



Zirkelzettel vom 31. Mai 2014: Synthetische Differentialgeometrie

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Motivation für infinitesimale Zahlen	2
3	Exkurs zu Mengen und Funktionen	5
4	Das Axiom der Mikroaffinität	6

1 Einleitung

Eine *infinitesimale Zahl* ε ist eine Zahl, deren Quadrat Null ist: $\varepsilon^2 = 0$. In der gewöhnlichen mathematischen Welt gibt es nur eine einzige infinitesimale Zahl, nämlich die Zahl 0. Für gewisse Anwendungen wäre es aber schön, wenn es auch interessantere infinitesimale Zahlen gäbe. Ähnlich wie bei den komplexen Zahlen kann man solche Zahlen *künstlich* konstruieren; anders als bei den komplexen Zahlen muss man dafür aber gleich ein ganzes neues *mathematisches Universum* errichten.

Das Teilgebiet der Mathematik, in dem man solche Universen studiert, heißt *synthetische Differentialgeometrie* und ist ein relativ junges Forschungsgebiet. Erste Ideen gehen auf die alten Griechen und Versuche des dänischen Mathematikers Johannes Hjelmslev zurück (* 1873, † 1950), richtig initiiert wurde das Gebiet aber erst in den 1970er Jahren durch Anders Kock, ebenfalls Däne.

Im Folgenden werden wir lernen, wozu infinitesimale Zahlen nützlich sind; wie man in dem alternativen Universum arbeiten kann; und schließlich inwieweit Resultate, die man in der neuen mathematischen Welt erzielt, auch in der gewöhnlichen mathematischen Welt Gültigkeit haben. Ohne diesen letzten Punkt wäre unser Unterfangen ein reines Gedankenexperiment ohne Nutzen.

Dreh- und Angelpunkt für synthetische Differentialgeometrie ist ein Axiom, das *klassisch* – das heißt im gewöhnlichen mathematischen Universum – falsch ist:

Axiom der Mikroaffinität. Sei $\Delta := \{\varepsilon \in \mathbb{R} \mid \varepsilon^2 = 0\}$ die *infinitesimale Monade* um 0. Sei $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion. Dann gibt es gewisse eindeutig bestimmte reelle Zahlen a und b , sodass für alle Zahlen ε in Δ folgende Gleichung gilt:

$$f(\varepsilon) = a + b\varepsilon.$$

Wir werden etwas Zeit benötigen, um zunächst überhaupt die Aussage dieses Axioms zu verstehen und dann seine Konsequenzen zu überblicken.

2 Motivation für infinitesimale Zahlen

Schnitte. In Abbildung ?? sind zwei Situationen skizziert, bei denen sich jeweils zwei Kurven schneiden. (Gerade Linien zählen auch als *Kurven*.) Es ist offensichtlich, dass sich im ersten Bild die beiden Geraden in genau einem Punkt schneiden. Die Schnittsituation beim zweiten Bild ist dagegen weniger klar. In klassischer Mathematik konstatiert man, der Schnitt bestehe ebenfalls aus nur genau einem Punkt, nämlich dem Ursprung. In der Tat könnte man keinen weiteren Punkt benennen, der ebenfalls auf beiden Kurven liegen würde. Anschaulich scheint es aber ja doch einen Unterschied zu geben – man benötigt infinitesimale Zahlen, um ihn auf direkte Art und Weise mathematisch einzufangen.¹

Aufgabe 1. Schnittberechnung

Die Gleichungen der beiden Kurven im ersten Bild sind

$$\begin{cases} y = 2x, & (1) \\ y = 0. & (2) \end{cases}$$

Die erste Gleichung gehört zur schrägen Gerade, die zweite zur x -Achse (auf der alle Punkte als y -Koordinate Null haben). Die Gleichungen der Kurven im zweiten Bild sind

$$\begin{cases} y = x^2, & (3) \\ y = 0. & (4) \end{cases}$$

- a) Löse das erste Gleichungssystem, um zu beweisen: Der einzige Schnittpunkt $(x|y)$ hat die Koordinaten $x = 0$ und $y = 0$. Wieso entspricht das Schneiden der beiden Kurven rechnerisch der Lösungsmenge des kombinierten Gleichungssystems?
- b) Löse das zweite Gleichungssystem, um zu beweisen, dass ein Punkt $(x|y)$ genau dann im Schnittbereich des zweiten Bilds liegt, wenn seine x -Koordinate Null und seine y -Koordinate eine infinitesimale Zahl ist (also $y^2 = 0$ erfüllt).

