Matheschülerzirkel
Universität Augsburg
Schuljahr 2014/2015
Klassen 10/11/12

Analytische Zahlentheorie

Zirkelzettel vom 5. Dezember 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Der Fundamentalsatz der Arithmetik

Definition 1.1. Eine *Primzahl* ist eine positive natürliche Zahl, die *genau zwei* verschiedene positive Teiler besitzt.

Gemäß dieser Definition beginnt die Folge der Primzahlen also mit

$$2, \quad 3, \quad 5, \quad 7, \quad 11, \quad 13, \quad 17, \quad \ldots$$

Die Zahl 1 zählt nicht als Primzahl – sie besitzt als einzigen Teiler sich selbst und hat daher nicht zwei verschiedene Teiler.

Theorem 1.2 (Fundamentalsatz der Arithmetik)**.** *Jede positive natürliche Zahl lässt sich auf eindeutige Art und Weise als Produkt von Primzahlen schreiben.*

Beweis. Sei eine beliebige natürliche Zahl n gegeben. Falls n eine Primzahl ist, haben wir damit die gesuchte Zerlegung in Primfaktoren schon gefunden. Falls n keine Primzahl ist, spaltet sich n in ein Produkt auf: $n = a \cdot b$, und wir können mit der Suche nach einer Zerlegung bei a und b fortfahren.

Die Eindeutigkeitsaussage ist interessanter (Aufgabe 3). □

Aufgabe 1. *Primfaktorzerlegung der Eins*

Der Fundamentalsatz der Arithmetik behauptet, dass sich *jede* positive natürliche Zahl in Primfaktoren zerlegen lässt. Die Zahl 1 ist auch eine solche positive natürliche Zahl. Siehst du, wie sich diese zerlegen lässt?

Hinweis: Das ist etwas versteckt. Beachte, dass 1 keine Primzahl ist.

Aufgabe 2. *Soll Eins eine Primzahl sein?*

Es gibt ein gutes mathematisches Argument, wieso es sinnvoll ist, die Eins nicht als Primzahl zu definieren. Finde es!

Tipp: Denke an die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung. Was wäre, wenn man die Zahl Eins als Primzahl zulassen würde?

Aufgabe 3. *Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung*

Mit dieser Aufgabe beweisen wir, dass die Zerlegung einer Zahl in Primfaktoren bis auf Umordnung der Faktoren eindeutig ist. In Formeln ausgedrückt: Gilt

$$p_1 \cdots p_n = q_1 \cdots q_m,$$

wobei $p_1, \ldots, p_n$ und $q_1, \ldots, q_m$ Primzahlen sind, so folgt schon $n = m$ (links und rechts stehen also gleich viele Faktoren) und jeder Faktor der linken Seite tritt auch genau einmal auf der rechten Seite auf und umgekehrt.

a) Zeige zuerst: Teilt eine Primzahl p ein Produkt $a \cdot b$, so teilt p schon a oder p teilt b. In Formeln:

$$\text{Wenn } p \mid ab, \text{ dann } p \mid a \text{ oder } p \mid b.$$

Tipp: Das ist gar nicht so leicht. Verwende, dass die Zahlen a und p irgendeinen größten gemeinsamen Teiler d haben, und dass sich dieser in der Form $d = fa + gp$ für gewisse Zahlen f und g schreiben lässt. (Eine solche Darstellung des größten gemeinsamen Teilers heißt *Bézoutdarstellung*. Dass es eine solche immer gibt, folgt aus dem *euklidischen Algorithmus*.)

b) Beweise mit dem Resultat aus Teilaufgabe a) die Eindeutigkeitsbehauptung.

2 Irrationalität

Definition 2.1. Eine reelle Zahl x heißt genau dann *rational*, wenn sie sich als Quotient zweier ganzer Zahlen schreiben lässt: $x = a/b$ für gewisse ganze Zahlen a und b.

Dass nicht alle Zahlen rational sind, war eine erstaunliche Entdeckung im fünften Jahrhundert v. Chr. Manche sehen diese Erkenntnis sogar als Geburtsstunde der modernen Mathematik an.[1]

[1] Als Entdecker der Irrationalität gilt der griechische Mathematiker Hippasos von Metapont. Er erkannte, dass der *goldene Schnitt* irrational ist. Damit erschütterte er die Schule der Pythagoreer, denn diese waren von dem Kredo *Alles ist Zahl* überzeugt, wobei sie mit „Zahl“ *rationale Zahl* meinten. Ironischerweise kam der goldene Schnitt auch noch im Erkennungszeichen der Pythagoreer vor, dem Pentagramm.

Theorem 2.2. *Die Zahl $\sqrt{2}$ ist nicht rational.*

Aufgabe 4. *Irrationalität von Quadratwurzeln*

a) Beweise, dass $\sqrt{2}$ nicht rational ist.

Tipp: Gehe nach folgendem Muster vor. Angenommen, $\sqrt{2}$ ist doch rational. Nach Definition gibt es dann ganze Zahlen a und b mit $\sqrt{2} = a/b$. Quadrieren und Umstellen zeigt $2b^2 = a^2$. Überlege nun, wie oft der Primfaktor 2 auf den beiden Seiten dieser Gleichung vorkommt.

b) Beweise, dass für jede Primzahl p die Zahl $\sqrt{p}$ nicht rational ist.

c) Beweise, dass für jede Zahl n, in deren Primfaktorzerlegung mindestens eine Primzahl ungerade oft vorkommt, die Zahl $\sqrt{n}$ nicht rational ist.

Aufgabe 5. *Anschauliche Bedeutung von Quadratwurzeln*

Wenn Quadratwurzeln sehr seltsame Zahlen ohne praktische Bedeutung wären, hätten die alten Griechen vielleicht die Entdeckung der Irrationalität nicht ganz so schlimm gefunden. Tatsächlich aber kommen Quadratwurzeln in der Geometrie überall vor: Finde eine geometrische Figur, deren Kantenlängen alle ganze Zahlen sind, sodass eine weitere eingezeichnete Hilfslinie aber irrationale Länge hat.

3 Die Unendlichkeit der Primzahlen

4 Die riemannsche ζ-Funktion