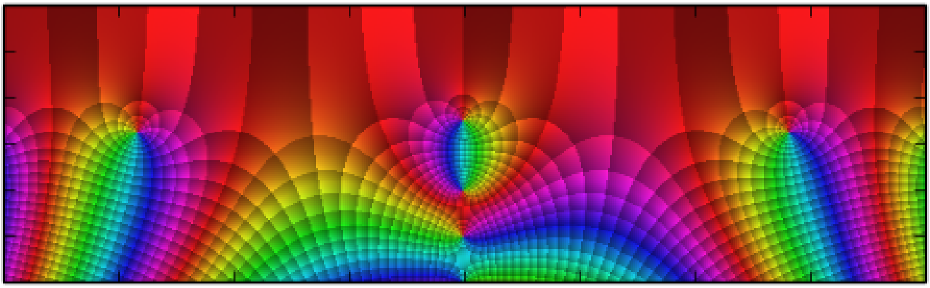
Matheschülerzirkel
Universität Augsburg
Schuljahr 2014/2015
Klassen 10/11/12

Analytische Zahlentheorie

Zirkelzettel vom 5. Dezember 2014



Inhaltsverzeichnis

1 Der Fundamentalsatz der Arithmetik

Definition 1.1. Eine *Primzahl* ist eine positive natürliche Zahl, die *genau zwei* verschiedene positive Teiler besitzt.

Gemäß dieser Definition beginnt die Folge der Primzahlen also mit

$$2, \quad 3, \quad 5, \quad 7, \quad 11, \quad 13, \quad 17, \quad \ldots$$

Die Zahl 1 zählt nicht als Primzahl – sie besitzt als einzigen Teiler sich selbst und hat daher nicht zwei verschiedene Teiler.

Theorem 1.2 (Fundamentalsatz der Arithmetik). *Jede positive natürliche Zahl lässt sich auf eindeutige Art und Weise als Produkt von Primzahlen schreiben.*

Beweis. Sei eine beliebige natürliche Zahl n gegeben. Falls n eine Primzahl ist, haben wir damit die gesuchte Zerlegung in Primfaktoren schon gefunden. Falls n keine Primzahl ist, spaltet sich n in ein Produkt auf: $n = a \cdot b$, und wir können mit der Suche nach einer Zerlegung bei a und b fortfahren.

Die Eindeutigkeitsaussage ist interessanter (Aufgabe 3). □

Aufgabe 1. *Primfaktorzerlegung der Eins*

Der Fundamentalsatz der Arithmetik behauptet, dass sich *jede* positive natürliche Zahl in Primfaktoren zerlegen lässt. Die Zahl 1 ist auch eine solche positive natürliche Zahl. Siehst du, wie sich diese zerlegen lässt?

Hinweis. Das ist etwas versteckt. Beachte, dass 1 keine Primzahl ist.

Aufgabe 2. *Soll Eins eine Primzahl sein?*

Es gibt ein gutes mathematisches Argument, wieso es sinnvoll ist, die Eins nicht als Primzahl zu definieren. Finde es!

Tipp. Denke an die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung. Was wäre, wenn man die Zahl Eins als Primzahl zulassen würde?

Aufgabe 3. *Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung*

Mit dieser Aufgabe beweisen wir, dass die Zerlegung einer Zahl in Primfaktoren bis auf Umordnung der Faktoren eindeutig ist. In Formeln ausgedrückt: Gilt

$$p_1 \cdots p_n = q_1 \cdots q_m,$$

wobei $p_1, \ldots, p_n$ und $q_1, \ldots, q_m$ Primzahlen sind, so folgt schon $n = m$ (links und rechts stehen also gleich viele Faktoren) und jeder Faktor der linken Seite tritt auch genau einmal auf der rechten Seite auf und umgekehrt.

a) Zeige zuerst: Teilt eine Primzahl p ein Produkt $a \cdot b$, so teilt p schon a oder p teilt b. In Formeln:

$$\text{Wenn } p \mid ab, \text{ dann } p \mid a \text{ oder } p \mid b.$$

Tipp. Das ist gar nicht so leicht. Verwende, dass die Zahlen a und p irgendeinen größten gemeinsamen Teiler d haben, und dass sich dieser in der Form $d = fa + gp$ für gewisse Zahlen f und g schreiben lässt. (Eine solche Darstellung des größten gemeinsamen Teilers heißt *Bézoutdarstellung*. Dass es eine solche immer gibt, folgt aus dem *euklidischen Algorithmus*.)

b) Beweise mit dem Resultat aus Teilaufgabe a) die Eindeutigkeitsbehauptung.

