De variedades tóricas a variedades de conglomerado

Parte 1 basado en trabajo en colaboración con Mandy Cheung y Alfredo Nájera Chávez
Parte 2 basado en trabajo en colaboración con Bosco.

Variedades tóricas

Def: Una variedad tórica es un encaje abierto $T \subset X$ de un toro T en una variedad Y tal que la acción $T \circlearrowright T$ se extiende a una acción $T \circlearrowright Y$.

↳ Se puede agregar unos adjectivos acá: normal, de tipo finito

Porqué nos interesan?

- Problemas de compactificaciones de espacios moduli.
  La geometría enumerativa se funciona mejór con espacios compactos. Para tener una compactificación que se comporta bien, es común pedir que la compactificación se vea tórica localmente.
- Acá se puede estudiar geometría algebraica a traves de la geometría convexa poliedral.
  Mucho más sencillo.
- En muchos casos se puede reducir problemas no tóricos a problemas tóricos más sencillos.
  (Degeneraciones tóricas, construcción de espejo por Batyrev-Borisov)
- Se puede intentar generalizar las construcciones poliedrales para entender variedades no tóricas.
  El tema de hoy.

Ejemplos: $\mathbb{C}^* \subset \mathbb{C}$, $\mathbb{C}^* \subset \mathbb{P}^1$, $(\mathbb{C}^*)^n \subset \mathbb{C}^n$, $(\mathbb{C}^*)^n \subset \mathbb{P}^n$, $(\mathbb{C}^*)^n \subset \mathbb{P}^1 \times \cdots \times \mathbb{P}^1$

Modelos mínimos parciales para Variedades de conglomerado

Explosion de subvariedad de la frontera de codim 2

Complemento de transformución estricta de la frontera se llama una "variedad de conglomerado".

Dado explosion $f: Y \to \bar{Y}$ en una subvariedad $\bar{H} \subset \bar{Y}$ de codim c, tenemos que

$$K_Y = f^*(K_{\bar{Y}}) + (c-1)E$$

$$(c=2): \quad -K_Y = f^*(\underbrace{-K_{\bar{Y}}}_{\text{Frontera tórica}}) - E$$

← transformación estricta de frontera tórica

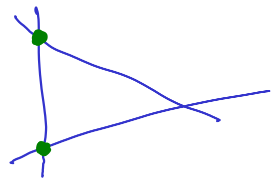
Porqué nos interesan?

- Se aparecen en muchas áreas de matemáticas.
  Geometría hyperbolica, teoría de representaciones de grupos / carcajes, teoría de campos cuanticos, sistemas integrables, ..
- Clase importante y manejable de variedad log CY.
  se está desarroyando un teoría de simetría especular para variedades log Calabi-Yau, pero el caso general es bastante complicado.

Ejemplos:

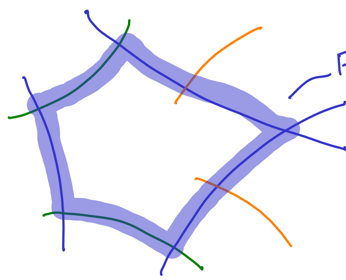
Superficie del Pezzo de grado 5:

(Explosión de $\mathbb{P}^2$ en 4 puntos en posición general)



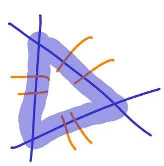
Frontera de $(\mathbb{C}^*)^2 \subset \mathbb{P}^2$
$\{x=0\} \cup \{y=0\} \cup \{z=0\}$

2 "explosiones tóricas" — explosiones de órbitas tóricas.
El resultado sigue siendo una variedad tórica.
Faltan 2 que no pueden ser tóricas (posición general).



Frontera de dP_5 como modelo mínimo de variedad de conglomerado (el complemento de ∂)

Superficie Cúbica (Explosión de $\mathbb{P}^2$ en 6 puntos en posición general)



En dimensión > 2, se cuesta más trabajo dibujar los ejemplos pero la idea sigue siendo lo mismo. Ejemplos son:

Grassmannianos (La variedad de conglomerado en $Gr_{2,5}$ se reduce al primer ejemplo)

Variedades de banderas

Grupos algebraicos

Convexidad en la teoría de variedades tóricas

Fíjense: Multiplicación de caracteres de un toro se describe con adición vectorial:

$$z^{m_1} \cdot z^{m_2} = z^{m_1+m_2} \qquad m_i \in M = \mathrm{car}(T)$$

$\Rightarrow$ Si $S \subset M$ es base para un anillo de funciones o de secciones, entonces S está cerrado bajo adición.

