Dynamika tuhých telies, definícia problému, rovnice pohybu (4 ODE), rýchlosť, zrýchlenie, uhľová rýchlosť a uhľové zrýchlenie, matica hybnosti (matica inercie)

Timotej Krajči, Peter Šulík

January 19, 2016

1 Tuhé teleso

Tuhé teleso je také, ktorého tvar sa nikdy počas simulácie nezdeformuje. Kvôli tuhosti je celkový pohyb telesa zložený z lineárneho pohybu ťažiska telesa a s rotácie telesa okolo svojho ťažiska.

2 Rovnice pohybu

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} c(t) \\ q(t) \\ P(t) \\ L(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(t) \\ \frac{1}{2}Q(t)\omega(t) \\ f(t) \\ \tau(t) \end{pmatrix}$$

$$v(t) = M^{-1}P(t)$$

$$\omega(t) = J(t)^{-1}L(t)$$

$$J^{-1} = R(t)J_0^{-1}R^T(t)$$

$$Q(t) = \begin{pmatrix} +q_w(t) & -q_z(t) & +q_y(t) \\ +q_z(t) & +q_w(t) & -q_x(t) \\ -q_y(t) & +q_x(t) & +q_w(t) \\ -q_x(t) & -q_y(t) & -q_z(t) \end{pmatrix}$$

2.1 Atribúty tuhých telies

1. Poloha
   a) Pozícia
$$c(t) \in \mathbb{R}^{3\times 1}$$
   b) Orientácia
$$q(t) \in \mathbb{R}^{4\times 1}$$
2. Pohyb
   a) Lineárna rýchlosť
$$v(t) \in \mathbb{R}^{3\times 1}$$
   b) Uhlová rýchlosť
$$\omega(t) \in \mathbb{R}^{3\times 1}$$
3. Zrýchlenia
   a) Lineárne zrýchlenie
$$a(t) \in \mathbb{R}^{3\times 1}$$
   b) Uhlové zrýchlenie
$$\alpha(t) \in \mathbb{R}^{3\times 1}$$
4. Rozloženie hmotnosti:
   a) Hmostnosť
$$M \in \mathbb{R}^{1\times 1}$$
   b) Inerčný tensor
$$J(t) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$
5. Hybnosti
   a) Lineárna hybnosť
$$P(t) \in \mathbb{R}^{3\times 1}$$
   b) Uhlová hybnosť
$$L(t) \in \mathbb{R}^{3\times 1}$$
6. Sily
   a) Sila
$$f(t) \in \mathbb{R}^{3\times 1}$$
   b) Krútiaci moment
$$c\tau(t) \in \mathbb{R}^{3\times 1}$$

3 Rýchlosť

Rýchlosť je deriváciou pozície podľa času:

$$v(t) = c'(t)$$

4 Zrýchlenie

Zrýchlenie je definované ako derivácia rýchlosti podľa času:

$$a(t) = v'(t) = (M^-1P)' = M^-1f$$

5 Uhlová rýchlosť

Uhľová rýchlosť je vektor, ktorý je rovnobežný s osou rotácie, ktorého dĺžka je rovná rýchlosti rotácie. Rýchlosť rotácie je počet radiánov otočenia okolo osi za sekundu.

$$q'(t) = \frac{1}{2}Q(t)\omega(t)$$

$$Q(t) = \begin{pmatrix} +q_w(t) & -q_z(t) & +q_y(t) \\ +q_z(t) & +q_w(t) & -q_x(t) \\ -q_y(t) & +q_x(t) & +q_w(t) \\ -q_x(t) & -q_y(t) & -q_z(t) \end{pmatrix}$$

6 Uhlové zrýchlenie

Uhľové zrýchlenie je definované ako derivácia uhľovej rýchlosťi v čase.

$$\alpha(t) = \omega'(t) = (J^{-1}L)' = J^{-1}L + J^{-1}L' = J^{-1}\omega \times J\omega + J^{-1}\tau$$

kde τ je krútiaci moment.

7 Matica hybnosti

Ak tuhé teleso pokladáme za množinu častíc s polohami p_i a hmotnosťami m_i tak tažisko telesa je definované ako:

$$c = \frac{\sum m_i p_i}{M}$$

$$M = \sum m_i$$

Relatívna poloha i-tej častice je potom $p_i = c + r_i$ a absolútna poloha je $p_i = c + Rr_{0i}$, kde R zodpovedá matici rotácie a r_{0i} je poloha i-tej častice na začiatku.
Inerčný tenzor potom vieme definovať ako:

$$J = -\sum m_i r_i^{times} r_i^{times} = \sum m_i \begin{pmatrix} r_{iy}^2 + r_{iz}^2 & -r_{ix}r_{iy} & -r_{ix}r_{iz} \\ -r_{iy}r_{iz} & r_{ix}^2 + r_{iz}^2 & -r_{iy}r_{iz} \\ -r_{iz}r_{ix} & -r_{iz}r_{iy} & r_{ix}^2 + r_{iy}^2 \end{pmatrix}$$

Označenie r × značí antisymetrickú maticu vektorového súčinu:

$$r^{\times} = \begin{pmatrix} 0 & -a_z & +a_y \\ +a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & +a_x & 0 \end{pmatrix}$$

Narozdieľ od hmotnosti je inerčný senzor závislý od času. Keďže teleso sa nikdy nede- formuje, môžeme výpočet inerčného tenzora iba na začiatku a jeho zmenu dopočítavat ’ pomocou matice rotácie:

$$J_0 = -\sum m_i r_{0i}^{\times} r_{0i}^{\times}$$

$$J = RJ_0R^T$$

$$J^{-1} = RJ_0^{-1}R^T$$