Matheschülerzirkel
Universität Augsburg
Schuljahr 2013/2014
Klasse 11./12., Gruppe 2

Zirkelzettel vom 3. Mai 2014: Elliptische Kurven

Das Prototypbeispiel einer *elliptischen Kurve* ist die Menge der Lösungen $(x|y)$ der folgenden Gleichung. In den vier Grafiken unten ist die Kurve abgebildet.

$$y^2 = x^3 - x - 1.$$

Andere elliptische Kurven erhält man, wenn man an den Zahlenwerten dreht.

Aufgabe 1. *Etwas Kurvendiskussion*

a) Wieso ist der Graph zur x-Achse symmetrisch?

b) Wieso gibt es, wenn man genügend weit nach links geht, keine Punkte der Kurve?

c) Kannst du eine Gleichung für die (gekrümmten) Asymptoten finden?

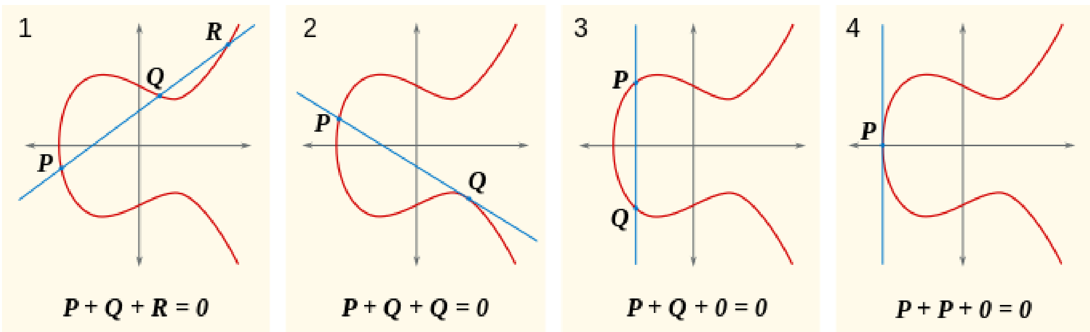
Das Besondere an elliptischen Kurven ist folgende bemerkenswerte Tatsache:

> Jede Gerade durch zwei Punkte einer elliptischen Kurve schneidet die Kurve in *genau einem weiteren Punkt* – wenn man richtig zählt.

Die Abbildung unten demonstriert diesen Sachverhalt.

- Der einfachste Fall liegt in Grafik 1 vor: Die Gerade durch die Kurvenpunkte P und Q schneidet die Kurve offensichtlich in genau einem weiteren Punkt, nämlich R.
- Bei Grafik 2 ist die Situation nicht ganz so offensichtlich: Die Gerade durch die dortigen Punkte P und Q schneidet die Kurve in keinem weiteren Punkt. Allerdings schneidet die Gerade die Kurve bei Q nicht nur, sondern *berührt* sie sogar. Berührpunkte wollen wir doppelt zählen; dann passt die Regel wieder: Die insgesamt drei Schnittpunkte sind P, Q und Q.

Abbildung 1 Vier Schnittsituationen bei der elliptischen Kurve $y^2 = x^3 - x - 1$



- In Grafik 3 sind ebenfalls keine weiteren Schnittpunkte zu sehen. Aber hoer haben wir keine Rechtfertigung, einen der Punkte doppelt zu zählen: Unsere Berührpunktregel greift nicht, und daher wäre es völlig willkürlich, einen der beiden, aber nicht den anderen Punkt doppelt zu werten. Stattdessen sagen wir hier, dass der dritte Schnittpunkt ein gewisser *Punkt im Unendlichen* ist (dazu gleich ein Exkurs). Diesen schreiben wir – vielleicht etwas seltsamerweise – als Null (statt als ∞).
- Der Sonderfall in Grafik 4 ist eine Kombination aus den beiden vorherigen Spezialfällen: Der Schnittpunkt P ist sogar ein Berührpunkt; die insgesamt drei Schnittpunkte sind daher P, P und 0.

Exkurs zu Punkten im Unendlichen. Die gewöhnliche zweidimensionale Ebene hat einen Schönheitsfehler: Die Merkregel „je zwei Geraden schneiden sich" stimmt nicht uneingeschränkt – denn bekanntlich schneiden sich parallele Geraden nicht. Dieses Manko behebt die zweidimensionale *projektive Ebene*. Diese erklärt man oft über eine Analogie mit perspektivischer Darstellung: Zwei parallele Bahnschienen schneiden sich nicht in der gewöhnlichen Ebene. Ihre Abbilder in einer perspektivischen Zeichnung schneiden sich aber durchaus, im Fluchtpunkt.