Tenemos un poquito más: tal $S \subset M$ satisface $S = C \cap M$ para un Cono Convexo racional $C \subset M_{\mathbb{R}}$.

No necesariamente estrictamente convexo

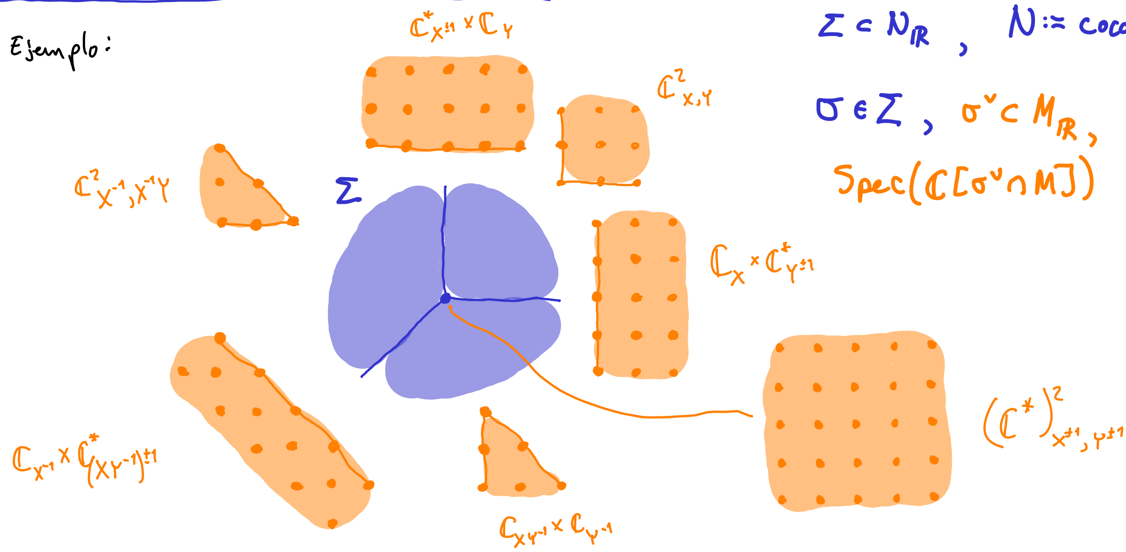
Caso de funciones en afines abiertos: (abanicos)

Ejemplo:

$\Sigma \subset N_{\mathbb{R}}$, $N := \mathrm{cocar}(T)$

$\sigma \in \Sigma$, $\sigma^\vee \subset M_{\mathbb{R}}$, $\sigma^\vee \cap M$ monoide

$\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M])$ variedad afín



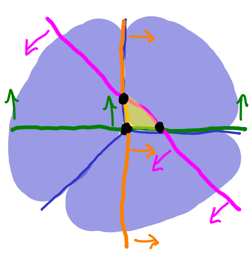
$(\mathbb{P}^2)$

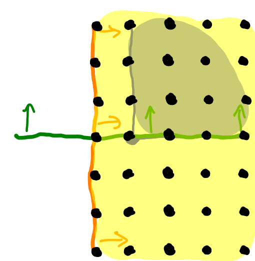
Caso de anillo de secciones de un divisor o haz lineal: (conos cerrados sobre poliedra)

Ejemplos:

$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(D_{\{Z=0\}})$ $\qquad$ $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}(D_{\{X=0\}})$

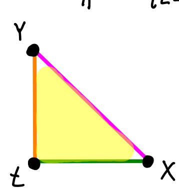
$D_{\{Z=0\}} = 0D_{\{X=0\}} + 0D_{\{Y=0\}} + 1D_{\{Z=0\}}$ $\qquad$ $D_{\{X=0\}} = 1D_{\{X=0\}} + 0D_{\{Y=0\}}$



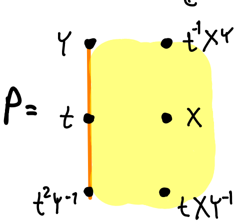


Secciones de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(D_{\{Z=0\}})$ $\qquad$ Secciones de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}(D_{\{X=0\}})$