2 Die Entdeckung der Irrationalität

Definition 2.1. Eine reelle Zahl x heißt genau dann *rational*, wenn sie sich als Quotient zweier ganzer Zahlen schreiben lässt: $x = a/b$ für gewisse ganze Zahlen a und b.

Dass nicht alle Zahlen rational sind, war eine erstaunliche Entdeckung im fünften Jahrhundert v. Chr. Manche sehen diese Erkenntnis sogar als Geburtsstunde der modernen Mathematik an. Als Entdecker der Irrationalität gilt der griechische Mathematiker Hippasos von Metapont. Er erkannte, dass der *goldene Schnitt* irrational ist. Damit erschütterte er die Schule der Pythagoreer, denn diese waren von dem Kredo *Alles ist Zahl* überzeugt, wobei sie mit „Zahl“ *rationale Zahl* meinten. Ironischerweise kam der goldene Schnitt auch noch im Erkennungszeichen der Pythagoreer vor, dem Pentagramm.

Theorem 2.2. *Die Zahl $\sqrt{2}$ ist nicht rational.*

Aufgabe 4. *Irrationalität von Quadratwurzeln*

a) Beweise, dass $\sqrt{2}$ nicht rational ist.

   Tipp. Gehe nach folgendem Muster vor. Angenommen, $\sqrt{2}$ ist doch rational. Nach Definition gibt es dann ganze Zahlen a und b mit $\sqrt{2} = a/b$. Quadrieren und Umstellen zeigt $2b^2 = a^2$. Überlege nun, wie oft der Primfaktor 2 auf den beiden Seiten dieser Gleichung vorkommt.

b) Beweise, dass für jede Primzahl p die Zahl $\sqrt{p}$ nicht rational ist.

c) Beweise, dass für jede Zahl n, in deren Primfaktorzerlegung mindestens eine Primzahl ungerade oft vorkommt, die Zahl $\sqrt{n}$ nicht rational ist.

Aufgabe 5. *Anschauliche Bedeutung von Quadratwurzeln*

Wenn Quadratwurzeln sehr seltsame Zahlen ohne praktische Bedeutung wären, hätte die Entdeckung der Irrationalität vielleicht einen geringeren Stellenwert. Tatsächlich aber kommen Quadratwurzeln in der Geometrie überall vor: Finde eine geometrische Figur, deren Kantenlängen alle ganze Zahlen sind, sodass eine weitere eingezeichnete Hilfslinie aber irrationale Länge hat.

3 Die Unendlichkeit der Primzahlen

Es gibt unendlich viele Primzahlen. Es ist bemerkenswert, dass wir das rigoros beweisen können – obwohl wir natürlich niemals alle Primzahlen aufschreiben können.

Theorem 3.1. *Zu jeder endlichen Liste von Primzahlen gibt es eine weitere Primzahl, die nicht in der Liste enthalten ist.*

Aufgabe 6. *Euklids Beweis der Unendlichkeit der Primzahlen*

Seien $p_1, \ldots, p_n$ irgendwelche Primzahlen. Wir suchen eine weitere Primzahl, die ungleich den gegebenen Primzahlen ist. Dazu betrachten wir die Hilfszahl

$$N := \prod_{i=1}^{n} p_i + 1 = p_1 p_2 \cdots p_{n-1} p_n + 1.$$

a) Wieso teilt keine der gegebenen Primzahlen $p_1, \ldots, p_n$ die Zahl N?

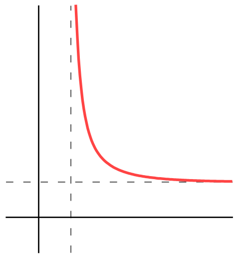
b) Wie erhält man aus N also eine neue Primzahl, die ungleich den gegebenen ist?

