**信号与系统——MATLAB综合实验**

图像处理实验报告

学号：2019011008

无92 刘雪枫

2021年9月7日

目录

# 实验目的

# 实验平台

# 目录结构

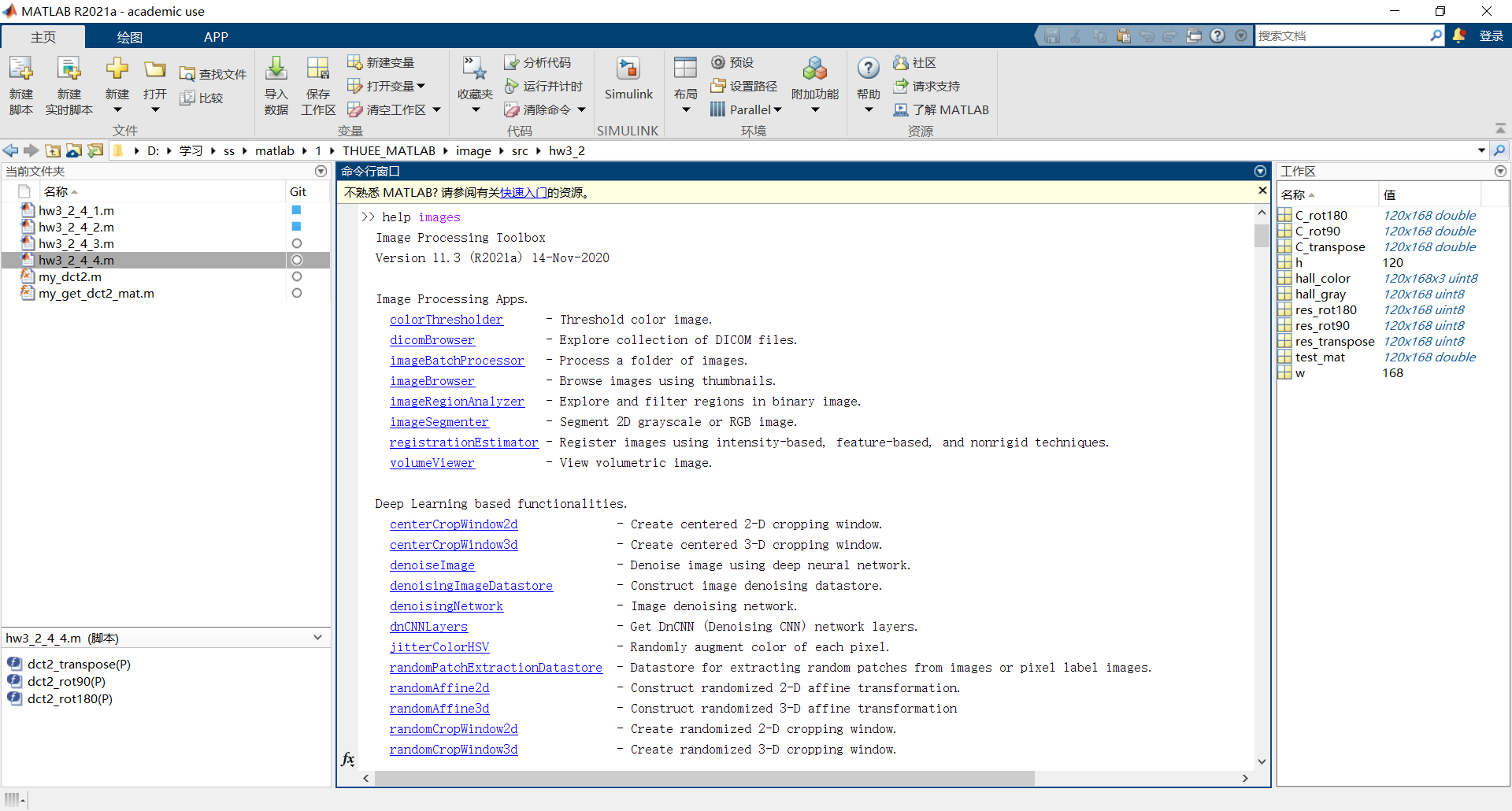
# 实验原理

# 实验内容

## 彩色图像

### MATLAB图像处理工具箱

在MATLAB中输入指令：help images，显示出很多图像处理函数：



接下来我们将利用这些图像处理函数进行实验

### 彩色图像绘制

要以图像的中心点为圆心画圆，需要将圆上的点的RGB值中的R值设为255，G和B均设为0。我们以长和宽的最小值的一半为半径，半径的0.95倍为内径画圆，关键代码为：

circle = hall\_color;

dist = (row\_idxs - (h+1)/2).^2 + (col\_idxs - (w+1)/2).^2;

radius = min(h/2, w/2)^2;

is\_in\_circle = dist <= radius & dist > 0.95 \* radius;

draw\_r\_circle = cat(3, is\_in\_circle, logical(zeros(size(is\_in\_circle))), logical(zeros(size(is\_in\_circle))));

draw\_gb\_circle = cat(3, logical(zeros(size(is\_in\_circle))), is\_in\_circle, is\_in\_circle);

circle(draw\_r\_circle) = uint8(255);

circle(draw\_gb\_circle) = uint8(0);

最后将其用imwrite函数绘制成位图，得到：



同样我们在图像上绘制棋盘。我们将棋盘的每一格的边长设置为10像素，把每个像素的横纵坐标分别除以10并取整得到的值对2的模作逻辑同或运算，结果为真则将RGB均设为0，则可以得到棋盘的效果：



本问题的完整代码位于文件hw3\_1\_3\_2.m中，得到的两个图片文件为该图片文件为hw3\_1\_3\_2\_circle.bmp和hw3\_1\_3\_2\_chess\_board.bmp。

## 图像压缩编码

### 变换域改变直流分量

预处理时，先将灰度值减去128。实际上，这个过程也可以变换域进行。由于离散余弦变换具有线性性，因此两个矩阵的离散余弦变换之和等于两个矩阵和的离散余弦变换。矩阵减去128就相当于原矩阵与元素全为128的矩阵相减，因此结果等于原矩阵的离散余弦变换减去全为128的矩阵的离散余弦变换。注意到全为128的矩阵只有直流分量，因此它的离散余弦变换只有左上角的元素非零，其余全是零。因此，只需要将原矩阵进行离散余弦变换，再把左上角元素减去一个数字即可。取hall\_gray的左上角的8\*8的部分进行验证，关键代码如下：

test\_mat = double(hall\_gray(1:8, 1:8));

C1 = dct2(test\_mat - 128);

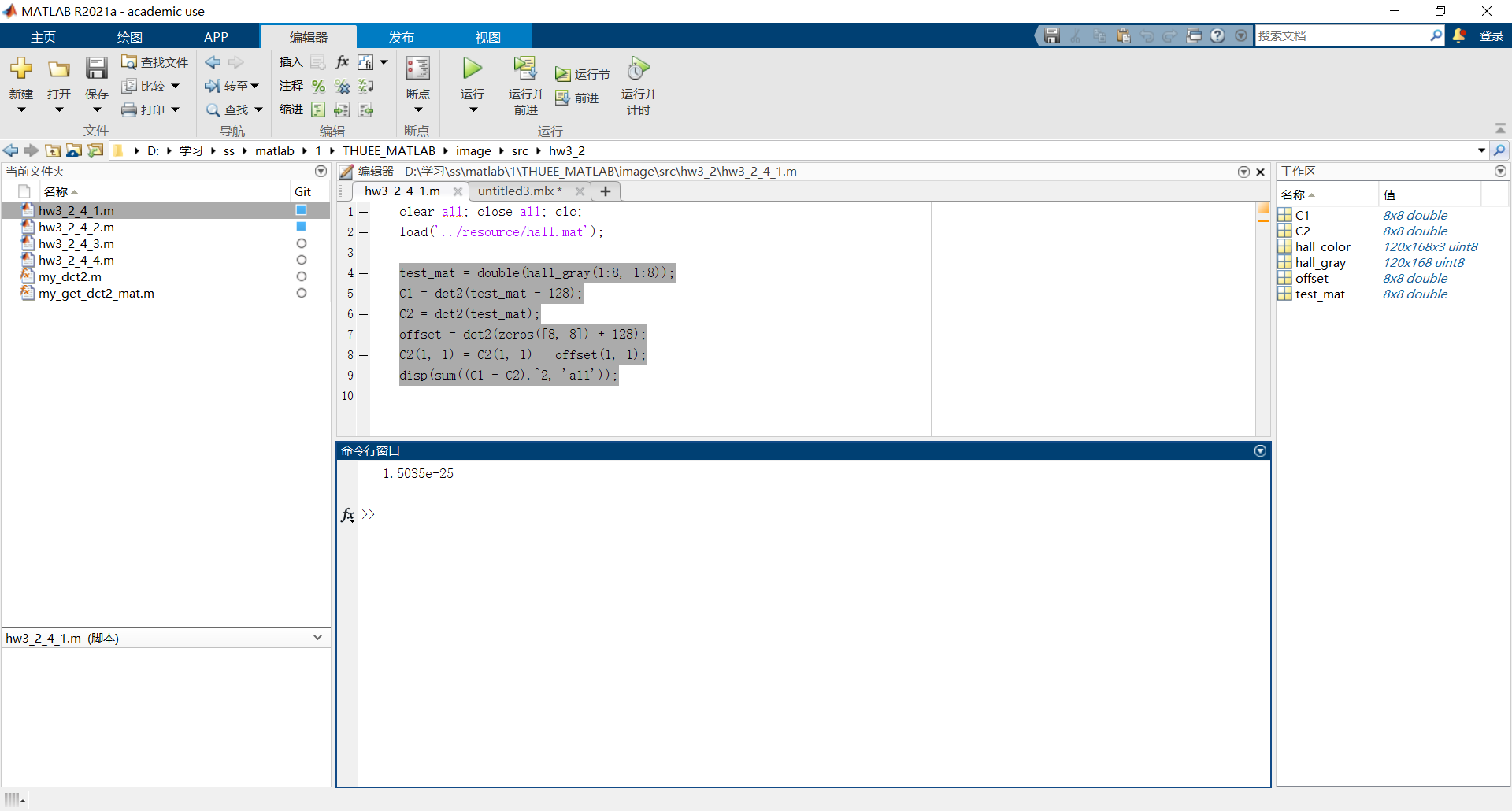
C2 = dct2(test\_mat);

offset = dct2(zeros([8, 8]) + 128);

