THÈME : NOMBRES ET CALCULS

Séquence 4 : Calcul littéral

A la fin de cette séquence je sais :	✓
- Identifier la structure d'une expression littérale (somme, produit) - Utiliser la propriété de distributivité simple pour développer un produit, factoriser une somme ou réduire une expression littérale. - Démontrer l'équivalence de deux programmes de calcul. - Tester si un nombre est solution d'une équation.	
Je connais :	✓
- La notion de variable - La formule du développement simple	

A. Le calcul littéral

1) Variables et inconnues

►Définition : Un calcul littéral, c'est une expression mathématique dans laquelle un ou plusieurs nombres sont remplacés par des lettres. Ces lettres s'apelle les variables (ou les inconnues dans une équation).

Exemple :

$x + 5$ est une expression mathématique dans laquelle je peux donner à la lettre x la valeur que je veux si rien ne m'est imposé. x est ici une variable

$x + 5 = 3$ est une expression mathématique dans laquelle le membre de gauche $x + 5$ doit être égal à 3. C'est une **équation**. Il n'y a ici qu'une seule valeur possible pour x. Dans le cas d'une équation, x est une inconnue

→ En informatique on utilise aussi des variables (vidéo).

2) Produits et sommes

Rappels : Une **somme** est le résultat d'une addition et un **produit** est le résultat d'une multiplication.
(Une différence est le résultat d'une soustraction et un quotient est le résultat d'une division.

Propriété : Dans une expression comportant plusieurs opérations, c'est l'opération effectuée en dernier qui donne la nature de l'expression (somme, produit, etc...)

Exemples

1) Dans $3 + 5 \times x$ l'opération effectuée en dernier est l'addition donc cette expression est une somme.

2) Dans $7 \times (2 \times x - 5)$ l'opération effectuée en dernier est la multiplication par 7 donc cette expression est un produit.

3) Règle d'écriture

► ***Convention d'écriture*** : Dans une expression littérale, on peut supprimer le $\times$ devant une lettre ou devant une parenthèse.

Exemple : $a \times 2 = 2 \times a = 2a$ $\qquad 3 \times (a + b) = 3\,(a + b) \qquad a \times b = ab$

B. Calcul avec des expressions littérales

1) Valeur d'une expression

→ Méthode : **Pour calculer la valeur d'une expression, il faut remplacer la variable par un nombre.**

Exemple

Calculons la valeur de l'expression A = 6t + 8 pour t = 3.
A = 6t + 8 = 6×3 + 8 = 18 + 8 = 26 pour t = 3

Exemple : Le périmètre d'un rectangle de longueur L et de largeur l peut s'écrire $2 \times (L + l)$. C'est une expression littérale.

Si $L = 3\ cm$ et $l = 1\ cm$, on peut calculer le périmètre : $2(3+1) = 8$ cm
Si $L = \frac{3}{2}\ cm$ et $l = \frac{1}{2}\ cm$, on peut calculer le périmètre : $2(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}) = 2\times 2 = 4$ cm

Une expression littérale peut aussi permettre d'exprimer un programme de calcul.

Exemple

Choisir un nombre
Ajouter 3
Multiplier le résultat par 6

Si on désigne par x le nombre de départ, le résultat du programme de calcul s'écrit : $(x+3)\times 6$
$6(x+3)$

2) Expressions différentes

→ Calculer la valeur d'une expression nous permet de prouver que deux expressions sont différentes en trouvant un contre-exemple.

Exemple

On se demande si les expressions B = $2x$ + 3 et C = $5(x - 3)$ sont égales.
On va calculer chacune de ces expressions pour x = 5 :

$B = 2x + 3$ $B = 2\times 5 + 3$ $B = 13$ pour $x = 5$	$C = 5(x - 3)$ $C = 5(5 - 3)$ $C = 5\times 2$ $C = 10$ pour $x = 5$

Pour x = 5, B = 13 et C = 10
Or 13 ≠ 10
Donc 5 est un contre-exemple qui nous permet de dire que $2x + 3 \neq 5(x - 3)$

Attention : cette méthode ne permet pas de prouver que deux expressions sont égales pour toute valeur de x !

Exemple

Pour x = 6 on a $2x + 3 = 5(x - 3) = 15$ et pourtant comme nous le venons de le voir, ces deux expressions ne sont pas égales pour x = 5.
Donc les expressions $2x + 3$ et $5(x - 3)$ ne sont pas égales pour toutes les valeurs de x.

3) Vérifier si un nombre est solution d'une équation

$2x^2 - 5 = x + 10$ est une équation où l'inconnue est notée x.

→ Cette équation a deux **membres** : $2x^2 - 5$ et $x + 10$

Les solutions de l'équation $2x^2 - 5 = x + 10$ sont les valeurs de x pour lesquelles l'égalité $2x^2 - 5 = x + 10$ est vérifiée.

Exemple : on se demande si 3 est une solution de l'équation $2x^2 - 5 = x + 10$

→ Méthode :
- On calcule **séparément** pour x = 3 la valeur des membres $2x^2 - 5$ et $x + 10$

$2x^2 - 5 = 2 \times 3^2 - 5 = 18 - 5 = 13$ $\qquad$ $x + 10 = 3 + 10 = 13$

On constate que pour x = 3, on a bien égalité entre les deux membres $2x^2 - 5 = x + 10$
Donc x = 3 est **solution** de l'équation $2x^2 - 5 = x + 10$

→ Si, pour une valeur de x donnée, il n'y a pas égalité entre les deux membres de l'équation, alors cette valeur de x n'est pas solution de l'équation.

