Matheschülerzirkel
Universität Augsburg
Schuljahr 2013/2014
Klasse 11./12., Gruppe 2

Zirkelzettel vom 31. Mai 2014: Synthetische Differentialgeometrie

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Eine *infinitesimale Zahl* ε ist eine Zahl, deren Quadrat Null ist: $\varepsilon^2 = 0$. In der gewöhnlichen mathematischen Welt gibt es nur eine einzige infinitesimale Zahl, nämlich die Zahl 0. Für gewisse Anwendungen wäre es aber schön, wenn es auch interessantere infinitesimale Zahlen gäbe. Ähnlich wie bei den komplexen Zahlen kann man solche Zahlen *künstlich* konstruieren; anders als bei den komplexen Zahlen muss man dafür aber gleich ein ganzes neues *mathematisches Universum* errichten.

Das Teilgebiet der Mathematik, in dem man solche Universen studiert, heißt *synthetische Differentialgeometrie* und ist ein relativ junges Forschungsgebiet. Erste Ideen gehen auf die alten Griechen und Versuche des dänischen Mathematikers Johannes Hjelmslev zurück (* 1873, † 1950), richtig initiiert wurde das Gebiet aber erst in den 1970er Jahren durch Anders Kock, ebenfalls Däne.

Im Folgenden werden wir lernen, wozu infinitesimale Zahlen nützlich sind; wie man in dem alternativen Universum arbeiten kann; und schließlich inwieweit Resultate, die man in der neuen mathematischen Welt erzielt, auch in der gewöhnlichen mathematischen Welt Gültigkeit haben. Ohne diesen letzten Punkt wäre unser Unterfangen ein reines Gedankenexperiment ohne Nutzen.

Dreh- und Angelpunkt für synthetische Differentialgeometrie ist ein Axiom, das *klassisch* – das heißt im gewöhnlichen mathematischen Universum – falsch ist:

Axiom der Mikroaffinität. Sei $\Delta := \{\varepsilon \in \mathbb{R} \,|\, \varepsilon^2 = 0\}$ die *infinitesimale Monade* um 0. Sei $f : \Delta \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion. Dann gibt es gewisse eindeutig bestimmte reelle Zahlen a und b, sodass für alle Zahlen ε in Δ folgende Gleichung gilt:

$$f(\varepsilon) = a + b\varepsilon.$$

Wir werden etwas Zeit benötigen, um zunächst überhaupt die Aussage dieses Axioms zu verstehen und dann seine Konsequenzen zu überblicken. Teile des Theoriegebäudes erarbeiten wir uns in Aufgaben. Diese solltest du also auch beim ersten Lesen nicht überfliegen.

Warnung. Ab einer bestimmten Stelle werden wir leicht andere logische Gesetze verwenden als in der Schule. Insbesondere werden deine Lehrer vielleicht nicht erfreut sein, wenn du sie in Hausaufgaben oder Prüfungen verwendest.

2 Motivation für infinitesimale Zahlen

Schnitte. In Abbildung **??** sind zwei Situationen skizziert, bei denen sich jeweils zwei Kurven schneiden. (Gerade Linien zählen auch als *Kurven*.) Es ist offensichtlich, dass sich im ersten Bild die beiden Geraden in genau einem Punkt schneiden. Die Schnittsituation beim zweiten Bild ist dagegen weniger klar. In klassischer Mathematik konstatiert man, der Schnitt bestehe ebenfalls aus nur genau einem Punkt, nämlich dem Ursprung. In der Tat könnte man keinen weiteren Punkt benennen, der ebenfalls auf beiden Kurven liegen würde. Anschaulich scheint es aber ja doch einen Unterschied zu geben – man benötigt infinitesimale Zahlen, um ihn auf direkte Art und Weise mathematisch einzufangen.[1]