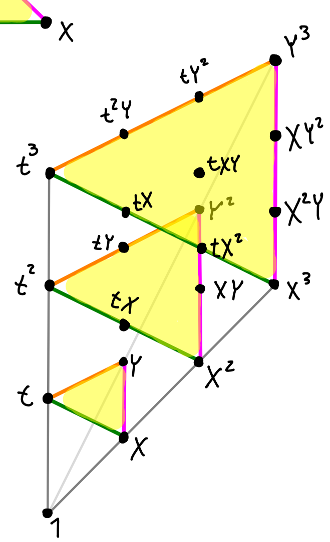
$P =$



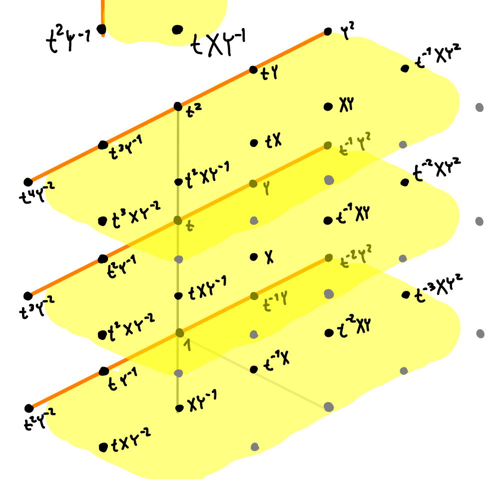
$P =$



$\overline{C(P)} = C(P) =$



$\overline{C(P)} =$

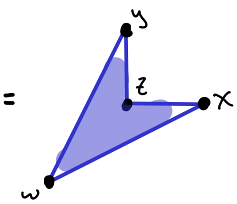


Anillo de secciones $\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} R_i$, $R_i := \Gamma(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(iD_{\{Z=0\}}))$ $\qquad$ Anillo de secciones $\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} R_i$, $R_i := \Gamma(\mathbb{C}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}(iD_{\{X=0\}}))$

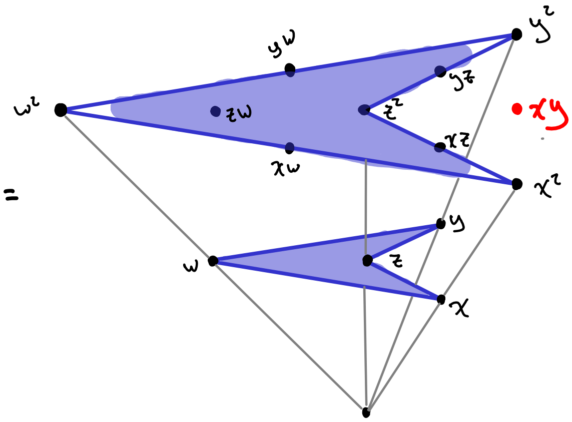
Ojo: si P no sea convexa, $C(P)$ no está cerrado bajo adición.

No ejemplo:

$P=$



$C(P)=$



Caso particular: Sea $D \subset Y$ un divisor amplio relativo a $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}(Y))$.

$$\Rightarrow \mathrm{Proj}\left(\bigoplus R_i\right) = Y$$

Poliedra convexa racional $\leftrightsquigarrow$ Variedades tóricas relativamente projectivas polarizadas

Convexidad en la teoría de modelos mínimos parciales de variedades de conglomerado

En el caso tórico, empezabamos con $M = \mathrm{car}(T)$, base para $\mathcal{O}(T)$.
Sea $\mathcal{V}$ una variedad de conglomerado, no tenemos $\mathrm{car}(\mathcal{V})$. ¿Hay una generalización?

$\mathrm{car}(T) = \mathrm{cocar}(T^\vee) = (T^\vee)^{\mathrm{trop}}(\mathbb{Z})$ $\leftarrow$ A definir poco a poco

Def: Una **variedad log Calabi-Yau** $\mathcal{V}$ es una variedad compleja suave que tiene una forma de volumen Ω única (salvo escalares) que tiene en peor caso un polo simple en cualquier divisor de cualquiera compactificación de $\mathcal{V}$.

Ejemplo: $\mathcal{V} = T$, $\Omega = \frac{dz_1}{z_1} \wedge \dots \wedge \frac{dz_n}{z_n}$ $\leftarrow$ Tiene polo simple en cada divisor tórico

Def: Sea $\mathcal{V}$ una variedad compleja. Una **valuación discreta divisorial** para $\mathcal{V}$ es una valuación discreta $v: \mathbb{C}(\mathcal{V}) \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ dado por $v = \mathrm{ord}_D(\cdot)$, donde D es (un múltiplo positivo de) un divisor irreducible efectivo de algún Y biracional a $\mathcal{V}$.

i) $v(f \cdot g) = v(f) + v(g)$
ii) $v(f+g) \geq \min\{v(f), v(g)\}$
iii) $v(f) = \infty \iff f = 0$

Def: Sea $(\mathcal{V}, \Omega)$ una variedad log CY.

$$\mathcal{V}^{trop}(\mathbb{Z}) := \{\text{valuaciones discretas divisoriales } v \text{ para } \mathcal{V} \mid v(\Omega) < 0\} \cup \{0\}$$

Ejemplo: (T, Ω). $n \in N = \mathrm{cocar}(T)$, n_0 primitivo con $n = r\, n_0$, $r \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Sea Σ un abanico que contiene el rayo $\rho = \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot n$. Tenemos el divisor D_ρ de X_Σ, y $\mathrm{ord}_{rD_\rho}(z^m) = \langle n, m \rangle$ para cada $m \in M$.

