Düstere Ecken der Logik

Ingo Blechschmidt

Curry Club Augsburg

7. September 2017

1. Gödels Unvollständigkeitssatz
   - Beweisbarkeit und Wahrheit
   - Quines
   - Undefinierbarkeit von Wahrheit
   - Konsistenzreflektion

2. Das Halteproblem
   - Unentscheidbarkeit des Halteproblems
   - Unabhängigkeit
   - Das universelle Programm

3. Randomisierte Strategien

Abschnitt 0

Der effektive Topos

Es gibt ein mathematisches Alternativuniversum, in dem …

1. es nicht trivial ist, dass jede Zahl prim oder nicht prim ist,
2. nicht jede Menge leer ist oder nicht leer ist,
3. jede Funktion $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ berechenbar ist und
4. jede Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist.

Abschnitt I

Gödels Unvollständigkeitssatz

Es gibt wahre Aussagen, die nicht beweisbar sind.

Abschnitt I

Gödels Unvollständigkeitssatz

Es gibt wahre Aussagen, die nicht beweisbar sind.

Zum Beispiel folgende:
„Diese Aussage ist nicht beweisbar."

Abschnitt I

Gödels Unvollständigkeitssatz

Es gibt wahre Aussagen, die nicht beweisbar sind.

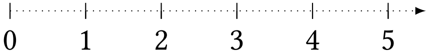
Zum Beispiel folgende:
„Diese Aussage ist nicht beweisbar."

Currys Paradoxon mahnt zur Vorsicht:
„Sollte diese Aussage stimmen, so ist der Mond aus Käse."

Vereinbarungen zur Metaebene

Auf der Metaebene wissen wir, …

1. wie man mit endlichen syntaktischen Objekten operiert,
2. was die natürlichen Zahlen sind,

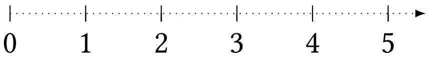


3. was es bedeutet, dass eine Zahl mit einer gewissen Eigenschaft existiert oder dass eine Behauptung für alle Zahlen stimmt.

Vereinbarungen zur Metaebene

Auf der Metaebene wissen wir, …

1. wie man mit endlichen syntaktischen Objekten operiert,
2. was die natürlichen Zahlen sind,



3. was es bedeutet, dass eine Zahl mit einer gewissen Eigenschaft existiert oder dass eine Behauptung für alle Zahlen stimmt.

Mögliche Wahlen der Metaebene:

- Gesunder Menschenverstand mit Platonismus
- Gesunder Menschenverstand mit Formalismus
- Diverse formale Systeme

Beweisbarkeit und Wahrheit

Syntaktische Qualität

Eine Aussage A heißt genau dann **beweisbar**, wenn es in einem fixierten formalen System einen **formalen Beweis** von A gibt:

$$\mathrm{PA} \vdash A$$

Semantische Qualität

Eine Aussage A heißt genau dann **wahr**, wenn sie im **Standardmodell** gilt: $\mathbb{N} \models A$

Beweisbarkeit und Wahrheit

Syntaktische Qualität

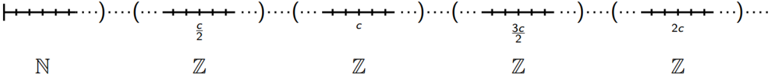
Eine Aussage A heißt genau dann **beweisbar**, wenn es in einem fixierten formalen System einen **formalen Beweis** von A gibt:

$$\mathrm{PA} \vdash A$$

Semantische Qualität

Eine Aussage A heißt genau dann **wahr**, wenn sie im **Standardmodell** gilt: $\mathbb{N} \models A$

- Jede beweisbare Aussage ist wahr.
- Nicht alle wahren Aussagen sind beweisbar.
- Es gibt **Nichtstandardmodelle**:



Quines

Wir schreiben $\ulcorner A \urcorner$ für die **Gödelnummer** einer Aussage A.

Reflektion von Beweisbarkeit

Es gibt eine Aussageform $\mathrm{Prov}(n)$, sodass für jede Aussage A genau dann $\mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner)$ wahr ist, wenn A beweisbar ist:

$$\mathbb{N} \models \mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner) \quad \text{genau dann, wenn} \quad \mathrm{PA} \vdash A.$$

Quines

Wir schreiben $\ulcorner A \urcorner$ für die **Gödelnummer** einer Aussage A.