Aufgabe 1. *Schnittberechnung*

Die Gleichungen der beiden Kurven im ersten Bild sind

$$\begin{cases} y = 2x, & (1) \\ y = 0. & (2) \end{cases}$$

Die erste Gleichung gehört zur schrägen Gerade, die zweite zur x-Achse (auf der alle Punkte als y-Koordinate Null haben). Die Gleichungen der Kurven im zweiten Bild sind

$$\begin{cases} y = x^2, & (3) \\ y = 0. & (4) \end{cases}$$

a) Löse das erste Gleichungssystem, um zu beweisen: Der einzige Schnittpunkt $(x|y)$ hat die Koordinaten $x = 0$ und $y = 0$. Wieso entspricht das Schneiden der beiden Kurven rechnerisch der Lösungsmenge des kombinierten Gleichungssystems?

b) Löse das zweite Gleichungssystem, um zu beweisen, dass ein Punkt $(x|y)$ genau dann im Schnittbereich des zweiten Bilds liegt, wenn seine x-Koordinate Null und seine y-Koordinate eine infinitesimale Zahl ist (also $y^2 = 0$ erfüllt).

   Hierbei ist es wichtig, mit Absicht langsam zu rechnen, um nicht durch zu schnelles Vereinfachen die Pointe vorwegzunehmen. In klassischer Mathematik gilt die Regel „wenn $y^2 = 0$, dann auch $y = 0$“; erst mit dieser Regel vereinfacht sich das Ergebnis, dann zu demselben wie in Teilaufgabe a).

[1] Indirekt geht es auch in klassischer Mathematik: Die Parabel hat bei der Stelle $x = 0$ eine *doppelte Nullstelle*. Das bedeutet, dass nicht nur der Funktionswert dort Null ist, sondern auch noch seine erste Ableitung.

Physik. Infinitesimale Zahlen sind ferner in der Physik nützlich. Dort hat man es manchmal mit „sehr kleinen“ (aber nicht verschwindenden) Größen wie etwa Differenzen Δx zu tun. Da das Quadrat einer kleinen Zahl nochmals kleiner und „wirklich winzig“ ist, erlaubt man sich, in Rechnungen Quadrate von Δx einfach wegzulassen. Das ist mathematisch natürlich nicht zulässig – trotzdem haben die Physikerinnen und Physiker mit diesem Vorgehen offensichtlich großen Erfolg!

Mathematiker sollten die physikalischen Methoden nicht blind verurteilen, sondern sie ernst nehmen und Möglichkeiten finden, sie mathematisch sauber und rigoros zu verstehen. Infinitesimale Zahlen bieten eine solche Möglichkeit.sie ernst nehmen und Möglichkeiten finden, sie mathematisch sauber und rigoros zu verstehen. Infinitesimale Zahlen bieten eine solche Möglichkeit.

Aufgabe 2. *Quadrate großer und kleiner Zahlen*

a) Sei x eine reelle Zahl, die größer als 1 ist. Zeige: Das Quadrat x^2 ist größer als x.

b) Sei x eine reelle Zahl zwischen 0 und 1. Zeige: Das Quadrat x^2 ist kleiner als x.

   Wenn die Dezimalentwicklung von x mit n Nullen nach dem Komma beginnt, mit etwa wie vielen Nullen beginnt dann die Dezimalentwicklung von x^2?

Differentialrechnung. Infinitesimale Zahlen sind ferner fürs Differenzieren nützlich: Sie ermöglichen es nämlich, auf gewisse Grenzwertprozesse zu verzichten und gleichzeitig näher an der Anschauung zu bleiben. Zur Erinnerung wollen wir die übliche Definition der Ableitung rekapitulieren:

Definition 2.1. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$ eine Stelle. Falls der Grenzwert

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon}$$

existiert, so heißt f an der Stelle x_0 *differenzierbar* und die Ableitung $f'(x_0)$ ist per Definition dieser Grenzwert.

Aufgabe 3. *Intuition zum Differentialquotienten*

Erinnere dich, inwieweit der Bruch

$$\frac{f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon}$$

eine *Sekantensteigung* angibt, und erkläre anhand einer Skizze, wieso der Grenzwert für $\varepsilon \to 0$ anschaulich die Steigung der Tangente an den Graphen von f durch den Punkt $(x_0|f(x_0))$ angibt.