Hierbei ist es wichtig, mit Absicht langsam zu rechnen, um nicht durch zu schnelles Vereinfachen die Pointe vorwegzunehmen. In klassischer Mathematik gilt die Regel „wenn $y^2 = 0$, dann auch $y = 0$ “; erst mit dieser Regel vereinfacht sich das Ergebnis, dann zu demselben wie in Teilaufgabe a).

Physik. Infinitesimale Zahlen sind ferner in der Physik nützlich. Dort hat man es manchmal mit „sehr kleinen“ (aber nicht verschwindenden) Größen wie etwa Differenzen Δx zu tun. Da das Quadrat einer kleinen Zahl nochmals kleiner und „wirklich winzig“ ist, erlaubt man sich, in Rechnungen Quadrate von Δx einfach wegzulassen. Das ist mathematisch natürlich nicht zulässig – trotzdem haben die Physikerinnen und Physiker mit diesem Vorgehen offensichtlich großen Erfolg!

¹Indirekt geht es auch in klassischer Mathematik: Die Parabel hat bei der Stelle $x = 0$ eine *doppelte Nullstelle*. Das bedeutet, dass nicht nur der Funktionswert dort Null ist, sondern auch noch seine erste Ableitung.

Mathematiker sollten die physikalischen Methoden nicht blind verurteilen, sondern sie ernst nehmen und Möglichkeiten finden, sie mathematisch sauber und rigoros zu verstehen. Infinitesimale Zahlen bieten eine solche Möglichkeit. sie ernst nehmen und Möglichkeiten finden, sie mathematisch sauber und rigoros zu verstehen. Infinitesimale Zahlen bieten eine solche Möglichkeit.

Aufgabe 2. Quadrate großer und kleiner Zahlen

- a) Sei x eine reelle Zahl, die größer als 1 ist. Zeige: Das Quadrat x^2 ist größer als x .
- b) Sei x eine reelle Zahl zwischen 0 und 1. Zeige: Das Quadrat x^2 ist kleiner als x .

Wenn die Dezimalentwicklung von x mit n Nullen nach dem Komma beginnt, mit etwa wie vielen Nullen beginnt dann die Dezimalentwicklung von x^2 ?

Differentialrechnung. Infinitesimale Zahlen sind ferner fürs Differenzieren nützlich: Sie ermöglichen es nämlich, auf gewisse Grenzwertprozesse zu verzichten und gleichzeitig näher an der Anschauung zu bleiben. Zur Erinnerung wollen wir die übliche Definition der Ableitung rekapitulieren:

Definition 2.1. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$ eine Stelle. Falls der Grenzwert

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon}$$

existiert, so heißt f an der Stelle x_0 *differenzierbar* und die Ableitung $f'(x_0)$ ist per Definition dieser Grenzwert.

Aufgabe 3. Intuition zum Differentialquotienten

Erinnere dich, inwieweit der Bruch

$$\frac{f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon}$$

eine *Sekantensteigung* angibt, und erkläre anhand einer Skizze, wieso der Grenzwert für $\varepsilon \rightarrow 0$ anschaulich die Steigung der Tangente an den Graphen von f durch den Punkt $(x_0 | f(x_0))$ angibt.

Um die Definition besser zu verstehen, möchten wir ohne Verwendung der bekannten Ableitungsregeln die Ableitung der Quadratfunktion bestimmen.

Proposition 2.2. Die Quadratfunktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ ist überall differenzierbar mit Ableitung $f'(x) = 2x$.