Bemerkung. Euklids Argumentation wird gelegentlich auch in Widerspruchsbeweisen verwendet, in deren Kontext die hier definierte Zahl N dann stets eine Primzahl ist. Im Allgemeinen ist N aber keine Primzahl. Etwa sind $3 \cdot 5 + 1 = 16$ und $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031 = 59 \cdot 509$ keine Primzahlen.

4 Die Riemannsche ζ-Funktion

Definition 4.1. Für reelle Zahlen $s > 1$ ist die *Riemannsche ζ-Funktion* durch folgende Formel definiert.

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots$$



Die Riemannsche ζ-Funktion ist also durch eine *unendliche Reihe* festgelegt. Je nachdem, wie schnell die Summanden einer unendlichen Reihe gegen Null streben, hat sie entweder einen richtigen Zahlenwert (sie *konvergiert*), den Wert $+\infty$ oder den Wert $-\infty$ (sie *divergiert bestimmt*) oder gar keinen Wert (sie *divergiert unbestimmt*). Mit Reihen, die nicht konvergieren, kann man nicht wie gewöhnlich rechnen – das soll Aufgabe 8 demonstrieren. Mit dem *Integralvergleichskriterium*, das man im ersten Semester eines Mathe-Studiums lernt, kann man aber leicht nachweisen, dass für $s > 1$ die gegebene Reihe konvergiert.

Der reelle Graph der ζ-Funktion ist sehr unspektakulär. Er hat die Geraden $x = 1$ und $y = 1$ als Asymptoten. So unscheinbar dieser Graph und die Definition auch sein mögen, die Riemannsche ζ-Funktion hat eine Vielzahl kurioser Eigenschaften und ist Gegenstand vieler mathematischer Vermutungen. In der analytischen Zahlentheorie ist sie von fundamentaler Bedeutung, angewendet wird sie aber auch in Physik, Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik.

- Die ζ-Funktion lässt sich auch als ein zahlentheoretisches interessantes Produkt schreiben (Abschnitt 5).

- Für $s \to 1$ divergiert $\zeta(s)$. Das ist eng mit der Unendlichkeit der Primzahlen verbunden.

- Es ist schwierig, geschlossene Ausdrücke für Funktionswerte der ζ-Funktion anzugeben. Aber beispielsweise gilt $\zeta(2) = \pi^2/6$. Die Funktionswerte an allen anderen positiven geraden Zahlen n sind ebenfalls bekannt, sie sind wie $\zeta(2)$ bestimmte rationale Vielfache von π^n.
- Man vermutet, dass die Werte der ζ-Funktion an allen positiven ungeraden Zahlen (außer der Eins) irrational sind. Man weiß schon, dass zumindest unendlich viele dieser Werte irrational sind, und man weiß auch, dass $\zeta(3)$ irrational ist. Es ist aber noch nicht einmal bekannt, ob auch $\zeta(5)$ irrational ist. (Kurioserweise weiß man aber, dass unter den Zahlen $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$ und $\zeta(11)$ mindestens eine irrational sein muss.)
- Obwohl die definierende Formel nur für $s > 1$ konvergiert, lässt sich die ζ-Funktion auf den Bereich $s < 1$ und sogar auf *alle komplexen Zahlen* ungleich 1 fortsetzen.
- Die Werte der ζ-Funktion an allen negativen ganzen Zahlen sind bekannt. Bei allen negativen geraden Zahlen hat sie Nullstellen, die so genannten *trivialen Nullstellen der ζ-Funktion*.
- Es ist bekannt, dass alle weiteren Nullstellen in den komplexen Zahlen Realteil zwischen 0 und 1 (jeweils ausgeschlossen) haben.
- Man vermutet, dass diese so genannten *nichttrivialen Nullstellen* sogar alle Realteil genau $1/2$ haben. Das besagt die berühmte *Riemannsche Vermutung*.
- Die Riemannsche Vermutung ist eng verwandt mit der Verteilung der Primzahlen und der Goldbachschen Vermutung. Eine lange Liste von Konsequenzen der Riemannschen Vermutung gibt es auf `http://mathoverflow.net/questions/17209/consequences-of-the-riemann-hypothesis`.