Um die Definition besser zu verstehen, möchten wir ohne Verwendung der bekannten Ableitungsregeln die Ableitung der Quadratfunktion bestimmen.

Proposition 2.2. *Die Quadratfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ ist überall differenzierbar mit Ableitung $f'(x) = 2x$.*

Beweis. In der Schule würde man in einer langen Gleichungskette die Definition so lange vereinfachen, bis der Grenzwert unmittelbar ablesbar ist. Dabei müsste man in jedem Schritt das lim-Symbol mitführen, würde das aber vielleicht auch oftmals vergessen. Übersichtlicher ist folgende Schreibweise:

$$\frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon} = \frac{(x+\varepsilon)^2 - x^2}{\varepsilon} = \frac{x^2+2x\varepsilon+\varepsilon^2-x^2}{\varepsilon} = 2x+\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 2x. \qquad \square$$

An diesem Beweis ist an sich nichts auszusetzen. Die Rechnung selbst ist genügend einfach, durch die Grenzwertüberlegung aber trotzdem logisch nicht ganz elementar. Die Physiker haben eine einfachere Möglichkeit, die Aussage zu „beweisen“ – eine, die ohne Grenzwerte auskommt:

Physiker-Beweis. Sei ε „sehr klein“. Dann gilt:

$$\frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon} = \frac{(x+\varepsilon)^2 - x^2}{\varepsilon} = \frac{x^2+2x\varepsilon+\varepsilon^2-x^2}{\varepsilon} = 2x+\varepsilon = 2x. \qquad \square$$

Bemerkenswert ist die schizophrene Natur dieses Arguments: Zum einen lässt man im letzten Schritt den Term ε einfach weg – mit der Begründung, ε sei schließlich „sehr klein“. Andererseits aber teilt man durch ε – das ginge nur, wenn man wüsste, dass ε positiv oder negativ, aber jedenfalls nicht Null ist.

Außerdem sollte man auch zu Beginn der Rechnung die Vereinfachung $f(x+\varepsilon)-f(x) = f(x)-f(x) = 0$ treffen dürfen, wenn man doch am Ende auch einfach ε weglassen durfte. Schließlich sollten sich die Rechengesetze nicht inmitten einer Rechnung ändern. Dann wäre das Ergebnis insgesamt $f'(x) = 0$ – das ist jedoch eine unsinnige Behauptung.

Aus diesen Gründen wird das Physiker-Argument in klassischer Mathematik nicht akzeptiert. Mit den infinitesimalen Zahlen aus synthetischer Differentialgeometrie werden wir aber in der Lage sein, die wesentlichen Ideen des Physiker-Arguments in einen mathematisch einwandfreien Beweis zu gießen. So können wir die Vorteile beider Welten – einfache Rechnungen einerseits und mathematische Rigorosität andererseits – vereinen.

Aufgabe 4. *Ableitung der Kubikfunktion I*

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3$ die Kubikfunktion. Verifiziere direkt anhand der mathematischen Definition, dass f überall differenzierbar mit Ableitung $f'(x) = 3x^2$ ist.

Hinweis: Den Ausdruck $(x+\varepsilon)^3$ kann man entweder durch mehrmaliges Ausmultiplizieren oder direkt durch Verwendung der binomischen Formel für Kuben statt Quadrate vereinfachen. (Die Koeffizienten der allgemeinen binomischen Formel stehen im Pascalschen Dreieck.)

