\mathrm{Prov}(n)$, sodass für jede Aussage A genau dann $\mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner)$ wahr ist, wenn A beweisbar ist:

$$\mathbb{N} \models \mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner) \quad \text{genau dann, wenn} \quad \mathrm{PA} \vdash A.$$

Kann man auch Wahrheit reflektieren? Gibt es eine Aussageform $\mathrm{True}(n)$, sodass für jede Aussage A genau dann $\mathrm{True}(\ulcorner A \urcorner)$ wahr ist, wenn A wahr ist?

$$\mathbb{N} \models \mathrm{True}(\ulcorner A \urcorner) \quad \text{genau dann, wenn} \quad \mathbb{N} \models A$$

Undefinierbarkeit von Wahrheit

Reflexion von Beweisbarkeit

Es gibt eine Aussageform $\mathrm{Prov}(n)$, sodass für jede Aussage A genau dann $\mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner)$ wahr ist, wenn A beweisbar ist:

$$\mathbb{N} \models \mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner) \quad \text{genau dann, wenn} \quad \mathrm{PA} \vdash A.$$

Kann man auch Wahrheit reflektieren? Gibt es eine Aussageform $\mathrm{True}(n)$, sodass für jede Aussage A genau dann $\mathrm{True}(\ulcorner A \urcorner)$ wahr ist, wenn A wahr ist?

$$\mathbb{N} \models \mathrm{True}(\ulcorner A \urcorner) \quad \text{genau dann, wenn} \quad \mathbb{N} \models A$$

Nein: Mit dem Diagonallemma gäbe es eine Aussage A mit

$$\mathrm{PA} \models (A \leftrightarrow \neg(\mathrm{True}(\ulcorner A \urcorner))).$$

Zu deutsch besagte A: „Aussage A ist nicht wahr." Diese

Konsistenzreflexion

Sei A die Aussage „Aussage A ist nicht beweisbar“:

$$\mathrm{PA} \vdash (A \leftrightarrow \neg(\mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner))).$$

Resultat von Gödel–Rosser

Auch ohne die Unterstellung der Existenz von $\mathbb{N}$ in der Metatheorie gilt: Ist PA konsistent (d. h. ist $1 = 0$ nicht beweisbar), so ist A nicht beweisbar.

Konsistenzreflexion

Sei A die Aussage „Aussage A ist nicht beweisbar“:

$$\mathrm{PA} \vdash (A \leftrightarrow \neg(\mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner))).$$

Resultat von Gödel–Rosser

Auch ohne die Unterstellung der Existenz von $\mathbb{N}$ in der Metatheorie gilt: Ist PA konsistent (d. h. ist $1 = 0$ nicht beweisbar), so ist A nicht beweisbar.

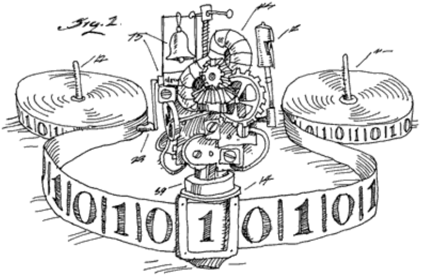
Da sich der Beweis dieses Resultats formalisieren lässt, folgt

$$\mathrm{PA} \vdash (\neg(\mathrm{Prov}(\ulcorner 1 = 0 \urcorner)) \rightarrow \neg(\mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner))).$$

Angenommen $\mathrm{PA} \vdash \neg(\mathrm{Prov}(\ulcorner 1 = 0 \urcorner))$.
Dann $\mathrm{PA} \vdash \neg(\mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner))$, das ist falsch. Somit kann PA seine Konsistenz nicht beweisen.

Abschnitt II

Spiel und Spaß mit Berechenbarkeitstheorie



Unentscheidbarkeit des Halteproblem

Ein **Halteorakel** ist ein Programm, dass ein Programm P als Eingabe liest und korrekt ausgibt: „P hält“ oder „P hält nicht“.

