Matheschülerzirkel
Universität Augsburg
Schuljahr 2013/2014
Klasse 11./12., Gruppe 2

Zirkelzettel vom 21. Dezember 2013 und 18. Januar 2014

Konventionen

Die *Menge der natürlichen Zahlen* ist $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Die *leere Menge* $\{\} = \emptyset$ enthält kein einziges Element.

Alle Elemente der Menge der Elefanten in diesem Raum können π auswendig.

Regeln für surreale Zahlen

1. *Konstruktionsprinzip.* Sind L und R Mengen surrealer Zahlen und ist kein Element von $L \geq$ irgendeinem Element von R, so ist $\{L \mid R\}$ ebenfalls eine surreale Zahl. Alle surrealen Zahlen entstehen auf diese Art.
2. *Notation.* Für $x = \{L \mid R\}$ bezeichnen wir ein typisches Element von L mit „x^L“, ein typisches Element von R mit „x^R“. (Das hat mit Potenzieren nichts zu tun.) Wenn wir „$\{a, b, c, \ldots \mid d, e, f, \ldots\}$“ schreiben, meinen wir die Zahl $\{L \mid R\}$, sodass $a, b, c, \ldots$ die typischen Elemente von L und $d, e, f, \ldots$ die typischen Elemente von R sind.
3. *Anordnung.*

   Wir sagen genau dann $x \geq y$, falls kein $x^R \leq y$ und $x \leq$ keinem y^L.

   Wir sagen genau dann $x \not\leq y$, wenn $x \leq y$ nicht gilt.

   Wir sagen genau dann $x < y$, wenn $x \leq y$ und $y \not\leq x$.

   Wir sagen genau dann $x \leq y$, wenn $y \geq x$.

   Wir sagen genau dann $x > y$, wenn $y < x$.
4. *Gleichheit.* Wir sagen genau dann $x = y$, wenn $x \leq y$ und $y \leq x$.
5. *Rechenoperationen.*

$$\begin{aligned}
x + y &:= \{x^L + y,\ x + y^L \mid x^R + y,\ x + y^R\}. \\
-x &:= \{-x^R \mid -x^L\}. \\
x - y &:= x + (-y). \\
xy &:= \{x^L y + x y^L - x^L y^L,\ x^R y + x y^R - x^R y^R \mid \\
&\qquad\qquad x^L y + x y^R - x^L y^R,\ x^R y + x y^L - x^R y^L\}.
\end{aligned}$$

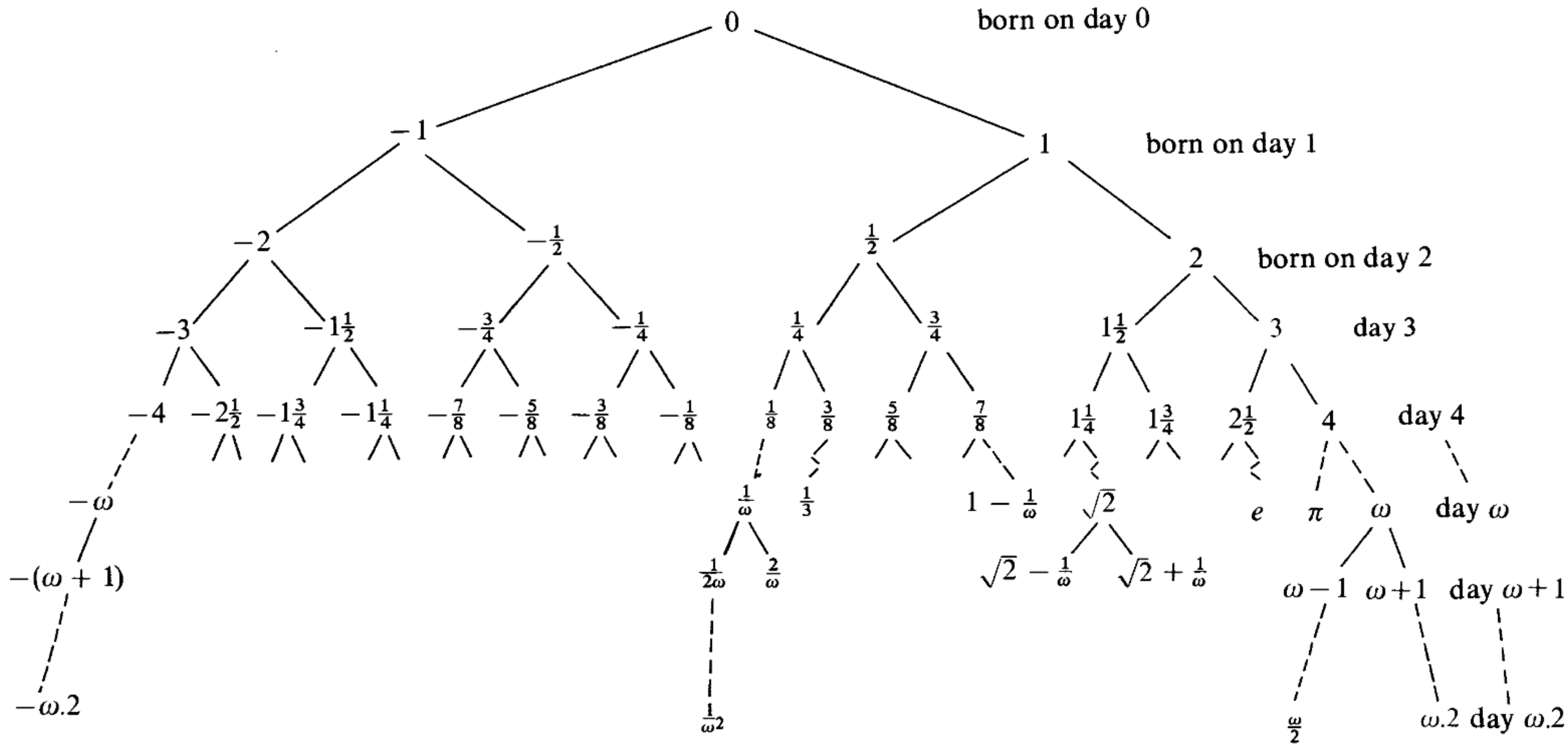


Abbildung 0 aus Conways Buch: Wann die ersten Zahlen geboren wurden.

