THÈME : NOMBRES ET CALCULS

Séquence 6 : Opérations sur les nombres en écritures fractionnaires

A la fin de cette séquence je sais :	✓
- Comparer, ranger et encadrer des nombres rationnels (positifs ou négatifs) - Calculer avec les nombres rationnels : addition, soustraction, multiplication, division. - Utiliser l'inverse pour calculer. - Résoudre des problèmes avec des nombres rationnels.	
Je connais :	✓
- La définition de l'inverse d'un nombre - Les règles de calcul avec des écritures fractionnaires	

A. Diviseur, multiple - Rappels

$18 = 6 \times 3$ donc on dit que :

- 18 est un multiple de 6
- 18 est divisible par 6
- 6 est un diviseur de 18

Remarques:

→ 1 est un diviseur de tous les nombres entiers

→ Un nombre entier (sauf 0) est toujours divisible par lui-même

B. Fractions

1) Vocabulaire

a) Ecriture fractionnaire et fractions

► **Définition** : Soient a et b deux nombres décimaux avec b non nul (c'est-à-dire $b \neq 0$).
Le quotient de a par b est le nombre qui, multiplié par b, donne a. On le note a ÷ b

→ **Exemple** : $6 \div 2 = 3$ et $3 \times 2 = 6$

Numérateur

• On peut aussi l'écrire $\frac{a}{b}$ On parle alors de l'écriture fractionnaire du quotient $a \div b$.

Dénominateur

• Si a et b sont des nombres entiers, on dit que $\frac{a}{b}$ est une fraction

→**Exemples** : l'écriture fractionnaire du quotient de -10 par 8 est $\frac{-10}{8}$. Son écriture décimale est $-1,25$

On a bien : $(-1,25) \times 8 = -10$

L'écriture fractionnaire du quotient de 23 par 6 est $\frac{23}{6}$. On ne peut pas donner de valeur décimale car le résultat est un nombre infini !

Donc on ne peut donner qu'une valeur décimale **approchée** du résultat : $\frac{23}{6} \approx 3,83$

b) Les nombres rationnels

Dans ce chapitre, nous ne travaillerons qu'avec des nombres rationnels. C'est-à-dire des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme d'une fraction de deux nombres entiers.

Exemples : $6, \frac{1}{3}, -3,56$ ...

Ce n'est pas le cas pour tous les nombres, nous en reparlerons…

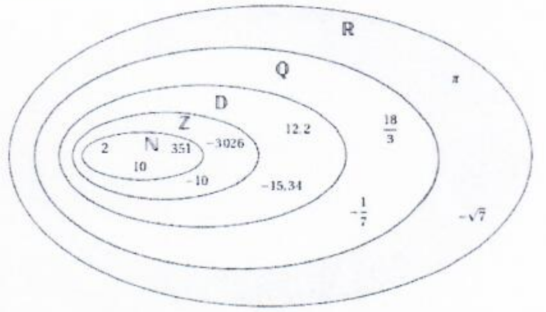

Illustration : représentation usuelle des ensembles de nombres. Nous avons déjà évoqué les nombres entiers, les nombres relatifs et les nombres décimaux cette année.

2) Signe d'une écriture fractionnaire

A retenir: $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$ et $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$

3) Quotients égaux

►Propriété : On ne modifie pas la valeur d'un quotient si on multiplie (ou si on divise) le numérateur ET le dénominateur par un même nombre relatif non nul

Autrement dit : si a, b et k sont des nombres relatifs avec $b \neq 0$ et $k \neq 0$ alors :

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k} = \frac{a \div k}{b \div k}$$

Exemples : Simplifier : $\frac{8}{12} = \frac{4 \times 2}{4 \times 3} = \frac{2}{3}$ $\qquad \frac{8}{12} = \frac{8 \div 4}{12 \div 4} = \frac{2}{3}$

Remarque : *Cette propriété est utilisée pour simplifier des fractions ou pour mettre des fractions au même dénominateur dans le but de les comparer ou de les ajouter*

Rappel : *pour simplifier une fraction, on peut aussi utiliser la décomposition en produit de facteurs premiers :* Simplifier au maximum $\frac{270}{60} = \frac{2\times3\times3\times3\times5}{2\times2\times3\times5} = \frac{9}{2}$

C. Comparaison de fractions

1) Réduction au même dénominateur

Réduire deux fractions au même dénominateur c'est les transformer afin que leur dénominateur soit commun.
Cela peut parfois être simple et rapide :

→ Exemple 1 : Je veux mettre les fractions suivantes au même dénominateur $\frac{3}{2}$ et $\frac{7}{6}$

$\frac{3\times3}{2\times3} = \frac{9}{6}$ en multipliant le numérateur ET le dénominateur de la première fraction par 3, mes deux fractions sont désormais au même dénominateur.