Aufgabe 7. *Eine einfache konvergente Reihe*

a) Was ergibt $1 + 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + \cdots$?

b) Was ergibt $1 + 0{,}1_2 + 0{,}01_2 + 0{,}001_2 + \cdots$, wenn man die Summanden im Binärsystem liest?

Aufgabe 8. *Grandis Reihe*

Sei $s := 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$. Diese Reihe divergiert, man kann mit ihr nicht wie gewöhnlich rechnen. Das sollen die folgenden Teilaufgaben illustrieren. Die Reihe ist nach dem italienischen Mathematiker und Geistlichen Guido Grandi (* 1671, † 1742) benannt.

a) Fasse die ersten beiden Summanden zusammen, dann die zweiten beiden, die dritten beiden, und so weiter. Welches Ergebnis erhält man auf diese Art und Weise für s?

b) Lass den ersten Summanden vorne stehen, fasse dann aber den zweiten und dritten Summanden zusammen, den vierten und fünften, und so weiter. Was ist nun das Ergebnis?

c) Wie muss man die Summanden zusammenfassen, um deine Lieblingszahl als Ergebnis zu erhalten?

d) Finde einen Weg, um die Gleichung $1 - s = s$ nicht unplausibel zu finden. Welchen Wert hat s dieser Gleichung zufolge?

5 Die Eulersche Produktformel

Theorem 5.1. *Für alle $s > 1$ gilt die Identität*

$$\zeta(s) = \prod_{\substack{p \\ p \text{ prim}}} \frac{1}{1 - p^{-s}} = \frac{1}{1 - 2^{-s}} \cdot \frac{1}{1 - 3^{-s}} \cdot \frac{1}{1 - 5^{-s}} \cdots .$$

Diese Beziehung ist aus mehreren Gründen bemerkenswert. Zunächst einmal ist es eine Seltenheit, dass sich eine *Summe* (die linke Seite der Gleichung) auch als ein (nicht-triviales) *Produkt* schreiben lässt. Zudem noch gehen in die rechte Seite die Primzahlen ein, beim bloßen Anblick der Formel für die ζ-Funktion würde man das nicht vermuten.

Für den Beweis benötigen wir die Formel für die *geometrische Reihe* (Aufgabe 9),

$$\sum_{m=0}^{\infty} x^m = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1 - x},$$

und die Potenzgesetze $x^{-a} = 1/x^a$ sowie $(x^a)^b = x^{ab}$.

Beweis. Wir beginnen mit der rechten Seite der Gleichung. Der Bruch passt auf die Formel für die geometrische Reihe, deswegen gilt

$$\prod_{\substack{p \\ p \text{ prim}}} \frac{1}{1 - p^{-s}} = \prod_{\substack{p \\ p \text{ prim}}} \left(1 + p^{-s} + (p^2)^{-s} + \cdots\right).$$

Wenn wir dieses unendliche Produkt ausmultiplizieren, erhalten wir die Summe über alle Zahlen der Form $1/t^s$, wobei t alle Möglichkeiten, beliebig viele Primzahlen auf-zumultiplizieren, durchläuft. Da sich nach dem Fundamentalsatz der Arithmetik jede positive natürliche Zahl auf genau eine Art und Weise als Produkt von Primzahlen schreiben lässt, erhalten wir also die Summe über alle Zahlen der Form $1/n^s$, wobei n alle positiven natürlichen Zahlen durchläuft. Nach Definition ist diese Summe $\zeta(s)$. □

Überblick verloren? Aufgabe 11 wird in kleinen handlichen Stücken den Beweis verständlich machen.

Aufgabe 9. *Die geometrische Reihe*

In dieser Aufgabe wollen wir die so genannte *geometrishe Reihe*

$$s := 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

auswerten. Der erste Schritt dazu ist mit dieser Zeile schon getan – in der Mathematik wird vieles einfacher, wenn man dem Unbekannten einen Namen gibt: s. Denn dann steht der Weg für algebraische Umformungen offen.

a) Rechne nach: $s \cdot (1 - x) = 1$.