Aufgabe 5. *Beispiele für nicht differenzierbare Funktionen*

a) Die Betragsfunktion (siehe Abbildung **??**a) ist an der Stelle $x_0 = 0$ nicht differenzierbar. Anschaulich erkennt man das daran, dass der Graph am Punkt $(0|0)$ keine eindeutige Tangente besitzt.[2] Bestätige diese Beobachtung anhand der Definition über den Differentialquotienten: Die Sekantensteigungen konvergieren für $\varepsilon \to 0$ nicht gegen einen bestimmten Wert, sondern …

   Wenn du möchtest, kannst du das auch noch rechnerisch nachvollziehen: Berechne den *links-* und den *rechtsseitigen* Grenzwert des Differenzenquotienten. Nutze dabei folgende Definition der Betragsfunktion:

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0, \\ -x, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

b) Es gibt auch Funktionen, deren Graphen keine offensichtlichen Knickpunkte haben und die trotzdem nicht überall differenzierbar sind. Erkläre anschaulich und zeige rechnerisch, dass folgende Funktion an der Stelle $x_0 = 0$ nicht differenzierbar ist (siehe Abbildung **??**b):

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

(Diese Funktion ist übrigens durchaus *stetig.*)

3 Exkurs zu Mengen und Funktionen

Eine *Menge* reeller Zahlen kann man sich wie eine Einkaufstasche vorstellen, die statt leckerer Äpfel gewisse reelle Zahlen enthält. Die Zahlen, die in einer Menge vorkommen, heißen *Elemente* dieser Menge. Mengen dürfen auch unendlich viele oder gar keine Elemente enthalten. Es gibt drei Möglichkeiten, Mengen anzugeben:

$$\begin{aligned} &M_1 = \{4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81\}, \\ &M_2 = \{4, 9, 16, \ldots, 81\}, \\ &M_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 4 \text{ und } x \leq 81 \text{ und } x \text{ ist das Quadrat einer natürlichen Zahl}\}. \end{aligned}$$

Im ersten Fall zählt man die Elemente der Menge einfach explizit auf. Im zweiten Fall erwartet man von seinem Gegenüber, die Regelmäßigkeit zu erkennen und die in der Notation nicht aufgeführten Elemente gedanklich zu ergänzen. Der dritte Fall liest sich wie folgt: Die Menge M_3 ist die Menge all derjenigen reellen Zahlen („$x \in \mathbb{R}$“), welche ≥ 4, ≤ 81 und zugleich das Quadrat einer natürlichen Zahl sind; man sammelt also alle reellen Zahlen mit einer gewissen Eigenschaft auf.

Aufgabe 6. *Beispiele für Mengen*

Sei $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 4\}$. Skizziere die Menge M auf dem Zahlenstrahl.

Eine *Funktion* $f : D \to \mathbb{R}$ ordnet jedem Element ihrer *Definitionsmenge* D eine bestimmte reelle Zahl zu: Liegt x in D, so ist $f(x)$ eine bestimmte reelle Zahl. Für Zahlen außerhalb der Definitionsmenge D ist „$f(x)$“ ein sinnloser Ausdruck.

Zuordnungen wie $f : x \mapsto \pm x$, für die $f(x)$ gewissermaßen mehrere Werte annimmt, führen nicht zu Funktionen, sondern zu *Relationen.* Solche werden wir im Folgenden nie betrachten.

Aufgabe 7. *Funktionen mit eingeschränkten Definitionsmengen*

a) Finde die größtmögliche Definitionsmenge D, sodass folgende Zuordnung Sinn ergibt:

$$f : D \to \mathbb{R}, \; x \mapsto \frac{1}{x}.$$

[2] Man kann an dieser Stelle durchaus Geraden anlegen, es gibt aber keine besonders überzeugende Wahl einer *berührenden* Gerade. Fortgeschrittene Differentialrechnung wird mit dieser Uneindeutigkeit fertig, durch den Begriff der *Subgradienten* von konvexen Funktionen.

b) Der Term „x^2“ ergibt für alle reellen Zahlen x Sinn, die größtmögliche Definitionsmenge der Zuordnung $x \mapsto x^2$ ist also die vollständige Menge $\mathbb{R}$ aller reellen Zahlen. Man kann aber die Definitionsmenge auch künstlich einschränken:

$$f : [2; 4] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2.$$

Dabei bezeichnet „$[2; 4]$“ das abgeschlossene Intervall von 2 bis 4, also die Menge $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 4\}$. Skizziere den Verlauf dieser Funktion. (Das wird *nicht* die übliche Normalparabel.)

