Exercice 8.2

Dans l'énoncé, on a la densité suivante : $f(x) = e^{-\sqrt{x}} I_{[0,+\infty[}$
et on cherche sa fonction de répartition.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_0^x e^{-\sqrt{t}} dt$$

en faisant le changement de variable : $t = \sqrt{x}$

$$dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \longrightarrow dx = 2t\,dt$$

$$\Rightarrow F(x) = 2\int_0^{\sqrt{x}} t e^{-t} dt = -2\int_0^{\sqrt{x}} t(-e^{-t})dt$$

en faisant une intégration par partie avec $u = t$ $\quad v' = -e^{-t}$

$$\int uv' = [uv] - \int u'v$$

$$\Rightarrow F(x) = -2\left([te^{-t}]_0^{\sqrt{x}} - \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t} dt\right)$$

$$F(x) = -2\left(\sqrt{x}\, e^{-\sqrt{x}} - [-e^{-t}]_0^{\sqrt{x}}\right)$$

$$F(x) = -2\left(\sqrt{x}\, e^{-\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}} - 1\right)$$

$$F(x) = 2\left(1 - (1+\sqrt{x})e^{-\sqrt{x}}\right)$$

on a donc $F(0) = 0$

$F(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$

et F est croissante

Exercice 9.1

L'algorithme [A 33] est :

Two-stage Gibbs sampler

$X_0 = x_0$

for $i = 1, 2 \ldots$ generate

1. $Y_t \sim f_{Y|X}(\cdot|x_{t-1})$
2. $X_{t+1} \sim f_{X|Y}(\cdot|y_t)$

a) On va montrer que $(X_i), (Y_i)$ et (X_i, Y_i) sont des chaînes de Markov

Dans l'algorithme, on a $Y_t \sim f_{Y|X}(\cdot|x_{t-1})$

$X_t \sim f_{X|Y}(\cdot|y_t)$

Ainsi à chaque instant t, X_t et Y_t ne dépendent que Y_{t-1} et X_{t-1}

de même le couple (X_t, Y_t) ne dépend que (X_{t-1}, Y_{t-1}) et pas de $X_{t-2}, Y_{t-2}, X_{t-3}, Y_{t-3}$

donc $(X_t), (Y_t)$ et (X_t, Y_t) sont des chaînes de Markov

b) On va montrer que $f_X(\cdot)$ et $f_Y(\cdot)$ sont les densités invariantes de X et Y

Le noyau de transition de X_t est : $K(x, x^*) = \int_y f_{Y|X}(y|x) f_{X|Y}(x^*|y) dy$

On calcule la quantité : $\int_X K(x, x^*) f_X(x) dx$

$$= \int_X \int_y f_{Y|X}(y|x) f_{X|Y}(x^*|y) f_X(x) dy\, dx$$

$$= \int_y f_{X|Y}(x^*|y) dy \int_X f_{Y|X}(y|x) f_X(x) dx$$

d'après la formule de Bayes, on a : $f_{X,Y}(x, y) = f_{Y|X}(y|x) f_X(x)$

donc $\int_X K(x, x^*) f_X(x) dx = \int_y f_{X|Y}(x^*|y) \int_X f_{X,Y}(x, y) dx\, dy$

$$= \int_y f_{XY}(x^*, y) dy = f_X(x^*)$$

donc $f_X(\cdot)$ est bien une densité invariante de X_t

de même pour $f_Y(\cdot)$, on montre $f_Y(\cdot)$ est bien une densité invariante de Y_t, de façon symétrique au cas précédent.