   Tipp. Multipliziere die unendliche Summe aus.

b) Folgere: $s = 1/(1 - x)$.

c) Löse Aufgabe 7 erneut, und zwar unter Verwendung der Formel aus b).

Bemerkung. Die Multiplikation mit $(1 - x)$, die zur Auswertung von s also sehr hilfreich war, war ein *Trick*. Der Definition von s ist dieser nicht zu entnehmen, man benötigt Kreativität und Geduld, um auf ihn zu kommen. Die geometrische Reihe konvergiert nur, falls der Betrag von s kleiner als 1 ist, und nur in diesem Fall gilt die Formel $s = 1/(1 - x)$. Auf diese Subtilitäten wollen wir nicht weiter beachten, obwohl sie durchaus wichtig sind.

Aufgabe 10. *Beweise ohne Worte*

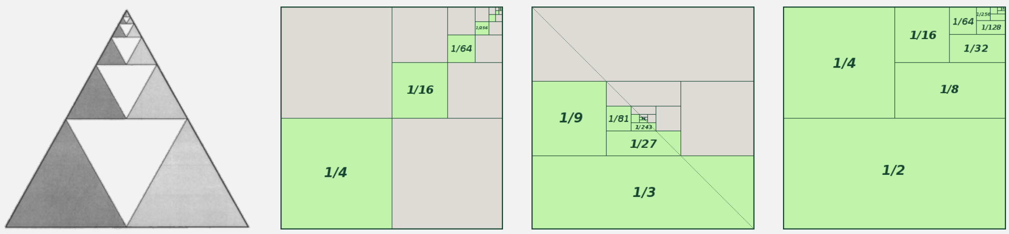
Die aus dem Internet ausgeliehenen Skizzen demonstrieren (von links nach rechts) folgende Sachverhalte – und zwar ganz ohne Formeln und Rechnungen. Schaue dir die Skizzen lang genug an, um zu verstehen, wieso sie diese Sachverhalte wirklich beweisen.

a) $\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \cdots = \frac{1}{3}$.

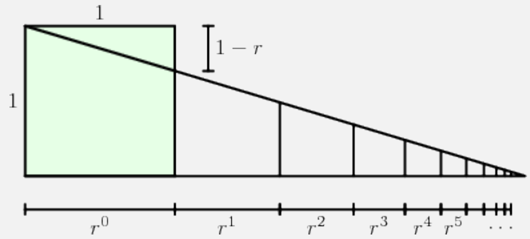
b) Wie bei a).

c) $\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots = \frac{1}{2}$.

d) $\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots = 1$.



Es ist sogar möglich, die allgemeine Formel für die geometrische Reihe aus Aufgabe 9 durch eine aussagekräftige Skizze zu beweisen. Kannst du erklären, wie das funktioniert? (Achtung, knifflig!)



Aufgabe 11. *Die Eulersche Produktformel in fünf Schritten*

a) Zum Aufwärmen: Multipliziere folgendes Produkt aus.

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2}\right).$$

b) Multipliziere jetzt in dem Produkt

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots\right)$$

die Klammern so lange aus, bis du genug von dem System verstehst, um zu erkennen: Hier kommt die Summe über die Kehrwerte von all den positiven natürlichen Zahlen, in deren Primfaktorzerlegung nur die Faktoren 2 und 3 auftreten, heraus.

c) Multipliziere nun das dreifache Produkt

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \cdots\right)$$

soweit aus, um zu erkennen, dass das die Summe über die Kehrwerte von all den positiven natürlichen Zahlen, in deren Primfaktorzerlegung nur die Faktoren 2, 3 und 5 vorkommen, ergibt.

d) Mit dieser Vorarbeit ist es nicht mehr schwer, zu glauben, dass das unendliche Produkt

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \cdots\right)\cdots$$

gleich der Summe über die Kehrwerte von *allen* positiven natürlichen Zahlen ist.

e) Schlussendlich: Ergänzen wir überall ein „hoch s“, so erhalten wir die Summe über alle Zahlen der Form $1/n^s$, wobei n über alle positiven natürlichen Zahlen läuft. Das ist die Eulersche Produktformel.

$$\left(1+\tfrac{1}{2^s}+\tfrac{1}{(2^2)^s}+\cdots\right)\left(1+\tfrac{1}{3^s}+\tfrac{1}{(3^2)^s}+\cdots\right)\left(1+\tfrac{1}{5^s}+\tfrac{1}{(5^2)^s}+\cdots\right)\cdots=\textstyle\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{1}{n^s}.$$

6 Die harmonische Reihe

Die unendliche Reihe

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$

wird *harmonische Reihe* genannt. Sie divergiert bestimmt, ihr Wert ist $+\infty$.