4 Das Axiom der Mikroaffinität

Im Axiom der Mikroaffinität kommt die *infinitesimale Monade um die Zahl* 0 vor. Damit ist folgende Menge reeller Zahlen gemeint:

$$\Delta := \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 0\}.$$

Die Elemente von Δ sind also all diejenigen Zahlen, deren Quadrat Null ist. In klassischer Mathematik gilt die Regel „wenn das Quadrat einer Zahl Null ist, dann ist auch die Zahl selbst Null“. Daher besteht Δ in klassischer Mathematik nur aus der Zahl 0: $\Delta = \{0\}$.

Da wir uns in Kürze von klassischer Mathematik (vorläufig) verabschieden möchten, geben wir nun genau an, welche der Axiome klassischer Mathematik wir noch verwenden möchten:

- Die üblichen logischen Gesetze – mit einer wichtigen Ausnahme, die wir weiter unten diskutieren.

  Ein logisches Gesetz ist etwa: Wenn sowohl eine Aussage A als auch eine Aussage B stimmen, so stimmt insbesondere A. Ein anderes lautet: Wenn eine Aussage A stimmt und B eine weitere (vielleicht falsche) Aussage ist, so stimmt es auch, dass A oder B korrekt ist.[3]

- Die üblichen Rechenregeln zur Termvereinfachung.

$$\begin{aligned} 0 + x &= x & 1 \cdot x &= x \\ x + y &= y + x & x \cdot y &= y \cdot x \\ x + (y + z) &= (x + y) + z & x \cdot (y \cdot z) &= (x \cdot y) \cdot z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \cdot (y + z) &= x \cdot y + x \cdot z \\ (x + y) \cdot z &= x \cdot z + y \cdot z \end{aligned}$$

- Das Axiom zu Gegenzahlen: Jede reelle Zahl besitzt eine zugehörige Gegenzahl – zu x gibt es eine Zahl $-x$ mit der Eigenschaft $x + (-x) = 0$.
- Das Axiom zu Inversen: Ist eine reelle Zahl *nicht Null*, so besitzt sie ein Inverses bezüglich der Multiplikation. In Formeln: Wenn $x \neq 0$, so gibt es eine Zahl y mit $xy = 1$. Das Inverse y wird üblicherweise als „$\frac{1}{x}$“ oder „x^{-1}“ geschrieben.
- Ein *Nichttrivialitätsaxiom*: $0 \neq 1$.

[3] In der Mathematik ist „oder“ stets einschließend gemeint, wenn man nicht mit „entweder oder“ explizit die ausschließende Variante verwendet. Wenn ich also heute Abend ins Kino gehen *und* später schlafen werde, so stimmt es insbesondere auch, dass ich heute Abend ins Kino gehen *oder* schlafen werde.

- Einige weitere Axiome, die wir aber erst dann einführen, wenn wir sie benötigen. Es sei nur noch verraten, dass wir die *Trichotomie* der Ordnung *nicht* verwenden: Diese würde besagen, dass jede Zahl entweder klein, gleich oder größer als Null ist.

Diese Axiome rechtfertigen jedenfalls *nicht* die Regel, der zufolge das Quadrat einer Zahl nur dann Null sein könne, wenn sie es selbst schon wäre. Auch wenn wir keine weiteren Elemente in Δ angeben können, können wir mit unserem reduzierten Satz an Axiomen daher trotzdem nicht schließen, dass Δ *nur* die Null enthalte.

Wir stellen uns die Menge Δ als eine *infinitesimale Umgebung* der Zahl 0 vor. Keine konkrete kleine positive Zahl liegt in Δ – etwa liegt ein Millionstel nicht in Δ, denn das Quadrat eines Millionstels ist nicht Null, sondern ein Billionstel. Wir stellen uns Δ eher als die Menge der Schnittpunkte in Abbildung **??**b vor.

Mathematisch erweckt das Axiom der Mikroaffinität die Menge Δ zum Leben und bestätigt dann unsere Intuition über Δ. Sobald wir dieses Axiom annehmen, verlassen wir klassische Mathematik.