C2(1, 1) = C2(1, 1) - offset(1, 1);

disp(sum((C1 - C2).^2, 'all'));

程序最后输出用两种方式计算的离散余弦变换之间的误差，误差采用各个元素误差的平方之和进行度量，程序输出结果如下：



可以看到，两种方法得到的离散余弦变换相差很小，几乎为零，这也验证了上述方法的正确性。本题完整代码位于文件hw3\_2\_4\_1.m中。

### 二维DCT的实现

要实现二维DCT，首先要计算DCT的变换矩阵。我将其封装为函数my\_get\_dct2\_mat，位于文件my\_get\_dct2\_mat.m。该函数接收一个整数N作为参数。返回大小为N的方阵D。该函数的关键代码如下：

D = (zeros([N - 1, N]) + [1 : 1 : N-1]') .\* [1 : 2 : 2\*N-1];

D = sqrt(2 / N) \* [zeros(1, N) + sqrt(1/2); cos(D \* pi / (2\*N))];

然后编写DCT变换函数，封装为函数my\_dct2，位于my\_dct2.m文件中。在实验过程中我注意到，虽然课件中介绍的DCT是均为方阵进行DCT，但是我注意到MATLAB提供的dct2函数的输入参数不必为方阵。因此，我对非方阵的DCT进行了猜想与推导。后面我利用我自己编写的函数与MATLAB提供的函数进行对照，可以证明我的写法是正确的。

按照离散余弦变换的定义，我编写的函数的关键代码如下：

function C = my\_dct2(P)

[h, w] = size(P);

C = my\_get\_dct2\_mat(h) \* double(P) \* my\_get\_dct2\_mat(w)';

end

下面对函数进行验证。仍然取hall\_gray的左上角8\*8的矩阵进行验证，验证代码如下：

test\_mat = double(hall\_gray(1:8, 1:8)) - 128;

res\_std = dct2(test\_mat);

res\_test = my\_dct2(test\_mat);

disp('res\_std: ');

disp(res\_std);

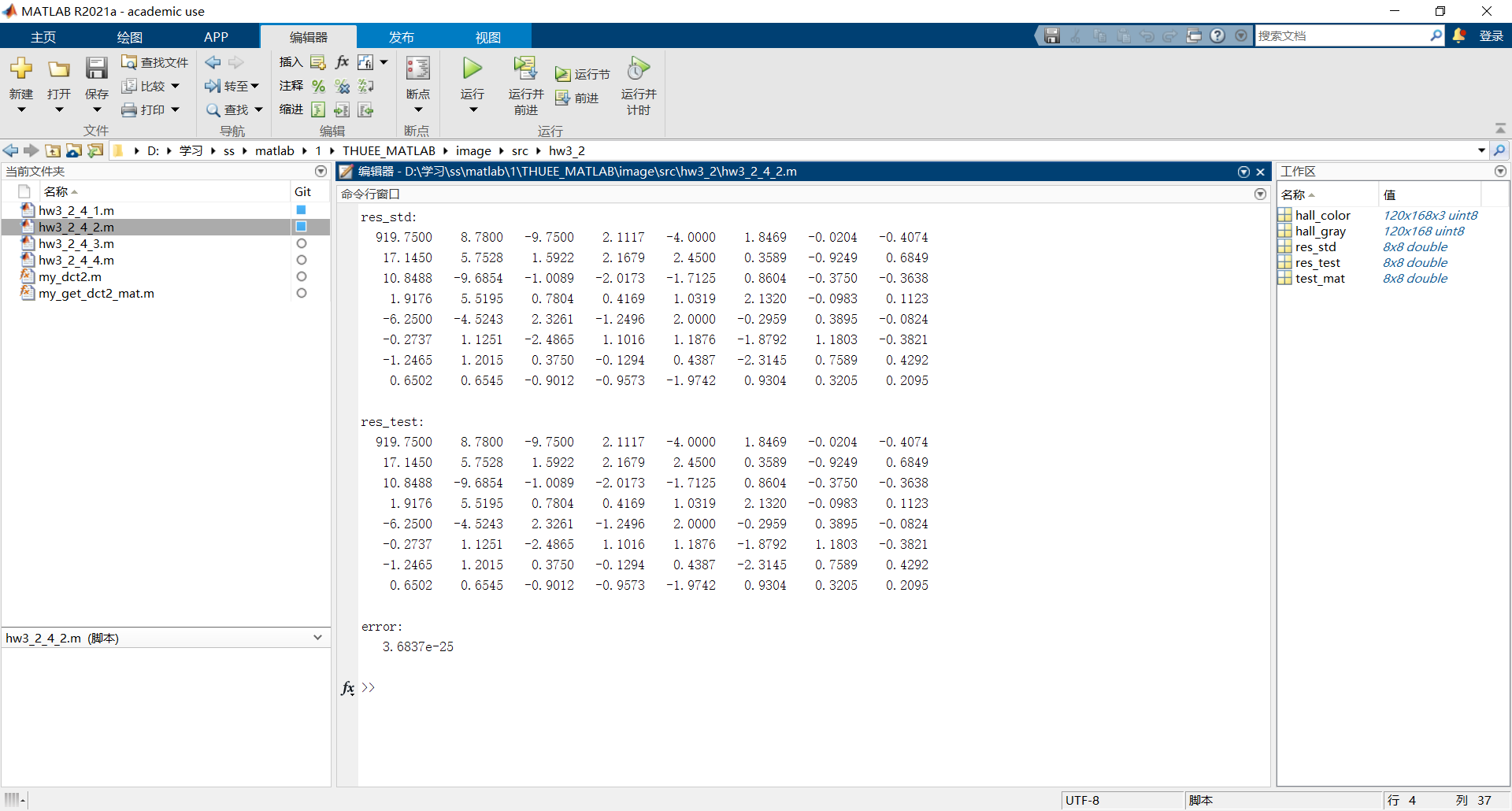
disp('res\_test: ');

disp(res\_test);

disp('error: ');

disp(sum((res\_std - res\_test).^2, 'all'));

分别打印出MATLAB给出的dct2函数的结果以及我自己编写的函数的结果，并计算误差：



可以看到两者的结果几乎完全一致，平方误差接近于零。这也验证了我自己编写的函数的正确性。本题完整代码位于文件hw3\_2\_4\_2.m中。

### 将系数矩阵部分置零

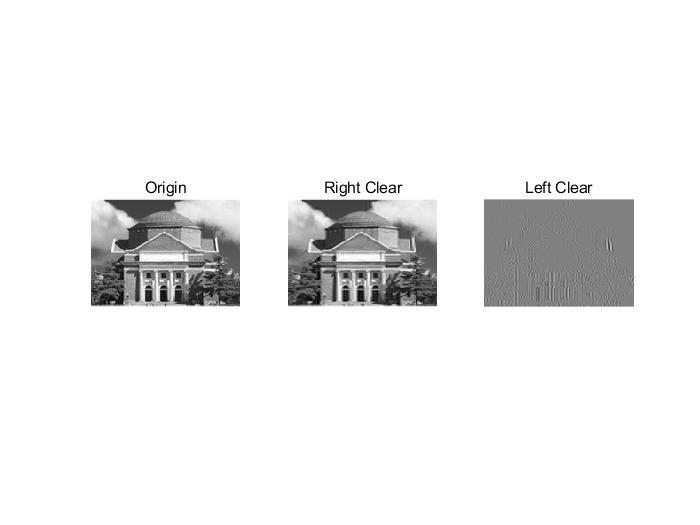
将灰度图每8个像素进行分块，每个块分别将DCT变换尔达右边四列和左边四列置零，再逆变换为图像。

由于离散余弦变换的系数矩阵中，左上角的元素代表直流和低频分量，左下角的元素代表纵向变化的高频分量，右上角的元素代表横向变化的高频分量，右下角的元素代表横向和纵向变化的高频分量。因此做出猜测：

将右侧置零，对图片整体影响不大，因为直流和低频的分量并没有受到过多的影响。但是由于横向的高频分量有所减弱，所以图片可能在横向上的色彩变化稍显模糊，但是不会过多地影响观感，因为图像的高频分量本来就比较小。

