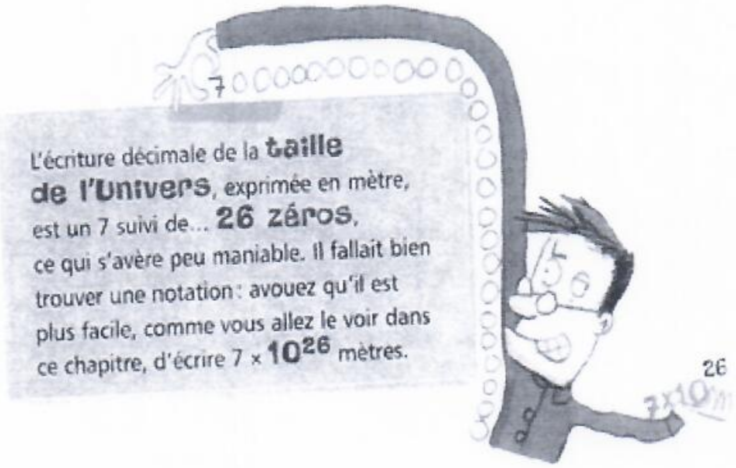
THÈME : NOMBRES ET CALCULS

Séquence 3 : Puissances de 10

A la fin de cette séquence je sais :	✓
- Utiliser les puissances de 10 d'exposants positifs et négatifs - Utiliser les préfixes de nano à giga - Utiliser les puissances de 10 pour comparer des nombres - Associer à des objets des ordres de grandeur en lien avec d'autres disciplines - Utiliser l'écriture scientifique	
Je connais :	✓
- Les préfixes de nano à giga	

A. Pourquoi une nouvelle notation ?



La taille d'une molécule est environ un cent millionième de mètre. Celle d'une cellule environ un cent millième de mètre. Écrire cela sous la forme d'une fraction demande beaucoup de temps... C'est pour s'éviter une peine inutile que les mathématiciens ont inventé la notation par les puissances de 10. La paresse oblige parfois à réfléchir...

Voici 8 objets de notre univers :

Associer à chaque objet un ordre de grandeur parmi les suivants :

0,0000000001 m 5

15 milliards de km 8

500000000 milliards de km 3

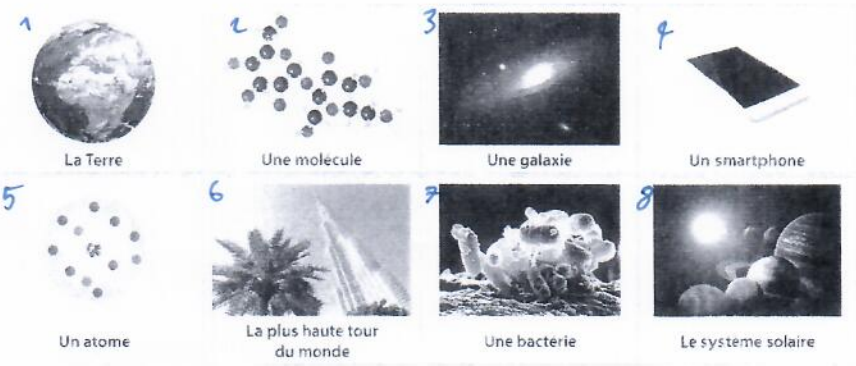
14 cm 4

0,000000001 m 2

12750 km 1

828 m 6

0,000002 m 7



La dose journalière recommandée en Sélénium est de 850 μg par jour soit 0,00085 g. Si j'oublie un zéro dans l'écriture de la posologie : 0,0085 g ; je multiplie par 10 la dose de Sélénium ingérée par mon patient ce qui risque d'entraîner des douleurs abdominales et de vomissements.

Nous avons donc besoin d'une notation plus simple, éliminant les sources d'erreurs !

B. Puissance entière d'un nombre relatif

1) Puissances positives

Exemples :

4^5 est un nombre. Il se lit "*4 puissance 5*" ou "*4 exposant 5*". 4^5 est égal à $\underbrace{4\times4\times4\times4\times4}_{5 \text{ facteurs } 4}$

$(-2)^3$ se lit " *-2 puissance 3*" ou "*-2 exposant 3*" et $(-2)^3$ est égal à $(-2)\times(-2)\times(-2) = -8$

$\left(\frac{4}{3}\right)^2$ se lit « *quatre tiers exposant deux* » et $\left(\frac{4}{3}\right)^2$ est égal à $\frac{4}{3}\times\frac{4}{3} = \frac{4\times4}{3\times3} = \frac{16}{9}$

► **Définition** : Pour a un nombre relatif non nul, et n un nombre entier positif non nul, a^n est le produit de n facteurs tous égaux à a : $a^n = \underbrace{a\times a\times\ldots\times a}_{n \text{ facteurs}}$

→ **Ne pas confondre** $(-2)^4$ **et** -2^4

En effet, $(-2)^4 = (-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2) = 16$ alors que $-2^4 = -2\times2\times2\times2 = -16$

→ **Cas particuliers:** $a^1 = a$ a^2 se lit *a* au carré a^3 se lit *a* au cube $a^0 = 1$

Exemples :

1) $5\times5\times5 = 5^3 = 125$ $(-3)^4 = 81$ $0{,}1^2 = 0{,}1\times0{,}1 = 0{,}01$

2) Puissances négatives

a) Notion d'inverse

► **Définition** : deux nombres sont inverses l'un de l'autre si leur produit est égal à 1.