Exercice 9.18 $\quad X|y \sim \mathcal{N}(\rho y, 1-\rho^2) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} e^{-\frac{(x-\rho y)^2}{2(1-\rho^2)}}$

$$Y|x \sim \mathcal{N}(\rho x, 1-\rho^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} e^{-\frac{(y-\rho x)^2}{2(1-\rho^2)}}$$

a) $K(x^*, x) = \int f_{X|Y}(x|y)\, f_{Y|X}(y|x)\, dy$

$$= \int \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}}_{\text{indépendant de } y} e^{-\frac{(x-\rho y)^2}{2(1-\rho^2)}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}}_{\text{indépendant de } y} e^{-\frac{(y-\rho x^*)^2}{2(1-\rho^2)}}\, dy$$

$$= \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)} \int e^{-\frac{(x-\rho y)^2}{2(1-\rho^2)}} e^{-\frac{(y-\rho x)^2}{2(1-\rho^2)}}\, dy.$$

b) $f \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$\int K(x, x^*) f(x^*)\, dx^* = \int \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)} \int e^{-\frac{(x-\rho y)^2}{2(1-\rho^2)}} e^{-\frac{(y-\rho x^*)^2}{2(1-\rho^2)}} dy \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^{*2}}{2}} dx^*$$

$$= \iint e^{\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(x^2 - 2\rho y x + \rho^2 y^2 + y^2 - 2x^2 y\rho + \rho^2 x^2\right)} dy\, e^{-\frac{x^{*2}}{2}} dx^* \frac{1}{(2\pi)^{3/2}(1-\rho^2)}$$

$$= \iint e^{-\left(\frac{1+\rho^2}{2(1-\rho^2)}\left(y^2 - 2y\frac{\rho(y+x^*)}{\rho^2+1} + \left(\frac{\rho(x+x^*)}{\rho^2+1}\right)^2\right)\right)} dy\, e^{\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)(\rho^2+1)}\left((\rho^2+1)(x^2+\rho^2 x^{*2}) - \rho^2(x+x^*)^2\right)\right)} e^{-\frac{x^{*2}}{2}} dx^* \frac{1}{(2\pi)^{3/2}(1-\rho^2)}$$

$$= \int e^{-\frac{1}{2(1-\rho^4)}\left(x^{*2} - 2xx^*\rho^2 + x^2\rho^4 - x^2\rho^4 + x^2\right)} dx^* \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^4)}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$= \int e^{-\frac{1}{2(1-\rho^4)}\left((x^* - \rho^2 x)^2\right)} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^4)}\left(-x^2\rho^4 + x^2\right)} dx^* \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^4)}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

densité loi normale $(\rho^2 x, 1-\rho^4)$

$$= 1 \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^4)}\left(-x^2\rho^4 + x^2\right)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

densité loi normale $(0,1)$

donc f est invariant.

c) $(x-\rho y)^2 + (y-\rho x^*)^2 = (1+\rho^2)y^2 - 2y(\rho x + \rho x^*) + x^2 + \rho(x^*)^2$

$$= (1+\rho^2)\left(y^2 - 2y\frac{\rho x + \rho x^*}{1+\rho^2} + \left(\frac{\rho x + \rho x^*}{1+\rho^2}\right)^2\right) - \frac{(\rho x + \rho x^*)^2}{1+\rho^2} + \frac{x^2 + \rho^2 x^2 + \rho^2 x^{*2} + \ldots}{1+\rho^2}$$

$$= (1+\rho^2)\left(y - \frac{\rho x + \rho x^*}{1+\rho^2}\right)^2 + \frac{1}{1+\rho^2}(x - \rho^2 x^*)^2$$

9 18 suite

En utilisant cette expression dans la formule de la partie a.

$$K(x,x^*) = \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)} \int e^{-\frac{1}{2}\frac{1+\rho^2}{1-\rho^2}\left(y-\frac{\rho x+\rho x^*}{1+\rho^2}\right)} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\rho^2x^*)^2}{(1-\rho^2)(1+\rho^2)}} dy.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\rho^2x^*)^2}{1-\rho^4}} \int \sqrt{\frac{1+\rho^2}{2\pi(1-\rho^2)}} e^{-\frac{1}{2}\frac{1+\rho^2}{1-\rho^2}\left(y-\frac{\rho x+\rho x^*}{1+\rho^2}\right)^2} dy$$