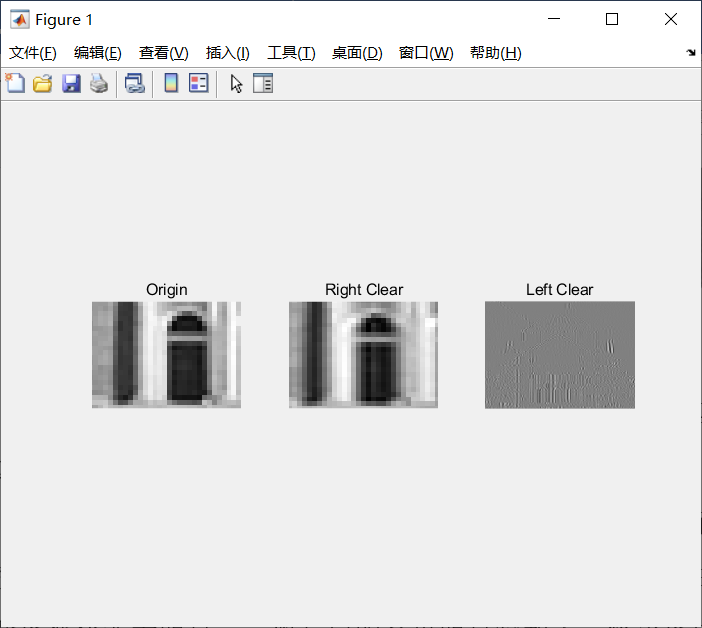
但是若将左侧四列元素置零，则会有很大的影响，因为低频分量被置为了零，所以图片原来的颜色平缓变化的部分消失了，而且图像的低频分量本来就比较大，且人眼对低频分量更敏感，因此图片质量可能严重受损。此外，由于左下角代表的是纵向变化的低频分量，因此图像纵向的灰度变化会降低；但是横向高频分量得到了很好的保留，因此图片可能会在横向上有明显的色彩变化，结果是造成图片上出现一条一条的纵向纹理。

整张图片处理结果如下：

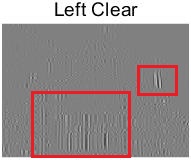


其中，左侧图为原图，中间的图为将每个小块的右侧四列置零得到的图，右边的图为将每个小块的左侧四列置零得到的图片。

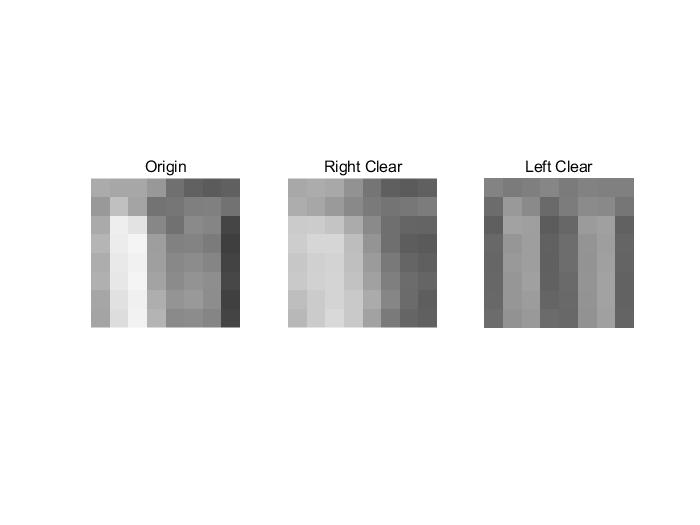
可以看到，将右侧清零得到的图片与原图差别不大，而且确实出现了轻微的横向的重影：在礼堂的大门与门之间的柱子处由黑突然转白，即存在高频分量，此处变化尤为明显——黑与白的交界明显缓和了。将该处放大查看效果更佳：



至于清除左边的四列，可以看到得到的图片已经基本上面目全非了，并且图片上有明显的纵向纹理（下图中方框内尤为明显），与预期符合：



为了更清晰看到像素点的变化，我们选取其中的一小块进行观察。本题中取 (81:88, 73:80) 部分进行观察：



如图可以看到，原图像在横向上有黑白的剧烈变化，但在清除了右侧的四列的小块中，剧烈变化得到了很大的缓和，即横向变化变得平缓了许多；而在清楚左侧四列的小块中，几乎只留下了纵向纹理，即几乎只有横向变化，而纵向变化不明显。这些均符合最开始的预期。

本题完整代码位于文件hw3\_2\_4\_3.m中。

### 将系数矩阵部分转置与旋转

下面对稀疏矩阵进行转置与旋转。

理论上分析，对于矩阵的转置，导致的结果是横向的变化幅度与纵向的变化幅度，即原来具有较强横向纹理的区块会变为较强的纵向纹理，原来具有较强纵向纹理的区块会变为较强的横向纹理。

更进一步注意到离散余弦变换和逆变换的公式：

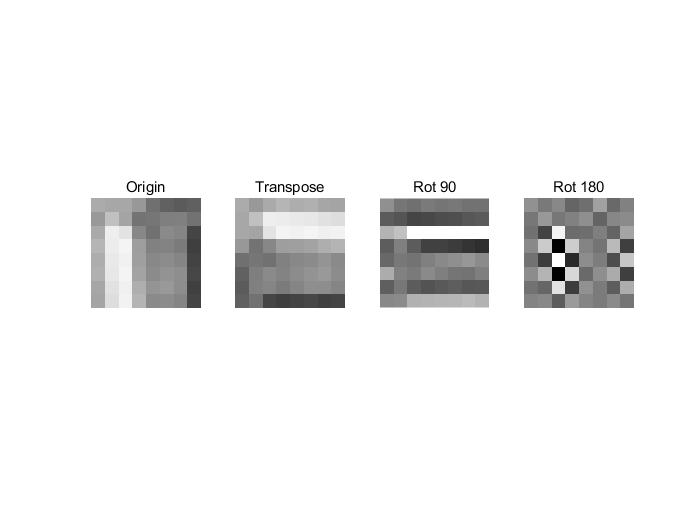
如果两边取转置：

会发现，系数矩阵的转置就是原矩阵转置的离散余弦变换！因此系数矩阵的转置做逆变换得到的就是原图像的转置！

对于矩阵旋转90度来说，由于对于一般的图片，低频分量是很大的，但是旋转90度会导致低频分量的系数变为了纵向变化高频分量的系数，因此得到的图片会有较强的横向纹理。

对于矩阵旋转180度来说，原来低频分量的系数变为了右下角的横纵向均高频的分量的系数，因此得到的图像应该会类似于棋盘状的黑白交替。

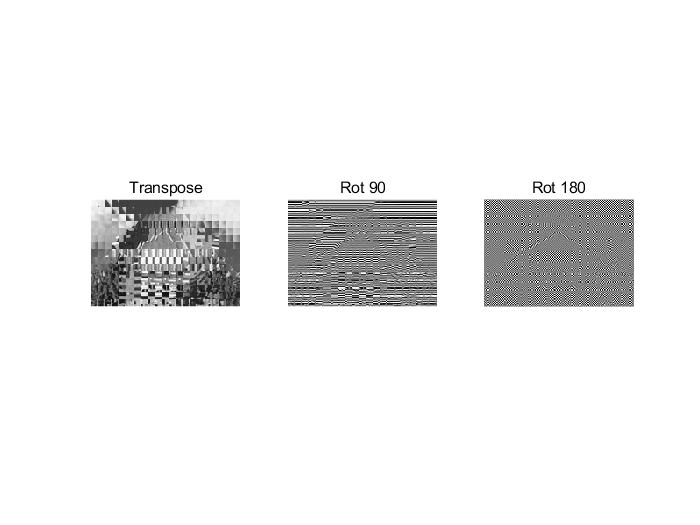
下面仍然取 (81:88, 73:80) 区块进行绘制：



可以看到，这块图片原来是有较强的纵向纹理的，即横向变化较为突出，而 在稀系数矩阵转置后得到的图片中，横向纹理比较突出。而且仔细观察就能发现，系数矩阵转置得到的图片就是原图片的转置，这与之前的理论分析是一致的。

对于旋转90度的图片来说，可以看到它有很强的横向纹理，即纵向色彩的变化非常剧烈；而系数矩阵旋转180度得到的图片也显然呈现棋盘状。这些与之前的理论分析也都是一致的。

下面将观察完整的图形：



由于图像时分成一个个小块进行变换的，因此转置的图像呈现出了明显的分块性——即每一块取转置再拼在一起，自然造成不连贯的结果。

对于旋转90度的图片，可以看到，图片显然呈现明显的横向纹理；而对于旋转180度的图片来说，其呈现的网格状、棋盘状也是符合预期的。

本题完整代码位于文件hw3\_2\_4\_4.m中。

### 差分编码的频率响应

对序列取差分的相反数（注意本题DC编码的差分是前项减后项）：

因此绘制零极点图和频响的代码为：

a = [1];

b = [-1, 1];