Axiom der Mikroaffinität. Sei $\Delta := \{\varepsilon \in \mathbb{R} \,|\, \varepsilon^2 = 0\}$ die *infinitesimale Monade* um 0. Sei $f : \Delta \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion. Dann gibt es gewisse eindeutig bestimmte reelle Zahlen a und b, sodass für alle Zahlen ε in Δ folgende Gleichung gilt:

$$f(\varepsilon) = a + b\varepsilon.$$

Das Axiom spricht nicht über Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sondern nur über solche, deren Definitionsmengen die infinitesimale Monade Δ sind. Die Funktionswerte einer solchen Funktion können also nur in sehr begrenzten Ausmaßen variieren. Das Axiom besagt nun: Eine solche Funktion sieht stets wie eine affine Funktion aus, mit Achsenabschnitt a und Steigung b.[4]

Zu betonen ist auch, dass Achsenabschnitt a und Steigung b *eindeutig bestimmt* sind. Das bedeutet: Sollte für eine Funktion $f : \Delta \to \mathbb{R}$ nicht nur $f(\varepsilon) = a + b\varepsilon$, sondern auch $f(\varepsilon) = \tilde{a} + \tilde{b}\varepsilon$ für alle ε in Δ gelten, so folgt $a = \tilde{a}$ und $b = \tilde{b}$.

Eine erste Konsequenz des Mikroaffinitätsaxioms ist, dass die Menge Δ anders als in klassischer Mathematik nicht nur die Null enthält.

Proposition 4.1. *Es stimmt nicht, dass* $\Delta = \{0\}$.

Beweis. Angenommen, es wäre doch der Fall, dass $\Delta = \{0\}$. Dann erhalten wir mit der Eindeutigkeitsaussage im Axiom der Mikroaffinität einen Widerspruch: Betrachte die Funktion $f : \Delta \to \mathbb{R}$, $\varepsilon \mapsto 0$. Dann gelten für alle ε in Δ – das ist etwas verklausuliert gesprochen, denn nach Annahme enthält Δ ja nur die Null – *beide* der folgenden Gleichungen:

$$f(\varepsilon) = 0 + 0 \cdot \varepsilon$$
$$f(\varepsilon) = 0 + 1 \cdot \varepsilon$$

Wegen der Eindeutigkeitssaussage müsste daher $0 = 1$ sein. Das ist aber ein Widerspruch zum Axiom $0 \neq 1$. □

[4] In der Schule nennt man solche Funktionen *linear*. In Universitätsmathematik ist dieser Begriff nur solchen affinen Funktionen vorbehalten, deren Achsenabschnitt Null ist.

Wir sind hier also in einer etwas sonderbaren Situation: In klassischer Mathematik gilt $\Delta = \{0\}$, das Axiom der Mikroaffinität impliziert aber $\Delta \neq \{0\}$. Andererseits können wir trotzdem keine Zahl in Δ (außer der Null) explizit angeben. Beide Paradoxien müssen wir auflösen, um wieder produktiv arbeiten zu können. Zunächst aber wollen wir ein paar Rechnungen anstellen, um den Umgang mit dem Axiom der Mikroaffinität zu üben.

Aufgabe 8. *Eine erste korrekte Rechnung mit infinitesimalen Zahlen*

Sei ε eine Zahl in Δ. Vereinfache dann den Ausdruck

$$(x + \varepsilon)^2 - x^2$$

so weit wie möglich. Das geht ähnlich wie bei unserer Berechnung der Ableitung der Quadratfunktion. Am Ende wird ein ε stehen bleiben.

Das Axiom der Mikroaffinität wirst du dazu noch nicht benötigen – aber ohne es wäre die Rechnung langweilig, denn dann wäre ja $\varepsilon = 0$ die einzige infinitesimale Zahl.

Aufgabe 9. *Magneteigenschaft infinitesimaler Zahlen*

Die infinitesimalen Zahlen haben folgende *Magneteigenschaft*: Das Produkt einer beliebigen Zahl mit einer infinitesimalen Zahl ist wieder eine infinitesimale Zahl.