C. La distributivité simple

1) La commutativité

Propriété : Quels que soient les nombres ou expressions a ou b, on a : $a \times b = b \times a$

Exemples : **Réduire** les produits

$x \times 3 = 3x$ $\qquad$ $4x \times 7 = 4 \times 7 \times x = 28x$ $\qquad$ $-2x \times 7x = -2 \times 7 \times x \times x = 14x^2$

2) La distributivité simple

Propriété de la distributivité simple : La multiplication est distributive par rapport à l'addition et la soustraction. Cela revient à dire que : quels que soient les nombres relatifs k, a et b

sens "développer"

$$k \times (a + b) = k \times a + k \times b$$

sens "factoriser"

► **Définitions**

→ Développer une expression littérale c'est transformer un produit en somme (ou en différence).

→ Factoriser une expression, c'est transformer une somme en produit.

D. Utilisations de la distributivité

1) Développer

Quels que soient les nombres relatifs k, a et b :

Formule	Formule réduite	Commutativité
$k \times (a + b) = k \times a + k \times b$	$k(a + b) = ka + kb$	$ka + kb = k(a+b)$
$k \times (a - b) = k \times a - k \times b$	$k(a - b) = ka - kb$	$ka - kb = k(a-b)$

Exemples : **Développer** les expressions suivantes :

$A = 3(x - 4)$

$A = 3 \times x - 3 \times 4$

$A = 3x - 12$

$B = (2x + 4)\, x$

$B = x(2x+4)$

$B = x \times 2x + x \times 4$

$B = 2x^2 + 4x$

$C = -5x(3 + 2x)$

$C = -5x \times 3 + (-5x) \times 2x$

$C = -15x - 10x^2$

2) Factoriser

Pour factoriser une expression, on utilise la distributivité dans l'autre sens :

$\boxed{k \times a + k \times b = k \times (a + b)}$ ou encore $ka + kb = k(a+b)$

Il faut donc trouver un nombre en commun dans chaque terme : le facteur "k" pour ensuite le mettre en facteur devant les parenthèses. Parfois il peut être un peu caché !

Exemple : **Factoriser** les expressions suivantes :

$A = 3 \times x + 3 \times 5$

$A = 3 \times (x+5)$

$A = 3(x+5)$

$B = 6\,x + 24$

$B = 6 \times x + 6 \times 4$

$B = 6 \times (x+4)$

$B = 6(x+4)$

$C = 2\,x\,y - 3\,x$

$C = x \times 2y - x \times 3$

$C = x(2y-3)$

$D = y - 9y^2$

$D = y \times 1 - y \times 9y$

$D = y(1-9y)$

$E = 2x^2 + 8x$

$E = 2 \times x^2 + 2 \times 4x$

$E = 2(x^2 + 4x)$

$\boxed{\begin{array}{l} E = 2x \times x + 2x \times 4 \\ E = 2x(x+4) \end{array}}$

$E = x \times 2x + x \times 8$

$E = x(2x+8)$

E. Réduire des expressions littérales

1) Définition

► Définition : Réduire une expression littérale c'est l'écrire sous la forme d'une expression ayant le moins de termes possibles.

2) Implications

a) Regrouper les termes semblables

→ Réduire revient donc à dire que l'on "regroupe" les termes semblables : les x^2 *avec les* x^2, *les* x *avec les* x, les nombres avec les nombres...

Exemples **: Réduire** les sommes.

$A = 3a + 5a$

$A = 8a$

$B = -2x^2 + 6x^2$

$B = 4x^2$

$C = 5x^2 + 6x + 9 - 2x^2 + 3x - 5$

$C = 5x^2 - 2x^2 + 6x + 3x + 9 - 5$

$C = 3x^2 + 9x + 4$

$D = 3a \times 5a$

$D = 15a^2$

b) Développer les parenthèses

→ Cela veut aussi dire qu'il faut développer pour ne plus avoir de parenthèses.

Exemples **: Réduire** les expressions suivantes.

$D = 4(x + 3) - 2x$

$D = 4 \times x + 4 \times 3 - 2x$

$D = 4x + 12 - 2x$

$D = 2x + 12$ ✓

$E = 3 + (x - 4) - 2x$

$E = 3 + x - 4 - 2x$

$E = 1x - 2x + 3 - 4$

$E = -x - 1$ ✓

$F = -3 - (x + 2)$

$F = -3 - x - 2$

$F = -x - 5$ ✓

c) Cas particulier

Cas particulier de la distributivité : quels que soient les nombres relatifs a et b, *on a :*

$-(a + b) = -a - b$ *et* $+(a + b) = a + b$

→Démonstrations:

$$-(a + b) = -1 \times (a + b) = -1 \times a + (-1) \times b = -a + (-b) = -a - b$$
$$+(a + b) = +1(a + b) = 1 \times a + 1 \times b = a + b$$

Exemples **: Développer** les expressions suivantes:

$A = 3 - (x - 4)$

$A = 3 - x - (-4)$

$A = 7 - x$

$B = x + (2x + 4)$

$B = x + 2x + 4$

$B = 3x + 4$

$C = 5x - (-3 + 2x)$

$C = 5x - (-3) - 2x$

$C = 3x + 3$