



Zirkelzettel vom 21. Dezember 2013

Konventionen

Die Menge der natürlichen Zahlen ist $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Die leere Menge $\{\} = \emptyset$ enthält kein einziges Element.

Alle Elemente der Menge der Elefanten in diesem Raum können π auswendig.

Regeln für surreale Zahlen

1. *Konstruktionsprinzip.* Sind L und R Mengen surrealer Zahlen und **ist kein Element von $L \geq$ irgendeinem Element von R** , so ist $\{L \mid R\}$ ebenfalls eine surreale Zahl. Alle surrealen Zahlen entstehen auf diese Art.
2. *Notation.* Für $x = \{L \mid R\}$ bezeichnen wir ein typisches Element von L mit „ x^L “, ein typisches Element von R mit „ x^R “. Wenn wir „ $\{a, b, c, \dots \mid d, e, f, \dots\}$ “ schreiben, meinen wir die Zahl $\{L \mid R\}$, sodass a, b, c, \dots die typischen Elemente von L und d, e, f, \dots die typischen Elemente von R sind.
3. *Anordnung.*

Wir sagen genau dann $x \geq y$, falls kein $x^R \leq y$ und $x \leq$ keinem y^L .

Wir sagen genau dann $x \not\leq y$, wenn $x \leq y$ nicht gilt.

Wir sagen genau dann $x < y$, wenn $x \leq y$ und $y \not\leq x$.

Wir sagen genau dann $x \leq y$, wenn $y \geq x$.

Wir sagen genau dann $x > y$, wenn $y < x$.
4. *Gleichheit.* Wir sagen genau dann $x = y$, wenn $x \leq y$ und $y \leq x$.
5. *Addition.* $x + y := \{x^L + y, x + y^L \mid x^R + y, x + y^R\}$.
6. *Negation.* $-x := \{-x^R \mid -x^L\}$.
7. *Multiplikation.* $xy = \{x^L y + x y^L - x^L y^L, x^R y + x y^R - x^R y^R \mid x^L y + x y^R - x^L y^R, x^R y + x y^L - x^R y^L\}$.

Aufgabe 1. Erste Beispiele für surreale Zahlen

Zu Beginn ist uns keine einzige surreale Zahl bekannt. Trotzdem kennen wir eine *Menge* surrealer Zahlen: nämlich die leere Menge. So können wir nach dem Konstruktionsprinzip eine erste surreale Zahl bauen:

$$0 := \{|\} \quad (\text{also } L = R = \emptyset)$$

Wir haben diese Zahl „0“ genannt, weil sie die Rolle der Null einnehmen wird. Mit dieser Zahl an der Hand können wir eine weitere surreale Zahl bauen:

$$1 := \{0 | \} \quad (\text{also } L = \{0\}, R = \emptyset)$$

- a) Überzeuge dich davon, dass die so definierten Zahlen 0 und 1 wirklich surreale Zahlen sind, dass also die **Voraussetzung** in der Konstruktionsvorschrift jeweils erfüllt war.
- b) Überprüfe, dass gemäß der Definitionen tatsächlich $0 \leq 1$ gilt.
- c) Mit der bereits konstruierten Zahl 0 kann man insgesamt drei Ausdrücke angeben:

$$\{0 | \}, \quad \{ | 0 \}, \quad \{0 | 0\}.$$

Welche der beiden hinteren Ausdrücke sind Zahlen?

- d) Sortiere alle bis jetzt gefundenen Zahlen und überlege dir so geeignete Bezeichnungen für die neuen Zahlen aus c).
- e) Konstruiere ein paar weitere Zahlen, sortiere sie in die bereits gefundenen Zahlen ein und überlege dir geeignete Namen für sie.

Aufgabe 2. Erste Rechnungen mit surrealen Zahlen (benötigt Aufgabe 1)

- a) Überprüfe, dass gemäß der Definitionen gilt: $0 + 1 = 1$.
- b) Berechne $(-1) + 1$ und vergleiche das Ergebnis mit 0.

Aufgabe 3. Mex-Operation

Ist S eine endliche Menge natürlicher Zahlen, so ist $\text{mex } S$ die *kleinste* natürliche Zahl, die *nicht* in S liegt (minimum excludant).

- a) Überzeuge dich von der Richtigkeit folgender Beispiele:

$$\text{mex}\{0, 1, 4, 7\} = 2, \quad \text{mex}\{1, 4, 7\} = 0, \quad \text{mex } \emptyset = 0.$$

- b) Berechne das Mex von deiner Lieblingsteilmenge natürlicher Zahlen.

Aufgabe 4. Nimber-Addition (benötigt Aufgabe 3)

Die *Nimber-Addition* ist in mengentheoretischer Notation wie folgt rekursiv definiert:

$$n \oplus m := \text{mex}\left(\{n' \oplus m \mid n' < n\} \cup \{n \oplus m' \mid m' < m\}\right).$$

Wenn man also den Wert von $n \oplus m$ herausfinden möchte, muss man zunächst die Werte von $n' \oplus m$ für alle kleineren Zahlen $n' < n$ und die Werte von $n \oplus m'$ für alle kleineren Zahlen $m' < m$ herausfinden. Der Wert von $n \oplus m$ ergibt sich dann als Mex dieser Zahlen.

- a) Ergänze unten stehende Tabelle für die Nim-Addition.

- ★ b) Wenn du schon die Beweistechnik der Induktion kennst, kannst du dich an folgenden Behauptungen für alle $n \in \mathbb{N}$ versuchen:

$$0 \oplus n = n$$

$$n \oplus n = 0$$

$n \setminus m$	0	1	2	3	4	5	6	7	...
0	0	1	2						
1		0	3						
2									
3							4		
4			6						
5									
6									
7						2			
\vdots									

Aufgabe 5. *Falsche binomische Formel*

... wäre schön, benötigt aber Multiplikation; hat daher hohen technischen Aufwand.