Mit ein wenig Hintergrundwissen aus Integrationstheorie kann man sich überlegen, dass die harmonische Reihe in etwa so schnell wächst wie der natürliche Logarithmus:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\approx\ln(n), \tag{$\star$}$$

und eine verfeinerte Analyse liefert folgendes Resultat.

Theorem 6.1. *Es gibt eine Konstante $\gamma\approx 0{,}57722$, die* Euler–Mascheroni-Konstante*, der sich die Differenzen aus linker und rechter Seite von ($\star$) beliebig genau nähern. In Symbolen:*

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}-\ln(n)\xrightarrow{n\to\infty}\gamma.$$

In diesem Kontext gibt es eine Abschätzung, die für unsere Zwecke wichtig sein wird:

$$\sum_{i=1}^{\lceil e^{A-\gamma}\rceil}\tfrac{1}{i}>A.$$

Die Klammern bezeichnen dabei die *Aufrundungsoperation*.

A	$e^{A-\gamma}$	$\lceil e^{A-\gamma}\rceil$	$\sum_{i=1}^{\lceil e^{A-\gamma}\rceil} 1/i$
1	1.56	2	1.50
2	4.23	5	2.28
3	11.50	12	3.10
4	31.26	32	4.06
5	84.97	85	5.03
6	230.97	231	6.02
7	627.84	628	7.02
8	1706.63	1707	8.02
9	4639.11	4640	9.02
10	12610.42	12611	10.02

Aufgabe 12. *Divergenz der harmonischen Reihe*

a) Wieso ist $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{2}$? *Tipp.* $\frac{1}{3} \geq \frac{1}{4}$ und $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

b) Wieso ist $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \geq \frac{1}{2}$? *Tipp.* $\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7} \geq \frac{1}{8}$.

c) Wieso ist $\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16} \geq \frac{1}{2}$?

d) Wieso ist $\frac{1}{17} + \cdots + \frac{1}{32} \geq \frac{1}{2}$?

e) Folgere: Die harmonische Reihe ist größergleich $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots$, und das ist sicherlich $+\infty$.

Aufgabe 13. *Slow harmonic series is slow*

Die harmonische Reihe divergiert zwar, tut das aber sehr langsam. Addiere mit einem Taschenrechner oder einem Computerprogramm so viele Terme der Reihe, wie du möchtest. Ich wette, du wirst nicht über 30 hinauskommen.

Aufgabe 14. *Eulers Beweis der Unendlichkeit der Primzahlen*

a) Was ist $\zeta(1)$?

b) Verwende Eulers Produktformel, um einen alternativen Beweis der Unendlichkeit der Primzahlen zu führen: Wie sähe die Formel aus, wenn es nur endlich viele Primzahlen gäbe?

7 Schranken für die Größen der Primzahlen

Es gibt keine geschlossene Formel für die Primzahlen.[1] Trotzdem kann man explizite *Schranken* für die Größe der n-ten Primzahl angeben. Mit deren Hilfe kann man angeben, wie viele Primzahlen es in einem vorgegebenem Bereich mindestens geben muss oder höchstens geben kann.

Ein erstes Resultat in diese Richtung ist das folgende. Dabei sei $p_1, p_2, p_3, \ldots$ die unendliche Liste aller Primzahlen.

Theorem 7.1. *Die r-te Primzahl ist höchstens $2^{(2^r)}$: $p_r < 2^{(2^r)}$.*

Das folgende Resultat ist schwieriger zu beweisen, liefert aber auch eine bessere (kleinere) Abschätzung. Die Klammern bezeichnen wieder die Aufrundungoperation.