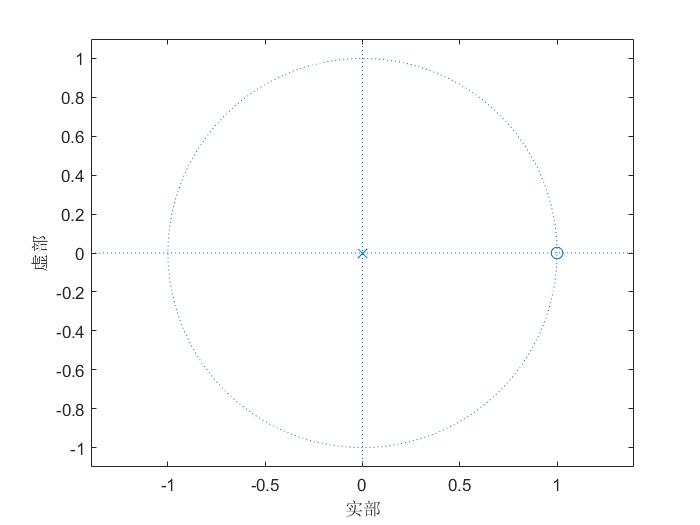
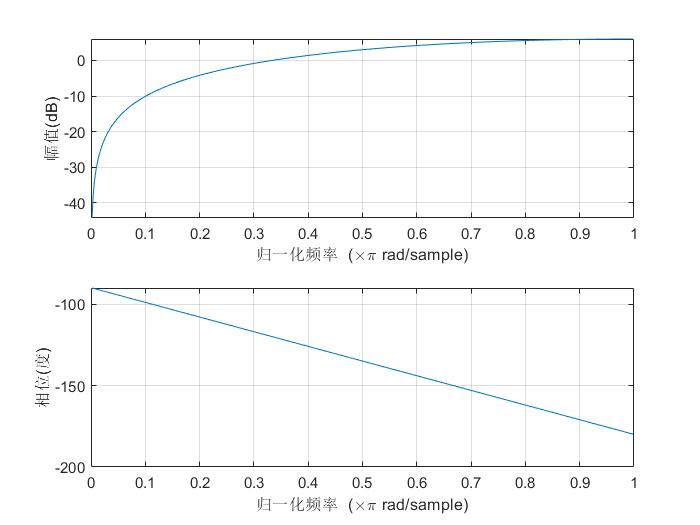
figure(1);

zplane(b, a);

figure(2);

freqz(b, a);

可以得到零极点图和频响：

从频响中可以看出，该滤波器是一个高通滤波器，这说明我们要滤除低频分量，即忽略小量。同时，这说明DC系数的高频分量更多。

本题完整代码位于文件hw3\_2\_4\_5.m中。

### DC预测误差与Category的关系

根据表格可以看出，Category是DC预测误差的绝对值加1，在对2取对数，然后向上取整得到的数。

此外，仔细观察也会发现，Category同时也是DC预测误差的二进制表示的位数。

### 利用MATLAB进行ZigZag扫描

由于在JPEG编码中，进行Zig-Zag的矩阵均为8\*8的矩阵，因此可以直接通过打表的方式完成Zig-Zag。将其封装为函数zig\_zag\_8，保存在文件zig\_zag\_8.m中。其代码如下：

function y = zig\_zag\_8(x)

order = [ ...

1, 2, 6, 7, 15, 16, 28, 29; ...

3, 5, 8, 14, 17, 27, 30, 43; ...

4, 9, 13, 18, 26, 31, 42, 44; ...

10, 12, 19, 25, 32, 41, 45, 54; ...

11, 20, 24, 33, 40, 46, 53, 55; ...

21, 23, 34, 39, 47, 52, 56, 61; ...

22, 35, 38, 48, 51, 57, 60, 62; ...

36, 37, 49, 50, 58, 59, 63, 64];

idx(order) = reshape([1 : 64], 8, 8);

y = x(idx)';

end

下面进行测试，将一个随机的8\*8的矩阵输入该函数：

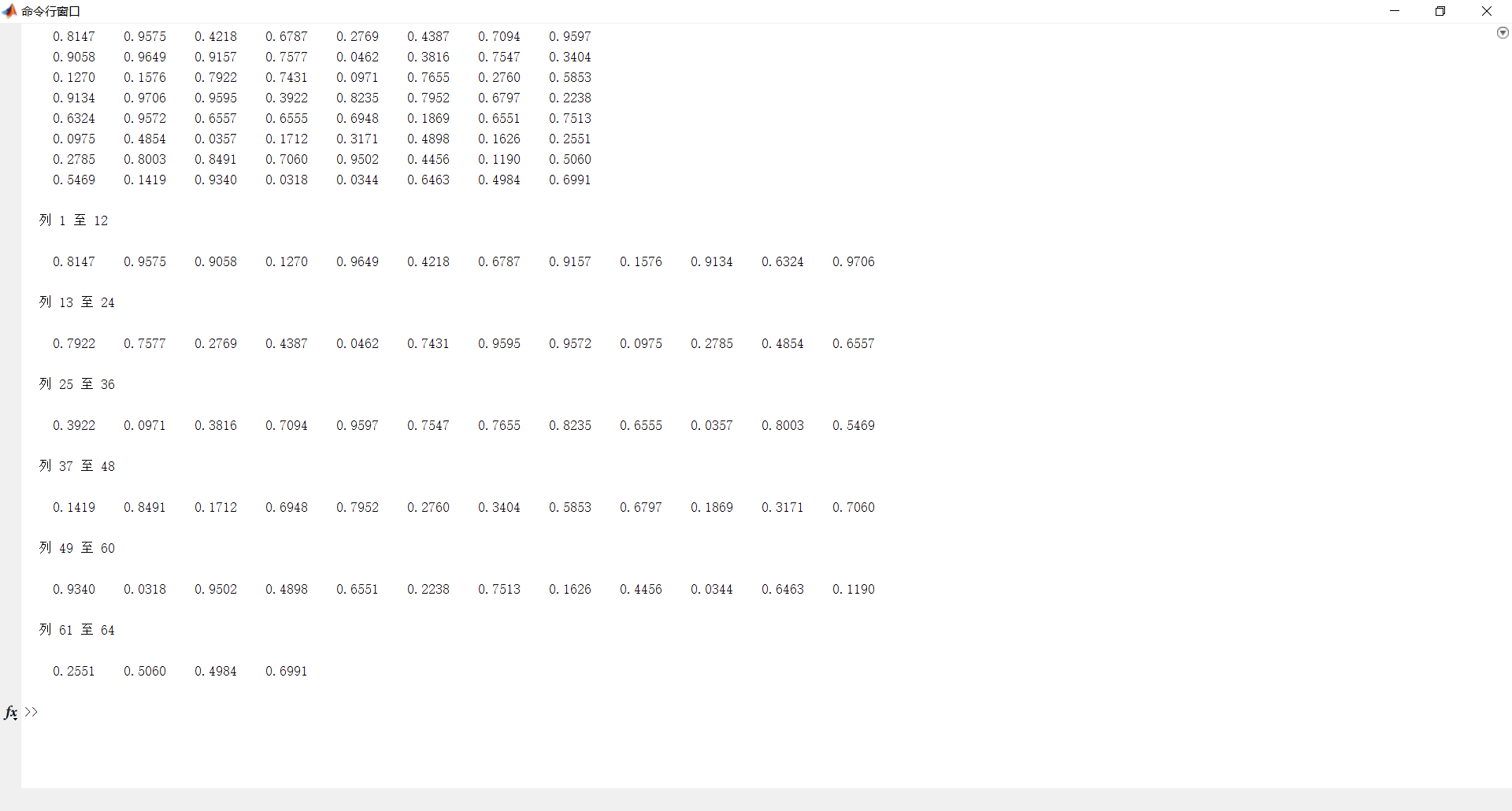
A = rand(8, 8);

y = zig\_zag\_8(A)';

disp(A);

disp(y);

结果如下图所示：



可以看到，确实将矩阵成功地进行了Zig-Zag扫描。

该测试脚本位于文件hw3\_2\_4\_7.m中。

### 图片的分块、DCT与量化

将图片划分为按8\*8的大小划分，对每一块减去128，再进行DCT，然后按量化表量化，再逐行依次排列，关键代码为：

hall\_gray = hall\_gray(1:24, 1:16);

img2proc = double(hall\_gray) - 128;

C = blockproc(img2proc, [8, 8], @(blk) zig\_zag\_8(round(dct2(blk.data) ./ QTAB)));

[h, w] =size(C);

hp = h / 64;

res = zeros([64, hp \* w]);

for i = 1 : 1 : hp

res(:, (i - 1) \* w + 1 : i \* w) = C((i - 1) \* 64 + 1 : i \* 64, 1 : w);

end

则得到的res即为本题的目标。

本题完整代码位于文件hw3\_2\_4\_8.m中。

### JPEG编码

首先我们需要一个将十进制转化为二进制数组的函数，该函数如下：

function y = dec2bin\_array(x)

if x == 0

y = [];

else

y = double(dec2bin(abs(x))) - '0';

if x < 0

y = ~y;

end

end

end

接下来进行DC编码。DC编码需要将Huffman编码与1的补码进行拼接。设上个问题得到的量化矩阵为C\_tilde（即上个问题中的res），DC编码如下：

dc = C\_tilde(1, :)';

diff\_dc = [dc(1); -diff(dc)];

category\_plus\_one = min(ceil(log2(abs(diff\_dc) + 1)), 11) + 1;

dc\_stream = arrayfun(@(i) ...

[DCTAB(category\_plus\_one(i), 2 : DCTAB(category\_plus\_one(i), 1) + 1), ...

dec2bin\_array(diff\_dc(i))]', ...