Ainsi a et $\frac{1}{a}$ sont inverses l'un de l'autre car $a\times\frac{1}{a} = \frac{a}{a} = 1$

Exemples :

L'inverse de 6 est $\frac{1}{6}$. L'inverse de 2^4 est $\frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$

L'inverse de $\frac{1}{4}$ est 4. L'inverse de $\frac{1}{4^5}$ est $4^5 = 1024$

b) Notation en puissances négatives

Les puissances négatives vont nous permettre de manipuler facilement les inverses en simplifiant l'écriture.

▶ Définition : Pour a un nombre relatif non nul et n un nombre entier **positif** non nul,

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Exemple : Calculons

$2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16} = 0{,}0625$ et $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125} = 0{,}008$

$\frac{1}{4\times4\times4\times4\times4} = 4^{-5}$ $\qquad \frac{1}{(-5)\times(-5)\times(-5)} = (-5)^{-3}$

C. Les puissances de 10

1) Calcul d'une puissance de 10

▶ Propriété : Soit n un nombre entier positif non nul.

Alors $10^n = 10 \times 10 \times \ldots \times 10 = 1\underbrace{00\ldots000}_{n \text{ zéros}}$ et $10^{-n} = \frac{1}{10^n} = \underbrace{0{,}00\ldots0001}_{n \text{ zéros en tout}}$

Exemples :

En puissance de dix	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^0	10^2	10^3	10^6	10^9
En chiffres	0,001	0,01	0,1	1	100	1 000	1 000 000	1 000 000 000
En lettres	Un millième	Un centième	Un dixième	Une unité	Une centaine	Un millier	Un million	Un milliard

2) Calcul avec les puissances de 10

▶ Propriétés : Soient m et n sont des nombres entiers relatifs.

$10^m \times 10^n = 10^{m+n}$ $\qquad \frac{10^m}{10^n} = 10^{m-n}$ $\qquad (10^m)^n = 10^{m\times n}$

Exemples : Ecrire sous la forme 10^n où n est un nombre entier relatif :

$10^9 \times 10^4 = 10^{13}$

$10^{-3} \times 10^5 = 10^2$

$\frac{10^8}{10^5} = 10^3$

$\frac{10^3}{10^{-9}} = 10^{12}$

$(10^3)^7 = 10^{21}$

$(10^4)^{-5} = 10^{-20}$

$\frac{10^2 \times 10^{-3}}{10^5} = 10^{-6}$

3) Préfixes scientifiques les plus courants

On utilise des préfixes pour simplifier le nom et l'écriture des mesures exprimées en puissance de dix de certaines unités.

Préfixe	téra	giga	méga	kilo	unité	milli	micro	nano
Symbole	T	G	M	k		m	µ	n
10^n	10^{12}	10^9	10^6	10^3	$10^0 = 1$	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}

Exemples :

1 Mo = 10^6 o $= 1\,000\,000$ o .... o = octet

1 ms = 10^{-3} s $= 0{,}001$ s

1 µg = 10^{-6} g $= 0{,}000001$ g

4) Multiplication par une puissance de 10

Calculer $34{,}456 \times 10^2$ puis $37{,}1 \times 10^{-3}$

→ Méthode : multiplier par une puissance de 10

- Multiplier un nombre par 10^n revient à décaler la virgule de *n* rangs vers la droite (on complète par des zéros si nécessaire).

- Multiplier un nombre par 10^{-n} revient à décaler la virgule de *n* rangs vers la gauche (on complète par des zéros si nécessaire).

Exemples :

Ecrire sous forme décimale les nombres suivants :

$0{,}042\,8 \times 10^5 =$ 4280

$42\,800 \times 10^{-1} =$ 4280

$4{,}28 \times 10^3 =$ 4280

$0{,}428 \times 10^4 =$ 4280

D. La Notation scientifique

1) Définition

► Définition : La notation scientifique d'un nombre positif est l'unique écriture de la forme $a \times 10^n$ dans laquelle :
a est un nombre décimal compris entre 1 et 10 exclu ($1 \leq a < 10$)
n est un nombre entier relatif

Exemples

La masse de la lune est d'environ : 73 600 000 000 000 000 000 000 kg.

La masse d'un atome de fer est d'environ : 0,000 000 000 000 000 000 000 000 093 5 kg.

Donner l'écriture scientifique de la masse de la Lune puis, celle d'un atome de fer.