Literatur:

J. H. Conway. *On Numbers and Games.* Zweite Auflage. A K Peters, 2001.

D. Knuth. *Surreal Numbers.* Addison Wesley, 1974.

C. Tøndering. *Surreal Numbers.* 2013. `http://www.tondering.dk/claus/sur16.pdf`

Der kuriose Rechenbereich der surrealen Zahlen

Aufgabe 0. *Erste Beispiele für surreale Zahlen*

Zu Beginn ist uns keine einzige surreale Zahl bekannt. Trotzdem kennen wir eine *Menge* surrealer Zahlen: nämlich die leere Menge. So können wir nach dem Konstruktionsprinzip eine erste surreale Zahl bauen:

$$0 := \{\,|\,\} \quad (\text{also } L = R = \emptyset)$$

Wir haben diese Zahl „0“ genannt, weil sie die Rolle der Null einnehmen wird. Mit dieser Zahl an der Hand können wir eine weitere surreale Zahl bauen:

$$1 := \{0\,|\,\} \quad (\text{also } L = \{0\}, R = \emptyset)$$

a) Überzeuge dich davon, dass die so definierten Zahlen 0 und 1 wirklich surreale Zahlen sind, dass also die Voraussetzung in der Konstruktionsvorschrift jeweils erfüllt war.

b) Überprüfe, dass gemäß der Definitionen tatsächlich $0 \leq 1$ gilt.

c) Mit der bereits konstruierten Zahl 0 kann man insgesamt drei Ausdrücke angeben:

$$\{0\,|\,\}, \quad \{\,|\,0\}, \quad \{0 \mid 0\}.$$

Welche der beiden hinteren Ausdrücke sind Zahlen?

d) Sortiere alle bis jetzt gefundenen Zahlen und überlege dir so geeignete Bezeichnungen für die neuen Zahlen aus c).

e) Konstruiere ein paar weitere Zahlen, sortiere sie in die bereits gefundenen Zahlen ein und überlege dir geeignete Namen für sie.

Aufgabe 1. *Erste Rechnungen mit surrealen Zahlen (benötigt Aufgabe 0)*

a) Überprüfe, dass gemäß der Definitionen gilt: $0 + 0 = 0$.

b) Überprüfe, dass gemäß der Definitionen gilt: $0 + 1 = 1$.

c) Berechne $(-1) + 1$ und vergleiche das Ergebnis mit 0.

d) Erkläre, wieso im Lichte von Teilaufgabe c) die spezielle Gleichheitsregel nötig ist: Wieso nennt man zwei surreale Zahlen nicht einfach genau dann gleich, wenn ihre linken und rechten Mengen übereinstimmen?

e) Berechne $1+1$, berechne $(1+1)+1$ und so weiter (so lange du magst). Die Ergebnisse nennen wir fortan 2, 3 und so weiter.

Aufgabe 2. *Eine praktische Vereinfachungsregel (benötigt Aufgabe 0)*

Es gilt folgendes Lemma: Ohne den Zahlenwert zu verändern, kann man aus der linken Menge einer surrealen Zahl eine Zahl a entfernen, sofern es in der linken Menge noch eine größere Zahl als a gibt. Analog kann man aus der rechten Menge einer surrealen Zahl eine Zahl b entfernen, sofern es in der rechten Menge noch eine kleinere Zahl als b gibt.

a) Überzeuge dich davon, dass folgende Beispielrechnung stimmt:

$$\{0, 1, 2 \mid 6, 7, 11\} = \{0, 2 \mid 6\} = \{2 \mid 6\}.$$

b) Vereinfache nach Lust und Laune weitere Zahlen.

Aufgabe 3. *Geburtstage von Zahlen (benötigt Aufgabe 0)*

Der *Geburtstag* $b(x)$ einer surrealen Zahl ist wiederum eine surreale Zahl, definiert als

$$b(x) := \{b(x^L), b(x^R) \mid\}.$$

Wir sagen auch: „Die Zahl x wurde am Tag $b(x)$ geboren.“

a) Überzeuge dich davon, dass die Zahl 0 am Tag 0 geboren wurde.

b) Berechne den Geburtstag von einigen surrealen Zahlen.

c) Wieso ergibt die Bezeichnung Sinn? (Vergleiche mit deiner Lösung von Aufgabe 0.)

d) Beweise, dass der Geburtstag einer surrealen Zahl wirklich eine surreale Zahl ist.

Bemerkung. Vielleicht hast du in deiner Bearbeitung von Teilaufgabe b) gesehen, dass der Geburtstag zweier verschieden aussehender, aber trotzdem gleicher surrealen Zahlen nicht unbedingt gleich ist. Das ist ein Manko an obiger Definition des Geburtstags.

Aufgabe 4. *Zahlenwerte erraten (benötigt Aufgabe 3)*

Es gilt folgendes Lemma: Eine Zahl $x = \{x^L \mid x^R\}$ beschreibt die *einfachste* – das heißt *frühest geborene* – Zahl, die größer als alle x^L und kleiner als alle x^R ist.

a) Überprüfe, dass dieses Lemma bei den dir bereits bekannten Zahlen stimmt.

b) Errate mit dem Lemma die Werte folgender Zahlen (manche kennst du vielleicht auch schon):

$$\{1 \mid\}, \qquad \{2 \mid\}, \qquad \{-3, 1 \mid 2\}, \qquad \{0 \mid \tfrac{1}{2}\}, \qquad \{-1 \mid -\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2}\}.$$

Aufgabe 5. *Rechtfertigung einer Bezeichnung (benötigt Aufgabe 1)*

Wir definieren $\frac{1}{2} := \{0 \mid 1\}$. In dieser Aufgabe wollen wir diese Bezeichnung rechtfertigen.

a) Berechne $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ gemäß der Definitionen.

b) Beweise, dass das Ergebnis aus Teilaufgabe a) gleich $1 = \{0 \mid\}$ ist.

   Tipp. Wenn du Zeit sparen möchtest, kannst du dazu das Lemma aus Aufgabe 4 verwenden. Streng genommen ist das aber ein gefährlicher Handel: Denn hier haben wir ja keinen Beweis dieses Lemmas diskutiert. Deine Rechnung basiert dann daher auf der Annahme, dass ich das Lemma richtig angegeben habe.

Bemerkung. Längere Rechnungen überlässt man lieber dem Computer, als sie per Hand durchzuführen.

Aufgabe 6. *Unendlich große Zahlen (benötigt Aufgabe 4)*

Wir definieren die surreale Zahl $\omega := \{0, 1, 2, \ldots \mid\}$.

a) Überzeuge dich davon, dass ω wirklich eine surreale Zahl ist.

b) Zeige: Für jede natürliche Zahl n gilt $n < \omega$. In diesem Sinn ist die Zahl ω unendlich groß!

c) Berechne $\omega + 1$.

d) Berechne $\omega - 1$.

e) Zeige: Für jede natürliche Zahl n gilt $n < \omega - 1$. Die Zahl $\omega - 1$ ist also eine Zahl, die immer noch größer als alle natürlichen Zahlen, aber kleiner als ω ist.

Aufgabe 7. *Unendlich kleine Zahlen (benötigt Aufgabe 4)*

Wir definieren die surreale Zahl $\varepsilon := \{0 \mid 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\}$.

a) Überzeuge dich davon, dass ε wirklich eine surreale Zahl ist.

b) Beweise: Die Zahl ε ist größer als 0, aber kleiner als jede gewöhnliche positive reelle Zahl. Dabei darfst du verwenden, dass jede reelle Zahl in einem geeigneten Sinn auch als surreale Zahl angesehen werden kann und dass zu jeder positiven reellen Zahl r eine Zweierpotenz n mit $\frac{1}{n} < r$ existiert.

c) Bewundere Ausdrücke wie $\omega + \varepsilon$, $\omega \cdot \varepsilon$, ε^2, $\frac{1}{\omega}$, $\frac{1}{\varepsilon}$. Gib Vermutungen ab, wo sich diese Zahlen auf der surrealen Zahlengerade einordnen lassen.

