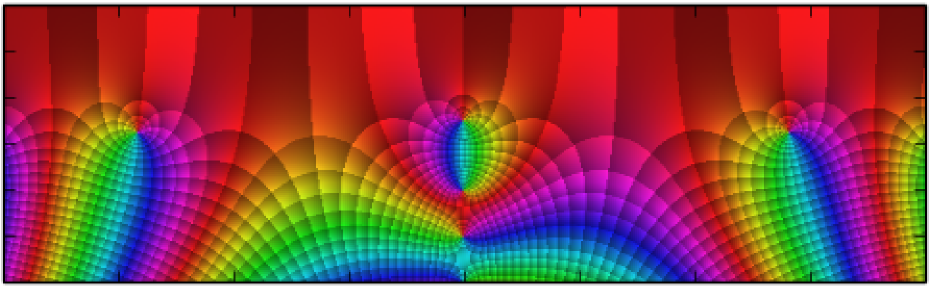
Matheschülerzirkel
Universität Augsburg
Schuljahr 2014/2015
Klassen 10/11/12

Analytische Zahlentheorie

Zirkelzettel vom 5. Dezember 2014



Inhaltsverzeichnis

1 Der Fundamentalsatz der Arithmetik

Definition 1.1. Eine *Primzahl* ist eine positive natürliche Zahl, die *genau zwei* verschiedene positive Teiler besitzt.

Gemäß dieser Definition beginnt die Folge der Primzahlen also mit

$$2, \quad 3, \quad 5, \quad 7, \quad 11, \quad 13, \quad 17, \quad \ldots$$

Die Zahl 1 zählt nicht als Primzahl – sie besitzt als einzigen Teiler sich selbst und hat daher nicht zwei verschiedene Teiler.

Theorem 1.2 (Fundamentalsatz der Arithmetik)**.** *Jede positive natürliche Zahl lässt sich auf eindeutige Art und Weise als Produkt von Primzahlen schreiben.*

Beweis. Sei eine beliebige natürliche Zahl n gegeben. Falls n eine Primzahl ist, haben wir damit die gesuchte Zerlegung in Primfaktoren schon gefunden. Falls n keine Primzahl ist, spaltet sich n in ein Produkt auf: $n = a \cdot b$, und wir können mit der Suche nach einer Zerlegung bei a und b fortfahren.

Die Eindeutigkeitsaussage ist interessanter (Aufgabe 3). □

Aufgabe 1. *Primfaktorzerlegung der Eins*

Der Fundamentalsatz der Arithmetik behauptet, dass sich *jede* positive natürliche Zahl in Primfaktoren zerlegen lässt. Die Zahl 1 ist auch eine solche positive natürliche Zahl. Siehst du, wie sich diese zerlegen lässt?

Hinweis. Das ist etwas versteckt. Beachte, dass 1 keine Primzahl ist.

Aufgabe 2. *Soll Eins eine Primzahl sein?*

Es gibt ein gutes mathematisches Argument, wieso es sinnvoll ist, die Eins nicht als Primzahl zu definieren. Finde es!

Tipp. Denke an die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung. Was wäre, wenn man die Zahl Eins als Primzahl zulassen würde?

Aufgabe 3. *Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung*

Mit dieser Aufgabe beweisen wir, dass die Zerlegung einer Zahl in Primfaktoren bis auf Umordnung der Faktoren eindeutig ist. In Formeln ausgedrückt: Gilt

$$p_1 \cdots p_n = q_1 \cdots q_m,$$

wobei $p_1, \ldots, p_n$ und $q_1, \ldots, q_m$ Primzahlen sind, so folgt schon $n = m$ (links und rechts stehen also gleich viele Faktoren) und jeder Faktor der linken Seite tritt auch genau einmal auf der rechten Seite auf und umgekehrt.

a) Zeige zuerst: Teilt eine Primzahl p ein Produkt $a \cdot b$, so teilt p schon a oder p teilt b. In Formeln:
$$\text{Wenn } p \mid ab, \text{ dann } p \mid a \text{ oder } p \mid b.$$

Tipp. Das ist gar nicht so leicht. Verwende, dass die Zahlen a und p irgendeinen größten gemeinsamen Teiler d haben, und dass sich dieser in der Form $d = fa + gp$ für gewisse Zahlen f und g schreiben lässt. (Eine solche Darstellung des größten gemeinsamen Teilers heißt *Bézoutdarstellung*. Dass es eine solche immer gibt, folgt aus dem *euklidischen Algorithmus*.)

b) Beweise mit dem Resultat aus Teilaufgabe a) die Eindeutigkeitsbehauptung.

Aufgabe 4. *Primzahlen mögen Vielfache der Sechs*

Beweise: Jede Primzahl größer als 3 liegt benachbart zu einem Vielfachen von 6. In Formeln: Ist $p > 3$ eine Primzahl, so teilt 6 entweder $p - 1$ oder $p + 1$.

Tipp. Eine Zahl ist genau dann ein Vielfaches von 6, wenn sie ein Vielfaches von 2 und von 3 ist. Weißt du von den drei Zahlen $p - 1$, p und $p + 1$, ob sie ein Vielfaches von 3 sind?

2 Die Entdeckung der Irrationalität

Definition 2.1. Eine reelle Zahl x heißt genau dann *rational*, wenn sie sich als Quotient zweier ganzer Zahlen schreiben lässt: $x = a/b$ für gewisse ganze Zahlen a und b.

Dass nicht alle Zahlen rational sind, war eine erstaunliche Entdeckung im fünften Jahrhundert v. Chr. Manche sehen diese Erkenntnis sogar als Geburtsstunde der modernen Mathematik an. Als Entdecker der Irrationalität gilt der griechische Mathematiker Hippasos von Metapont. Er erkannte, dass der *goldene Schnitt* irrational ist. Damit erschütterte er die Schule der Pythagoreer, denn diese waren von dem Kredo *Alles ist Zahl* überzeugt, wobei sie mit „Zahl" *rationale Zahl* meinten. Ironischerweise kam der goldene Schnitt auch noch im Erkennungszeichen der Pythagoreer vor, dem Pentagramm.

Theorem 2.2. *Die Zahl $\sqrt{2}$ ist nicht rational.*

Aufgabe 5. *Irrationalität von Quadratwurzeln*

a) Beweise, dass $\sqrt{2}$ nicht rational ist.