[1 : length(diff\_dc)]', 'UniformOutput', false);

dc\_stream = cell2mat(dc\_stream);

得到的dc\_stream即为DC码流。

接下来进行AC编码，采用的方法与DC编码类似，通过循环遍历每个块的信息，然后进行熵编码。

关键代码如下：

ac = C\_tilde(2 : end, :);

Size = min(ceil(log2(abs(ac) + 1)), 10);

ac\_stream = [];

ZRL = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1];

EOB = [1, 0, 1, 0];

for i = 1 : 1 : size(ac, 2)

this\_ac = ac(:, i);

this\_Size = Size(:, i);

last\_not\_zero\_idx = 0;

not\_zero = this\_ac ~= 0;

while sum(not\_zero) ~= 0

[~, new\_idx] = max(not\_zero);

Run = new\_idx - last\_not\_zero\_idx - 1;

num\_of\_ZRL = floor(Run / 16);

Run = mod(Run, 16);

this\_tab\_row = Run \* 10 + this\_Size(new\_idx);

ac\_stream = [ac\_stream, repmat(ZRL, num\_of\_ZRL, 1), ACTAB(this\_tab\_row, 4 : ACTAB(this\_tab\_row, 3) + 3), dec2bin\_array(this\_ac(new\_idx))];

not\_zero(new\_idx) = 0;

last\_not\_zero\_idx = new\_idx;

end

ac\_stream = [ac\_stream, EOB];

end

ac\_stream = ac\_stream';

得到的ac\_stream即为AC码流。

最后将码流和图像的宽度和高度保存到文件jpegcodes.mat当中：

img\_height = size(hall\_gray, 1);

img\_width = size(hall\_gray, 2);

save('jpegcodes.mat', 'dc\_stream', 'ac\_stream', 'img\_height', 'img\_width');

本问题的完整代码位于文件hw3\_2\_4\_9.m中。

### 计算压缩比

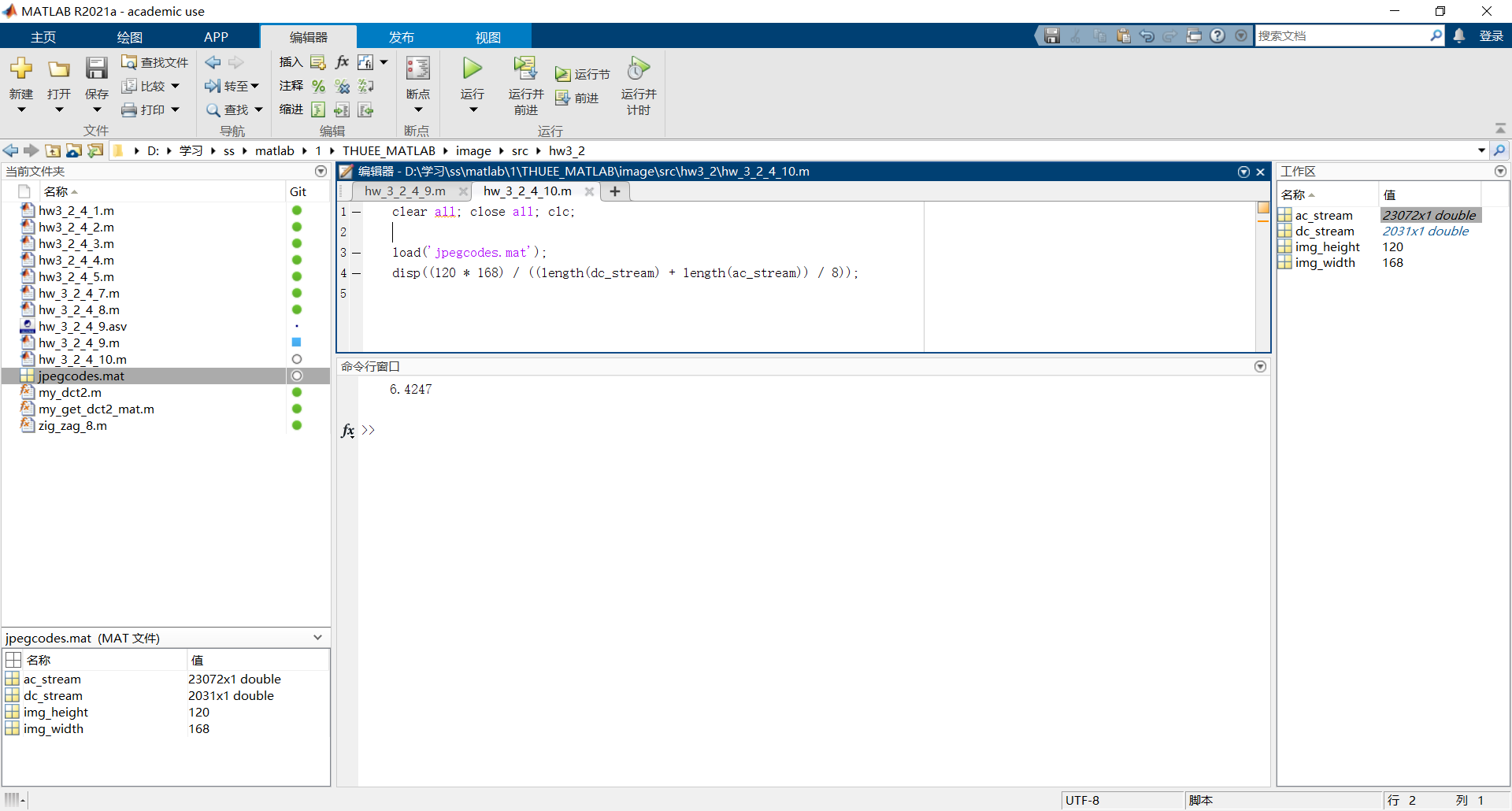
原图像为120\*168的灰度图，每个像素占一字节，因此共占用空间20160字节。而压缩后，占用空间为DC码流的比特数与AC码流的比特数值和除以8（化为字节数）。两者之比即为压缩比。

加载上一问题得到的脚本计算压缩比：

load('jpegcodes.mat');

disp((120 \* 168) / ((length(dc\_stream) + length(ac\_stream)) / 8));

运行脚本，DC码流长度为2031比特，AC码流长度为23072比特。下图为MATLAB计算结果：



因此压缩比约为6.4247。

本问题完整代码位于文件hw3\_2\_4\_10.m中。

### JPEG解码

接下来进行解码。先进行DC解码。解码与编码的过程正好相反，先进行熵解码。对此，我的解决方案是，在DC的编码表DCTAB内逐行对码流进行比对，如果比对成功则开始解码。这部分解码的关键代码如下：

hp = img\_height / 8;

wp = img\_width / 8;

dc\_decoding\_res = zeros([hp \* wp, 1]);

i = 1;

cnt = 1;

while i <= length(dc\_stream)

for j = 1 : 1 : size(DCTAB, 1)

% Omitted overbound judge here!!!

if DCTAB(j, 2 : DCTAB(j, 1) + 1)' == dc\_stream(i : i + DCTAB(j, 1) - 1)

i = i + DCTAB(j, 1);

category = j - 1;

if category == 0

dc\_decoding\_res(cnt) = 0;

else

Magnitude = dc\_stream(i : i + category - 1);

if Magnitude(1) == 1

dc\_decoding\_res(cnt) = bin2dec(char(Magnitude' + '0'));

else

dc\_decoding\_res(cnt) = -bin2dec(char(~Magnitude' + '0'));

end

end

i = i + category;

break;

end

end

cnt = cnt + 1;

end

其中dc\_decoding\_res即为熵解码的结果。

由于该结果原来是差分得到的，因此现在进行反差分：

dc\_cum = cumsum([dc\_decoding\_res(1); -dc\_decoding\_res(2:end)]);

DC解码完毕，接下来进行AC解码。

AC解码方式与DC解码大致相同，不同的有两点：一是AC解码时，需要单独考虑EOB和ZRL；二是AC的哈夫曼表中ACTAB的码长不是递增的，因此正在匹配的码长可能比剩余的AC码流总长度要长造成越界，因此需要增加越界判断。AC解码的关键代码如下：

ZRL = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1];

EOB = [1, 0, 1, 0];

ac\_decoding\_res = zeros([63, hp \* wp]);

i = 1;

block\_cnt = 1;

inner\_block\_cnt = 1;

while i < length(ac\_stream)

if i + length(ZRL) - 1 <= length(ac\_stream) && sum(~(ac\_stream(i : i + length(ZRL) - 1) == ZRL')) == 0

inner\_block\_cnt = inner\_block\_cnt + 16;

i = i + length(ZRL);

elseif i + length(EOB) - 1 <= length(ac\_stream) && sum(~(ac\_stream(i : i + length(EOB) - 1) == EOB')) == 0

block\_cnt = block\_cnt + 1;

inner\_block\_cnt = 1;

i = i + length(EOB);

else

for j = 1 : 1 : size(ACTAB, 1)

if i + ACTAB(j, 3) - 1 > length(ac\_stream)

continue;

end

if ACTAB(j, 4 : ACTAB(j, 3) + 3) == ac\_stream(i : i + ACTAB(j, 3) - 1)'

inner\_block\_cnt = inner\_block\_cnt + ACTAB(j, 1);

i = i + ACTAB(j, 3);

Amplitude = ac\_stream(i : i + ACTAB(j, 2) - 1);

if Amplitude(1) == 1

ac\_decoding\_res(inner\_block\_cnt, block\_cnt) = bin2dec(char(Amplitude' + '0'));

else

ac\_decoding\_res(inner\_block\_cnt, block\_cnt) = -bin2dec(char(~Amplitude' + '0'));

end

i = i + ACTAB(j, 2);

inner\_block\_cnt = inner\_block\_cnt + 1;

break;

end

end

end

end

然后将DC和AC解码得到的结果拼合成矩阵：

decoding\_res = [dc\_cum'; ac\_decoding\_res];

然后将结果按逐行重新排列为图片的行、列分布：

decoding\_C = zeros(64 \* hp, wp);

for i = 1 : 1 : hp

decoding\_C((i - 1) \* 64 + 1 : i \* 64, :) = decoding\_res(:, (i - 1) \* wp + 1 : i \* wp);

end

接下来要将其分块进行反Zig-Zag。类似于Zig-Zag，我们先编写一个用于对长度为64的序列进行反Zig-Zag的函数i\_zig\_zag\_8：

function y = zig\_zag\_8(x)

order = [ ...