Aufgabe 8. *Induktionsbeweise mit surrealen Zahlen (benötigt Aufgabe 0)*

Wenn man für *alle* surrealen Zahlen $x = \{x^L \mid x^R\}$ eine bestimmte Aussage beweisen möchte, kann man dazu so vorgehen: *Unter der Annahme, dass die Aussage für alle x^L und alle x^R schon stimmt, zeigt man, dass sie auch für x stimmt.* Dieses Beweisprinzip heißt auch *Induktion* und ermöglicht, in einem Aufwasch eine Behauptung für alle surrealen Zahlen zu beweisen.

Auf den ersten Blick scheint dieses Prinzip zirkulär – man kann doch nicht das, was man beweisen möchte, schon voraussetzen! Tatsächlich aber ist dieses Beweisprinzip durchaus gerechtfertigt. Das wollen wir in dieser Aufgabe verstehen.

a) Welche besondere Annahme darf man laut Induktionsprinzip treffen, wenn man den Fall $x = 0 = \{|\}$ beweisen möchte?

b) Im Sinn von Aufgabe 3 sind für jede Zahl $x = \{x^L \mid x^R\}$ die Zahlen x^L und x^R schon *an früheren Tagen* konstruiert worden. Mache dir mit dieser Erkenntnis und Teilaufgabe a) klar, dass das Induktionsprinzip zulässig ist.

c) Wenn du das Induktionsprinzip für natürliche Zahlen schon kennst, wunderst du dich vielleicht, dass man hier nur eine Art Induktionsschritt, aber keinen Induktionsanfang benötigt. Wieso ist trotzdem alles in Ordnung?

Aufgabe 9. *Beispiele für Induktionsbeweise (benötigt das Prinzip aus Aufgabe 8)*

a) Beweise für alle surrealen Zahlen x: $x + 0 = x$.

b) Beweise für alle surrealen Zahlen x: $0 + x = x$.

c) Beweise für alle surrealen Zahlen x: $x \cdot 0 = 0$.

d) Beweise für alle surrealen Zahlen x: $x \geq x$.

e) Beweise für alle surrealen Zahlen x und y: $x + y = y + x$.

Aufgabe 10. *Unmenge surrealer Zahlen (benötigt Aufgabe 0)*

In einem gewissen Sinn gibt es *zu viele* surreale Zahlen, als dass sie noch eine Menge bilden könnten; sie bilden nur noch etwas, was man *echte Klasse* nennt.

Zeige: Wenn die surrealen Zahlen doch eine Menge bilden würden, gäbe es eine surreale Zahl, die größer als alle surrealen Zahlen wäre, insbesondere also auch größer als sich selbst.

Aufgabe 11. *Ordinale Addition (benötigt Aufgabe 4)*

In dieser Aufgabe wollen wir eine Rechenoperation kennenlernen, die beim Spiel *Hackenbush* eine Rolle spielen wird (siehe Aufgabe 19). Die *ordinale Summe* der surrealen Zahl 1 mit einer weiteren surrealen Zahl x ist definiert als

$$1 \boxplus x := \{0,\ 1 \boxplus x^L \mid 1 \boxplus x^R\}.$$

Wie die ordinale Summe von zwei beliebigen Summanden definiert ist, diskutieren wir hier nicht.

a) Überzeuge dich von folgenden Rechnungen:

$$1 \boxplus 0 = 1, \quad 1 \boxplus 1 = 2, \quad 1 \boxplus 2 = 3.$$

b) Was ist $1 \boxplus (-1)$?

c) Was ist $1 \boxplus \frac{1}{2}$?

d) Zeige: Für jede Zahl x ist $1 \boxplus x$ positiv (d. h. > 0).

e) Man kann beweisen, dass sich für eine surreale Zahl x, die eine gewöhnliche reelle Zahl repräsentiert, der Wert der ordinalen Summe $1 \boxplus x$ wie folgt ergibt: Er ist der erste Bruch in der Folge

$$\frac{x+1}{1}, \quad \frac{x+2}{2}, \quad \frac{x+3}{4}, \quad \frac{x+4}{8}, \quad \frac{x+5}{16}, \quad \ldots,$$

dessen Zähler (so, wie er geschrieben steht) größer als oder gleich 1 ist. Verwende diese Regel, um die Rechnungen aus den ersten drei Teilaufgaben schnell und einfach zu wiederholen, und berechne nach Lust und Laune weitere ordinale Summen.

Kombinatorische Spiele

$0 = \{\,|\,\}$ $\quad 1 = \{0\,|\,\}$ $\quad -1 = \{\,|\,0\}$ $\quad * = \{0\,|\,0\}$

In diesem Abschnitt wollen wir rundenbasierte Zwei-Personen-Spiele betrachten, die von einem *linken* und einem *rechten Spieler* bestritten werden, keinerlei Zufallselemente enthalten und nicht mit verborgenen Informationen arbeiten: Alle möglichen Züge sind für beide Spieler erkennbar. Verlierer ist derjenige, der keinen Zug mehr tätigen kann. Das Mühlespiel ist etwa ein solches Spiel, Fußball und viele Kartenspiele nicht.

Die jeweils vorliegenden Spielsituationen, genannt *Positionen*, wollen wir mathematisch mit sog. *Games* beschreiben, einer leichten Verallgemeinerung der surrealen Zahlen. Die Konstruktionsregel der Games ist im Vergleich zur surrealen Variante freigiebiger:

Konstruktionsregel für Games. Sind L und R Mengen von Games, so ist $\{L \mid R\}$ ebenfalls ein Game. Alle Games entstehen auf diese Art.

Die restlichen Regeln für Games sind dieselben wie für die surrealen Zahlen, und das Induktionsprinzip (siehe Aufgabe 8) gilt ebenfalls.

Die linke Menge eines Games stellen wir uns als die Menge derjenigen Positionen vor, in die der linke Spieler ziehen darf, wenn er am Zug ist. Analog beschreibt die rechte Menge eines Games diejenigen Positionen, in die der rechte Spieler ziehen darf, wenn er am Zug ist. Fortan wollen wir den linken Spieler auch einfach *Links* und den rechten *Rechts* nennen.

Das einfachste Zwei-Personen-Spiel ist das sog. *Nullspiel*: Der Spieler, der an der Reihe ist, verliert sofort. In diesem Spiel haben also beide Spieler keine erlaubten Züge – die Menge ihrer erlaubten Züge sind also jeweils leer. Diese Situation wird daher durch das Game $\{|\} = 0$ beschrieben.