   Tipp. Gehe nach folgendem Muster vor. Angenommen, $\sqrt{2}$ ist doch rational. Nach Definition gibt es dann ganze Zahlen a und b mit $\sqrt{2} = a/b$. Quadrieren und Umstellen zeigt $2b^2 = a^2$. Überlege nun, wie oft der Primfaktor 2 auf den beiden Seiten dieser Gleichung vorkommt.

b) Beweise, dass für jede Primzahl p die Zahl $\sqrt{p}$ nicht rational ist.

c) Beweise, dass für jede Zahl n, in deren Primfaktorzerlegung mindestens eine Primzahl ungerade oft vorkommt, die Zahl $\sqrt{n}$ nicht rational ist.

Aufgabe 6. *Anschauliche Bedeutung von Quadratwurzeln*

Wenn Quadratwurzeln sehr seltsame Zahlen ohne praktische Bedeutung wären, hätte die Entdeckung der Irrationalität vielleicht einen geringeren Stellenwert. Tatsächlich aber kommen Quadratwurzeln in der Geometrie überall vor: Finde eine geometrische Figur, deren Kantenlängen alle ganze Zahlen sind, sodass eine weitere eingezeichnete Hilfslinie aber irrationale Länge hat.

Aufgabe 7. *Irrationalität des goldenen Schnitts*

Der *goldene Schnitt* ist diejenige positive Zahl ϕ, die die Gleichung $\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$ löst. Als Schnittverhältnis kommt der goldene Schnitt überall in der Natur vor.

a) Beweise rechnerisch, dass der goldene Schnitt irrational ist.

   Tipp. Gehe nach folgendem Muster vor. Angenommen, ϕ ist rational. Dann lässt sich ϕ als ein vollständig gekürzter Bruch $\phi = a/b$ schreiben. Zähler und Nenner sind dabei zueinander teilerfremde Zahlen. Welche Beziehung erhält man zwischen a und b, wenn man $\phi = a/b$ in die Gleichung $\phi = 1 + 1/\phi$ einsetzt?

b) In dem Skript von Jost-Hinrich Eschenburg zu seiner letzten Vorlesungsreihe, den *Sternstunden* (die du auch besuchen kannst, wenn du möchtest: jeden Freitag um 12:15 Uhr), findest du auch einen geometrischen Beweis der Irrationalität des goldenen Schnitts sowie eine Erklärung, wieso der goldene Schnitt die *irrationalste* Zahl ist. `http://www.math.uni-augsburg.de/~eschenbu/sternstunden.pdf`

3 Die Unendlichkeit der Primzahlen

Es gibt unendlich viele Primzahlen. Es ist bemerkenswert, dass wir das rigoros beweisen können – obwohl wir natürlich niemals alle Primzahlen aufschreiben können.

Theorem 3.1. *Zu jeder endlichen Liste von Primzahlen gibt es eine weitere Primzahl, die nicht in der Liste enthalten ist.*

Aufgabe 8. *Euklids Beweis der Unendlichkeit der Primzahlen*

Seien $p_1, \ldots, p_n$ irgendwelche Primzahlen. Wir suchen eine weitere Primzahl, die ungleich den gegebenen Primzahlen ist. Dazu betrachten wir die Hilfszahl

$$N := \prod_{i=1}^{n} p_i + 1 = p_1 p_2 \cdots p_{n-1} p_n + 1.$$

a) Wieso teilt keine der gegebenen Primzahlen $p_1, \ldots, p_n$ die Zahl N?

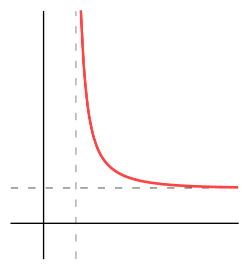
b) Wie erhält man aus N also eine neue Primzahl, die ungleich den gegebenen ist?

Bemerkung. Euklids Argumentation wird gelegentlich auch in Widerspruchsbeweisen verwendet, in deren Kontext die hier definierte Zahl N dann stets eine Primzahl ist. Im Allgemeinen ist N aber keine Primzahl. Etwa sind $3 \cdot 5 + 1 = 16$ und $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031 = 59 \cdot 509$ keine Primzahlen.

4 Die Riemannsche ζ-Funktion

Definition 4.1. Für reelle Zahlen $s > 1$ ist die *Riemannsche ζ-Funktion* durch folgende Formel definiert.

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots$$



Die Riemannsche ζ-Funktion ist also durch eine *unendliche Reihe* festgelegt. Je nachdem, wie schnell die Summanden einer unendlichen Reihe gegen Null streben, hat sie entweder einen richtigen Zahlenwert (sie *konvergiert*), den Wert $+\infty$ oder den Wert $-\infty$ (sie *divergiert bestimmt*) oder gar keinen Wert (sie *divergiert unbestimmt*). Mit Reihen, die nicht konvergieren, kann man nicht wie gewöhnlich rechnen – das soll Aufgabe 10 demonstrieren. Mit dem *Integralvergleichskriterium*, das man im ersten Semester eines Mathe-Studiums lernt, kann man aber leicht nachweisen, dass für $s > 1$ die gegebene Reihe konvergiert.

Der reelle Graph der ζ-Funktion ist sehr unspektakulär. Er hat die Geraden $x = 1$ und $y = 1$ als Asymptoten. So unscheinbar dieser Graph und die Definition auch sein mögen, die Riemannsche ζ-Funktion hat eine Vielzahl kurioser Eigenschaften und ist Gegenstand vieler mathematischer Vermutungen. In der analytischen Zahlentheorie ist sie von fundamentaler Bedeutung, angewendet wird sie aber auch in Physik, Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik.

- Die ζ-Funktion lässt sich auch als ein zahlentheoretisches interessantes Produkt schreiben (Abschnitt 5).
- Für $s \to 1$ divergiert $\zeta(s)$. Das ist eng mit der Unendlichkeit der Primzahlen verbunden.
- Es ist schwierig, geschlossene Ausdrücke für Funktionswerte der ζ-Funktion anzugeben. Aber beispielsweise gilt $\zeta(2) = \pi^2/6$. Die Funktionswerte an allen anderen positiven geraden Zahlen n sind ebenfalls bekannt, sie sind wie $\zeta(2)$ bestimmte rationale Vielfache von π^n.
- Man vermutet, dass die Werte der ζ-Funktion an allen positiven ungeraden Zahlen (außer der Eins) irrational sind. Man weiß schon, dass zumindest unendlich viele dieser Werte irrational sind, und man weiß auch, dass $\zeta(3)$ irrational ist. Es ist aber

noch nicht einmal bekannt, ob auch $\zeta(5)$ irrational ist. (Kurioserweise weiß man aber, dass unter den Zahlen $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$ und $\zeta(11)$ mindestens eine irrational sein muss.)