→ Exemple 2 :

Je souhaite réduire les quotients $\frac{2}{9}$ et $\frac{5}{12}$ au même dénominateur.

Ce que je fais	*Ce que j'écris*
Je cherche un multiple commun non nul aux dénominateurs de mes deux fractions (le plus petit possible)	Multiples de 9 : 9, 18, 27, 36, 45, 54... Multiples de 12 : 12, 24, 36, 48, 60... Le plus petit multiple commun de 9 et 12 est 36.
Je transforme mes fractions afin que leur dénominateur soit 36	$\frac{2}{9} = \frac{2\times4}{9\times4} = \frac{8}{36}$ et $\frac{5}{12} = \frac{5\times3}{12\times3} = \frac{15}{36}$

→ Exemple 3 : réduire au même dénominateur $\frac{11}{7}$ et $\frac{4}{3}$

Multiples de 7 : 7, 14, 21, 28
Multiples de 3 : 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21
Le plus petit multiple commun de 7 et 3 est 21

$\frac{11}{7} = \frac{11\times3}{7\times3} = \frac{33}{21}$ $\frac{4}{3} = \frac{4\times7}{3\times7} = \frac{28}{21}$

2) Comparaison de fractions

La méthode précédemment décrite est un outil clef pour comparer des fractions :

→ Exemple 1 : Je souhaite comparer les quotients $\frac{2}{7}$ et $\frac{3}{8}$.

Je vais mettre ces fractions au même dénominateur afin de les comparer.
Le plus petit multiple commun ici est $7 \times 8 = 56$.

Ainsi on écrira : $\frac{2\times8}{7\times8} = \frac{16}{56}$ et $\frac{3\times7}{8\times7} = \frac{21}{56}$ Par suite $\boxed{\frac{21}{56} > \frac{16}{56} \quad \text{donc} \quad \frac{3}{8} > \frac{2}{7}}$

Remarque : il est parfois possible de comparer des fractions sans passer par cette méthode :

$\frac{3}{6}$ et $\frac{7}{4}$ $\frac{3}{6} < \frac{7}{4}$

$\frac{27}{13}$ et $\frac{27}{15}$ $\frac{27}{13} > \frac{27}{15}$

$\frac{7}{4} > 1$ et $\frac{3}{6} < 1$

D. Addition et soustraction d'écritures fractionnaires

► Propriété : pour ajouter (ou soustraire) des écritures fractionnaires, il faut d'abord les mettre au même dénominateur. Ensuite on ajoute (ou on soustrait) les numérateurs et on garde le dénominateur en commun.

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b} \qquad \textbf{et} \qquad \frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$$

Exemples : Calculer **et donner le résultat sous forme simplifiée**.

$A=\frac{3}{5}+\frac{13}{5}$

$A=\frac{16}{5}$

$B=\frac{-10}{9}+\frac{25}{9}$

$B=\frac{15}{9}=\frac{3\times 5}{3\times 3}=\frac{5}{3}$

$C=\frac{23}{7}-\frac{9}{7}$

$C=\frac{14}{7}=2$

$D=\frac{4}{3}+\frac{1}{6}$

$D=\frac{4\times 2}{3\times 2}+\frac{1}{6}$

$D=\frac{8}{6}+\frac{1}{6}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$

$E=\frac{11}{6}-\frac{5}{8}$

$E=\frac{11\times 4}{6\times 4}-\frac{5\times 3}{8\times 3}$

$E=\frac{44}{24}-\frac{15}{24}=\frac{29}{24}$

$F=\frac{-2}{7}+\frac{4}{-21}$

$F=\frac{-2\times 3}{7\times 3}-\frac{4}{21}=\frac{-6}{21}-\frac{4}{21}=\frac{-10}{21}$

$G=2-\frac{3}{4}$

$G=\frac{2}{1}-\frac{3}{4}=\frac{8}{4}-\frac{3}{4}=\frac{5}{4}$

$H=\frac{5}{4}-\frac{1}{-7}$

$H=\frac{5\times 7}{4\times 7}+\frac{1\times 4}{7\times 4}=\frac{35}{28}+\frac{4}{28}=\frac{39}{28}$

E. Multiplication d'écritures fractionnaires

1) Méthode

► Propriété : pour multiplier des écritures fractionnaires, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$$

On ne met pas les fractions au même dénominateur lorsqu'on les multiplie !