Theorem 7.2. *Die r-te Primzahl ist höchstens $\lceil e^{r-\gamma} \rceil$: $p_r \leq \lceil e^{r-\gamma} \rceil$.*

[1] Das ist nur halb wahr. Informiere dich über *Mills Formel*.

Um diese beiden Behauptungen zu beweisen, werden wir eine interessante mathematische Technik anwenden: *Proof mining*. Deren Ausgangspunkt ist die triviale Erkenntnis, dass ein *Beweis* einer Aussage viel mehr enthält als die bloße Information, dass die bewiesene Aussage korrekt ist. Ein Beweis gibt auch (mehr oder weniger verständliche) Hintergründe zu ihrer Korrektheit, knüpft Verbindungen zwischen unterschiedlichen mathematischen Objekten und führt so Verborgenes auf Offensichtliches zurück.

Das führt dazu, dass man aus Beweisen rein qualitativer Aussagen – zum Beispiel: *Es gibt unendlich viele Primzahlen.* – oftmals quantitative Information extrahieren kann: *Im Bereich von* 1 *bis* n *gibt es mindestens soundso viele Primzahlen.*

Proof mining werden wir an Euklids und an Eulers Beweis der Unendlichkeit der Primzahlen üben. Euklids Beweis liefert Theorem 7.1, Eulers komplexerer Beweis liefert das stärkere Theorem 7.2.

Aufgabe 15. *Theorem 7.1 aus Euklids Beweis der Unendlichkeit der Primzahlen*

a) Studiere Euklids Beweis der Unendlichkeit der Primzahlen (Aufgabe 6), um zu sehen: Ist p eine Primzahl, so kommt spätestens bis zu $p! + 1$ („p Fakultät", $p! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (p-1) \cdot p$) die nächste Primzahl.

b) Zeige: Für die $(r+1)$-te Primzahl gilt die Abschätzung

$$p_{r+1} \leq p_1 \cdots p_r + 1.$$

c) Folgere mit vollständiger Induktion:

$$p_r < 2^{(2^r)}.$$

Tipp. Du darfst verwenden, dass für alle Zahlen $m \geq 2$ gilt: $m/4 + 1 \leq m$.

Aufgabe 16. *Theorem 7.2 aus Eulers Beweis der Unendlichkeit der Primzahlen*

a) Sei q eine natürliche Zahl. Studiere den Beweis von Eulers Produktformel, um folgende verfeinerte Aussage nachzuvollziehen:

$$\sum_n \frac{1}{n} = \prod_{\substack{p \leq q \\ p \text{ prim}}} \frac{1}{1 - p^{-1}}.$$

Die Summe auf der linken Seite soll dabei über all diejenigen positiven natürlichen Zahlen laufen, in deren Primfaktoren nur Primzahlen $\leq q$ vorkommen. Passend dazu läuft das Produkt auf der rechten Seite über alle Primzahlen $\leq q$.

b) Beweise:

$$\prod_{\substack{p \leq q \\ p \text{ prim}}} \frac{1}{1 - p^{-1}} = \prod_{\substack{p \leq q \\ p \text{ prim}}} \frac{p}{p-1} \leq \prod_{a=1}^{q} \frac{a}{a-1} = q.$$

c) Sei q eine Primzahl. Angenommen, bis zur Zahl $\lceil e^{q-\gamma} \rceil$ (einschließlich) kommen keine weiteren Primzahlen. Zeige dann

$$\sum_{n=1}^{\lceil e^{q-\gamma} \rceil} \frac{1}{n} \leq q.$$

d) Verwende die Abschätzung aus Abschnitt 6, um zu sehen, dass das nicht sein kann und dass daher zwischen $q+1$ und $\lceil e^{q-\gamma} \rceil$ mindestens eine weitere Primzahl liegen muss.

e) Beweise:

$$\prod_{i=1}^{r} \frac{1}{1-p_i^{-1}} \leq \prod_{i=1}^{r} \frac{1}{1-(i+1)^{-1}} = \prod_{i=1}^{r} \frac{i+1}{i} = r+1.$$

f) Folgere: Die $(r+1)$-te Primzahl ist kleinergleich $\lceil e^{r+1-\gamma} \rceil$.