- Obwohl die definierende Formel nur für $s > 1$ konvergiert, lässt sich die ζ-Funktion auf den Bereich $s < 1$ und sogar auf *alle komplexen Zahlen* ungleich 1 fortsetzen.

- Die Werte der ζ-Funktion an allen negativen ganzen Zahlen sind bekannt. Bei allen negativen geraden Zahlen hat sie Nullstellen, die so genannten *trivialen Nullstellen der ζ-Funktion*.

- Es ist bekannt, dass alle weiteren Nullstellen in den komplexen Zahlen Realteil zwischen 0 und 1 (jeweils ausgeschlossen) haben.

- Man vermutet, dass diese so genannten *nichttrivialen Nullstellen* sogar alle Realteil genau $1/2$ haben. Das besagt die berühmte *Riemannsche Vermutung*.

- Die Riemannsche Vermutung ist eng verwandt mit der Verteilung der Primzahlen und der Goldbachschen Vermutung. Eine lange Liste von Konsequenzen der Riemannschen Vermutung gibt es auf `http://mathoverflow.net/questions/17209/consequences-of-the-riemann-hypothesis`.

Aufgabe 9. *Eine einfache konvergente Reihe*

a) Was ergibt $1 + 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + \cdots$?

b) Was ergibt $1 + 0{,}1_2 + 0{,}01_2 + 0{,}001_2 + \cdots$, wenn man die Summanden im Binärsystem liest?

Aufgabe 10. *Grandis Reihe*

Sei $s := 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$. Diese Reihe divergiert, man kann mit ihr nicht wie gewöhnlich rechnen. Das sollen die folgenden Teilaufgaben illustrieren. Die Reihe ist nach dem italienischen Mathematiker und Geistlichen Guido Grandi (* 1671, † 1742) benannt.

a) Fasse die ersten beiden Summanden zusammen, dann die zweiten beiden, die dritten beiden, und so weiter. Welches Ergebnis erhält man auf diese Art und Weise für s?

b) Lass den ersten Summanden vorne stehen, fasse dann aber den zweiten und dritten Summanden zusammen, den vierten und fünften, und so weiter. Was ist nun das Ergebnis?

c) Wie muss man die Summanden zusammenfassen, um deine Lieblingszahl als Ergebnis zu erhalten?

d) Finde einen Weg, um die Gleichung $1 - s = s$ nicht unplausibel zu finden. Welchen Wert hat s dieser Gleichung zufolge?

Aufgabe 11. *Was ist $\zeta(2)$?*

Die Zahl $\zeta(2)$ ist gleich $\pi^2/6$. Der übliche Beweis dieser Tatsache verwendet mehrdimensionale Integrationstheorie und erfordert daher mehr Vorkenntnisse, als wir hier voraussetzen möchten. Es ist aber auch schon spannend zu verstehen, wieso $\zeta(2)$ überhaupt *endlich* ist. Das ist ja, angesichts der Definition von $\zeta(2)$ als die unendliche Reihe

$$\zeta(2) = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots ,$$

gar nicht klar.

a) Finde zunächst den Wert von

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1) \cdot n} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots .$$

Tipp. Rechne nach, dass gilt: $\frac{1}{(n-1)\cdot n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$. Mit dieser Erkenntnis kannst du die Summe umschreiben und ausrechnen. Dabei wirst du feststellen, dass sich die meisten Summanden gegenseitig wegheben. Summen, bei denen das passiert, heißen auch *Teleskopsummen*.

b) Zeige: $\zeta(2) < \infty$.

Tipp. In welchem Größenverhältnis stehen $\frac{1}{n^2}$ und $\frac{1}{(n-1)\cdot n}$ zueinander?

Bemerkung. Eine Möglichkeit, den exakten Zahlenwert von $\zeta(2)$ zu bestimmen, zeigt folgende Rechnung auf.

$$\begin{aligned}
\zeta(2) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^1 x^{n-1}\,dx \right) \cdot \left(\int_0^1 y^{n-1}\,dy \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \int_0^1 x^{n-1} y^{n-1}\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} y^{n-1}\,dx\,dy \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \sum_{i=0}^{\infty} (xy)^i\,dx\,dy \overset{\text{A12}}{=} \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy}\,dx\,dy
\end{aligned}$$

Dabei ist insbesondere zu begründen, dass die unendliche Summe mit dem Integral vertauscht werden kann. Das mehrdimensionale Integral am Ende muss dann noch ausgewertet werden, zum Beispiel über eine trickreiche Koordinatentransformation.

5 Die Eulersche Produktformel

Theorem 5.1. *Für alle $s > 1$ gilt die Identität*

$$\zeta(s) = \prod_{\substack{p \\ p \text{ prim}}} \frac{1}{1-p^{-s}} = \frac{1}{1-2^{-s}} \cdot \frac{1}{1-3^{-s}} \cdot \frac{1}{1-5^{-s}} \cdots .$$

Diese Beziehung ist aus mehreren Gründen bemerkenswert. Zunächst einmal ist es eine Seltenheit, dass sich eine *Summe* (die linke Seite der Gleichung) auch als ein (nichttriviales) *Produkt* schreiben lässt. Zudem noch gehen in die rechte Seite die Primzahlen ein, beim bloßen Anblick der Formel für die ζ-Funktion würde man das nicht vermuten.

Für den Beweis benötigen wir die Formel für die *geometrische Reihe* (Aufgabe 12),

$$\sum_{m=0}^{\infty} x^m = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x},$$

und die Potenzgesetze $x^{-a} = 1/x^a$ sowie $(x^a)^b = x^{ab}$.

Beweis. Wir beginnen mit der rechten Seite der Gleichung. Der Bruch passt auf die Formel für die geometrische Reihe, deswegen gilt

$$\prod_{\substack{p \\ p \text{ prim}}} \frac{1}{1-p^{-s}} = \prod_{\substack{p \\ p \text{ prim}}} \left(1 + p^{-s} + (p^2)^{-s} + \cdots\right).$$

Wenn wir dieses unendliche Produkt ausmultiplizieren, erhalten wir die Summe über alle Zahlen der Form $1/t^s$, wobei t alle Möglichkeiten, beliebig viele Primzahlen aufzumultiplizieren, durchläuft. Da sich nach dem Fundamentalsatz der Arithmetik jede positive natürliche Zahl auf genau eine Art und Weise als Produkt von Primzahlen schreiben lässt, erhalten wir also die Summe über alle Zahlen der Form $1/n^s$, wobei n alle positiven natürlichen Zahlen durchläuft. Nach Definition ist diese Summe $\zeta(s)$. □

Überblick verloren? Aufgabe 14 wird in kleinen handlichen Stücken den Beweis verständlich machen.