Auf der elliptischen Kurve liegt genau ein solcher Punkt im Unendlichen; anschaulich befindet er sich sowohl „ganz oben" als auch „ganz unten" auf jeder Parallelen zur y-Achse.

Gruppenstruktur

Dank der besonderen Schnitteigenschaft kann man eine *Gruppenstruktur* auf der Menge der Punkte einer elliptischen Kurve definieren. Das ist eine Rechenoperation „Punkt plus Punkt gibt Punkt". Wie die gewöhnliche Addition von Zahlen notiert man diese mit dem Plus-Symbol, und wie bei der gewöhnliche Addition gelten Eigenschaften wie

$$P + 0 = P, \qquad P + Q = Q + P, \qquad (P + Q) + R = P + (Q + R).$$

Sonst hat diese neue Rechenoperation aber wenig mit der bekannten Addition zu tun. Auch die Vektoraddition ist hierfür nur indirekt relevant.

> Immer, wenn Kurvenpunkte P, Q, R auf einer gemeinsamen Geraden liegen, definieren wir $P + Q + R = 0$.

Aufgabe 2. *Erste Rechnungen mit Kurvenpunkten*

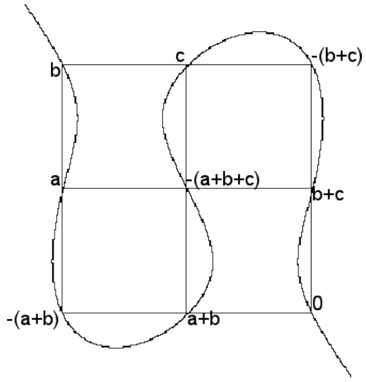
a) Was ist das Negative $-P$ eines Punkts P? Gib dazu eine Vermutung ab und zeige dann, dass die Probe aufgeht – zeige also, dass die Gleichung $P + \text{Vermutung} + 0 = 0$ stimmt.

b) Seien P und Q Kurvenpunkte. Sei R der eindeutig bestimmte weitere Kurvenpunkt, der auf der Geraden durch P und Q liegt. Mache dir klar, dass dann $P + Q$ die Spiegelung von R an der x-Achse ist.

c) Rechne mit der Beschreibung aus Teilaufgabe b) nach, dass der Punkt im Unendlichen das *neutrale Element* der Gruppe ist: Rechne also nach, dass für jeden Punkt P die Rechnung $P + 0 = P$ gilt.

d) Studiere die Animation auf `http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/7e/EllipticGroup.gif`, um einen Eindruck des Assoziativgesetzes zu erhalten.

Abbildung 2 Ein Ausschnitt aus der Animation zur Assoziativitätsdemonstration



Mit Teilaufgabe b) kann man also die Summe von Kurvenpunkten explizit bestimmen. Ferner können wir eine Rechenoperation „natürliche Zahl mal Punkt gibt Punkt“ definieren – und zwar genau so, wie man auch die gewöhnliche Multiplikation von Zahlen auf die Addition von Zahlen zurückführt:

$$nP := \underbrace{P + P + \cdots + P + P}_{n \text{ Summanden}}.$$

Ganz konkret ist $2P = P + P$ und $3P = P + P + P$.

Aufgabe 3. *Effiziente Multiplikation*

a) Berechne als Aufwärmübung zeichnerisch für einen Kurvenpunkt P deiner Wahl die Punkte $2P$ und $3P$.

b) Um den Punkt $16P$ zu berechnen, müsste man eigentlich fünfzehn Addition durchführen. Das macht keinen Spaß. Kannst du ein effizienteres Verfahren finden, das mit nur vier Additionen auskommt?

c) Wie kann man $1000P$ effizient berechnen?

Es ist also *leicht*, große Multiplikationen nP auszuführen. Die Umkehrung ist aber *schwierig*: Wenn Punkte P und Q gegeben sind, und man gesagt bekommt, dass für irgendeine natürliche Zahl n die Gleichung $Q = nP$ gilt, hat man große Mühe, die Zahl n zu bestimmen. Man kann natürlich durchprobieren: Stimmt es für $n = 1$? Für $n = 2$? Für $n = 3$? Und so weiter. Aber es ist kein Verfahren öffentlich bekannt, dass irgendwie clever abkürzen könnte. Man vermutet auch, dass es ein solches Verfahren nicht geben kann; das hat man aber noch nicht beweisen können.