densité la normale

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\rho^2x^*)^2}{1-\rho^4}}$$

donc $X|x^* \sim \mathcal{N}(\rho^2 x^*, 1-\rho^4)$

d) d'après b) et c), on a $X_k = \rho^2 X_{k-1} + U_k$

d'où en sommant $X_k = \rho^{2k} X_0 + \sum_{i=0}^{k-1} U_{k-i}\rho^{2i}$ avec $\sum_{i=0}^{k-1} U_{k-i}\rho^{2i}$ indépendant de X_0

donc $\mathrm{cov}(X_k, X_0) = \mathrm{cov}(\rho^{2k}X_0, X_0) = \rho^{2k}\,\mathrm{var}(X_0) = \rho^{2k}$

comme $\rho < 1$ on a $\rho^{2k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

donc $\mathrm{cov}(X_k, X_0) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

Exercice 10.7 $\quad X|\theta \sim \mathcal{N}(\theta,1) \qquad \theta \sim \mathcal{N}(\theta_0,1)$

$$K(\theta,\theta') = \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{1+\eta}{2\pi}} \exp\left(-\left(\theta' - \frac{\theta_0 \eta}{1+\eta}\right)^2 \frac{1+\eta}{2}\right) \left(\frac{1+(\theta-\theta_0)^2}{2}\right)^{\nu} \frac{\eta^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} \exp\left(-\frac{\eta}{2}\left(1+(\theta-\theta_0)^2\right)\right) d\eta$$

on va minorer le terme $\exp\left(-\left(\theta' - \frac{\theta_0\eta}{1+\eta}\right)^2 \frac{1+\eta}{2}\right)$ par un terme ne dépendant que partiellement de η afin de le sortir de l'intégrale

Commençons par minorer $-\left(\theta' - \frac{\theta_0\eta}{1+\eta}\right)^2 \frac{1+\eta}{2}$ qui permettra de majorer le terme précédent puisque l'on compose par exp.

$$-\left(\theta' - \frac{\theta_0\eta}{1+\eta}\right)^2 \frac{1+\eta}{2} = \left(-\theta'^2 + \frac{2\theta'\theta_0\eta}{1+\eta} - \frac{\theta_0^2\eta^2}{(1+\eta)^2}\right)\frac{1+\eta}{2}$$

$$= -\theta'^2 \frac{1+\eta}{2} + \theta'\theta_0\eta - \frac{\theta_0^2\eta^2}{2(1+\eta)}$$

$$= -\frac{\theta'^2}{2} - \eta\frac{\theta'^2}{2} + \theta'\theta_0\eta - \frac{\theta_0^2\eta^2}{2(1+\eta)}$$

$$-\left(\theta' - \frac{\theta_0\eta}{1+\eta}\right)^2 \frac{1+\eta}{2} - \left(-\frac{1}{2}\theta' - \frac{\eta}{2}(\theta'-\theta_0)^2\right) = \cancel{-\frac{\theta'^2}{2}} \cancel{- \eta\frac{\theta'^2}{2}} + \theta'\theta_0\eta - \frac{\theta_0^2\eta^2}{2(1+\eta)} - \left(-\frac{1}{2}\theta'^2 - \frac{\eta}{2}\left(\theta'^2 \cancel{-2\theta'\theta_0} + \theta_0^2\right)\right)$$

$$= \frac{-\theta_0^2\eta^2}{2(1+\eta)} + \frac{\theta_0^2\eta^2}{2}$$

or $1+\eta \geq 1$ car $\eta \in [0;+\infty[\implies \frac{\theta_0^2\eta^2}{2} \geq \frac{\theta_0^2\eta^2}{2(1+\eta)}$

$$\implies -\left(\theta' - \frac{\theta_0\eta}{1+\eta}\right)^2 \frac{1+\eta}{2} - \left(-\frac{1}{2}\theta' - \frac{\eta}{2}(\theta'-\theta_0)^2\right) \geq 0$$

$$\implies -\left(\theta' - \frac{\theta_0\eta}{1+\eta}\right)^2 \frac{1+\eta}{2} \geq -\frac{1}{2}\theta' - \frac{\eta}{2}(\theta'-\theta_0)^2$$