Aufgabe 12. *Die geometrische Reihe*

In dieser Aufgabe wollen wir die so genannte *geometrishe Reihe*

$$s := 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

auswerten. Der erste Schritt dazu ist mit dieser Zeile schon getan – in der Mathematik wird vieles einfacher, wenn man dem Unbekannten einen Namen gibt: s. Denn dann steht der Weg für algebraische Umformungen offen.

a) Rechne nach: $s \cdot (1 - x) = 1$.

Tipp. Multipliziere die unendliche Summe aus.

b) Folgere: $s = 1/(1 - x)$.

c) Löse Aufgabe 9 erneut, und zwar unter Verwendung der Formel aus b).

Bemerkung. Die Multiplikation mit $(1 - x)$, die zur Auswertung von s also sehr hilfreich war, war ein *Trick*. Der Definition von s ist dieser nicht zu entnehmen, man benötigt Kreativität und Geduld, um auf ihn zu kommen. Die geometrische Reihe konvergiert nur, falls der Betrag von s kleiner als 1 ist, und nur in diesem Fall gilt die Formel $s = 1/(1 - x)$. Diese Subtilitäten wollen wir nicht weiter beachten, obwohl sie durchaus wichtig sind.

Aufgabe 13. *Beweise ohne Worte*

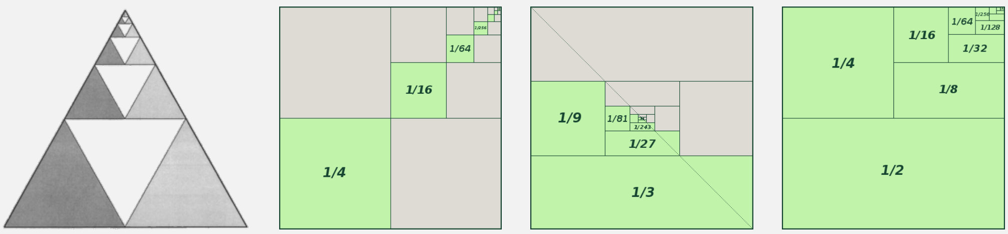
Die aus dem Internet ausgeliehenen Skizzen demonstrieren (von links nach rechts) folgende Sachverhalte – und zwar ganz ohne Formeln und Rechnungen. Schaue dir die Skizzen lang genug an, um zu verstehen, wieso sie diese Sachverhalte wirklich beweisen.

a) $\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \cdots = \frac{1}{3}$.

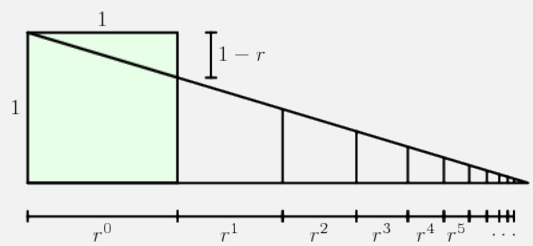
b) Wie bei a).

c) $\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots = \frac{1}{2}$.

d) $\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots = 1$.



Es ist sogar möglich, die allgemeine Formel für die geometrische Reihe aus Aufgabe 12 durch eine aussagekräftige Skizze zu beweisen. Kannst du erklären, wie das funktioniert? (Achtung, knifflig!)



Aufgabe 14. *Die Eulersche Produktformel in fünf Schritten*

a) Zum Aufwärmen: Multipliziere folgendes Produkt aus.

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}\right).$$

b) Multipliziere jetzt in dem Produkt

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots\right)$$

die Klammern so lange aus, bis du genug von dem System verstehst, um zu erkennen: Hier kommt die Summe über die Kehrwerte von all den positiven natürlichen Zahlen, in deren Primfaktorzerlegung nur die Faktoren 2 und 3 auftreten, heraus.

c) Multipliziere nun das dreifache Produkt

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots\right)\cdot\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right)$$

soweit aus, um zu erkennen, dass das die Summe über die Kehrwerte von all den positiven natürlichen Zahlen, in deren Primfaktorzerlegung nur die Faktoren 2, 3 und 5 vorkommen, ergibt.

d) Mit dieser Vorarbeit ist es nicht mehr schwer, zu glauben, dass das unendliche Produkt

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right)\cdots$$

gleich der Summe über die Kehrwerte von *allen* positiven natürlichen Zahlen ist.

e) Schlussendlich: Ergänzen wir überall ein „hoch s“, so erhalten wir die Summe über alle Zahlen der Form $1/n^s$, wobei n über alle positiven natürlichen Zahlen läuft. Das ist die Eulersche Produktformel.

$$\left(1+\tfrac{1}{2^s}+\tfrac{1}{(2^2)^s}+\cdots\right)\left(1+\tfrac{1}{3^s}+\tfrac{1}{(3^2)^s}+\cdots\right)\left(1+\tfrac{1}{5^s}+\tfrac{1}{(5^2)^s}+\cdots\right)\cdots=\textstyle\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{1}{n^s}.$$

Aufgabe 15. *Nullstellen der ζ-Funktion rechts von der Eins*

Die Nullstellen der ζ-Funktion spielen in der Zahlentheorie eine große Rolle und sind Gegenstand der Riemannschen Vermutung. In dieser Aufgabe wollen wir zwei erste Schritte in diese Richtung gehen.

a) Zeige, dass für alle reellen Zahlen $s > 1$ die Zahl $\zeta(s)$ ungleich Null ist.

b) Zeige, dass auch für alle komplexen Zahlen s mit Realteil größer als Eins die Zahl $\zeta(s)$ ungleich Null ist.

   Hinweis. Ist s komplex, so können die Summanden in der definierenden Reihe für $\zeta(s)$ unübersichtliche komplexe Zahlen werden, mit Real- und Imaginärteilen, die sowohl positiv als auch negativ sein können. Verwende also nicht die Reihendarstellung für $\zeta(s)$, um diese Aufgabe zu lösen.

Warnung. Es stimmt auch, dass $\zeta(s)$ für komplexe Zahlen s mit Realteil genau gleich Eins nicht Null ist – diese Tatsache ist äquivalent zum Primzahlsatz (Theorem 8.1). Das kann man aber weder mit der Reihendarstellung noch mit der Eulerschen Produktformel zeigen, denn diese konvergieren nur für Realteil größer als Eins.