Anwendungen in der Kryptographie

Manche der kryptographischen Verfahren, die wir kennengelernt haben, haben den Restklassenring $\mathbb{Z}/(n)$ verwendet. Solche Verfahren kann man oftmals so umformulieren, dass sie stattdessen die Gruppenstruktur auf einer elliptischen Kurve verwenden. Ein Vorteil unter weiteren ist, dass man *bei kürzeren Schlüssellängen gleiche Sicherheit* erzielen kann.

Bei diesen Anwendungen verwendet man keine elliptischen Kurven über $\mathbb{R}$, sondern solche über *endlichen Körpern*. Ein solcher ist etwa der Restklassenring $\mathbb{Z}/(2)$, der genau zwei

Elemente enthält; für jede Primzahlpotenz p^n gibt es einen Körper, der p^n viele Elemente enthält. (Vorsicht, Falle: Der Ring $\mathbb{Z}/(4)$ hat zwar vier Elemente, ist aber kein Körper: Das Element $\overline{2}$ hat kein Inverses.) Implementierungen für $p = 2$ kann man wegen der Nähe zum Binärsystem besonders effizient gestalten.

Die Graphen solcher Kurven haben nicht mehr viel mit dem gewohnten Schaubild des reellen Falls zu tun (siehe Abbildung unten). Die Achsensymmetrie ist zwar noch erkennbar, aber was etwa Berührpunkte sein sollten, ist überhaupt nicht mehr klar. Die aber waren ja wichtig zur Definition der Gruppenstruktur! Erstaunlicherweise lässt sich die Mathematik hinter dem reellen Fall auf den allgemeinen Fall verallgemeinern.

Pseudozufallszahlen

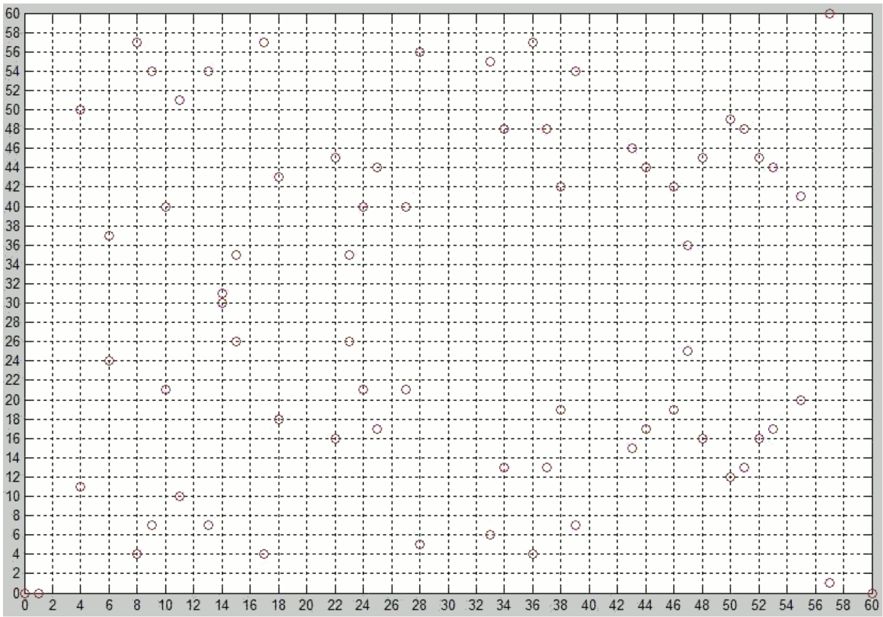
> Any one who considers arithmetical methods of producing random digits is, of course, in a state of sin.
>
> – John von Neumann (* 1903, † 1957)

Für viele kryptographische Verfahren werden Zufallszahlen benötigt – man denke etwa an die Schlüsselerzeugung beim RSA-Verfahren oder den Diffie–Hellman-Schlüsselaustausch. Die Sicherheit dieser Verfahren beruht unter anderem darauf, dass die verwendeten Zufallszahlen nicht von Angreifern vorhergesagt oder aus den übermittelten Nachrichten erschlossen werden können.