Die zweite Abbildung oben zeigt eine Spielsituation, in dem (ausgehend vom Wurzelknoten unten) Links einen erlaubten Zug durchführen kann. Das soll die nach links geneigte Kante andeuten. Rechts hat keinerlei erlaubte Züge. Daher ist die rechte Menge des zugehörigen Games leer. Die linke Menge enthält genau ein Element, nämlich das Game, das die Spielsituation nach Tätigung des einzigen erlaubten Zugs beschreibt. Da diese das Nullspiel ist, gilt also $L = \{0\}$. Somit beschreibt das Game $\{0 \,|\} = 1$ die Spielsituation.

Dual dazu beschreibt das Game $\{|\ 0\} = -1$ eine Spielsituation, in dem Links keinerlei erlaubte Züge hat (also sofort verliert, wenn er oder sie an der Reihe ist) und Rechts mit einem Zug in das Nullspiel ziehen darf, in dem dann Links verliert, da Links keinen Zug mehr tätigen kann.

Die Games 0, 1 und -1 sind sogar surreale Zahlen. Das Game, das die Spielsituation der vierten Abbildung oben beschreibt, ist daher unser erstes Beispiel für ein Game, das keine surreale Zahl ist. Beide Spieler haben genau einen erlaubten Zug, der jeweils zum Nullspiel führt. Als Kurzschreibweise definieren wir $\star := \{0 \mid 0\}$.

Jede surreale Zahl ist entweder > 0, $= 0$ oder < 0. Bei Games kann es vorkommen, dass keine dieser Möglichkeiten eintritt. Wir sagen dann, das Game sei *unklar* und schreiben „$\parallel 0$“. Allgemein gilt für ein Game G:

$G > 0$ genau dann, wenn es eine Gewinnstrategie für Links gibt.
$G < 0$ genau dann, wenn es eine Gewinnstrategie für Rechts gibt.
$G = 0$ genau dann, wenn es eine Gewinnstrategie für den zweiten Spieler gibt.
$G \parallel 0$ genau dann, wenn es eine Gewinnstrategie für den ersten Spieler gibt.

Der Ausdruck *Gewinnstrategie* bedeutet, dass der betreffende Spieler in der Lage ist, einen Sieg zu erzwingen – unabhängig davon, wie sein Gegenüber reagiert. Dabei ist aber nicht ausgeschlossen, dass der betreffende Spieler aus Unachtsamkeit einen Fehler macht und daher trotzdem verliert.

Aufgabe 12. *Gewinnstrategien bei den vier einfachsten Spielen (benötigt Aufgabe 0)*

Mache dir ohne Verwendung der Merkregeln im Kasten klar:

a) Im Spiel 1 gibt es eine Gewinnstrategie für Links – unabhängig davon, welcher Spieler beginnt.

b) Im Spiel -1 gibt es eine Gewinnstrategie für Rechts – unabhängig davon, welcher Spieler beginnt.

c) Im Spiel $\star$ gibt es eine Gewinnstrategie für den beginnenden Spieler, wer immer das auch sein mag.

d) Im Spiel 0 gibt es eine Gewinnstrategie für den zweiten Spieler.

Aufgabe 13. *Gewöhnung an unklare Games (benötigt Aufgabe 12)*

Beweise rechnerisch, dass $\star \mid\mid 0$, beweise also, dass weder $\star \leq 0$ noch $\star \geq 0$ stimmt.

Aufgabe 14. *Gewinnstrategien bei allgemeinen Games (benötigt Aufgabe 12 und viel Ruhe)*

In dieser Aufgabe wollen wir verstehen, wieso für Games G aus > 0, < 0, $= 0$ bzw. $\mid\mid 0$ schon folgt, dass es eine Gewinnstrategie für Links, Rechts, den zweiten Spieler bzw. den ersten Spieler gibt. Dazu wollen wir diese Aussage über Induktion beweisen; sei also ein Game $G = \{G^L \mid G^R\}$ gegeben und gelte die zu zeigende Behauptung schon für alle Games G^L und G^R.

a) Überzeuge dich von folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned}
&G > 0 \text{ genau dann, wenn kein } G^R \leq 0 \text{ und } 0 \leq \text{einem } G^L. \\
&G < 0 \text{ genau dann, wenn } 0 \leq \text{keinem } G^L \text{ und ein } G^R \leq 0. \\
&G = 0 \text{ genau dann, wenn } 0 \leq \text{keinem } G^L \text{ und kein } G^R \leq 0. \\
&G \mid\mid 0 \text{ sonst.}
\end{aligned}$$

b) Nun wollen wir in jedem der vier Fälle zeigen, dass tatsächlich eine Gewinnstrategie wie behauptet existiert. Vervollständige folgenden Beweisansatz für den Fall $G > 0$:

Falls $G > 0$: Dann ist zu zeigen, dass Links eine Gewinnstrategie besitzt. Falls Links beginnt, so kann er in eine Position $G^L \geq 0$ ziehen. Diese neue Position ist also > 0 oder $= 0$. Im ersten Fall hat er nach Induktionsvoraussetzung eine Gewinnstrategie. Im zweiten Fall hat nach Induktionsvoraussetzung der zweite Spieler eine Gewinnstrategie – dieser ist auch gerade Links. Falls Rechts beginnt, so ...

c) Führe auf ähnliche Art und Weise Beweise in den drei restlichen Fällen. Der Fall $G \mid\mid 0$ ist der schwerste.

Aufgabe 15. *Interpretation der Negation (benötigt Aufgabe 12)*

a) Mache dir klar: Wird eine Spielsituation durch ein Game $G = \{G^L \mid G^R\}$ beschrieben, so beschreibt $-G = \{-G^R \mid -G^L\}$ dieselbe Spielsituation, wobei aber die Rollen des linken und rechten Spielers für den ersten und alle weiteren Züge genau vertauscht sind.

b) Erkläre, wieso die Negation eines unklaren Games wieder ein unklares Game ist.

Aufgabe 16. *Interpretation der Addition (benötigt Aufgabe 12)*

a) Mache dir klar: Werden zwei Spielsituationen durch Games $G = \{G^L \mid G^R\}$ und $H = \{H^L \mid H^R\}$ beschrieben, so beschreibt die Summe $G + H = \{G^L + H,\ G + H^L \mid G^R + H,\ G + H^R\}$ folgende Situation: Die Spiele zu G und H liegen auf dem Tisch. Der beginnende Spieler darf sich nach Belieben eines der beiden Spiele aussuchen und dort einen für ihn erlaubten Zug tätigen. Danach darf der zweite Spieler im gleichen oder im anderen Spiel einen Zug tätigen. Auf diese Weise machen die beiden Spieler so lange weiter, bis einer der Spieler in keinem der beiden Einzelspiele einen Zug tätigen kann; dann hat dieser verloren.

b) Illustriere das Game $1 + 1$.

c) Illustriere das Game $1 + (-1)$ und mache dir klar, dass es spieltechnisch gleich dem Nullspiel ist.

d) Illustriere das Game $\star + \star$ und mache dir klar, dass auch dieses Game spieltechnisch gleich dem Nullspiel ist.