L'écriture scientifique de la masse de la lune est : $7{,}36 \times 10^{22}$ kg

L'écriture scientifique de la masse de l'atome de fer est : $9{,}35 \times 10^{-26}$ kg

2) Utilisation

→ La notation scientifique peut permettre notamment de donner un ordre de grandeur, de comparer des nombres, d'avoir des encadrements, de simplifier les écritures …

a) Comparaison de nombres

→ Méthode : comparer des nombres

- On les met en écriture scientifique, puis on observe les puissances de 10.
- Les nombres sont à ranger dans le même ordre que les exposants (si on classe dans l'ordre croissant)
- Et si les exposants sont égaux, on compare les nombres décimaux de la formule.

Exemples :

1) Ranger ces nombres dans l'ordre croissant :

$7{,}25 \times 10^4$; $4{,}7 \times 10^5$; $\cancel{14{,}1 \times 10^{-3}}$; $\cancel{10{,}49 \times 10^{-2}}$; 3×10^5 ; $2{,}259 \times 10^4$

$1{,}41 \times 10^{-2}$ $1{,}49 \times 10^{-1}$

$1{,}41 \times 10^{-2} < 1{,}49 \times 10^{-1} < 2{,}259 \times 10^4 < 7{,}25 \times 10^4 < 3 \times 10^5 < 4{,}7 \times 10^5$

Vidéo : notation scientifique et ordre de grandeur

b) Ordre de grandeur

► Rappel : un ordre de grandeur est une valeur approchée du résultat calculée en remplaçant les nombres du calcul par des nombres proches et permettant un calcul plus simple.

$65{,}7 \times 4{,}1 \rightarrow 65 \times 4 = 260$. Un ordre de grandeur du produit $65{,}7 \times 4{,}1$ est 260.

Quand on travaille avec des nombres très grands ou très petits, on donne alors la définition suivante de l'ordre de grandeur.

► Définition : l'ordre de grandeur d'un nombre, c'est la puissance de 10 la plus proche de ce nombre.

Soit $a \times 10^n$ un nombre en écriture scientifique avec n un nombre entier relatif.

Si $a < 5$ alors l'ordre de grandeur du nombre est 10^n

Si $a \geq 5$ alors l'ordre de grandeur du nombre est 10^{n+1}

→ Méthode : déterminer un ordre de grandeur

→ Donnons un premier ordre de grandeur du produit : $152000 \times 0{,}000000658$

Ce que je fais	Ce que j'écris
J'écris les nombres en écriture scientifique.	$152\,000 = 1{,}52 \times 10^5$ $0{,}000\,000\,658 = 6{,}58 \times 10^{-7}$
Je détermine la puissance de 10 la plus proche pour chaque nombre	$1{,}52 \times 10^5$ donc un ordre de grandeur est 10^5 car $1{,}52 < 5$ $6{,}58 \times 10^5$ donc un ordre de grandeur est $10^{-7+1} = 10^{-6}$ car $6{,}58 > 5$
J'effectue le produit des puissances de 10 pour trouver l'ordre de grandeur.	$10^5 \times 10^{-6} = 10^{-1} = 0{,}1$

→ On peut affiner cet ordre de grandeur en procédant de la sorte : $152000 \times 0{,}000000658$

152 000 = $1{,}52 \times 10^5$ donc un ordre de grandeur est 2×10^5

0,000000658 = $6{,}58 \times 10^{-7}$ donc un ordre de grandeur est 7×10^{-7}

Donc un ordre de grandeur du produit est $2 \times 10^5 \times 7 \times 10^{-7} = 14 \times 10^{-2} = 0{,}14$ pas intéressant ici

Complément : ***Préfixe du système international de notation : de nano à giga***

Nombre décimal	*Puissance de 10*	*Nom*	*Préfixe*	*Notation*	*Exemple*
1 000 000 000 000	10^{12}	Billion	Téra	T	
1 000 000 000	10^9	Milliard	Giga	G	64 Go : mémoire de tablette
1 000 000	10^6	Million	Méga	M	10 à 36 mégapixels : (Mpx) Résolution appareil photo.
1 000	10^3	Mille	Kilo	k	42,2 km : longueur d'un marathon
100	10^2	Cent	Hecto	h	1 hm^2 est 1 hectare
10	10	Dix	Déca	da	Décanewton (daN) : unité de force du système international
0,1	10^{-1}	Dixième	Déci	d	2dL de lait pour un gâteau
0,01	10^{-2}	Centième	Centi	c	20 cm : longueur de la règle de l'écolier
0,001	10^{-3}	Millième	Milli	m	375 mg de magnésium recommandés par jour
0,000 001	10^{-6}	Millionième	Micro	µ	800 µg de sélénium recommandés par jour
0,000 000 001	10^{-9}	Milliardième	Nano	n	0,1 nm est le diamètre de l'atome d'hélium
0,000 000 000 001	10^{-12}	Billionième	Pico	p	
0,000000000 000 001	10^{-15}		Femto	f	