Unentscheidbarkeit des Halteproblem

Ein **Halteorakel** ist ein Programm, dass ein Programm P als Eingabe liest und korrekt ausgibt: „P hält" oder „P hält nicht".

Wenn es ein Halteorakel gäbe, könnte man auch folgendes Programm Q entwickeln:

Befrage das Halteorakel, ob Programm Q hält. Falls ja: Dann gehe in eine Endlosschleife. Falls nein: Dann halte.

Unentscheidbarkeit des Halteproblem

Ein **Halteorakel** ist ein Programm, dass ein Programm P als Eingabe liest und korrekt ausgibt: „P hält“ oder „P hält nicht“.

Wenn es ein Halteorakel gäbe, könnte man auch folgendes Programm Q entwickeln:

> Befrage das Halteorakel, ob Programm Q hält.
> Falls ja: Dann gehe in eine Endlosschleife.
> Falls nein: Dann halte.

Das Programm Q hält genau dann, wenn es nicht hält.

Ein Halteorakel gibt es nicht.

Ein Programm mit unbeweisbarem Halteverhalten

Wir betrachten folgendes Programm P:

> Laufe systematisch alle formalen Beweise ab. Sobald ein Beweis von $1 = 0$ gefunden wurde, halte.

Ein Programm mit unbeweisbarem Halteverhalten

Wir betrachten folgendes Programm P:

> Laufe systematisch alle formalen Beweise ab. Sobald ein Beweis von $1 = 0$ gefunden wurde, halte.

- Das Programm P hält nicht.
- Die Aussage, dass P nicht hält, ist in PA nicht beweisbar.

Ein Programm mit unbeweisbarem Halteverhalten

Wir betrachten folgendes Programm P:

> Laufe systematisch alle formalen Beweise ab. Sobald ein Beweis von $1 = 0$ gefunden wurde, halte.

- Das Programm P hält nicht.
- Die Aussage, dass P nicht hält, ist in PA nicht beweisbar.
- Sei n die Anzahl Zustände, die eine Umsetzung von P als Turingmaschine benötigt. Dann entzieht sich $\mathrm{BB}(n)$ der Beweisbarkeit in PA.

Das universelle Programm

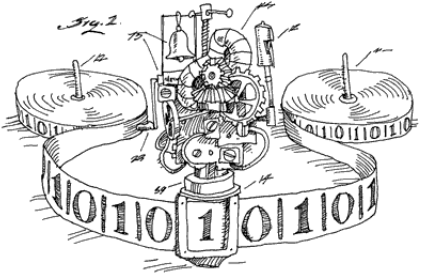
Wir betrachten folgendes Programm P:

> Laufe systematisch alle formalen Beweise ab. Sobald ein Beweis einer Aussage der Form „Die Ausgabe von Programm P ist nicht die Liste $x_1, \ldots, x_n$" gefunden wurde, gib die Liste $x_1, \ldots, x_n$ aus und halte.

1. PA beweist, dass P eine endliche Liste von Zahlen ausgibt.
2. Für jede endliche Liste von Zahlen gibt ein Universum M, sodass P genau diese Liste ausgibt, wenn man es in M ausführt.

Abschnitt III

Zufall als wertvolle Ressource



Welche Zahl ist größer?

Alice denkt sich zwei verschiedene reelle Zahlen x und y aus und verstaut sie in undurchsichtigen Boxen:

Bob darf in eine der Boxen hineinschauen und darf dann einen Tipp abgeben, welche der Zahlen größer ist.

Es gibt eine **randomisierte Strategie**, mit der Bobs Gewinnwahrscheinlichkeit bei jeder Wahl von x und y mehr als 50 % beträgt.

Welche Zahl ist größer?

Alice denkt sich zwei verschiedene reelle Zahlen x und y aus und verstaut sie in undurchsichtigen Boxen:

Bob darf in eine der Boxen hineinschauen und darf dann einen Tipp abgeben, welche der Zahlen größer ist.

Es gibt eine **randomisierte Strategie**, mit der Bobs Gewinnwahrscheinlichkeit bei jeder Wahl von x und y mehr als 50 % beträgt.