1, 2, 6, 7, 15, 16, 28, 29; ...

3, 5, 8, 14, 17, 27, 30, 43; ...

4, 9, 13, 18, 26, 31, 42, 44; ...

10, 12, 19, 25, 32, 41, 45, 54; ...

11, 20, 24, 33, 40, 46, 53, 55; ...

21, 23, 34, 39, 47, 52, 56, 61; ...

22, 35, 38, 48, 51, 57, 60, 62; ...

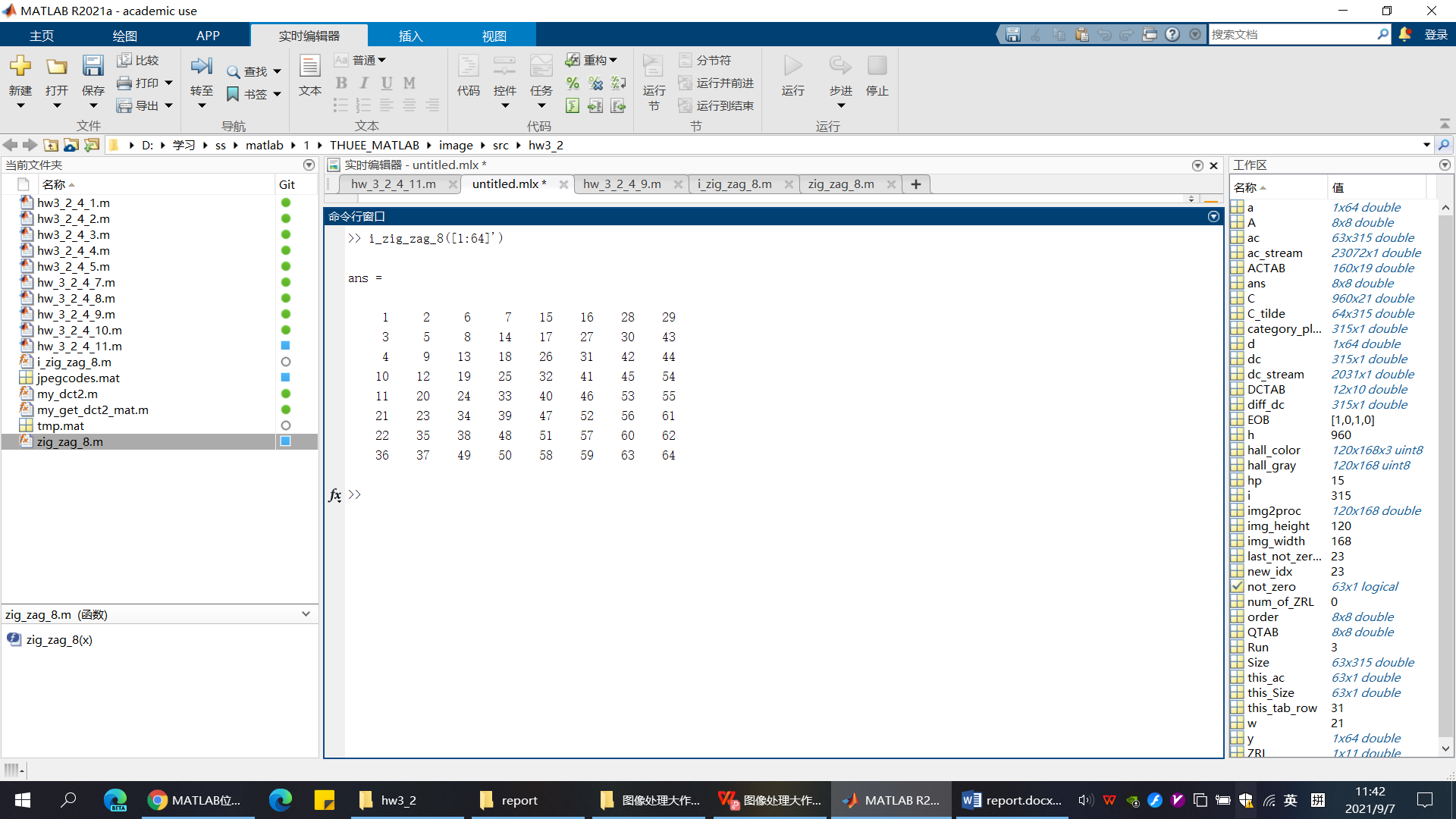
36, 37, 49, 50, 58, 59, 63, 64];

idx(order) = reshape([1 : 64], 8, 8);

y = x(idx)';

end

对其进行测试：若输入为1~64的连续数字，则输出应该与上面的order数组相同：



结果符合预期。

然后依次分块进行反Zig-Zag、反量化、离散余弦逆变换：

decoding = blockproc(decoding\_C, [64, 1], @(blk) idct2(i\_zig\_zag\_8(blk.data) .\* QTAB));

最终得到结果decoding。将其加上亮度128得到图片：

decoding\_img = uint8(decoding + 128);

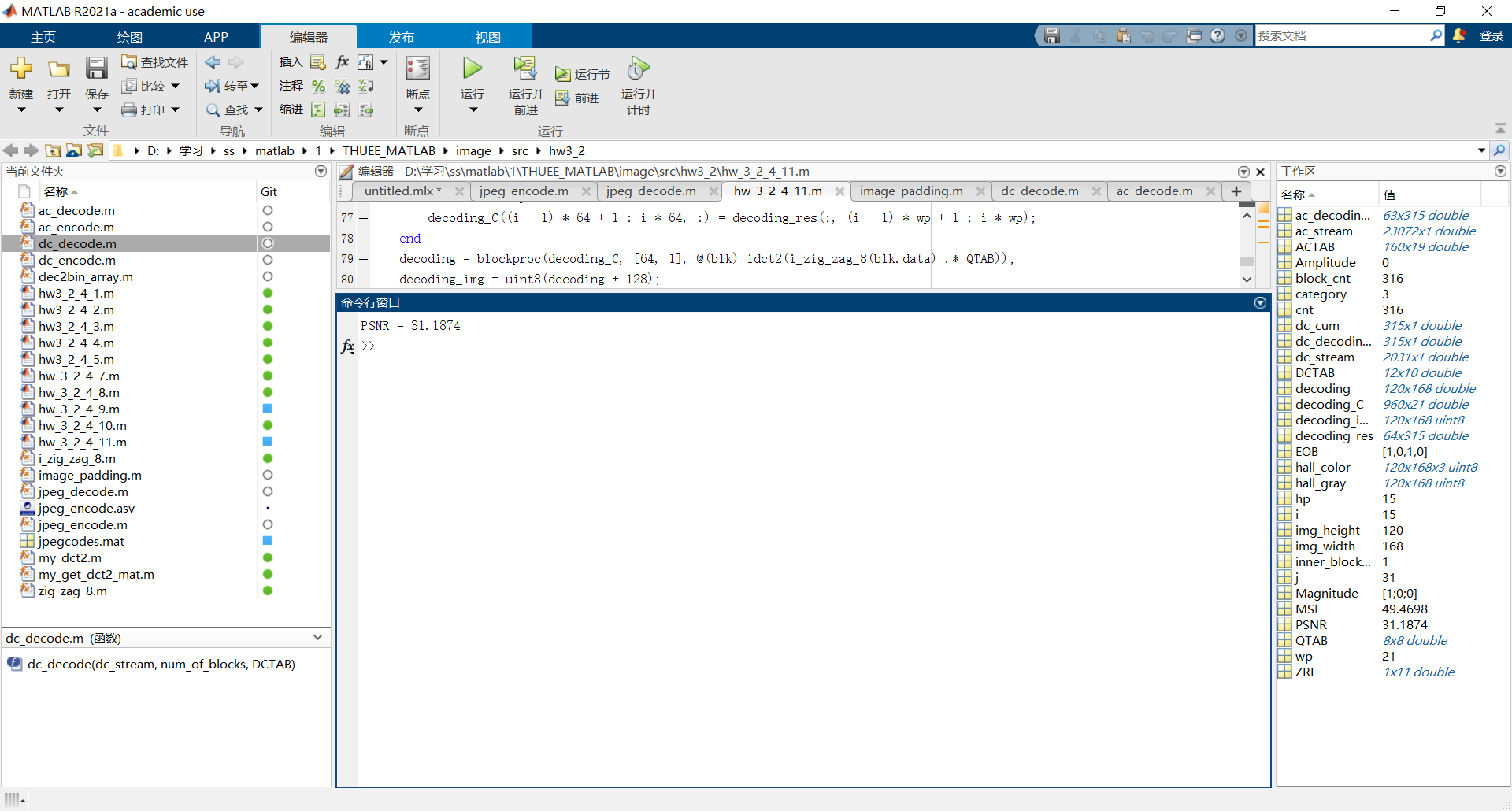
根据公式计算结果的PSNR：

MSE = sum((double(decoding\_img) - double(hall\_gray)).^2, 'all') / (img\_height \* img\_width);