Exemples : calculer et donner le résultat sous forme simplifiée

$A=-\frac{3}{4}\times\frac{7}{2}$

$A=-\frac{3\times 7}{4\times 2}$

$A=-\frac{21}{8}$

$B=\frac{35}{13}\times\frac{26}{15}$

$B=\frac{7\times\cancel{5}\times 2\times\cancel{13}}{\cancel{13}\times 3\times\cancel{5}}$

$B=\frac{14}{3}$

$C=-4\times\frac{-9}{5}$

$C=\frac{4\times 9}{5}$

$C=\frac{36}{5}$

Remarques:

→ S'occuper du signe en premier avant de démarrer le calcul permet d'éviter les erreurs.

→ Penser à simplifier AVANT de faire les multiplications.

2) Calculer une fraction d'un nombre

▶ Propriété : Pour calculer une fraction d'une quantité (ou d'un nombre), on **multiplie** la fraction par cette quantité (ou ce nombre). (Le « de » français est traduite par $\times$)

Exemples :

- Florian boit les deux tiers d'une canette de soda de 33 centilitres. Quelle quantité de soda a-t 'il bue ?

$\frac{2}{3} \times 33 = \frac{2 \times 11 \times \cancel{3}}{\cancel{3}} = 22$ cL Il a bu 22 cL de soda

- Youna a mangé les $\frac{3}{7}$ des $\frac{2}{5}$ d'une tarte aux pommes. Quelle fraction de la tarte a-t-elle mangée ?

$\frac{3}{7} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{35}$ Elle a mangé $\frac{6}{35}$ de la tarte de son papa chéri.

- Je décide de dépenser 20% des 350 euros économisés l'an dernier pour m'offrir un cadeau. Quelle somme vais-je dépenser ?

$\frac{20}{100} \times 350 = 70$€ Je vais dépenser 70€.

F. Divisions d'écritures fractionnaires

1) Inverse d'un nombre

▶ Définition : deux nombres sont inverses l'un de l'autre si leur produit est égal à 1.
Ainsi a et $\frac{1}{a}$ sont inverses l'un de l'autre car $a \times \frac{1}{a} = \frac{a}{a} = 1$

→ Exemple : $2 \times 0{,}5 = 1$ donc 2 est l'inverse de $\frac{1}{2}$ et 0,5 est l'inverse de 2

▶ Propriété : a et b sont des nombres relatifs avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

L'inverse de a est $\frac{1}{a}$

L'inverse de $\frac{a}{b}$ est $\frac{b}{a}$

Zéro est le seul nombre qui n'a pas d'inverse

→ Exemples : L'inverse de $\frac{2}{3}$ est $\frac{3}{2}$ L'inverse de -3 est $\frac{1}{-3}$

Ne pas confondre inverse et opposé d'un nombre : l'opposé de 7 est -7. L'inverse de 7 est $\frac{1}{7}$.

2) Divisions d'écritures fractionnaires

► Propriété : Diviser par un nombre relatif non nul revient à multiplier par son inverse.........

Pour a, b, c et d des nombres relatifs non nuls, on a :

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$ ou encore $$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

Exemples : calculer et donner le résultat sous forme simplifiée.

$A = \frac{4}{7} : \frac{3}{5}$	$B = -8 : \frac{5}{3}$	$C = -\frac{4}{9} : \left(-\frac{2}{7}\right)$	$D = \frac{\frac{3}{4}}{-\frac{7}{9}}$	$E = \frac{\frac{3}{4}}{-6}$
$A = \frac{4}{7} \times \frac{5}{3}$	$B = -8 \times \frac{3}{5}$	$C = -\frac{4}{9} \times \left(-\frac{7}{2}\right)$	$D = \frac{3}{4} \times \left(-\frac{9}{7}\right)$	$E = \frac{3}{4} \times \left(-\frac{1}{6}\right)$
$A = \frac{20}{21}$	$B = \frac{-24}{5}$	$C = \frac{14}{9}$	$D = -\frac{27}{28}$	$E = -\frac{1}{8}$