Se puede definir $\mathcal{V}^{trop}(\mathbb{R})$ tomando $\mathbb{R}_{>0}$ multiplos de divisores irreducibles efectivos en vez de $\mathbb{Z}_{>0}$ multiplos y tomando la compleción.

Conjetura (Gross-Hacking-Keel): Sea $\mathcal{V}$ una variedad log CY afín con frontera maximal.

El espejo $\mathcal{V}^\vee$ es también una variedad log CY afín con frontera maximal.

$\mathcal{V}^{trop}(\mathbb{Z})$ parametriza una base de funciones ϑ en $\mathcal{V}^\vee$, con multiplicación dado explicitamente en términos de cuentas de líneas quebradas. ← A definir

Dichas cuentas son una versión tropical de cuentas de curvas pseudoholomorfas en $\mathcal{V}$.

El diagrama de dispersión: colección de paredes $\{(\mathfrak{d}, f_{\mathfrak{d}})\}$ en $\mathcal{V}^{trop}(\mathbb{R})$.

Cada paréd corresponde a una clase de curva — $\mathfrak{d}$ es un cono convexo racional de codim 1

y $f_{\mathfrak{d}}$ es función generadora de invariantes log Gromov-Witten de la curva.

↑ conos de codim 1 en Σ corresponden a curvas en X_Σ.

Caso dim 2: $\mathfrak{d} = \mathbb{R}_{\geq 0}(a v_i + b v_{i+1})$,

$$f_{\mathfrak{d}} = \exp\Big(\sum_{k \geq 1} \sum_{\beta \in H_2(Y;\mathbb{Z})} k N^{\beta}_{k(av_i + bv_{i+1})} z^{\beta} X_i^{-ka} X_{i+1}^{-kb} \Big)$$

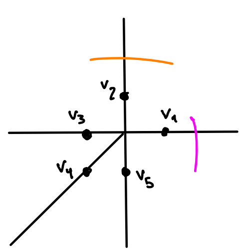
← Más detalles en Gross-Hacking-Keel-Siebert "The mirror of the cubic surface".

"Diagrama de dispersión canónica"

En práctica se utiliza el "diagrama de dispersión de conglomerado"

– Más sencillo pero con menos información geométrica.

Ejemplo: Superficie del Pezzo de grado 5 con ciclo de 5 lineas (Y, D)



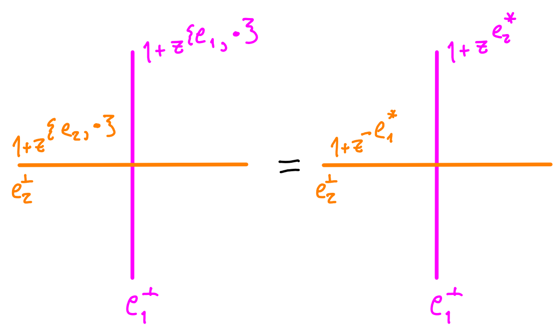
$$\det\begin{pmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{pmatrix} = 1$$

$Q := \overset{1}{\bullet} \longrightarrow \overset{2}{\bullet}$

$N = \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}(e_1, e_2)$

$\{\cdot, \cdot\} : N \times N \longrightarrow \mathbb{Z}$

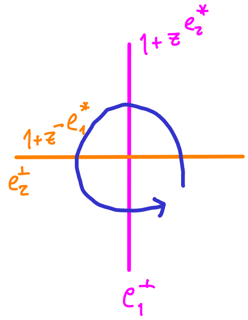
$$\{e_i, e_j\} = \underset{i \to j}{\#\text{flechas}} - \underset{j \to i}{\#\text{flechas}}$$



Crusando paredes: Sea $\mathfrak{d} \subset n^\perp$ y $f_{\mathfrak{d}} = 1 + \sum_k c_k z^{k\{n, \cdot\}}$.

$$p_{\mathfrak{d}} : z^m \longmapsto z^m f_{\mathfrak{d}}^{\pm \langle n, m \rangle}$$