Aufgabe 17. *Interpretation von $G - G$ (benötigt Aufgaben 15 und 16)*

a) Erkläre, wie man als Schachlaie gegen einen von zwei Großmeistern gewinnen kann, wenn man mit den beiden Großmeistern gleichzeitig spielen darf.

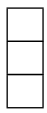
b) Beweise, dass für jedes Game G das Game $G - G = G + (-G)$ spieltechnisch gleich dem Nullspiel ist, dass also der zweite Spieler eine Gewinnstrategie besitzt.

Aufgabe 18. *Ein Spiel mit Dominosteinen (benötigt Aufgabe 16)*

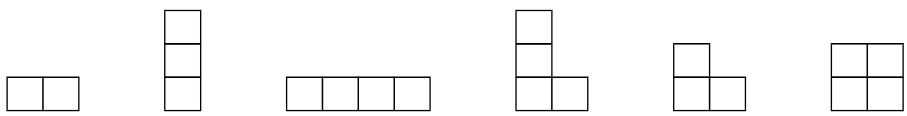
Auf einem gleichmäßig in Quadrate eingeteilten Spielbrett platzieren linker und rechter Spieler abwechselnd Dominosteine. Ein solcher überdeckt immer genau zwei Quadrate. Der linke Spieler darf seine Steine nur vertikal, der rechte Spieler nur horizontal legen; die Steine dürfen nicht überlappen. Verloren hat, wer keinen Zug mehr tätigen kann.

a) Überzeuge dich davon, dass wenn nur noch ein Kästchen frei ist, der als nächstes ziehende Spieler verliert. Diese Spielposition wird also durch das Game 0 beschrieben.

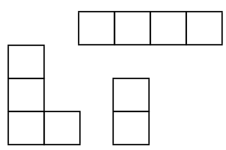
b) In welche Positionen können die beiden Spieler ziehen, wenn nur noch drei Kästchen in einer vertikalen Reihe frei ist? Überzeuge dich davon, dass diese Situation durch das Game $1 = \{0 \mid\}$ beschrieben wird.



c) Bewerte folgende Spielsituationen mit Games (dargestellt ist jeweils der noch freie Bereich). *Zur Kontrolle:* Es kommen die Games $-2, -1, \frac{1}{2}, 1, \star, \{1 \mid -1\}$ vor.



d) Wenn der noch freie Bereich in voneinander getrennte Teilbereiche zerfällt, ist das Game, das die Situation beschreibt, gleich der Summe der Games zu den Teilbereichen. Nutze diese Beobachtung, um nur unter Verwendung von Teilaufgabe c) sofort das Game zu folgender Situation anzugeben. Welcher Spieler besitzt eine Gewinnstrategie?



e) Zeichne nach Lust und Laune weitere Spielsituationen und bestimme ihre Bewertungen durch Games.

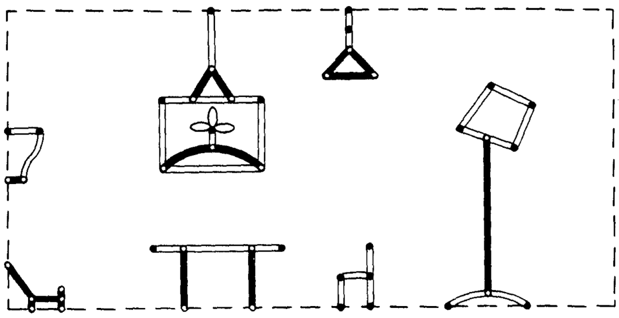
f) Sind nur noch vier horizontal zusammenhängende Kästchen frei, gewinnt der rechte Spieler. Das stimmt auch bei nur noch zwei horizontal zusammenhängenden Kästchen, lax gesprochen ist da der Vorsprung aber „knapper“. Wie drückt sich das in der Bewertung durch Games aus?

g) Hast du eine Idee, inwieweit der linke Spieler in der Situation aus Teilaufgabe c) mit Bewertung $\frac{1}{2}$ tatsächlich *einen halben Zug Vorsprung* gegenüber dem rechten Spieler hat?

h) Sei eine Spielsituation des Dominospiels durch ein Game $G = \{G^L \mid G^R\}$ beschrieben. Welche Situation beschreibt dann das negierte Game $-G = \{-G^R \mid -G^L\}$? (Benötigt Aufgabe 15.)

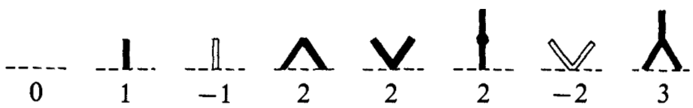
Aufgabe 19. *Hackenbush (benötigt Aufgabe 12)*

Das Spiel *Hackenbush* wird nicht auf einem regelmäßigen Schachbrett oder einem Kästchenpapier gespielt, sondern auf einem beliebigen *Graphen.* Conway gibt etwa folgendes Beispiel:



Dabei sind gewisse *Knoten* (Pünktchen) mittels schwarzer und weißer *Kanten* (gerade oder krumme Linien) verbunden. Die gestrichelte Umrandung heißt *Grund*, und jeder Knoten muss über eine Folge (beliebig gefärbter) Kanten mit dem Grund verbunden sein. Der linke Spieler darf in jedem Zug nach Belieben eine schwarze Kante, der rechte Spieler eine weiße Kante hacken und damit aus dem Spiel entfernen. Alle Knoten und Kanten, die danach nicht mehr mit dem Grund verbunden sind, werden ebenfalls entfernt. Verloren hat, wer keinen Zug mehr tätigen kann.

a) Überzeuge dich von folgenden Bewertungen durch Games:



b) Welchen Wert haben die folgenden Situationen?

c) Sei eine Spielsituation von Hackenbush durch ein Game $G = \{G^L \mid G^R\}$ beschrieben. Welche Situation beschreibt dann das negierte Game $-G = \{-G^R \mid -G^L\}$? (Benötigt Aufgabe 15.)

d) Es ist keine einfache Regel bekannt, mit der man den Wert eines beliebigen Graphen bestimmen könnte. Für Graphen, die sogar *Bäume* sind, d. h. keine *Schleifen* enthalten, können wir aber eine einfache Regel angeben. Grundlegend dafür ist folgende Beobachtung: Kennen wir schon den Wert G eines Teilstücks P, so ist der Wert der zusammengesetzten Situation

gleich $1 \boxplus G$ (siehe Aufgabe 11 für diese Rechenoperation). Beweise diesen Sachverhalt!

e) Wie errechnet sich der Wert, wenn analog zur vorherigen Teilaufgabe zu einem Teilstück P eine *weiße* Kante hinzugefügt ist? *Tipp:* Verwende zweimal Teilaufgabe c).

f) Verwende die Erkenntnisse aus der vorherigen beiden Teilaufgaben, um von mehreren Bäumen deiner Wahl das zugehörige Game zu berechnen.