PSNR = 10 \* log10(255 \* 255 / MSE);

disp("PSNR = " + PSNR);

输出结果为：



因此PSNR的值为31.1874 dB。

绘制图片，并与原图形进行比对：

subplot(1, 2, 1);

imshow(hall\_gray);

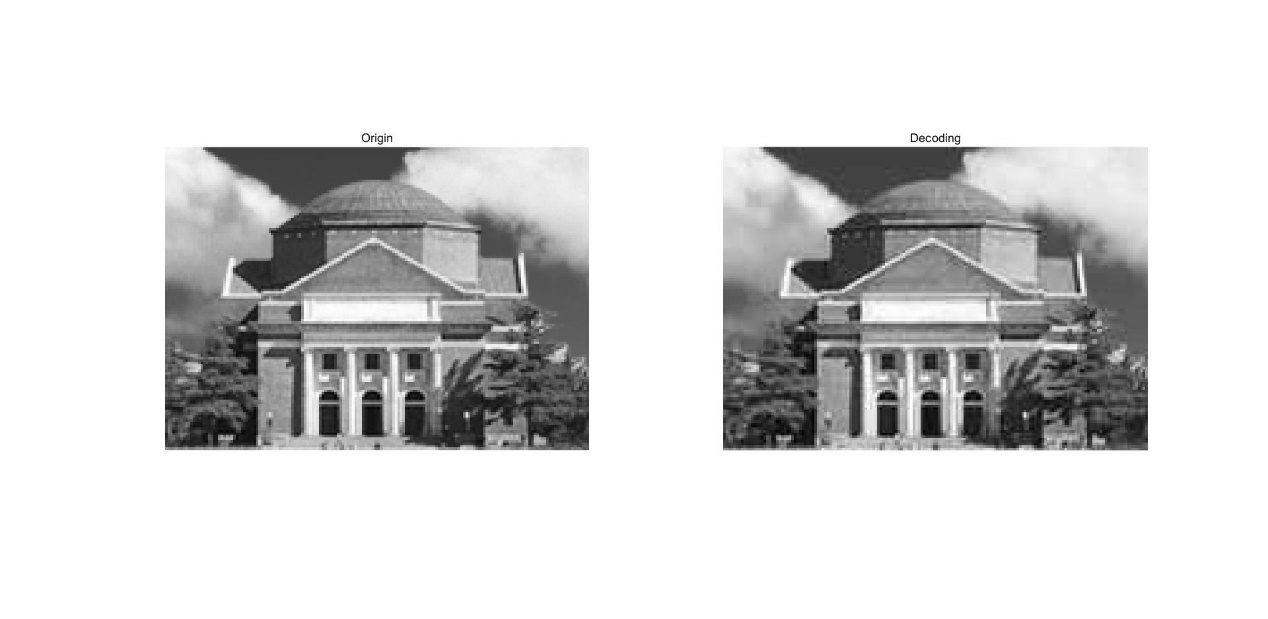
title('Origin');

subplot(1, 2, 2);

imshow(decoding\_img);

title('Decoding');

得到下图：



其中左侧是原图片，右侧是解码后的图片。总体来看，两图差别不大，都能比较清晰地看出原本的情景。但是仔细看会发现，解码后的图较原图稍模糊，尤其是色彩的剧烈变化处变化变缓，这是滤掉高频分量的结果。此外，在解码后的图中，尤其是白云内部，可以看到较为明显的方块状，这可能是按8个像素分块 量化的结果。

本问题完整代码位于文件hw3\_2\_4\_11.m中。

### 减小量化步长

将上述编码、解码功能分别封装成函数jpeg\_encode和jpeg\_decode，并且增加了边长不足8的倍数时进行用零进行边界扩展的功能；并将计算PSNR封装为函数mypsnr，将量化表除以2进行编码和解码：

QTAB = QTAB / 2;

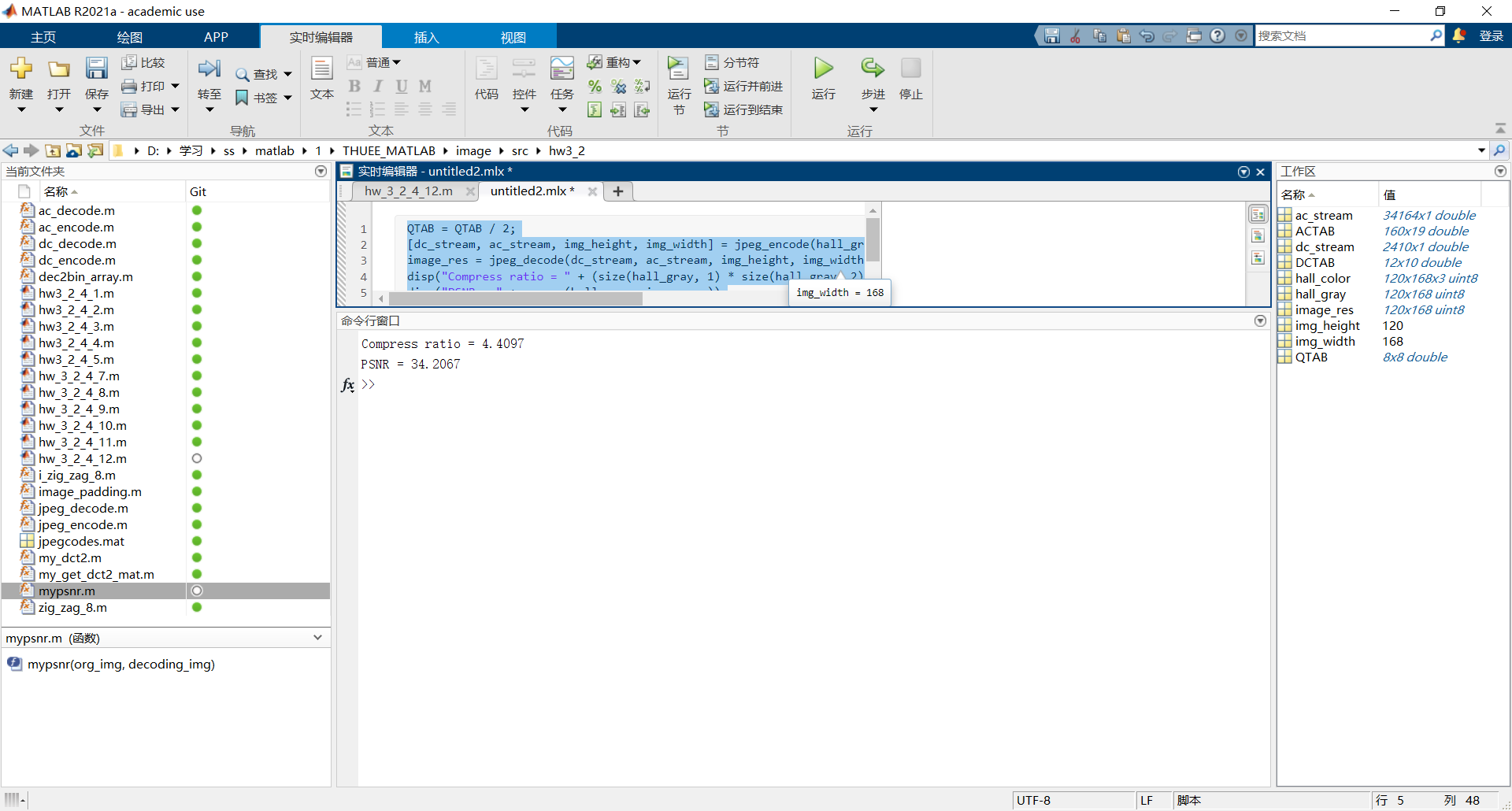
[dc\_stream, ac\_stream, img\_height, img\_width] = jpeg\_encode(hall\_gray, DCTAB, ACTAB, QTAB);

image\_res = jpeg\_decode(dc\_stream, ac\_stream, img\_height, img\_width, DCTAB, ACTAB, QTAB);

disp("Compress ratio = " + (size(hall\_gray, 1) \* size(hall\_gray, 2)) / ((length(dc\_stream) + length(ac\_stream)) / 8));