Beweise das! Sei dazu x eine beliebige reelle Zahl und ε eine infinitesimale Zahl, also eine solche, deren Quadrat Null ist. Zeige dann, dass $x \cdot \varepsilon$ ebenfalls infinitesimal ist.

Aufgabe 10. *Invertierbarkeit infinitesimaler Zahlen*

Infinitesimale Zahlen sind nicht so weit von der Null verschieden, als dass sie invertierbar sein könnten. Das wollen wir in dieser Aufgabe beweisen. Ergänze folgenden Beweisanfang:

Sei ε in Δ. Angenommen, ε wäre doch invertierbar. Nach Definition der Invertierbarkeit würde es dann eine weitere Zahl y mit der Eigenschaft $\varepsilon \cdot y = 1$ geben. Dann ...

Aufgabe 11. *Das Prinzip der Mikrokürzbarkeit*

a) Sei x eine invertierbare reelle Zahl (das heißt, dass es eine Zahl y mit $xy = 1$ gibt). Seien ferner a und b reelle Zahlen. Zeige:

$$\text{Wenn } xa = xb, \text{ dann } a = b.$$

Invertierbare Zahlen kann man also in Gleichungen kürzen. Das ist für dich natürlich nichts Neues, vielleicht ist das aber das erste Mal, dass du einen Beweis dieser elementaren Tatsache geführt hast.

b) In manchen Zahlenbereichen gibt es auch Zahlen, die nicht invertierbar, aber trotzdem aus Gleichungen kürzbar sind. Fällt dir etwa ein Beispiel im Bereich der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ ein?

c) Ob einzelne infinitesimale Zahlen kürzbar sind oder nicht, können wir mit den gegebenen Axiomen nicht entscheiden. (Sicherlich sind nicht alle infinitesimale Zahlen kürzbar, denn die Null ist ja auch eine infinitesimale Zahl.) Es gilt jedoch folgendes Prinzip der *Mikrokürzbarkeit*:

$$\text{Wenn } \varepsilon a = \varepsilon b \text{ für } \textit{alle } \varepsilon \text{ in } \Delta, \text{ dann } a = b.$$

Beweise dieses Prinzip! Dazu wirst du das Axiom der Mikroaffinität verwenden und eine geeignete Hilfsfunktion $f : \Delta \to \mathbb{R}$ definieren müssen.

5 Differentialrechnung mit infinitesimalen Zahlen

Die Ableitung von Funktionen können wir mit dem Axiom der Mikroaffinität deutlich leichter einführen.

Definition 5.1. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ eine Stelle. Dann heißt die eindeutig bestimmte Zahl b, für die für alle ε in Δ die Gleichung

$$f(x_0 + \varepsilon) = f(x_0) + b\varepsilon$$

gilt, die *Ableitung von f an der Stelle x_0*. Wir schreiben dann auch „$f'(x_0)$“ für diese Zahl b.

Abbildung **??** illustriert die Intuition hinter dieser Definition: In einer infinitesimalen Umgebung von x_0 sieht der Graph von f wie eine Gerade aus, nämlich genauer wie die Tangentialgerade durch den Punkt $(x_0|f(x_0))$. Also sieht auch der Term $f(x_0 + \varepsilon)$ wie der Term einer affinen Funktion aus: An der Stelle $\varepsilon = 0$ hat er den Wert $f(x_0)$, für andere infinitesimale ε weicht er von $f(x_0)$ um $b\varepsilon$ ab.

Wir werden die definierende Gleichung oft in folgender umgestellten Form verwenden:

$$f'(x_0) \cdot \varepsilon = f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0).$$

Die Definition ist nur dann sinnvoll, wenn garantiert ist, dass es eine solche Zahl b wirklich gibt und dass sie *eindeutig* ist, dass es also auch *nur* eine solche Zahl gibt. Daher müssen wir folgende Aufgabe bearbeiten.

