



Zirkelzettel vom 30. November 2013

Aufgabe 1. Goldener Schnitt

Der *goldene Schnitt* ist die positive Lösung der quadratischen Gleichung

$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0.$$

- a) Stelle Φ als Wurzelausdruck dar.
- b) Weise folgende kuriose Beziehung nach: $\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$.
- c) Informiere dich über geometrische Interpretationen von Φ .

Aufgabe 2. Geometrische Reihe

Sei q eine beliebige Zahl.

- a) Beweise folgende Formel über eine endliche Summe von Potenzen von q :

$$q^0 + q^1 + q^2 + \dots + q^{n-2} + q^{n-1} + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Tipp: Multipliziere beide Seiten mit $(1 - q)$.

- b) Sei $0 \leq q < 1$. Mache folgende Formel über eine *unendliche Summe* plausibel:

$$q^0 + q^1 + q^2 + \dots = \frac{1}{1 - q}.$$

- c) Gilt diese Formel auch, wenn $-1 < q \leq 0$?
- d) Was passiert bei $q \geq 1$ oder $q \leq -1$?

Aufgabe 3. Conways Armee

Ein unendlich ausgedehntes Damebrett sei in zwei Hälften zerteilt (siehe Rückseite). Im unteren Teil darf man beliebig viele Damesteine platzieren. Ziel des Spiels ist es, einen Damestein möglichst hoch in das obere Spielfeld zu bringen. Dabei darf nur folgender Spielzug angewendet werden: Ein Stein darf einen (horizontal oder vertikal) benachbarten Stein überspringen, wenn das Zielfeld unbesetzt ist. Der übersprungene Stein wird dann aus dem Spiel entfernt.

- a) Mit wie vielen Steinen in der unteren Bretthälfte muss man beginnen, um Höhe 1, Höhe 2, Höhe 3 oder Höhe 4 über der Trennlinie zu erreichen?

Nun führen wir folgende *Bewertung* von Spielzuständen ein: Wenn ein Stein die Entfernung n zum angepeilten Zielstein hat, weisen wir ihm den Wert x^n zu. Dabei ist x eine Konstante, die wir später festlegen werden. Der angepeilte Zielstein selbst hat also den Wert $x^0 = 1$, seine vier unmittelbaren Nachbarn haben den Wert $x^1 = x$.

- b) Wie ändert sich die Summe der Steinwerte bei einem Vorwärts-, Rückwärts- oder Seitwärtszug?

Wir setzen nun $x := 1/\Phi$, wobei Φ der goldene Schnitt aus Aufgabe 1 ist.

- ★ c) Berechne den Gesamtwert einer *vollständig mit Steinen besetzten Zeile*, die sich eine Ebene unterhalb des Zielsteins befindet.
- ★ d) Was ist der Gesamtwert einer *vollständig besetzten unteren Bretthälfte*?
- ★ e) Folgere: Höhe 5 ist sogar mit unendlich vielen Steinen nicht erreichbar.
- ★ f) Implementiere Conways Armee im Computer, falls dir das Spaß macht.