$$\implies \exp\left(-\left(\theta' - \frac{\theta_0\eta}{1+\eta}\right)^2 \frac{1+\eta}{2}\right) \geq \exp\left(-\frac{1}{2}\theta' - \frac{\eta}{2}(\theta'-\theta_0)^2\right) = e^{-\frac{\theta'^2}{2}} e^{-\frac{\eta}{2}(\theta-\theta_0)^2}$$

indépendant de η, on peut sortir intég

de plus $\sqrt{1+\eta} \geq 1$, donc on peut le minorer dans l'expression $K(\theta,\theta')$

$$\implies K(\theta,\theta') \geq \left(\frac{1+(\theta-\theta_0)^2}{2}\right)^{\nu} \frac{e^{-\frac{\theta'^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^{\infty} \eta^{\nu-1} \exp\left(-\left(1+(\theta-\theta_0)^2+(\theta'-\theta_0)^2\right)\frac{\eta}{2}\right) d\eta$$

en sortant tous les termes indépendants de η de l'intégrale.

Nous allons maintenant minorer $\int_0^\infty \underbrace{\eta^{\nu-1}}_{u} \underbrace{\exp\left(-\left(1+(\theta-\theta_0)^2+(\theta'-\theta_0)^2\right)\frac{\eta}{2}\right)}_{v'} d\eta$

Commençons par calculer l'intégrale, en faisant ν-1 fois une intégration par partie

En faisant une intégration par partie on a :

$$\int_0^\infty \eta^{\nu-1} \exp\left(-\left(1+(\theta-\theta_0)^2+(\theta'-\theta_0)^2\right)\frac{\eta}{2}\right) d\eta = \underbrace{\left[\eta^{\nu-1} \frac{2\exp\left(-\left(1+(\theta-\theta_0)^2+(\theta'-\theta_0)^2\right)\frac{\eta}{2}\right)}{\left(1+(\theta-\theta_0)^2+(\theta'-\theta_0)^2\right)}\right]_0^\infty}_{=0} - \int_0^\infty \eta^{\nu-2} \frac{(\nu-1)\exp(\dots\dots)2}{[1+(\theta-\theta_0)^2+(\theta'-\theta_0}$$

En le faisant ν-1 fois, on a:

$$\int_0^\infty \eta^{\nu-1} \exp\left(-\left(1+(\theta-\theta_0)^2+(\theta'-\theta_0)^2\right)\frac{\eta}{2}\right) d\eta = (\nu-1)!\, \frac{2^{\nu-1}}{\left(1+(\theta-\theta_0)^2+(\theta'-\theta_0)^2\right)^{\nu-1}} \int_0^\infty \exp\left(-\left(1+(\theta-\theta_0)^2+(\theta'-\theta_0)^2\right)\frac{\eta}{2}\right) d\eta$$

$$= (\nu-1)!\, \frac{2^{\nu}}{\left(1+(\theta-\theta_0)^2+(\theta'-\theta_0)^2\right)^{\nu}} \cdot 1$$

or $\Gamma(1) = 1$ et $\Gamma(\nu) = (\nu-1)\Gamma(1)$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \eta^{\nu-1} \exp\left(-\left(1+(\theta-\theta_0)^2+(\theta'-\theta_0)^2\right)\frac{\eta}{2}\right) d\eta = \frac{2^\nu\, \Gamma(\nu)}{\left(1+(\theta-\theta_0)^2+(\theta'-\theta_0)^2\right)^{\nu}}$$

On minore cette expression :

$$\int_0^\infty \eta^{\nu-1} \exp\left(-\left(1+(\theta-\theta_0)^2+(\theta'-\theta_0)^2\right)\frac{\eta}{2}\right) d\eta \geq \frac{2^\nu\, \Gamma(\nu)}{\left(1+(\theta-\theta_0)^2\right)^{\nu} + \left(1+(\theta'-\theta_0)^2\right)^{\nu}}$$

ce qui permet de simplifier l'expression de $K(\theta, \theta')$

$$\Rightarrow K(\theta,\theta') \geq \left[1+(\theta'-\theta_0)^2\right]^{-\nu} \frac{e^{-\frac{\theta'^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$$