Aufgabe 12. *Sinn der neuen Ableitungsdefinition*

Verwende das Axiom der Mikroaffinität, um zu zeigen, dass eine Zahl b wie in Definition 5.1 gibt und dass sie eindeutig ist. Dazu wirst du eine gewisse Hilfsfunktion $g : \Delta \to \mathbb{R}$ definieren müssen.

Die Definition offenbart übrigens ein weiteres Paradox: In klassischer Mathematik gibt es ja auch Funktionen, die nicht differenzierbar sind, etwa weil sie wie die Betragsfunktion Knickstellen besitzen (siehe Aufgabe 5). Hier aber ist *jede* Funktion differenzierbar! Auch dieses Paradox werden wir zu gegebener Zeit auflösen.

Wir haben jetzt die Technologie so weit entwickelt, um mit Hilfe infinitesimaler Zahlen Funktionen auf einfache Art und Weise ableiten zu können. Das wollen wir zunächst an der Quadratfunktion illustrieren.

Proposition 5.2. *Die Ableitung der Quadratfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ ist $f'(x) = 2x$.*

Beweis. Für alle ε in Δ gilt folgende Rechnung:

$$f'(x)\varepsilon = f(x + \varepsilon) - f(x) = \ldots \text{ siehe Aufgabe 8 } \ldots = 2x\varepsilon.$$

Da diese Rechnung für alle ε in Δ gilt, können wir nach dem Prinzip der Mikrokürzbarkeit (Aufgabe 11) die Behauptung folgern: $f'(x) = 2x$. ☐

Aufgabe 13. *Ableitung der Kubikfunktion II*

Leite nach demselben Muster wie in Proposition 5.2 die Kubikfunktion $x \mapsto x^3$ ab.

Aufgabe 14. *Ableitung der Kehrwertfunktion*

Sei $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x}$ die Kehrwertfunktion. Bestimme nach demselben Muster wie in Proposition 5.2 ihre Ableitung. Das Ergebnis sollte natürlich $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ sein.

Hinweis: Klammere $\frac{1}{x}$ aus. An einer Stelle wirst du die Vereinfachungsregel

$$\frac{1}{1+\frac{\varepsilon}{x}} = 1 - \frac{\varepsilon}{x}$$

benötigen.[5] Beweise diese Regel, indem du die Probe durchführst:

$$(1 + \tfrac{\varepsilon}{x}) \cdot (1 - \tfrac{\varepsilon}{x}) = \cdots = 1.$$

Aufgabe 15. *Ableitungsregeln*

In klassischer Mathematik sind die Summen-, Produkt- und Kettenregel sehr nützlich. Diese gibt es auch in synthetischer Differentialgeometrie. In dieser Aufgabe möchten wir sie mit Hilfe infinitesimaler Zahlen beweisen.

Seien also f und g Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeige:

a) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

b) $(fg)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

c) $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Tipp: Für die Summenregel lautet der Ansatz wie folgt:

$$(f+g)'(x) \cdot \varepsilon = (f+g)(x+\varepsilon) - (f+g)(x) = \\ [f(x+\varepsilon) + g(x+\varepsilon)] - [f(x) + g(x)] = \cdots .$$

Ferner solltest du keine Angst vor der Kettenregel haben. Die Schreibweise ist vielleicht etwas ungewohnt, der Ansatz ist aber ganz einfach:

$$(f \circ g)'(x) \cdot \varepsilon = f(g(x+\varepsilon)) - f(g(x)) = \cdots .$$

[5] Wie kommt man auf diese Regel? Ganz allgemein gibt es eine Formel für die *geometrische Reihe*: $\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Diese Formel gilt immer dann, wenn der Nenner $1-q$ invertierbar ist. Eine Variante der Formel gilt sogar ohne Einschränkungen: $(1-q) \cdot \sum_{i=0}^{n} q^i = 1 - q^{n+1}$. Wenn nun q so geartet ist, dass q^2 Null ist, vereinfacht sich diese Formel. Der Unterschied zur angegebenen Vereinfachungsregel ist dann nur noch ein Vorzeichen.

Abbildung 1 Auf infinitesimalen Umgebungen sind Funktionen affin.