Beweis. In der Schule würde man in einer langen Gleichungskette die Definition so lange vereinfachen, bis der Grenzwert unmittelbar ablesbar ist. Dabei müsste man in jedem Schritt das \lim -Symbol mitführen, würde das aber vielleicht auch oftmals vergessen. Übersichtlicher ist folgende Schreibweise:

$$\frac{f(x + \varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} = \frac{(x + \varepsilon)^2 - x^2}{\varepsilon} = \frac{x^2 + 2x\varepsilon + \varepsilon^2 - x^2}{\varepsilon} = 2x + \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 2x. \quad \square$$

An diesem Beweis ist an sich nichts auszusetzen. Die Rechnung selbst ist genügend einfach, durch die Grenzwertüberlegung aber trotzdem logisch nicht ganz elementar. Die Physiker haben eine einfachere Möglichkeit, die Aussage zu „beweisen“ – eine, die ohne Grenzwerte auskommt:

Physiker-Beweis. Sei ε „sehr klein“. Dann gilt:

$$\frac{f(x + \varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} = \frac{(x + \varepsilon)^2 - x^2}{\varepsilon} = \frac{x^2 + 2x\varepsilon + \varepsilon^2 - x^2}{\varepsilon} = 2x + \varepsilon = 2x. \quad \square$$

Bemerkenswert ist die schizophrene Natur dieses Arguments: Zum einen lässt man im letzten Schritt den Term ε einfach weg – mit der Begründung, ε sei schließlich „sehr klein“. Andererseits aber teilt man durch ε – das ginge nur, wenn man wüsste, dass ε positiv oder negativ, aber jedenfalls nicht Null ist.

Außerdem sollte man auch zu Beginn der Rechnung die Vereinfachung $f(x + \varepsilon) - f(x) = f(x) - f(x) = 0$ treffen dürfen, wenn man doch am Ende auch einfach ε weglassen durfte. Schließlich sollten sich die Rechengesetze nicht inmitten einer Rechnung ändern. Dann wäre das Ergebnis insgesamt $f'(x) = 0$ – das ist jedoch eine unsinnige Behauptung.

Aus diesen Gründen wird das Physiker-Argument in klassischer Mathematik nicht akzeptiert. Mit den infinitesimalen Zahlen aus synthetischer Differentialgeometrie werden wir aber in der Lage sein, die wesentlichen Ideen des Physiker-Arguments in einen mathematisch einwandfreien Beweis zu gießen. So können wir die Vorteile beider Welten – einfache Rechnungen einerseits und mathematische Rigorosität andererseits – vereinen.

Aufgabe 4. Ableitung der Kubikfunktion

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ die Kubikfunktion. Verifiziere direkt anhand der mathematischen Definition, dass f überall differenzierbar mit Ableitung $f'(x) = 3x^2$ ist.

Hinweis: Den Ausdruck $(x + \varepsilon)^3$ kann man entweder durch mehrmaliges Ausmultiplizieren oder direkt durch Verwendung der binomischen Formel für Kuben statt Quadrate vereinfachen. (Die Koeffizienten der allgemeinen binomischen Formel stehen im Pascalschen Dreieck.)

Aufgabe 5. Beispiele für nicht differenzierbare Funktionen

- a) Die Betragsfunktion (siehe Abbildung ??a) ist an der Stelle $x_0 = 0$ nicht differenzierbar. Anschaulich erkennt man das daran, dass der Graph am Punkt $(0|0)$ keine eindeutige Tangente besitzt.² Bestätige diese Beobachtung anhand der Definition über den Differentialquotienten: Die Sekantensteigungen konvergieren für $\varepsilon \rightarrow 0$ nicht gegen einen bestimmten Wert, sondern ...

Wenn du möchtest, kannst du das auch noch rechnerisch nachvollziehen: Berechne den *links-* und den *rechtsseitigen* Grenzwert des Differenzenquotienten. Nutze dabei folgende Definition der Betragsfunktion:

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0, \\ -x, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

- b) Es gibt auch Funktionen, deren Graphen keine offensichtlichen Knickpunkte haben und die trotzdem nicht überall differenzierbar sind. Erkläre anschaulich und zeige

rechnerisch, dass folgende Funktion an der Stelle $x_0 = 0$ nicht differenzierbar ist (siehe Abbildung ??b):

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

(Diese Funktion ist übrigens durchaus *stetig*.)

