Regeln für surreale Zahlen

1. *Konstruktionsprinzip.* Sind L und R Mengen surrealer Zahlen und **ist kein Element von L $\geq$ irgendeinem Element von R**, so ist $\{L \mid R\}$ ebenfalls eine surreale Zahl. Alle surrealen Zahlen entstehen auf diese Art.

2. *Notation.* Für $x = \{L \mid R\}$ bezeichnen wir ein typisches Element von L mit „x^L“, ein typisches Element von R mit „x^R“. Wenn wir „$\{a, b, c, \ldots \mid d, e, f, \ldots\}$“ schreiben, meinen wir die Zahl $\{L \mid R\}$, sodass $a, b, c, \ldots$ die typischen Elemente von L und $d, e, f, \ldots$ die typischen Elemente von R sind.

3. *Anordnung.*

   Wir sagen genau dann $x \geq y$, falls kein $x^R \leq y$ und $x \leq$ keinem y^L.

   Wir sagen genau dann $x \not\leq y$, wenn $x \leq y$ nicht gilt.

   Wir sagen genau dann $x < y$, wenn $x \leq y$ und $y \not\leq x$.

   Wir sagen genau dann $x \leq y$, wenn $y \geq x$.

   Wir sagen genau dann $x > y$, wenn $y < x$.

4. *Gleichheit.* Wir sagen genau dann $x = y$, wenn $x \leq y$ und $y \leq x$.

5. *Rechenoperationen.*

$$
\begin{aligned}
x + y &:= \{x^L + y,\ x + y^L \mid x^R + y,\ x + y^R\}.\\
-x &:= \{-x^R \mid -x^L\}.\\
x - y &:= x + (-y).\\
xy &:= \{x^L y + x y^L - x^L y^L,\ x^R y + x y^R - x^R y^R \mid \\
&\qquad\qquad x^L y + x y^R - x^L y^R,\ x^R y + x y^L - x^R y^L\}.
\end{aligned}
$$