Aufgabe 20. *Hackenbush auf unendlichen Graphen (benötigt Aufgabe 19)*

a) Auf manchen unendlichen Graphen kann man ebenfalls Hackenbush spielen. Welchen Wert hat der Graph, der neben einer Umrandung unten nur aus einem linienförmigen Wolkenkratzer mit unendlich vielen Stockwerken, der aus unendlich vielen schwarzen Kanten zusammengesetzt ist, besteht? Welchen Wert hat die Situation, wenn man eine einzelne direkt mit dem Grund verbundene weiße Kante hinzufügt? Diese Aufgabe benötigt Aufgabe 6.

b) Wieso kann man *nicht* auf einem Graphen spielen, der unendlich viele nebeneinander platzierte Kopien des Wolkenkratzers aus der vorherigen Teilaufgabe enthält?

Nimbers

Aufgabe 21. *Mex-Operation*

Ist S eine endliche Menge natürlicher Zahlen, so ist $\operatorname{mex} S$ die *kleinste* natürliche Zahl, die *nicht* in S liegt (minimum excludant).

a) Überzeuge dich von der Richtigkeit folgender Beispiele:

$$\operatorname{mex}\{0,1,4,7\} = 2, \quad \operatorname{mex}\{1,4,7\} = 0, \quad \operatorname{mex}\emptyset = 0.$$

b) Berechne das Mex von deiner Lieblingsteilmenge natürlicher Zahlen.

Aufgabe 22. *Nimber-Addition (benötigt Aufgabe 21)*

Die *Nimber-Addition* ist in mengentheoretischer Notation wie folgt rekursiv definiert:

$$n \oplus m := \operatorname{mex}\Big(\{n' \oplus m \,|\, n' < n\} \cup \{n \oplus m' \,|\, m' < m\}\Big).$$

Wenn man also den Wert von $n \oplus m$ herausfinden möchte, muss man zunächst die Werte von $n' \oplus m$ für alle kleineren Zahlen $n' < n$ und die Werte von $n \oplus m'$ für alle kleineren Zahlen $m' < m$ bestimmen. Der Wert von $n \oplus m$ ergibt sich dann als Mex dieser Zahlen. *Achtung,* die Schreibweise hier ist verwirrend. Die senkrechten Striche in der Definition von $n \oplus m$ haben nichts mit der Abgrenzung zwischen linker und rechter Menge bei surrealen Zahlen zu tun.

a) Ergänze unten stehende Tabelle für die Nim-Addition.

⋆ b) Wenn du die Beweistechnik der Induktion für natürliche Zahlen kennst, kannst du beweisen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $0 \oplus n = n$.

$n \setminus m$	0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
0	0	1	2						
1		0	3						
2									
3							4		
4			6						
5									
6									
7						2			
$\vdots$									

Aufgabe 23. *Interpretation der Nimber-Addition im Binärsystem (benötigt Aufgabe 22)*

Im gewöhnlichen Zehnersystem gibt es die Ziffern von 0 bis 9. Der Wert einer Ziffer ergibt sich von rechts nach links über die Zehnerpotenzen: Einer, Zehner, Hunderter, Tausender, usw. Das Binärsystem ist viel einfacher: Da gibt es nur die Ziffern 0 und 1. Der Wert einer Ziffer ergibt sich dann von rechts nach links über die Zweierpotenzen: Einer, Zweier, Vierer, Achter, Sechzehner, usw. Schreibt man eine Zahl im Binärsystem, so macht man das durch einen nachgestellten Index deutlich.

a) Überzeuge dich von der Richtigkeit folgender Beispiele:

$$3 = 11_2, \qquad 6 = 110_2, \qquad 10 = 1010_2, \qquad 16 = 10000_2.$$

b) Überlege dir, wie man im Binärsystem schriftlich addieren kann, und rechne einige Beispiele.

c) Die Nimber-Addition funktioniert nun genau wie die schriftliche Binäraddition, nur dass man *alle Überträge ignoriert*. Diese Operation nennt man auch *bitweises exklusive oder*. Rechne mit dieser Einsicht so viele Einträge der Tabelle aus Aufgabe 22 nach, wie du magst.

Aufgabe 24. *Das Nim-Spiel (benötigt Aufgabe 16)*

Bei Nim spielt man mit mehreren Haufen von gleichartigen Spielsteinen. Die erlaubten Züge sind für beide Spieler dieselben: Wenn man an der Reihe ist, darf man sich nach Belieben einen der Haufen aussuchen und muss dann in diesem eine beliebige Anzahl von Spielsteinen, mindestens jedoch einen, entfernen. Verloren hat, wer keinen Zug mehr tätigen kann. Spiele, bei denen beide Spieler stets dieselben Zugmöglichkeiten haben, heißen auch *neutrale Spiele* (engl. *impartial games*).

a) Überzeuge dich davon, dass der Fall nur eines Haufens, der auch nur aus einem Spielstein besteht, durch das Game $\star = \{0 \mid 0\}$ beschrieben wird. Welcher Spieler besitzt eine Gewinnstrategie?

b) Überzeuge dich davon, dass der Fall nur eines Haufens, der aus genau zwei Spielsteinen besteht, durch das Game $\{0, \star \mid 0, \star\}$ beschrieben werden kann.

c) Wie drückt sich in den Games aus, dass die beiden Spieler dieselben Zugmöglichkeiten haben?

d) Seien zwei Haufen gegeben, wobei der eine durch ein Game G und der andere durch ein Game H beschrieben wird. Wodurch wird dann die zusammengesetzte Spielsituation beschrieben?

Das Nim-Spiel ist für die Theorie sehr wichtig. Es ist nämlich nicht nur das Paradebeispiel für ein neutrales Spiel, sondern gewissermaßen das *universelle* neutrale Spiel: Jede Spielsituation eines *jeden* neutralen Spiels ist äquivalent zu einer Position des Nim-Spiels. Diese tiefgehende Beobachtung wollen wir in Aufgabe 28 verstehen.

Aufgabe 25. *Nimbers (benötigt Aufgabe 24)*

Für jede natürliche Zahl n definieren wir das Game

$$\star n := \{L \mid R\}, \quad \text{wobei } L = R = \{\star 0, \star 1, \ldots, \star(n-1)\}.$$

Linke und rechte Menge von $\star n$ sind also identisch, und zwar enthalten sie beide die Games $\star n'$ für $0 \leq n' < n$. Games der Form $\star n$ heißen *Nimbers.*

a) Überzeuge dich von der Richtigkeit folgender Beispiele:

$$\star 0 = 0, \quad \star 1 = \star, \quad \star 2 = \{0, \star \mid 0, \star\}.$$

b) Sei beim Nim-Spiel nur ein Haufen gegeben, wobei dieser aus n Spielsteinen bestehe. Durch welches Game wird diese Spielsituation beschrieben? Kannst du deine Vermutung (durch Induktion) beweisen?

c) Begründe, dass für alle natürlichen Zahlen n die Rechenregel $\star n = -(\star n)$ gilt. Das kannst du entweder spieltheoretisch machen (beachte dazu Aufgabe 15) oder durch einen Induktionsbeweis über n.

d) Welche Spielsituation beschreibt das Game $\star n + \star n$, wobei n eine natürliche Zahl ist? Begründe, dass diese Situation äquivalent zum Nullspiel ist, dass also der zweite Spieler stets gewinnen kann. In Formeln kann man diese Beobachtung so festhalten: $\star n + \star n = 0$.

e) Zeige für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$: $\star n \parallel 0$.