6 Die harmonische Reihe

Die unendliche Reihe

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

wird *harmonische Reihe* genannt. Sie divergiert bestimmt, ihr Wert ist $+\infty$.

Mit ein wenig Hintergrundwissen aus Integrationstheorie kann man sich überlegen, dass die harmonische Reihe in etwa so schnell wächst wie der natürliche Logarithmus:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \approx \ln(n), \tag{$\star$}$$

und eine verfeinerte Analyse liefert folgendes Resultat.

Theorem 6.1. *Es gibt eine Konstante $\gamma \approx 0{,}57722$, die* Euler–Mascheroni-Konstante, *der sich die Differenzen aus linker und rechter Seite von ($\star$) beliebig genau nähern. In Symbolen:*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \ln(n) \xrightarrow{n\to\infty} \gamma.$$

In diesem Kontext gibt es eine Abschätzung, die für unsere Zwecke wichtig sein wird:

$$\sum_{i=1}^{\lceil e^{A-\gamma} \rceil} \tfrac{1}{i} > A.$$

Die Klammern bezeichnen dabei die *Aufrundungsoperation* (zur nächsten ganzen Zahl).

A	$e^{A-\gamma}$	$\lceil e^{A-\gamma} \rceil$	$\sum_{i=1}^{\lceil e^{A-\gamma} \rceil} 1/i$
1	1.56	2	1.50
2	4.23	5	2.28
3	11.50	12	3.10
4	31.26	32	4.06
5	84.97	85	5.03
6	230.97	231	6.02
7	627.84	628	7.02
8	1706.63	1707	8.02
9	4639.11	4640	9.02
10	12610.42	12611	10.02

Aufgabe 16. *Divergenz der harmonischen Reihe*

a) Wieso ist $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{2}$? *Tipp.* $\frac{1}{3} \geq \frac{1}{4}$ und $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

b) Wieso ist $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \geq \frac{1}{2}$? *Tipp.* $\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7} \geq \frac{1}{8}$.

c) Wieso ist $\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16} \geq \frac{1}{2}$?

d) Wieso ist $\frac{1}{17} + \cdots + \frac{1}{32} \geq \frac{1}{2}$?

e) Folgere: Die harmonische Reihe ist größergleich $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots$, und das ist sicherlich $+\infty$.

Aufgabe 17. *Slow harmonic series is slow*

Die harmonische Reihe divergiert zwar, tut das aber sehr langsam. Addiere mit einem Taschenrechner oder einem Computerprogramm so viele Terme der Reihe, wie du möchtest. Ich wette, du wirst nicht über 30 hinauskommen.

Aufgabe 18. *Eulers Beweis der Unendlichkeit der Primzahlen*

a) Was ist $\zeta(1)$?

b) Verwende Eulers Produktformel, um einen Beweis der Unendlichkeit der Primzahlen zu führen: Wie sähe die Formel aus, wenn es nur endlich viele Primzahlen gäbe?

7 Grobe Schranken für die Größen der Primzahlen

Es gibt keine geschlossene Formel für die Primzahlen.[1] Trotzdem kann man explizite *Schranken* für die Größe der n-ten Primzahl angeben. Mit deren Hilfe kann man bestimmen, wie viele Primzahlen es in einem vorgegebenem Bereich mindestens geben muss oder höchstens geben kann.

Ein erstes Resultat in diese Richtung ist das folgende. Dabei sei $p_1, p_2, p_3, \ldots$ die unendliche Liste aller Primzahlen.

Theorem 7.1.

a) *Ist p eine Primzahl, so ist die nächste Primzahl $\leq p! + 1$.*
b) *Die r-te Primzahl ist höchstens $2^{(2^r)}$: $p_r < 2^{(2^r)}$.*

Das folgende Resultat ist schwieriger zu beweisen, liefert aber auch eine bessere (kleinere) Abschätzung. Die Klammern bezeichnen wieder die Aufrundungoperation.

Theorem 7.2.

a) *Ist p eine Primzahl, so ist die nächste Primzahl $\leq \lceil e^{p-\gamma} \rceil$.*
b) *Die r-te Primzahl ist höchstens $\lceil e^{r-\gamma} \rceil$: $p_r \leq \lceil e^{r-\gamma} \rceil$.*

Um diese beiden Behauptungen zu beweisen, werden wir eine interessante mathematische Technik verwenden: *Proof mining*. Deren Ausgangspunkt ist die triviale Erkenntnis, dass ein *Beweis* einer Aussage viel mehr enthält als die bloße Information, dass die bewiesene Aussage korrekt ist. Ein Beweis gibt auch (mehr oder weniger verständliche) Hintergründe zu ihrer Korrektheit, knüpft Verbindungen zwischen unterschiedlichen mathematischen Objekten und führt so Verborgenes auf Offensichtliches zurück.

Das führt dazu, dass man aus Beweisen rein qualitativer Aussagen – zum Beispiel: *Es gibt unendlich viele Primzahlen.* – oftmals quantitative Information extrahieren kann: *Im Bereich von 1 bis n gibt es mindestens soundso viele Primzahlen.*

Proof mining werden wir an Euklids und an Eulers Beweis der Unendlichkeit der Primzahlen üben. Euklids Beweis liefert Theorem 7.1, Eulers komplexerer Beweis liefert das stärkere Theorem 7.2.

Beide Theoreme sind aber nur allererste Schritte im Verständnis der Asymptotik der Primzahlen. Es gibt nämlich die beiden folgenden, viel schärferen Aussagen. Wir werden sie später im Detail diskutieren.

Theorem 7.3 (Bertrands Postulat)**.** *Ist p eine Primzahl, so ist die nächste Primzahl höchstens $2p$.*

Theorem 7.4 (Primzahlsatz, ungenau formuliert)**.** *Zwischen 1 und n gibt es etwa $n / \ln n$ viele Primzahlen.*

[1] Das ist nur halb wahr. Informiere dich über *Mills Formel*.

Aufgabe 19. *Theorem 7.1 aus Euklids Beweis der Unendlichkeit der Primzahlen*

a) Studiere Euklids Beweis der Unendlichkeit der Primzahlen (Aufgabe 8), um zu sehen: Ist p eine Primzahl, so kommt spätestens bis zu $p! + 1$ („p Fakultät“, $p! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (p-1) \cdot p$) die nächste Primzahl.

b) Zeige: Für die $(r+1)$-te Primzahl gilt die Abschätzung

$$p_{r+1} \leq p_1 \cdots p_r + 1.$$

c) Folgere mit vollständiger Induktion:

$$p_r < 2^{(2^r)}.$$

Tipp. Du darfst verwenden, dass für alle Zahlen $m \geq 2$ gilt: $m/4 + 1 \leq m$.