3 Exkurs zu Mengen und Funktionen

Eine *Menge* reeller Zahlen kann man sich wie eine Einkaufstasche vorstellen, die statt leckerer Äpfel gewisse reelle Zahlen enthält. Die Zahlen, die in einer Menge vorkommen, heißen *Elemente* dieser Menge. Mengen dürfen auch unendlich viele oder gar keine Elemente enthalten. Es gibt drei Möglichkeiten, Mengen anzugeben:

$$M_1 = \{4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81\},$$

$$M_2 = \{4, 9, 16, \dots, 81\},$$

$$M_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 4 \text{ und } x \leq 81 \text{ und } x \text{ ist das Quadrat einer natürlichen Zahl}\}.$$

Im ersten Fall zählt man die Elemente der Menge einfach explizit auf. Im zweiten Fall erwartet man von seinem Gegenüber, die Regelmäßigkeit zu erkennen und die in der Notation nicht aufgeführten Elemente gedanklich zu ergänzen. Der dritte Fall liest sich wie folgt: Die Menge M_3 ist die Menge all derjenigen reellen Zahlen („ $x \in \mathbb{R}$ “), welche ≥ 4 , ≤ 81 und zugleich das Quadrat einer natürlichen Zahl sind; man sammelt also alle reellen Zahlen mit einer gewissen Eigenschaft auf.

Aufgabe 6. Beispiele für Mengen

Sei $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 4\}$. Skizziere die Menge M auf dem Zahlenstrahl.

Eine *Funktion* $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ordnet jedem Element ihrer *Definitionsmenge* D eine bestimmte reelle Zahl zu: Liegt x in D , so ist $f(x)$ eine bestimmte reelle Zahl. Für Zahlen außerhalb der Definitionsmenge D ist „ $f(x)$ “ ein sinnloser Ausdruck.

Zuordnungen wie $f : x \mapsto \pm x$, für die $f(x)$ gewissermaßen mehrere Werte annimmt, führen nicht zu Funktionen, sondern zu *Relationen*. Solche werden wir im Folgenden nie betrachten.

Aufgabe 7. Funktionen mit eingeschränkten Definitionsmengen

a) Finde die größtmögliche Definitionsmenge D , sodass folgende Zuordnung Sinn ergibt:

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x}.$$

²Man kann an dieser Stelle durchaus Geraden anlegen, es gibt aber keine besonders überzeugende Wahl einer *berührenden* Gerade. Fortgeschrittene Differentialrechnung wird mit dieser Uneindeutigkeit fertig, durch den Begriff der *Subgradienten* von konvexen Funktionen.

- b) Der Term „ x^2 “ ergibt für alle reellen Zahlen x Sinn, die größtmögliche Definitionsmenge der Zuordnung $x \mapsto x^2$ ist also die vollständige Menge \mathbb{R} aller reellen Zahlen. Man kann aber die Definitionsmenge auch künstlich einschränken:

$$f : [2; 4] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2.$$

Dabei bezeichnet „ $[2; 4]$ “ das abgeschlossene Intervall von 2 bis 4, also die Menge $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 4\}$. Skizziere den Verlauf dieser Funktion. (Das wird *nicht* die übliche Normalparabel.)

4 Das Axiom der Mikroaffinität

Im Axiom der Mikroaffinität kommt die *infinitesimale Monade um die Zahl 0* vor. Damit ist folgende Menge reeller Zahlen gemeint:

$$\Delta := \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 0\}.$$

Die Elemente von Δ sind also all diejenigen Zahlen, deren Quadrat Null ist. In klassischer Mathematik gilt die Regel „wenn das Quadrat einer Zahl Null ist, dann ist auch die Zahl selbst Null“. Daher besteht Δ in klassischer Mathematik nur aus der Zahl 0: $\Delta = \{0\}$.