Gute Zufallszahlen sind also für die Kryptographie unabdingbar. Aber wie erzeugt man solche in der Praxis? Für einen Computer, der prinzipiell ein rein deterministisches Gerät ist, ist das eine nichttriviale Aufgabe. Es gibt nur wenige *Entropiepools*, auf die er zurückgreifen kann: Etwa zufällige Fluktuationen in der Tippgeschwindigkeit eines Benutzers oder in Netzwerkpaketen, die aus dem Internet eintreffen. Es gibt auch spezielle Erweiterungskarten, die zufällige physikalische Phänomene verwenden, um Zufallszahlen bereitzustellen.

Diese Mechanismen erreichen aber nicht den Durchsatz, der für Anwendungen benötigt wird: Sie benötigen zu viel Zeit, um Zufallszahlen geeigneter Größe zu produzieren. Als

Abbildung 3 Die elliptische Kurve $y^2 = x^3 - x$ über dem endlichen Körper $\mathbb{Z}/(61)$



Alternative verwendet man *Pseudozufallszahlengeneratoren*. Diese verfügen über einen *internen Zustand*, der nach außen geheim bleiben muss, und generieren aus diesem über eine deterministische mathematische Vorschrift neue Zahlen. Diese Zahlen können keine Zufallszahlen im eigentlichen Sinn sein – sie werden ja *berechnet* – aber je nach Güte des verwendeten Generators erfüllen sie ähnliche statistische Eigenschaften wie echte Zufallszahlen. Etwa erwartet man von zufälligen 0/1-Folgen, dass jede Ziffer im Mittel gleich oft vorkommt und dass sich die Ziffern nicht genau wiederholen.

Es ist übrigens nicht bekannt, ob die Ziffern in der Dezimalentwicklung der Kreiszahl π im Mittel gleich oft vorkommen – ob die Zahl π *normal zur Basis 10* ist.

Aufgabe 4. *Der Run-Test*

Bitte einen Freund entweder hundertmal eine Münze zu werfen und die Ergebnisse zu notieren, oder einfach die Ergebnisse ohne Münzwurf zu fälschen. Verwende dann den *Run-Test*, um eine wohlüberlegte Vermutung abgeben zu können, ob der Freund die Ergebnisse gefälscht hat oder nicht.

Beim Run-Test zählt man die Anzahl der *Runs*, also die Anzahl der Wiederholungen gleicher Ziffern. Etwa enthält die Folge `00011101101` sechs Runs. Theoretische Überlegungen mit Binomialkoeffizienten zeigen, dass man bei einer wirklich zufälligen 0/1-Folge der Länge n im Mittel $(n+1)/2$ solcher Runs erwarten würde. Weicht also die ermittelte Anzahl Runs vom Erwartungswert 50,5 deutlich ab, so ist die Wahrscheinlichkeit groß, dass die gegebene Ziffernfolge nicht zufälligen Ursprungs ist.

Deutlich abweichen ist hier mit Absicht schwammig ausgedrückt. Man kann etwa prüfen, ob die Abweichung größer ist als das Doppelte der Standardabweichung – diese kann man für wirkliche Zufallsfolgen ebenfalls berechnen und beträgt $\sqrt{n-1}/2$, also etwa 5 für $n = 100$. Wenn man tiefer in die Materie einsteigt, kann man explizit angeben, *mit welcher Wahrscheinlichkeit* eine zufällige Folge dieselbe Anzahl Runs aufweist wie eine gegebene. Details stehen etwa auf `http://www.ammu.at/archiv/4/4_4.htm`.

Aufgabe 5. *Lineare Kongruenzgeneratoren*

Lineare Kongruenzgeneratoren gehören zu den einfachsten und effizientesten, aber auch unsichersten Pseudozufallszahlengeneratoren. Ausgehend von einer Startzahl x_0 errechnet man eine Pseudozufallszahl durch die Formel

$$x_1 := ax_0 + b \mod m,$$

wobei a, b und m feste Parameter sind. Die nächste und alle weiteren Pseudozufallszahlen berechnet man ebenfalls nach dieser Formel, wobei man für „x_0“ jeweils die zuletzt berechnete Zahl einsetzt.

a) Spiele für die konkrete Parameterwahl $a := 2$, $b := 1$ und $m := 5$ das Verfahren durch, beginnend bei der Zahl $x_0 = 3$. Auf den ersten Blick wird kein offensichtliches Muster zu erkennen sein – so soll es auch sein.

b) Tatsächlich aber sind lineare Kongruenzgeneratoren für sicherheitskritische Anwendungen nicht zu gebrauchen. Spiele mit dem Java-Applet auf `http://www.cs.illinois.edu/~heath/iem/random/pairplot/`, um dich von der Naivität dieses Verfahrens zu überzeugen.