Aufgabe 20. *Theorem 7.2 aus Eulers Beweis der Unendlichkeit der Primzahlen*

a) Sei q eine natürliche Zahl. Studiere den Beweis von Eulers Produktformel, um folgende verfeinerte Aussage nachzuvollziehen:

$$\sum_n \frac{1}{n} = \prod_{\substack{p \leq q \\ p \text{ prim}}} \frac{1}{1 - p^{-1}}.$$

Die Summe auf der linken Seite soll dabei über all diejenigen positiven natürlichen Zahlen laufen, in deren Primfaktoren nur Primzahlen $\leq q$ vorkommen. Passend dazu läuft das Produkt auf der rechten Seite über alle Primzahlen $\leq q$.

b) Beweise:

$$\prod_{\substack{p \leq q \\ p \text{ prim}}} \frac{1}{1 - p^{-1}} = \prod_{\substack{p \leq q \\ p \text{ prim}}} \frac{p}{p-1} \leq \prod_{a=1}^{q} \frac{a}{a-1} = q.$$

c) Sei q eine Primzahl. Angenommen, bis zur Zahl $\lceil e^{q-\gamma} \rceil$ (einschließlich) kommen keine weiteren Primzahlen. Zeige dann

$$\sum_{n=1}^{\lceil e^{q-\gamma} \rceil} \frac{1}{n} \leq q.$$

d) Verwende die Abschätzung aus Abschnitt 6, um zu sehen, dass das nicht sein kann und dass daher zwischen $q+1$ und $\lceil e^{q-\gamma} \rceil$ mindestens eine weitere Primzahl liegen muss.

e) Beweise:

$$\prod_{i=1}^{r} \frac{1}{1-p_i^{-1}} \leq \prod_{i=1}^{r} \frac{1}{1-(i+1)^{-1}} = \prod_{i=1}^{r} \frac{i+1}{i} = r+1.$$

f) Folgere: Die $(r+1)$-te Primzahl ist kleinergleich $\lceil e^{r+1-\gamma} \rceil$.

8 Grobe Schranken für die Anzahl der Primzahlen

In der Zahlentheorie interessieren wir uns für den Verlauf der *Primzahlfunktion* π:

$$\pi(n) := \text{Anzahl Primzahlen zwischen 1 und } n.$$

Der gefeierte *Primzahlsatz* gibt zwar keine explizite Formel für $\pi(n)$, macht aber sehr wohl eine Aussage über die *Asymptotik* von π. Er gibt also eine Antwort auf die Frage, welchem Term sich $\pi(n)$ für größer werdendes n immer weiter annähert.

Theorem 8.1 (Primzahlsatz)**.** *Asymptotisch gilt*

$$\pi(n) \sim \frac{n}{\ln n}.$$

Genauer: Der Grenzwert für $n \to \infty$ von $\pi(n) / \frac{n}{\ln n}$ ist Eins.

Dieses Resultat wurde schon Ende des 18. Jahrhunderts von Gauß und Legendre vermutet, konnte aber erst 1896 durch Hadamard und De La Vallée-Poussin rigoros bewiesen werden. Wegweisend für den Beweis war eine Arbeit Riemanns aus dem Jahr 1859 mit dem viel versprechenen Titel *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe*. Wie der Beweis in etwa funktioniert, werden wir noch verstehen. Die noch unbewiesene Riemannsche Vermutung impliziert übrigens eine Verbesserung des Primzahlsatzes.

Um die Aussage des Primzahlsatzes besser wertschätzen zu können, möchten wir zwei deutlich schwächere Abschätzungen angeben, die wir mit den Ergebnissen aus dem vorherigen Abschnitt beweisen können. Dabei ist ld der Logarithmus zur Basis 2.

Theorem 8.2. $\pi(n) \geq \operatorname{ld} \operatorname{ld} n$*.*

Theorem 8.3. $\pi(n) \geq \ln n$*.*

Aufgabe 21. *Theorem 8.2 aus Euklids Beweis der Unendlichkeit der Primzahlen*

Aus Euklids Beweis haben wir die Abschätzung

$$p_n < 2^{2^n}$$

extrahiert. Zeige damit für alle Primzahlen p, dass $\pi(p) > \operatorname{ld} \operatorname{ld} p$.

Tipp. Es gilt $\pi(p_n) = n$, wieso?

Hinweis. Wenn du möchtest, kannst du versuchen, auch noch $\pi(n) > \operatorname{ld} \operatorname{ld} n$ für alle natürlichen Zahlen (statt nur für die Primzahlen) zu beweisen. Die Hauptarbeit ist dabei schon erledigt, denn die linke Seite macht nur bei Primzahlen Sprünge, und die rechte wächst zwar kontinuierlich, ändert sich bis zur nächsten Primzahl aber stets um weniger als Eins. Diese letzte Teilaussage ohne weitere Hilfsmittel, insbesondere ohne Bertrands Postulat, zu beweisen, ist aber nicht ganz einfach.

Aufgabe 22. *Theorem 8.3 aus Eulers Beweis der Unendlichkeit der Primzahlen*

Aus Eulers Beweis haben wir die Abschätzung

$$p_n \leq \lceil e^{n-\gamma} \rceil$$

extrahiert; tatsächlich gilt sogar „$<$“ statt nur „$\leq$“. Beweise damit für alle Primzahlen p, dass $\pi(p) > \gamma + \ln p > \ln p$.

9 Die Summe der Kehrwerte der Primzahlen

Es gibt genauso viele Quadratzahlen wie Primzahlen, nämlich jeweils *abzählbar unendlich viele*. Intuitiv würde man trotzdem behaupten, dass die Primzahlen dichter gesäht seien als die Quadratzahlen. Eine Möglichkeit, den Unterschied mathematisch präzise zu verdeutlichen, besteht darin, die Summe der Kehrwerte zu vergleichen:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots \quad \text{vs.} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots$$

Wie wir nämlich in Aufgabe 11 gesehen haben, hat die linke Reihe einen endlichen Wert (nämlich $\pi^2/6$). Die rechte Reihe dagegen divergiert, sie hat den Wert $+\infty$. Das zeigt, dass die Kehrwerte der Quadratzahlen viel schneller kleiner werden als die Kehrwerte der Primzahlen; umgekehrt formuliert: die Quadratzahlen wachsen viel schneller an als die Primzahlen.