Reflektion von Beweisbarkeit

Es gibt eine Aussageform $\mathrm{Prov}(n)$, sodass für jede Aussage A genau dann $\mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner)$ wahr ist, wenn A beweisbar ist:

$$\mathbb{N} \models \mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner) \quad \text{genau dann, wenn} \quad \mathrm{PA} \vdash A.$$

Mit dem **Diagonallemma** gibt es eine Aussage A mit

$$\mathrm{PA} \vdash (A \leftrightarrow \neg(\mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner))).$$

Quines

Wir schreiben $\ulcorner A \urcorner$ für die **Gödelnummer** einer Aussage A.

Reflektion von Beweisbarkeit

Es gibt eine Aussageform $\mathrm{Prov}(n)$, sodass für jede Aussage A genau dann $\mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner)$ wahr ist, wenn A beweisbar ist:

$$\mathbb{N} \models \mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner) \quad \text{genau dann, wenn} \quad \mathrm{PA} \vdash A.$$

Mit dem **Diagonallemma** gibt es eine Aussage A mit

$$\mathrm{PA} \vdash (A \leftrightarrow \neg(\mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner))).$$

1. Angenommen $\mathrm{PA} \vdash A$. Dann $\mathrm{PA} \vdash \neg(\mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner))$, also $\mathbb{N} \models \neg(\mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner))$, also nicht $\mathbb{N} \models \mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner)$, also ist A nicht beweisbar, also folgt ein Widerspruch.
2. Also ist A nicht beweisbar, somit $\mathbb{N} \models \neg\mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner)$.
3. Also $\mathbb{N} \models A$, d. h. A ist wahr.

Goodsteinsche Folgen

Beginne etwa mit 35. Schreibe die Zahl in **hereditary base 2**:

$$\begin{aligned} 35 &= 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\ &= 1 \cdot 2^{1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^0} + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0. \end{aligned}$$

Ersetze alle Vorkommen von 2 durch 3:

$$\begin{aligned} &1 \cdot 3^{1 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^0} + 1 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 \\ &= 1 \cdot 3^{28} + 3 + 1 \\ &= 22876792454965. \end{aligned}$$

Ziehe dann 1 ab:

$$22876792454964.$$

Mach immer so weiter.

Goodsteinsche Folgen

Beginne etwa mit 35. Schreibe die Zahl in **hereditary base 2**:

$$\begin{aligned} 35 &= 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\ &= 1 \cdot 2^{1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^0} + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0. \end{aligned}$$

Ersetze alle Vorkommen von 2 durch 3:

$$\begin{aligned} & 1 \cdot 3^{1 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^0} + 1 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 \\ &= 1 \cdot 3^{28} + 3 + 1 \\ &= 22876792454965. \end{aligned}$$

Ziehe dann 1 ab:

$$22876792454964.$$

Mach immer so weiter.

- Schlussendlich ist das Ergebnis 0.
- PA kann nicht beweisen, dass dem immer so ist.

Undefinierbarkeit von Wahrheit

Reflektion von Beweisbarkeit

Es gibt eine Aussageform $\mathrm{Prov}(n)$, sodass für jede Aussage A genau dann $\mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner)$ wahr ist, wenn A beweisbar ist:

$$\mathbb{N} \models \mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner) \quad \text{genau dann, wenn} \quad \mathrm{PA} \vdash A.$$

Kann man auch Wahrheit reflektieren? Gibt es eine Aussageform $\mathrm{True}(n)$, sodass für jede Aussage A genau dann $\mathrm{True}(\ulcorner A \urcorner)$ wahr ist, wenn A wahr ist?

$$\mathbb{N} \models \mathrm{True}(\ulcorner A \urcorner) \quad \text{genau dann, wenn} \quad \mathbb{N} \models A$$

Undefinierbarkeit von Wahrheit

Reflektion von Beweisbarkeit

Es gibt eine Aussageform $\mathrm{Prov}(n)$, sodass für jede Aussage A genau dann $\mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner)$ wahr ist, wenn A beweisbar ist:

$$\mathbb{N} \models \mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner) \quad \text{genau dann, wenn} \quad \mathrm{PA} \vdash A.$$