Aufgabe 6. *Ein weiteres Gütekriterium*

Finde eine unendliche 0/1-Folge, in der im Mittel die beiden Ziffern gleich oft vorkommen und die nicht periodisch ist, die aber trotzdem niemand als zufällig bezeichnen würde.

Tipp: Denke an Ziffern*paare*.

Pseudozufallszahlen mit elliptischen Kurven

Besser als lineare Kongruenzgeneratoren ist ein Verfahren, das auf elliptischen Kurven basiert. In Analogie zu den festen Parametern a, b und m müssen bei diesem eine elliptische Kurve und zwei feste Punkte P und Q auf dieser gegeben sein. Man initialisiert das Verfahren, indem man einmalig über eine gute Quelle zufälliger Zahlen den *internen Zustand* s festlegt (das ist eine Zahl, kein Kurvenpunkt). Um dann eine Pseudozufallszahl zu erzeugen, führt man folgende drei Rechnungen aus:

1. $r := x$-Koordinate von sP.
2. $s' := x$-Koordinate von rP; das wird der neue interne Zustand für den nächsten Schritt.
3. $t := x$-Koordinate von rQ; das ist die gesuchte Pseudozufallszahl.

Die Darstellung hier ist etwas vereinfacht, in der Praxis verwendet man ein geringfügig komplexeres Verfahren. Bei geeigneter Wahl der elliptischen Kurve und der festen Kurvenpunkte P und Q produziert dieses Verfahren recht gute Pseudozufallszahlen. Solche Wahlen sind in internationalen Standards festgeschrieben, Kryptographiebibliotheken für Programmiersprachen halten sich an diese.

In letzter Zeit hat dieses Verfahren aber auch Negativschlagzeilen gemacht, denn vermutlich hat die National Security Agency der Vereinigten Staaten in einen dieser Standards eine *universelle Hintertür* eingebaut. Die Sicherheit des Verfahrens beruht nämlich darauf, dass niemand eine Zahl e mit $P = eQ$ kennt; vermutlich aber hat die NSA in einem dieser Standards für P und Q nicht zwei zufällige Kurvenpunkte gewählt, sondern nur Q und e zufällig gewählt und dann P gerade so *berechnet*, dass $P = eQ$ gilt.

Die Konsequenzen sind desaströs – denn damit ist es der NSA möglich, alle weiteren Pseudozufallszahlen eines solchen Generators vorherzusagen, sobald sie nur *zwei* seiner Ausgaben mitgeschnitten hat. Für den Fall eines generischen Angreifers *Eve* formuliert funktioniert das wie folgt:

1. Eve hört eine generierte Pseudozufallszahl ab: $t = x$-Koordinate von rQ.
2. Dann gibt es wegen der Achsensymmetrie nur zwei Möglichkeiten für rQ.
3. Dank Kenntnis von e kann Eve (für beide der denkbaren Werte von rQ, die sie beide kennt) folgende Rechnung durchführen: $e(rQ) = r(eQ) = rP$.
4. Also kann Eve den neuen und eigentlich geheimen Zustand s' erschließen – zumindest weiß sie, dass s' gleich einem von nur zwei Werten sein muss. Indem sie eine weitere Pseudozufallszahl abhört, kann sie die Restunsicherheit völlig elimieren und dann alle weiteren Pseudozufallszahlen vorhersagen.

Aufgabe 7. *Universalität*

Wieso heißt diese Hintertür *universell*?

Aufgabe 8. *Beweisbare zufällige Punktauswahl*

Wie kann eine Standardisierungsorganisation die Allgemeinheit davon überzeugen, die Punkte P und Q zufällig gewählt zu haben und daher insbesondere keine Zahl e mit $P = eQ$ zu kennen?

Tipp: Denke an Hashing.

Alle Abbildungen sind dem englischen (und sehr lesenswerten) Wikipedia-Artikel zu elliptischen Kurven entnommen: `http://en.wikipedia.org/wiki/Elliptic_curve`