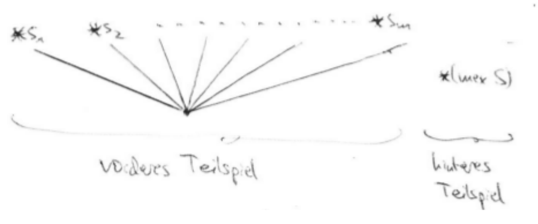
Aufgabe 26. *Zusammenhang zur Mex-Operation (benötigt Aufgaben 21 und 25 und viel Ruhe)*

Sei $S = \{s_1, \ldots, s_m\}$ eine endliche Menge natürlicher Zahlen und $\operatorname{mex} S$ ihr Meximum. In dieser Aufgabe wollen wir verstehen, wieso die Beziehung

$$\{\star s_1, \ldots, \star s_m \mid \star s_1, \ldots, \star s_m\} + \star(\operatorname{mex} S) = 0$$

gilt. Diese Vereinfachungsregel werden wir nutzen, um den Zusammenhang zur Nimber-Addition zu klären.

a) Erkläre, welche Spielsituation durch das Game auf der linken Seite der Gleichung beschrieben wird. In welche Positionen kann der beginnende Spieler ziehen? Beachte, dass sich die Situation aus zwei Teilspielen (dem zum vorderen und dem zum hinteren Summanden) zusammensetzt.



b) Zeige nun, dass diese Spielsituation äquivalent zum Nullspiel ist, dass also der beginnende Spieler verliert. Damit ist dann die Rechenregel bewiesen. Vervollständige dazu folgenden Beweisansatz:

Fall 1: Der beginnende Spieler tätigt einen Zug im vorderen Teilspiel: Er zieht dort in die Situation $\star s_i$*. Danach liegen also zwei Teilspiele vor: Zum einen* $\star s_i$*, zum anderen immer noch* $\star(\operatorname{mex} S)$*. Nun kann* $\operatorname{mex} S$ *größer oder kleiner als* s_i *sein, aber nicht gleich (wieso?). Falls es größer ist, kann der zweite Spieler im hinteren Teilspiel in die Situation* $\star s_i$ *ziehen (wieso?). Danach liegen also zwei Teilspiele vor: Zum einen* $\star s_i$*, zum anderen jetzt ebenfalls* $\star s_i$*. Nach Teilaufgabe d) von Aufgabe 25 kann daher der zweite Spieler gewinnen. Falls das Meximum dagegen kleiner ist, ...*

Fall 2: Der beginnende Spieler tätigt einen Zug im hinteren Teilspiel: Er zieht dort in eine Situation $\star u$*, wobei* u *eine Zahl zwischen* 0 *eingeschlossen und* $\operatorname{mex} S$ *ausgeschlossen ist. Dann ...*

c) Folgere durch einfache Gleichungsumformung und Verwendung von Teilaufgabe c) von Aufgabe 25 die weitere Rechenregel

$$\{\star s_1, \ldots, \star s_m \mid \star s_1, \ldots, \star s_m\} = \star(\operatorname{mex} S).$$

Aufgabe 27. *Zusammenhang zur Nimber-Addition (benötigt Aufgabe 22)*

Die Nimber-Addition aus Aufgabe 22 hatte mit Games nichts am Hut. In dieser Aufgabe klären wir den Zusammenhang zwischen der Nimber-Addition und der gewöhnlichen Addition von Games. Und zwar gilt für alle natürlichen Zahlen n und m:

$$\star n + \star m = \star(n \oplus m).$$

Da die Nimber-Addition viel schneller zu berechnen ist als die Addition von Games, ist diese Rechenregel sehr nützlich.

a) Berechne als Beispiel $\star 0 + \star 0$ und vergleiche das Ergebnis mit $\star(0 \oplus 0)$.

b) Berechne ferner $\star 1 + \star 1$ und vergleiche das Ergebnis mit $\star(1 \oplus 1)$.

c) Nun wollen wir die Rechenregel allgemein beweisen. Dazu dürfen wir annehmen, dass wir die Aussagen

$$\begin{aligned} \star n' + \star m &= \star(n' \oplus m), \\ \star n + \star m' &= \star(n \oplus m') \end{aligned}$$

für alle naürlichen Zahlen n' kleiner als n und alle natürlichen Zahlen m' kleiner als m bereits bewiesen haben, und müssen dann nachrechnen, dass $\star n + \star m$ tatsächlich das gleiche wie $\star(n \oplus m)$ ergibt. Führe diese Rechnung durch! Verwende zur Vereinfachung das Ergebnis aus Teilaufgabe c) von Aufgabe 26.

Aufgabe 28. *Das Sprague–Grundy-Theorem (benötigt Aufgaben 8 und 26)*

Das Sprague–Grundy-Theorem besagt, dass jede Spielsituation eines *beliebigen* neutralen Spiels (also einem kombinatorischen Zwei-Personen-Spiel, bei dem die beiden Spieler dieselben Zugmöglichkeiten haben) zu einer Position des Nim-Spiels äquivalent ist. Das wollen wir in in dieser Aufgabe beweisen.

a) Sei G ein Game zu einer beliebigen Spielsituation eines neutralen Spiels. Was wissen wir dann über das Verhältnis von linker zu rechter Menge von G?

b) Wir wollen die Behauptung per Induktion beweisen. Daher dürfen wir voraussetzen, dass wir sie für alle Games aus der linken und rechten Menge von G bereits bewiesen haben; diese Games sind also jeweils äquivalent zu einer Nimber, also einem Game der Form $\star n$. Wie kann man jetzt unter Verwendung des Resultats aus Aufgabe 26 weiter argumentieren? Nimm der Einfachheit halber an, dass linke und rechte Menge von G aus nur endlich vielen Games bestehen.

c) Herzlichen Glückwunsch: Du hast soeben ein tiefgehendes mathematisches Theorem bewiesen. Vor dir haben das Roland Sprague und Patrick Grundy in den Jahren 1935 bzw. 1939 (unabhängig voneinander) gemacht.