Theorem 9.1. *Die Summe der Kehrwerte der Primzahlen ist unendlich:* $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots = \infty$.

Aufgabe 23. *Die Summe der Kehrwerte der Primzahlen*

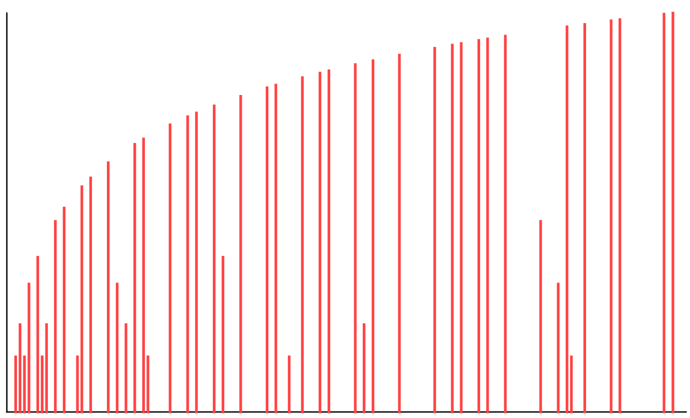
XXX

10 Die Mangoldt-Funktion Λ

Die Mangoldt-Funktion Λ (benannt nach dem deutschen Mathematiker Hans von Mangoldt, * 1854, † 1925 und notiert durch ein großes griechisches Lambda) ist in der analytischen Zahlentheorie eine wichtige Funktion. Sie ist eng verwandt mit der Primzahlfunktion π und mit der Riemannschen ζ-Funktion. Außerdem kommt sie in der Definition der *Tschebyschow-Funktion* vor – eine Funktion, die wie π die Anzahl der Primzahlen misst, mit der man aber dank besserer Eigenschaften leichter umgehen kann.

Definition 10.1. Für Primzahlpotenzen $n = p^k$ mit $k \geq 1$ ist die *Mangoldt-Funktion* Λ definiert durch $\Lambda(n) = \ln p$. Für alle anderen natürlichen Zahlen ist $\Lambda(n) = 0$.

Im Graphen sind die unzähligen Nullstellen von Λ (alle Zahlen, die keine reinen Primzahlpotenzen sind) anhand der Lücken erkennbar.



Ein erster Grund, wieso die Mangoldt-Funktion eine große zahlentheoretische Bedeutung hat, zeigt das folgende Theorem.

Theorem 10.2. *Für jede positive natürliche Zahl n gilt*

$$\ln n = \sum_{d|n} \Lambda(d).$$

Dabei geht die Summe auf der rechten Seite über alle positiven Teiler von n.

Zum Beispiel sind die positiven Teiler von 12 die Zahlen 1, 2, 3, 4, 6 und 12, und tatsächlich gilt, unter Verwendung der Rechenregel $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$ für Logarithmen:

$$\begin{aligned}\ln 12 &= \ln(2 \cdot 2 \cdot 3) = \ln 2 + \ln 2 + \ln 3 = \Lambda(2) + \Lambda(4) + \Lambda(3) \\ &= \Lambda(1) + \Lambda(2) + \Lambda(3) + \Lambda(4) + \Lambda(6) + \Lambda(12) \\ &= \sum_{d|12} \Lambda(d).\end{aligned}$$

Den Zusammenhang zur Riemannschen ζ-Funktion stellt folgende Formel dar.

Theorem 10.3. *Die Ableitung von ζ, ζ selbst und Λ erfüllen die Identität*

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

Aufgabe 24. *Der Fundamentalsatz der Arithmetik in Mangoldt-Sprache*

Beweise Theorem 10.2, zeige also für alle positiven Zahlen n, dass $\ln n = \sum_{d|n} \Lambda(d)$.

Tipp. Überlege dir anhand der Primfaktorzerlegung der Zahl n, welche Teiler n hat und welchen Wert die Mangoldt-Funktion Λ bei ihnen annimmt. Erinnere dich außerdem an die Rechenregel $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$ für Logarithmen.

Aufgabe 25. *Zusammenhang von Λ mit ζ*

Beweise Theorem 10.3.

Tipp. Verwende die Eulersche Produktformel (Abschnitt 5), die Ableitungsregel $(a^s)' = a^s \cdot \ln a$ und die Produktregel für unendlich viele Faktoren:

$$\begin{aligned}(f_1(s) \cdot f_2(s) \cdot f_3(s) \cdots)' &= f_1'(s) \cdot f_2(s) \cdot f_3(s) \cdots \\ &+ f_1(s) \cdot f_2'(s) \cdot f_3(s) \cdots \\ &+ f_1(s) \cdot f_2(s) \cdot f_3'(s) \cdots \\ &+ \cdots .\end{aligned}$$

Aufgabe 26. *Exkurs: Wieso das Zwölfersystem besser als das Zehnersystem ist*

Im Zwölfersystem verwendet man insgesamt zwölf Ziffern, nämlich die üblichen Ziffern von 0 bis 9 und dann zwei neue Ziffern: A für 10 und B für 11. Zum Beispiel steht die Zahl $3B5_{12}$ für 5 Einer, 11 Zwölfer und 3 Vielfache von 144, also für die Zahl 569. Die Zahl $2{,}2_{12}$ steht für 2 Einer und 2 Zwölftel, also für $2 + \frac{2}{12} = 2{,}1\overline{6}$.

a) Wie schreibt sich $1/3$ im Zwölfersystem?

b) Wie $1/4$ und $1/6$?

c) Wie $1/5$?

d) Welchen Vorteil hat also das Zwölfersystem gegenüber dem Zehnersystem? An welcher Eigenschaft der Zahl 12 liegt das?

11 Asymptotische Notation

Definition 11.1. Sind $f(x)$ und $g(x)$ nichtnegative Funktionsterme, so schreiben wir genau dann $f(x) \ll g(x)$ (in Worten: „$f(x)$ ist asymptotisch kleiner oder gleich $g(x)$"), wenn es eine Konstante $C \geq 0$ gibt, sodass ab einer gewissen Stelle x_0 für alle $x \geq x_0$ gilt, dass

$$f(x) \leq C \cdot g(x).$$

Auf Deutsch: Wenn wir $f(x) \ll g(x)$ schreiben, meinen wir nicht, dass an allen Stellen der Graph von f unterhalb von dem von g liegt. Wir meinen stattdessen, dass – ab einer gewissen Grenze, vorher dürfen $f(x)$ und $g(x)$ völlig beliebig verlaufen – die Funktion f kleiner ist als irgendein konstantes Vielfaches von g. Um mit dieser Kurzschreibweise vertraut zu werden, müssen wir uns ein paar Beispiele ansehen.

