**Aufgabe 1.** *Gerade Zahlen*

a) Rechne die Zahl $n^2 + n$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ aus. Was stellst du fest?

b) Beweise deine Vermutung mit Induktion.

c) Es gibt auch noch andere, anschauliche Beweise für diese Aussage. Fällt dir dazu etwas ein?

**Aufgabe 2.** *Eine falsche Induktion*

Ich werde euch nun mit Induktion beweisen, dass alle Katzen die gleiche Farbe haben.

Beginnen wir mit dem Induktionsanfang, den Fall einer einzigen Katze. Diese hat natürlich die gleiche Farbe wie sie selbst. Das ist sehr einfach, da haben wir gar nichts zu tun.

Die Induktionsvoraussetzung sei nun, dass eine Menge von $n$ Katzen stets die gleiche Farbe hat. Nun geht es an die Arbeit: Nehmen wir uns jetzt eine Menge von $n+1$ Katzen vor. Wir können die Katzen aufteilen. Eine Katze trennen wir erstmal vom Rest, dann bleibt eine Menge von $n$ Karten übrig. Prima, diese haben also alle dieselbe Farbe, nach Induktionsvoraussetzung. Aber über die einzelne Katze wissen wir noch nichts. Deshalb machen wir das so: Wir vereinen wieder alle Katzen und trennen diesmal eine andere als zuvor vom Rest. Die verbleibenden $n$ Katzen haben auch alle dieselbe Farbe – und da diesmal die vorher einzelne Katze dabei ist, haben jetzt also alle $n+1$ Katzen die gleiche Farbe. Prima!

Und jetzt kommt ihr ins Spiel: Da offensichtlich nicht alle Katzen auf der Welt die gleiche Farbe haben – was ist an diesem Beweis falsch?

**Aufgabe 3.** *Ungerade Zahlen*

Wir wollen jetzt nur ungerade Zahlen betrachten.

a) Addiere doch mal die ersten $1, 2, 3, \ldots$ ungeraden Zahlen. Was kommt dabei heraus?

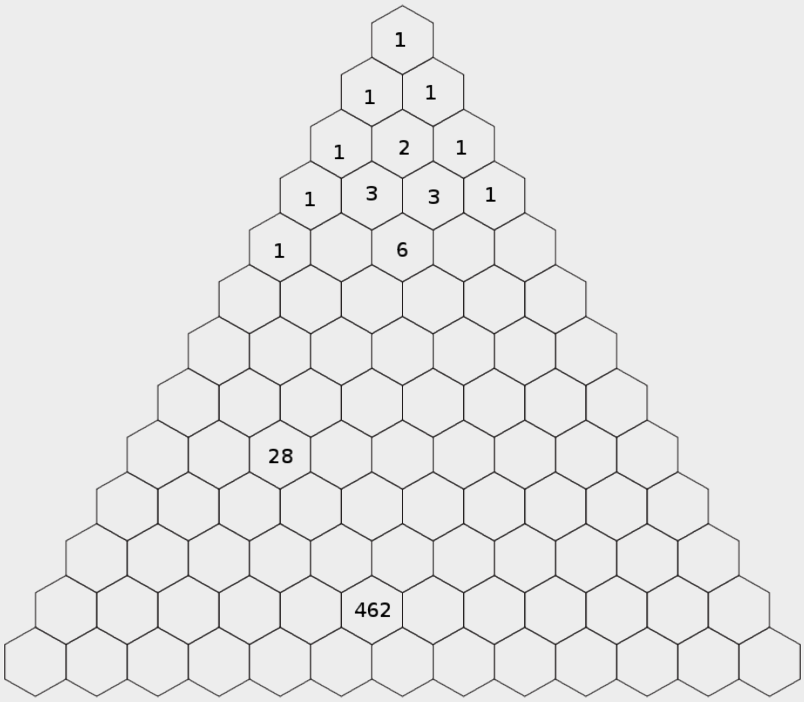
b) Was kommt heraus, wenn man die ersten $n$ ungeraden Zahlen addiert?

c) Beweise diese Vermutung mit Induktion. Dabei ist es hilfreich zu wissen, dass die $n$-te ungerade Zahl $2n - 1$ ist. Warum ist das so?

d) Auch hier gibt es eine anschauliche Beweismethode ohne Induktion. Vielleicht fällt dir ja etwas ein.

**Aufgabe 4.** *Pascalsches Dreieck*

Addiere mal die einzelnen Zeilen im Pascalschen Dreieck.




a) Was fällt dir auf? Und was hat das mit $2^n$ zu tun?

b) Beweise deine Vermutung mit Induktion!

**Aufgabe 5.** *Rekursive Folgen*

Wir betrachten die folgende Zahlenfolge

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 4, \quad a_3 = 13, \quad a_4 = 40, \quad \ldots,$$

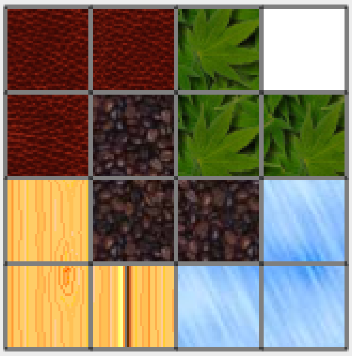
die nächste Zahl ist also immer Eins mehr als das Dreifache der vorherigen Zahl. Als Formel:

$$a_{n+1} = 3a_n + 1.$$

Beweise mit Induktion, dass $a_n = \frac{3^n - 1}{2}$.

**Aufgabe 6.** *Triominos*

Beweise mit Induktion: Ein $(2^n \times 2^n)$-Schachbrett kann so mit Triominos belegt werden, dass die obere rechte Ecke frei bleibt und sonst alle Felder mit genau einem Triomino belegt sind. (Wie in der Skizze für $n = 3$.)



Tipp: Aus wie vielen $(2^n \times 2^n)$-Teilbrettern besteht ein $(2^{n+1} \times 2^{n+1})$-Brett?

**Aufgabe 7.** *Multiplikation*

Beweise mit Induktion:

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}.$$

**Aufgabe 8.** *Eine absurde Gleichung*

Beweise mit Induktion:

$$(1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3.$$

**Aufgabe 9.** *Fibonacci-Zahlen*

In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns mit den *Fibonacci-Zahlen*. Das sind die Zahlen

$$f_1 = 1, \quad f_2 = 1, \quad f_3 = 2, \quad f_4 = 3, \quad f_5 = 5, \quad f_6 = 8, \quad f_7 = 13, \quad f_8 = 21, \quad \ldots,$$

die nächste Zahl ist also immer die Summe der beiden vorhergehenden Zahlen.

a) Beweise mit Induktion: $f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_n = f_{n+2} - 1$.

b) Versuch mal den Induktionsschritt bei folgender (unsinniger) Behauptung!
$f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_n = f_{n+2} - 17$.

c) Beweise mit Induktion: $f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + \cdots + f_n^2 = f_n \cdot f_{n+1}$.