Optimales Vorgehen

Aufgabe 29. *Optimales Vorgehen bei Nim (benötigt Aufgaben 24 und 27)*

Wir haben gesehen, dass das Game, das die Situation von Haufen der Größen $x_1, \ldots, x_n$ im Nim-Spiel beschreibt, durch $\star z$ gegeben ist, wobei

$$z = x_1 \oplus \cdots \oplus x_n.$$

In dieser Aufgabe wollen wir verstehen, wie man Nim optimal spielt.

a) Zeige rechnerisch: Verkleinert man den i-ten Haufen so, dass er danach x_i' Spielsteine umfasst, so hat die Spielsituation danach,

$$\star z' = \star(x_1 \oplus \cdots \oplus x_{i-1} \oplus x_i' \oplus x_{i+1} \oplus x_n)$$

den Wert

$$\star(z \oplus x_i \oplus x_i').$$

Tipp: Füge künstlich eine Null in der Form $x_i \oplus x_i'$ ein.

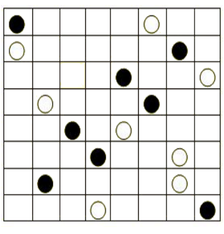
b) Wenn z nicht Null ist, so gibt es einen Stapel i, sodass $z \oplus x_i$ (als natürliche Zahl) kleiner als x_i ist. (Das kann man sich etwa über Binärdarstellungen klarmachen.) Zeige: Wenn man diesen Haufen auf $x_i' := z \oplus x_i$ Steine verkleinert, so gilt für die neue Spielsituation: $z' = 0$.

c) Erkläre mit diesen Ergebnissen, wie man Nim optimal spielt.

Aufgabe 30. *Optimales Vorgehen bei Northcotts Spiel (benötigt Aufgabe 29)*

Northcotts Spiel wird auf einem gewöhnlichen Damebrett gespielt, in dem in jeder Reihe genau ein schwarzer und genau ein weißer Spielstein liegt. Der linke Spieler darf in jedem Zug einen schwarzen Spielstein beliebig innerhalb seiner Reihe bewegen, solange er dabei nicht den weißen Spielstein derselben Reihe überspringt. Analog darf der rechte Spieler in jedem Zug einen weißen Spielstein bewegen. Verloren hat, wer keinen Zug mehr tätigen kann.

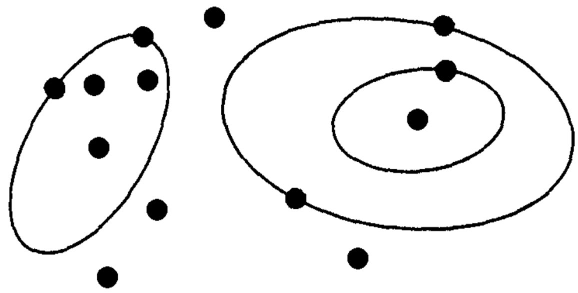
Finde heraus, wie man Northcotts Spiel optimal spielt! Was hat es mit Nim zu tun?



Aufgabe 31. *Optimales Vorgehen bei Rim (benötigt Aufgabe 29)*

Rim spielt man mit Pünktchen auf Papier, die vor dem eigentlichen Beginn des Spiels beliebig platziert werden können. Wenn ein Spieler am Zug ist, muss er eine geschlossene Linie zeichnen, auf der mindestens ein Pünktchen liegt und die keine bereits vorhandene Linie kreuzt oder berührt. Verloren hat, wer keinen Zug mehr tätigen kann.

Finde heraus, wie man bei Rim optimal spielt! Was hat Rim mit Nim zu tun?



Aufgabe 32. *Optimales Vorgehen beim Subtraktionsspiel (benötigt Aufgabe 29)*

Genau wie Nim wird das Subtraktionsspiel mit mehreren Haufen gleichartiger Spielsteine gespielt. Anders als bei Nim darf ein Spieler in jedem Zug aber nicht beliebig viele, sondern höchstens drei Steine eines Haufens entfernen. Verloren hat, wer keinen Zug mehr tätigen kann. Wir schreiben $S(n)$ für das Game, das die Situation eines Haufens mit n Steinen beschreibt.

a) Mache dir klar:

$$S(0) = \star 0, \quad S(1) = \star 1, \quad S(2) = \star 2, \quad S(3) = \star 3.$$

b) Was ist $S(4)$?

c) Gib eine Vermutung für alle weiteren Games $S(n)$ ab.

d) Wie spielt man beim Subtraktionsspiel (mit beliebig vielen Haufen) optimal?

e) Was ändert sich, wenn die Obergrenze an entfernbaren Steinen nicht Drei, sondern eine andere natürliche Zahl k ist?

Aufgabe 33. *Optimales Vorgehen beim Hunderterspiel (benötigt Aufgabe 32)*

Beim Hunderterspiel beginnen die beiden Spieler mit der Gesamtsumme Null. Dann dürfen die Spieler abwechselnd eine Zahl zwischen Eins und Zehn auf die Summe addieren. Wer die Summe auf Hundert bringen kann, gewinnt.

Wie spielt man das Hunderterspiel optimal? Was hat es mit dem Subtraktionsspiel zu tun?

Aufgabe 34. *Optimales Vorgehen bei einer Nim-Variante (benötigt Aufgabe 29)*

In einer Variante von Nim darf man sich in jedem Zug einen Haufen aussuchen, in ihm mindestens einen Stein entfernen und dann die restlichen Steine des Haufens nach Belieben auf zwei neue Haufen aufteilen. Die dabei neu entstehenden Haufen dürfen auch gar keine Steine enthalten. Wir schreiben $S(n)$ für das Game, das die Situation eines Haufens mit n Steinen beschreibt.

a) Mache dir klar:

$$S(0) = \star 0, \quad S(1) = \star 1.$$

b) Erkläre folgende rekursive Formel für $S(n)$:

$$S(n) = \{M \mid M\}, \quad \text{wobei } M := \{S(i) + S(j) \,|\, 0 \leq i, j,\ i + j < n\}.$$

Dabei trennt der erste vertikale Striche linke von rechter Menge ab, während der Strich in der Definition von M eine ganz andere Bedeutung hat: Die Menge M besteht aus allen Games der Form $S(i) + S(j)$, wobei i und j natürliche Zahlen sind, deren Summe echt kleiner als n ist.

c) Beweise durch Induktion über $n \in \mathbb{N}$, dass $S(n) = \star n$. Du kannst dich dabei folgender Vorlage bedienen:

Induktionsanfang $n = 0$. *Es gilt* $S(0) = \star 0$, *denn* ....

Induktionsschritt $\leq n \to n$. *Wir dürfen annehmen, dass für alle natürlichen Zahlen* $m < n$ *gilt, dass* $S(m) = \star m$. *Nun müssen wir zeigen, dass* $S(n) = \star n$. ...

Tipp: Verwende die Rechenregel für die Addition von Nimbers (Aufgabe 27), die Formel aus Aufgabe 26 und folgende Beobachtung: Für alle natürliche Zahlen gilt $a \oplus b \leq a + b$ – dabei bezeichnet „$\oplus$“ die Nimber-Addition und „$+$“ die gewöhnliche Addition. Aufgabe 23 hilft, um zu verstehen, wieso diese Ungleichung stimmt.

d) Wie spielt man also bei dieser Variante von Nim optimal?