- $x \ll x^2$. Für $x \in \,]0,1[$ ist zwar x größer als x^2, danach aber ist x kleiner als x^2.
- $100x \ll x^2$. Hier dauert es etwas länger, bis das stärkere Wachstum der Quadratfunktion überwiegt.
- $x^2 \ll x^2$. An diesem Beispiel sieht man, dass „$\ll$" eine asymptotische Variante von „$\leq$", und nicht etwa von „$<$" ist.
- $3x^2 \ll x^2$. Es ist $3x^2$ zwar nie kleiner als x^2, aber kleiner als ein bestimmtes konstantes Vielfaches von x^2, nämlich zum Beispiel dem Zehnfachen von x^2.
- $x^3 \not\ll x^2$. Die Kubikfunktion wächst stärker als die Quadratfunktion, und sie wächst auch stärker als jedes konstante Vielfache der Quadratfunktion.
- $\arctan(x) \ll 1$. Im Grenzwert für $x \to \infty$ strebt $\arctan(x)$ gegen $\pi/2 \approx 1{,}6$. Das ist zwar nicht kleiner als Eins, aber kleiner als ein konstantes Vielfaches der Eins.
- $1/x \ll x$. Für kleine x ist $1/x$ viel größer als x. Ab der Stelle 1 jedoch ist $1/x$ kleiner als x.

Lemma 11.2. *a) Wenn $f(x) \ll g(x)$ und $g(x) \ll h(x)$, dann auch $f(x) \ll h(x)$.*

b) Wenn $f(x) \ll g(x)$ und $a(x) \ll b(x)$, dann auch $f(x) + a(x) \ll g(x) + b(x)$.

c) *Wenn $f(x) \ll g(x)$ und $a(x) \ll b(x)$, dann auch $f(x) \cdot a(x) \ll g(x) \cdot b(x)$.*

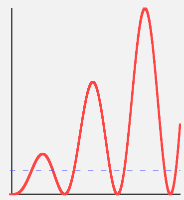
Aufgabe 27. *Weitere Beispiele zur asymptotischen Notation*

a) Gilt $e^5 \ll x^5$ oder $x^5 \ll e^5$?

b) Gilt $x \cdot \ln x \ll x$ oder $x \ll x \cdot \ln x$?

c) Gilt $x \cdot \sin(x)^2 \ll x^5$?

d) Erkläre, wieso *weder* $x \cdot \sin(x)^2 \ll 1$ *noch* $1 \ll x \cdot \sin(x)^2$ stimmt (siehe Skizze).



Aufgabe 28. *Theorie zur asymptotischen Notation*

Beweise Lemma 11.2. Für Behauptung a) kannst du dabei nach folgendem Muster vorgehen; es sind nur noch die Lücken auszufüllen.

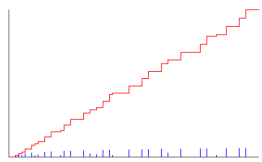
Da $f(x) \ll g(x)$, gibt es eine Konstante $C \geq 0$ und eine Schranke x_0, sodass für alle $x \geq x_0$ gilt: $f(x) \leq C \cdot g(x)$. Da $g(x) \ll h(x)$, gibt es eine weitere Konstante $D \geq 0$ und eine weitere Schranke x_1, sodass für alle $x \geq x_1$ gilt: $g(x) \leq D \cdot h(x)$. Daher gilt zusammengenommen für alle $x \geq ??$, dass $f(x) \leq ?? \cdot h(x)$. Also $f(x) \ll h(x)$.

12 Die Tschebyschow-Funktion ψ

Definition 12.1. Die (zweite) *Tschebyschow-Funktion* ψ ist definiert als

$$\psi(x) := \sum_{n \leq x} \Lambda(n).$$

Dabei geht die Summe über alle natürlichen Zahlen $n \leq x$.



Im Graphen (obere Kurve, in Rot) sind die Sprünge der Tschebyschow-Funktion bei den Primzahlen gut erkennbar. Zum Vergleich ist die Mangoldt-Funktion in Blau eingezeichnet.

Unmittelbar sind wir eigentlich nicht an der Tschebyshow-Funktion, sondern an der Primzahlfunktion π interessiert. Das folgende Theorem zeigt aber, dass der Unterschied zwischen den beiden Funktionen gar nicht so groß ist.

Theorem 12.2. *Sollte $\psi(n)/n$ im Grenzwert $n \to \infty$ den Wert 1 annehmen, so nimmt auch $\pi(n)/\frac{n}{\ln n}$ im Grenzwert den Wert 1 an; und umgekehrt.*

Der Primzahlsatz (Theorem 8.1) ist also äquivalent zur Aussage, dass $\psi(n)$ asymptotisch äquivalent zu n ist. Es hat sich herausgestellt, dass es leichter ist, den Primzahlsatz über diesen Umweg über die Tschebyschow-Funktion als direkt zu beweisen.

Bevor wir uns im nächsten Abschnitt einem Beweis des Primzahlsatzes stellen, möchten wir in diesem Abschnitt eine schwächere, aber immer noch interessante Aussage verstehen.

Theorem 12.3. *Asymptotisch ist $\psi(N)$ kleiner als N: $\psi(N) \ll N$.*

Beweis. Der Beweis folgt in voneinander unabhängigen Schritten, die wir in den folgenden Aufgaben bearbeiten.

- Um das Theorem zu beweisen, genügt es nachzuweisen, dass $\sum_{N<n\leq 2N} \Lambda(n) \ll N$.
- In der Summe $\sum_{N<n\leq 2N} \Lambda(n) = \Lambda(N+1) + \Lambda(N+2) + \cdots + \Lambda(2N)$ untersuchen wir separat folgende Arten von Summanden $\Lambda(n)$: die, für die n eine Primzahlpotenz der Form p^j mit $j \geq 2$ ist; die, für die n eine Primzahl ist; und alle restlichen Zahlen.
- Die Summe über die Summanden der ersten Art ist $\ll N$.
- Die Summe über die Summanden der zweiten Art ist $\ll N$.
- Die Summe über die Summanden der dritten Art ist Null und daher erst recht $\ll N$. $\square$