Практикум кафедры СКИ

Решение уравнения теплопроводности

Уравнение теплопроводности

Постановка задачи

Рассмотрим начально-краевую задачу на отрезке [0,1], т.е. требуется найти функцию u(t,x), удовлетворяющую уравнению, начальным и граничным условиям указанным ниже.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t,x)$$
$$u(0,x) = u_0(x)$$

Будем рассматривать два вида граничных условий:
I рода: $u(t, 0) = \varphi_1(t)$ $u(t,1) = \varphi_2(t)$
II рода: $u_x(t, 0) = \psi_1(t)$ $u_x(t,1) = \psi_2(t)$

На отрезке [0,1] зададим равномерную сетку по переменной x: $\Omega_h = \{mh;\ m = 0,...,M\}$ $(Mh = 1)$

Аналогично зададим равномерную сетку по переменной t: $\Omega_\tau = \{n\tau;\ n = 0,...,N\}$ $(N\tau = 1)$

τ и h называются параметрами дискретизации (шагами) по временнóй и пространственной переменной соответственно

Зададим численные функции на этих сетках (аналоги непрерывных функций).
Так обозначение v_m^n означает значение численной функции v в m-м узле сетки Ω_h на n-ом временном слое сетки Ω_τ. Для непрерывной функции u(t,x), данное обозначение означает: $u_m^n = u(n*\tau, m*h)$

Будем рассматривать три разностные схемы для численного решения исходного уравнения теплопроводности:

1) явная разностная схема:

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} = \frac{v_{m+1}^n - 2v_m^n + v_{m-1}^n}{h^2} + f(n\tau, mh)$$

2) неявная разностная схема:

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\tau} = \frac{v_{m+1}^{n+1} - 2v_m^{n+1} + v_{m-1}^{n+1}}{h^2} + f((n+1)\tau, mh)$$

3) схема Кранка-Николсона:

$$\frac{v_m^{n+1}-v_m^n}{\tau}=\frac{1}{2}\frac{v_{m+1}^{n+1}-2v_m^{n+1}+v_{m-1}^{n+1}}{h^2}+\frac{1}{2}\frac{v_{m+1}^n-2v_m^n+v_{m-1}^n}{h^2}+f\left((n+1/2)\tau, mh\right)$$

Начальные условия для всех схем задаются: $v_m^0 = u_0(m*h)$, m = 0,...,M.

Граничные условия для каждой из схем будем аппроксимировать следующим образом:

1) если это граничные условия I рода, то
$v_0^n = \varphi_1(\tau*n)$ $v_M^n = \varphi_2(\tau*n)$

2) если это граничные условия II рода, то
в случае явной схемы:

$$u_x(t,0)\approx\frac{-3v_0^n+4v_1^n-v_2^n}{2h}=\psi_1(n*\tau) \qquad u_x(t,1)\approx\frac{v_{M-2}^n-4v_{M-1}^n+3v_M^n}{2h}=\psi_2(n*\tau)$$

в случае неявной схемы или схемы Кранка-Николсона:

$$u_x(t,0)\approx\frac{v_1^n-v_0^n}{h}=\psi_1(n\tau) \qquad u_x(t,1)\approx-\frac{v_{M-1}^n-v_M^n}{h}=\psi_2(n\tau)$$

Во всех трех схемах нужно выразить решение на следующем временном слое v_m^{n+1} через решение на предыдущем слое v_m^n . Преимущества явной схемы в том, что это можно сделать достаточно легко, а в случае неявной схемы и схемы Кранка-Николсона для этого придется решать систему линейных уравнений. Однако недостатком явной схемы является устойчивость только при условии $\tau < h^2/2a^2$. В тоже время оставшиеся две схемы имеют безусловную устойчивость.

Порядок аппроксимации явной схемы с любыми граничными условиями будет $O(\tau + h^2)$, то есть, при уменьшении шага по времени τ в 4 раза, а шага по пространству h в 2 раза, ошибка аппроксимации (т.е. разница между точным решением дифференциального уравнения и численным решением, полученным по разностной схеме) уменьшится в 4 раза.
Порядок аппроксимации неявной схемы если заданы граничные условия I рода $O(\tau + h^2)$,
а если граничные условия II рода, то $O(\tau + h)$
У схемы Кранко-Николсона порядок аппрокимации $O(\tau^2 + h^2)$ для граничных условий I рода и $O(\tau^2 + h)$ для граничных условий II рода.

Для решения возникающей системы уравнений предлагается использовать метод прогонки.
Для этого соответствующую разностную схему и ее граничные условия представим в виде:
$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i$, i = 1,...,M-1, $y_0 = \chi_1 y_1 + \mu_1$, $y_M = \chi_2 y_{M-1} + \mu_2$ (здесь через y_i обозначено v_i^{n+1})

Тогда решение y_i (i = 0,..., M) можно найти по формулам:

$\alpha_{i+1} = B_i /(C_i - \alpha_i A_i)$, $\beta_{i+1} = (A_i \beta_i + F_i)/(C_i - \alpha_i A_i)$,   i = 1,....,M-1, $\alpha_1 = \chi_1$, $\beta_1 = \mu_1$

$y_M = (\mu_2 + \chi_2 \beta_M)/(1 - \chi_2 \alpha_M)$, $y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}$,   i = 0,....,M-1.

уравнение теплопроводности

Участники
Значки
Компетенции
Оценки
Общее
Тема 1
Тема 2
Тема 3
Решение уравнения теплопроводности
Задание 3
Тема 4

НАСТРОЙКИ

Управление курсом

Вы зашли под именем Михаил Тимошкин (Выход)
Практикум СКИ