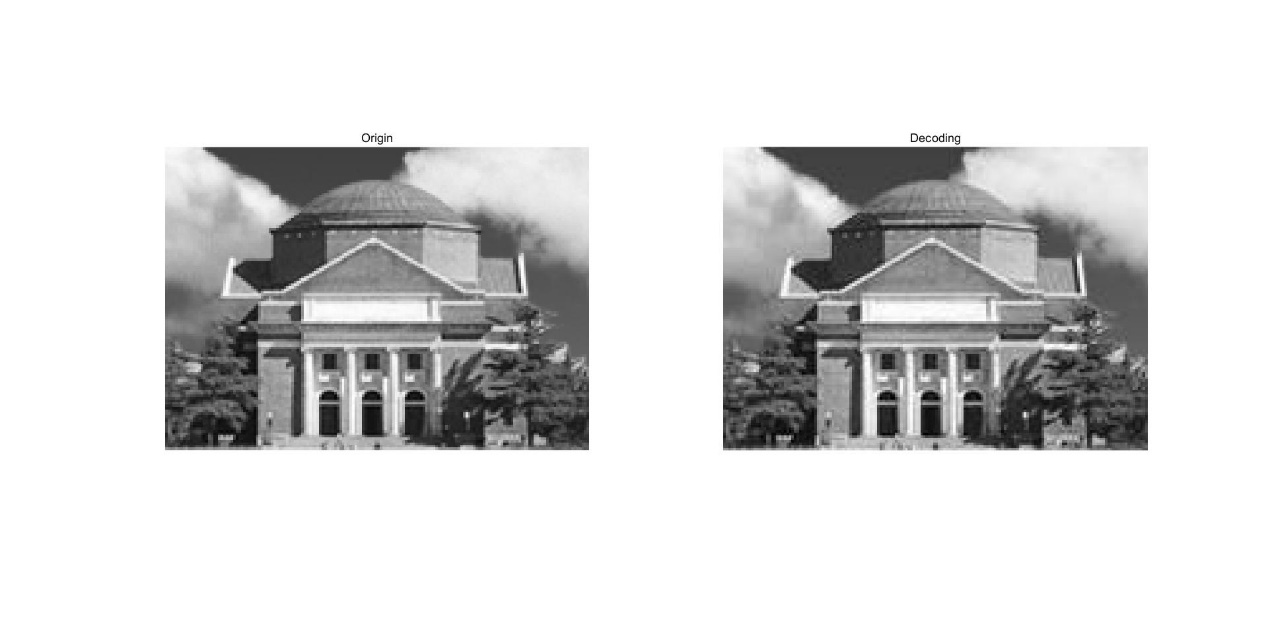
disp("PSNR = " + mypsnr(hall\_gray, image\_res));

得到结果：



因此可以看到，压缩比约为4.4097，略有降低，而PSNR为34.2067 dB，略有升高。推测其原因，因为量化步长缩短，使得高频信息损失更少，因此PSNR升高；而量化步长缩短导致得到的量化值增大，因此编码结果的长度变长，减低压缩比。

绘制图片得到：

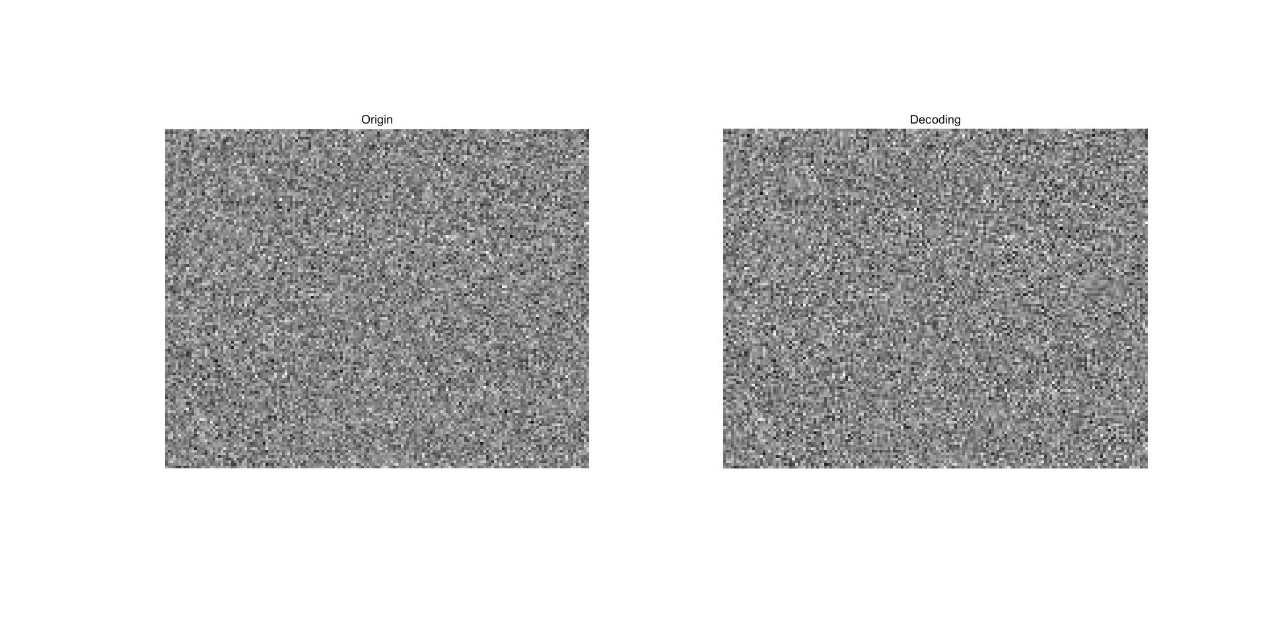


可以看到，图片质量与没有将量化步长除以2的时候相比，可能略有提高，但是变化不是很大，和之前的效果难以用肉眼分辨。

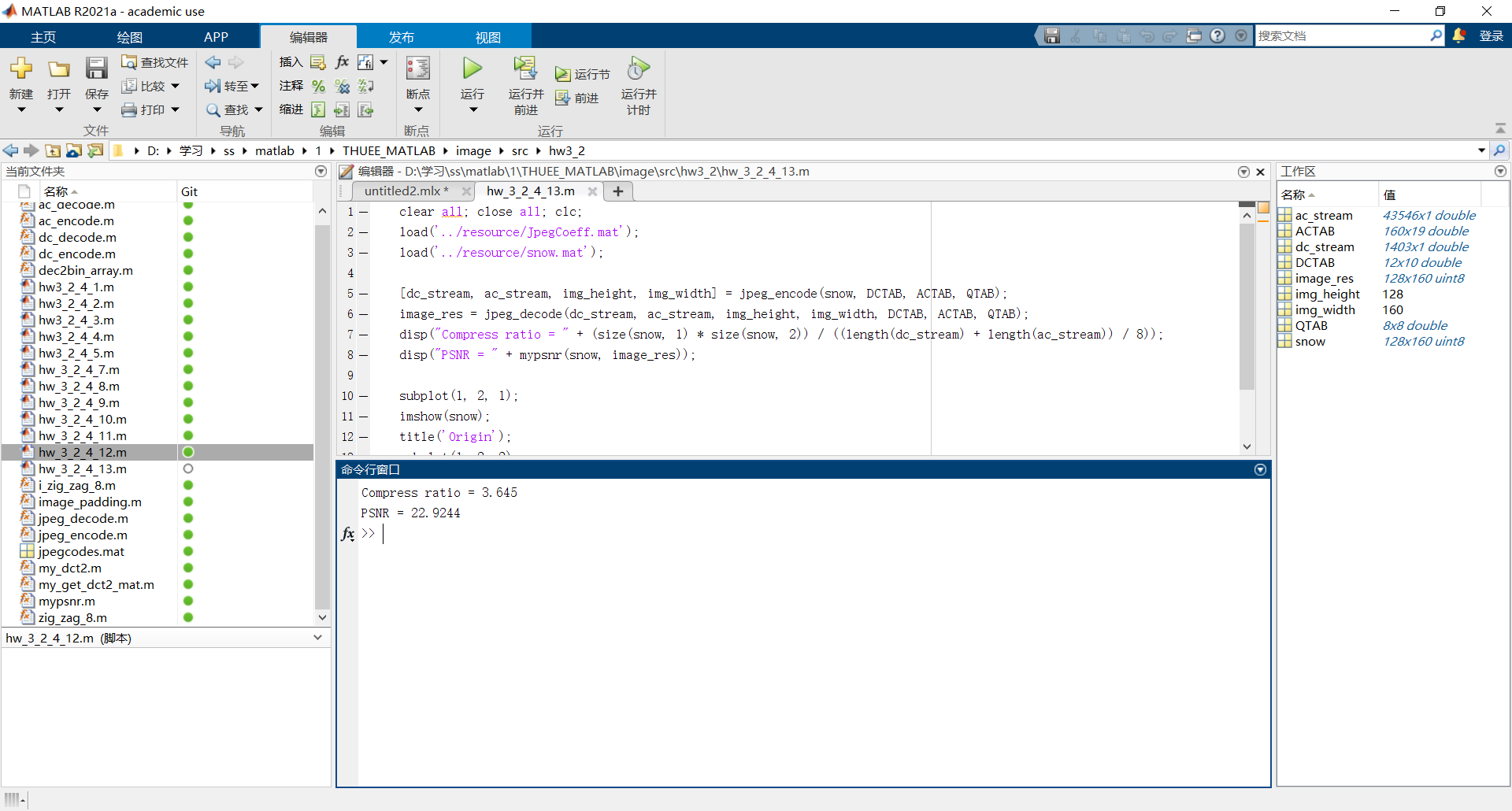
本问题的完整代码位于文件hw3\_2\_4\_12.m中。

### 处理雪花图像

将输入图片变成雪花图像，得到的图片如下图：



压缩比和PSNR分别为：



即压缩比为3.645，PSNR为22.9244 dB。相比来看，雪花图像的压缩比较之前更小，而且PSNR值也更低。仔细对比两幅图，压缩并解码后的图片也失真较多，与原图片相似度降低。

究其原因，电视上雪花图的雪花是在电视屏幕上随机出现的，并且深浅度不一，因此图片的高频分量很大，故高频分量不容易被量化至0或其他较低的值。因此压缩比相对较低；而高频分量被量化导致高频分量存在失真，而雪花图高频分量较多，因此图片的失真比较严重，PSNR较低。