Ab dieser Stelle wollen wir uns von klassischer Mathematik (vorläufig) verabschieden, daher geben wir nun genau an, welche Axiome wir noch verwenden möchten:

- Die üblichen logischen Gesetze – mit einer wichtigen Ausnahme, die wir weiter unten diskutieren.

Ein logisches Gesetz ist etwa: Wenn sowohl eine Aussage A als auch eine Aussage B stimmen, so stimmt insbesondere A . Ein anderes lautet: Wenn eine Aussage A stimmt und B eine weitere (vielleicht falsche) Aussage ist, so stimmt es auch, dass A oder B korrekt ist.³

- Die üblichen Rechenregeln zur Termvereinfachung.

$$\begin{array}{ll} 0 + x = x & 1 \cdot x = x \\ x + y = y + x & x \cdot y = y \cdot x \\ x + (y + z) = (x + y) + z & x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \\ (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z \end{array}$$

- Das Axiom zu Gegenzahlen: Jede reelle Zahl besitzt eine zugehörige Gegenzahl – zu x gibt es eine Zahl $-x$ mit der Eigenschaft $x + (-x) = 0$.
- Das Axiom zu Inversen: Ist eine reelle Zahl *nicht Null*, so besitzt sie ein Inverses bezüglich der Multiplikation. In Formeln: Wenn $x \neq 0$, so gibt es eine Zahl y mit $xy = 1$. Das Inverse y wird üblicherweise als „ $\frac{1}{x}$ “ oder „ x^{-1} “ geschrieben.

³In der Mathematik ist „oder“ stets einschließend gemeint, wenn man nicht mit „entweder oder“ explizit die ausschließende Variante verwendet. Wenn ich also heute Abend ins Kino gehen *und* später schlafen werde, so stimmt es insbesondere auch, dass ich heute Abend ins Kino gehen *oder* schlafen werde.

- Einige weitere Axiome, die wir aber erst dann einführen, wenn wir sie benötigen. Es sei nur noch verraten, dass wir die *Trichotomie* der Ordnung *nicht* verwenden: Diese würde besagen, dass jede Zahl entweder klein, gleich oder größer als Null ist.

Diese Axiome rechtfertigen jedenfalls *nicht* die Regel, der zufolge das Quadrat einer Zahl nur dann Null sein könne, wenn sie es selbst schon wäre. Auch wenn wir keine weiteren Elemente in Δ angeben können, können wir mit unserem reduzierten Satz an Axiomen daher trotzdem nicht schließen, dass Δ *nur* die Null enthalte.

Wir stellen uns die Menge Δ als eine *infinitesimale Umgebung* der Zahl 0 vor. Keine konkrete kleine positive Zahl liegt in Δ – etwa liegt ein Millionstel nicht in Δ , denn das Quadrat eines Millionstels ist nicht Null, sondern ein Billionstel. Wir stellen uns Δ eher als die Menge der Schnittpunkte in Abbildung ??b vor.

Mathematisch erweckt das Axiom der Mikroaffinität die Menge Δ zum Leben und bestätigt dann unsere Intuition über Δ :

Axiom der Mikroaffinität. Sei $\Delta := \{\varepsilon \in \mathbb{R} \mid \varepsilon^2 = 0\}$ die *infinitesimale Monade* um 0. Sei $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion. Dann gibt es gewisse eindeutig bestimmte reelle Zahlen a und b , sodass für alle Zahlen ε in Δ folgende Gleichung gilt:

$$f(\varepsilon) = a + b\varepsilon.$$

Das Axiom spricht nicht über Funktionen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sondern nur über solche, deren Definitionsmengen die infinitesimale Monade Δ sind. Die Funktionswerte einer solchen Funktion können also nur in sehr begrenzten Ausmaßen variieren. Das Axiom besagt nun: Eine solche Funktion sieht stets wie eine affine Funktion aus, mit Achsenabschnitt a und Steigung b .⁴

⁴In der Schule nennt man solche Funktionen *linear*. In Universitätsmathematik ist dieser Begriff solchen affinen Funktionen vorbehalten, deren Achsenabschnitt Null ist.

Abbildung 1 Auf infinitesimalen Umgebungen sind Funktionen affin.

