$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \ldots$$

für $\mathrm{Re}(s) > 1$

$$\zeta(s) = 1{,}056927755143516992833\ldots$$

Wunder der ζ-Fkt.

① Die ζ-Fkt. lässt sich „holomorph fortsetzen" zu einer Fkt. auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Bei 1 hat sie einen einfachen Pol.

② $\zeta(2) = \pi^2/6$

$$\zeta(2) = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$$

verblüfft!

f. lux

3 $\zeta(s) = \prod_{p \text{ Prim}} \frac{1}{1-p^{-s}}$

$$= \frac{1}{1-2^{-s}} \cdot \frac{1}{1-3^{-s}} \cdot \frac{1}{1-5^{-s}} \cdot \ldots$$

"Eulersche Produktformel"

$$\frac{\pi^2}{6} = \zeta(2) = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{9}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{25}} \cdot \ldots$$

$$= \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{25}{24} \cdots$$

Bem.: $\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}$.

Bew.: $\frac{1}{1-2^{-s}} \cdot \frac{1}{1-3^{-s}}$

$= (1 + 2^{-s} + 2^{-2s} + 2^{-3s} + \ldots) \cdot (1 + 3^{-s} + 3^{-2s} + 3^{-3s} + \ldots) \ldots$

Ist nur eine Umf. des Fundamentalsatzes der Arithmetik.

$$(1+q+q^2+q^3+\cdots)\cdot(1-q)=1$$

$$1+q+q^2+q^3+\cdots$$
$$\quad -q-q^2-q^3-\cdots$$

„geom. Reihe"

$$\Longrightarrow 1+q+q^2+\cdots=\frac{1}{1-q}.$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^{2s}} + \dots\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{3^{2s}} + \dots\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{3^{2s}} + \dots$$

$$+ \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^s 3^s} + \dots \dots$$

Welche $\frac{1}{2^s}$ gibt es?

$$+ \frac{1}{2^{2s}} + \dots \dots$$

$$\vdots$$

Antw.: All solche, in deren PFZ nur 2en und 3en auftauchen

Aus der Eulerschen Produktformel (7)

folgt: Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Anz. PZ $\leq n \overset{\text{asy}}{\sim} \dfrac{n}{\ln(n)}$ „Primzahlsatz"

$\Longleftrightarrow \zeta$ hat bei 1 einen einfachen Pol

Witz (bekannt):

Unendlich viele Mathematikerinnen betreten eine Bar. Bestellt die erste 1 Bier, die nächste 1/2, die nächste 1/4, ... Was macht der Barkeeper? Stellt ihnen 2 Bier hin.

Witzig weil:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = 2$$

(geom. Reihe mit $q = \frac{1}{2}$)

Witz (nicht so bekannt):

Unendlich viele Physikerinnen betreten eine Bar.
Bestellt die erste 1 Bier, die nächste 2,
die nächste 3, ... Was macht der Barkeeper?
Schenkt sich selbst $\frac{1}{12}$ Bier ein.

Witzig weil:

$1+2+3+\ldots$ sieht aus wie die naive
Formel für $\zeta(-1)$; $\zeta(-1)$ ist $-\frac{1}{12}$.