Kann man auch Wahrheit reflektieren? Gibt es eine Aussageform $\mathrm{True}(n)$, sodass für jede Aussage A genau dann $\mathrm{True}(\ulcorner A \urcorner)$ wahr ist, wenn A wahr ist?

$$\mathbb{N} \models \mathrm{True}(\ulcorner A \urcorner) \quad \text{genau dann, wenn} \quad \mathbb{N} \models A$$

Nein: Mit dem Diagonallemma gäbe es eine Aussage A mit

$$\mathrm{PA} \models (A \leftrightarrow \neg(\mathrm{True}(\ulcorner A \urcorner))).$$

Zu deutsch besagte A: „Aussage A ist nicht wahr.“ Diese Aussage wäre genau dann wahr, wenn sie nicht wahr ist.

Konsistenzreflektion

Sei A die Aussage „Aussage A ist nicht beweisbar“:

$$\mathrm{PA} \vdash (A \leftrightarrow \neg(\mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner))).$$

Resultat von Gödel–Rosser

Auch ohne die Unterstellung der Existenz von $\mathbb{N}$ in der Metatheorie gilt: Ist PA konsistent (d. h. ist $1 = 0$ nicht beweisbar), so ist A nicht beweisbar.

Konsistenzreflektion

Sei A die Aussage „Aussage A ist nicht beweisbar“:

$$\mathrm{PA} \vdash (A \leftrightarrow \neg(\mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner))).$$

Resultat von Gödel–Rosser

Auch ohne die Unterstellung der Existenz von $\mathbb{N}$ in der Metatheorie gilt: Ist PA konsistent (d. h. ist $1 = 0$ nicht beweisbar), so ist A nicht beweisbar.

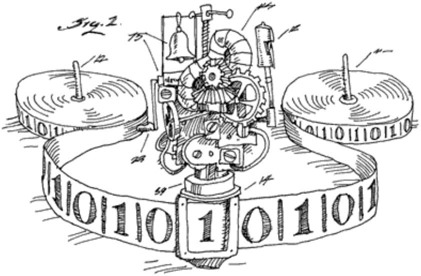
Da sich der Beweis dieses Resultats formalisieren lässt, folgt

$$\mathrm{PA} \vdash (\neg(\mathrm{Prov}(\ulcorner 1 = 0 \urcorner)) \rightarrow \neg(\mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner))).$$

Angenommen $\mathrm{PA} \vdash \neg(\mathrm{Prov}(\ulcorner 1 = 0 \urcorner))$.
Dann $\mathrm{PA} \vdash \neg(\mathrm{Prov}(\ulcorner A \urcorner))$, das ist falsch. **Somit kann PA ihre Konsistenz nicht beweisen.**

Abschnitt II

Spiel und Spaß mit Berechenbarkeitstheorie



Unentscheidbarkeit des Halteproblems

Ein **Halteorakel** ist ein Programm, dass ein Programm P als Eingabe liest und korrekt ausgibt: „P hält“ oder „P hält nicht“.

Unentscheidbarkeit des Halteproblems

Ein **Halteorakel** ist ein Programm, dass ein Programm P als Eingabe liest und korrekt ausgibt: „P hält“ oder „P hält nicht“.

Wenn es ein Halteorakel gäbe, könnte man auch folgendes Programm Q entwickeln:

Befrage das Halteorakel, ob Programm Q hält. Falls ja: Gehe in eine Endlosschleife. Falls nein: Halte.

Unentscheidbarkeit des Halteproblems

Ein **Halteorakel** ist ein Programm, dass ein Programm P als Eingabe liest und korrekt ausgibt: „P hält“ oder „P hält nicht“.

Wenn es ein Halteorakel gäbe, könnte man auch folgendes Programm Q entwickeln:

> Befrage das Halteorakel, ob Programm Q hält.
> Falls ja: Gehe in eine Endlosschleife.
> Falls nein: Halte.

Das Programm Q hält genau dann, wenn es nicht hält.

Ein Halteorakel gibt es nicht.

Chaitinsche Haltewahrscheinlichkeit

Sei Ω die Zahl

$$\Omega = \sum_p 2^{-|p|} = 2^{-c_0} + 2^{-c_1} + 2^{-c_2} + 2^{-c_3} + \cdots,$$

wobei c_n die Anzahl derjenigen Programme der Länge n ist, welche halten.

- Ω ist eine wohldefinierte Zahl zwischen 0 und 1.
- Sind die ersten N Nachkommaziffern von Ω bekannt, so lässt sich das Halteproblem für alle Programme der Länge $\leq N$ lösen.

Chaitinsche Haltewahrscheinlichkeit

Sei Ω die Zahl

$$\Omega = \sum_p 2^{-|p|} = 2^{-c_0} + 2^{-c_1} + 2^{-c_2} + 2^{-c_3} + \cdots,$$

wobei c_n die Anzahl derjenigen Programme der Länge n ist, welche halten.

- Ω ist eine wohldefinierte Zahl zwischen 0 und 1.
- Sind die ersten N Nachkommaziffern von Ω bekannt, so lässt sich das Halteproblem für alle Programme der Länge $\leq N$ lösen.
- Ω ist nicht berechenbar.

Chaitinsche Haltewahrscheinlichkeit

Sei Ω die Zahl

$$\Omega = \sum_p 2^{-|p|} = 2^{-c_0} + 2^{-c_1} + 2^{-c_2} + 2^{-c_3} + \cdots,$$

wobei c_n die Anzahl derjenigen Programme der Länge n ist, welche halten.

- Ω ist eine wohldefinierte Zahl zwischen 0 und 1.
- Sind die ersten N Nachkommaziffern von Ω bekannt, so lässt sich das Halteproblem für alle Programme der Länge $\leq N$ lösen.
- Ω ist nicht berechenbar.
- Es gibt eine konkrete Zahl N, sodass PA keine Vermutung über mehr als N Nachkommaziffern beweisen kann.

Ein Programm mit unbeweisbarem Halteverhalten

Wir betrachten folgendes Programm P:

Laufe systematisch alle formalen Beweise ab. Sobald ein Beweis von $1 = 0$ gefunden wurde, halte.

Ein Programm mit unbeweisbarem Halteverhalten

Wir betrachten folgendes Programm P:

> Laufe systematisch alle formalen Beweise ab. Sobald ein Beweis von $1 = 0$ gefunden wurde, halte.

- Das Programm P hält nicht.
- Die Aussage, dass P nicht hält, ist in PA nicht beweisbar.

Ein Programm mit unbeweisbarem Halteverhalten

Wir betrachten folgendes Programm P:

> Laufe systematisch alle formalen Beweise ab. Sobald ein Beweis von $1 = 0$ gefunden wurde, halte.

- Das Programm P hält nicht.
- Die Aussage, dass P nicht hält, ist in PA nicht beweisbar.
- Sei n die Anzahl Zustände, die eine Umsetzung von P als Turingmaschine benötigt. Dann entzieht sich jede Vermutung über $\mathrm{BB}(n)$ der Beweisbarkeit in PA.

Das universelle Programm

Wir betrachten folgendes Programm P:

> Laufe systematisch alle formalen Beweise ab. Sobald ein Beweis einer Aussage der Form „Die Ausgabe von Programm P ist nicht die Liste $x_1, \ldots, x_n$“ gefunden wurde, gib die Liste $x_1, \ldots, x_n$ aus und halte.

1. PA beweist, dass P eine endliche Liste von Zahlen ausgibt.
2. Für jede endliche Liste von Zahlen gibt es ein Universum M, sodass P genau diese Liste ausgibt, wenn man es in M ausführt.

Abschnitt III

Zufall als wertvolle Ressource

Abschnitt III

Zufall als wertvolle Ressource

Alice versteckt zwei verschiedene reelle Zahlen in Boxen. Bob darf in eine der Boxen hineinschauen und dann einen Tipp abgeben, welche der Zahlen größer sei.

Es gibt eine **randomisierte Strategie**, mit der Bobs Gewinnwahrscheinlichkeit bei jeder Wahl von x und y mehr als 50 % beträgt.

Abschnitt III

Zufall als wertvolle Ressource

Alice versteckt zwei verschiedene reelle Zahlen in Boxen. Bob darf in eine der Boxen hineinschauen und dann einen Tipp abgeben, welche der Zahlen größer sei.

Es gibt eine **randomisierte Strategie**, mit der Bobs Gewinnwahrscheinlichkeit bei jeder Wahl von x und y mehr als 50 % beträgt.