↖ signo determinado por dirección de cruzar

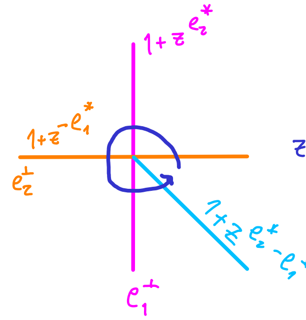


$z^{e_1^*} \mapsto z^{e_1^*}(1+z^{e_2^*-e_1^*})$

$\neq z^{e_1^*}$

"¡inconsistente"

$\rightsquigarrow$



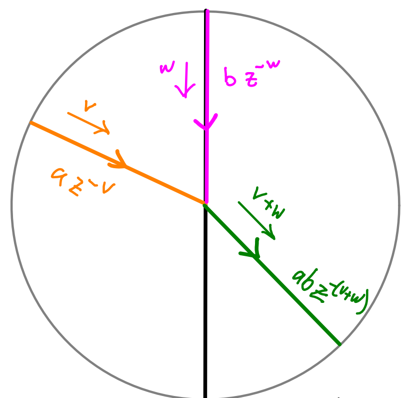
$z^m \mapsto z^m$

"Consistente"

Teorema (Gross-Hacking-Keel-Kontsevich): Existe un diagrama de dispersión consistente $\mathfrak{D}^{\mathcal{V}^\vee}$ asociado a cada variedad de conglomerado $\mathcal{V}$. Es único salvo equivalencia.

Def: Un **disco tropical en $\mathcal{V}^{trop}(\mathbb{R})$** es una gráfica orientada en $\mathcal{V}^{trop}(\mathbb{R})$ decorada con un monomio de Laurent en cada eje que:

i) localmente en la vecindad de un vertice se ve así:

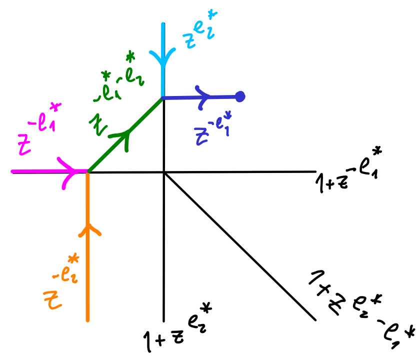


$(\mathfrak{d}, f_{\mathfrak{d}}) \in \mathfrak{D}^{\mathcal{V}^\vee}$

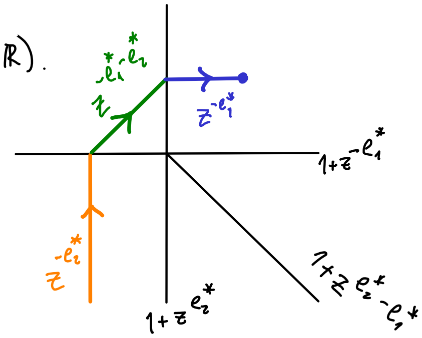
donde $abz^{-(v+w)}$ es un termino de $P_{\mathfrak{d}}(az^{-v})$.

ii) hay un solo eje semi-infinito que genericamente no se encuentre en el soporte de una paréd. El coeficiente del monómio de ese eje es 1.

Ejemplo:



Def: Una **línea quebrada en $\mathcal{V}^{trop}(\mathbb{R})$** es el resultado de borrar las contribuciones de paredes de un disco tropical en $\mathcal{V}^{trop}(\mathbb{R})$.



Se piensa en una línea quebrada como mapeo $\gamma : (-\infty, 0] \longrightarrow \mathcal{V}^{trop}(\mathbb{R})$.

Notación: Sea γ una línea quebrada en $\mathcal{V}^{trop}(\mathbb{R})$.

$In(\gamma) :=$ vector exponente de monomio inicial de γ

$F(\gamma) :=$ vector exponente de monomio final de γ

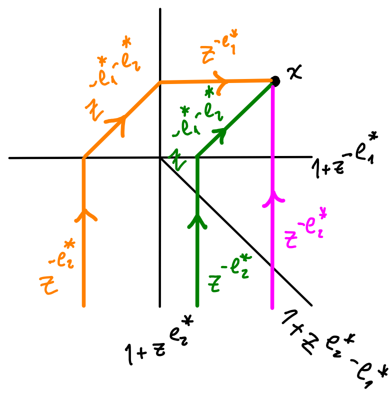
$Mono(\gamma) :=$ Monomio final de γ

Def: La función $\vartheta_p^{\mathcal{V}^\vee}$ se define localmente así:

Sea $x \in \mathcal{V}^{trop}(\mathbb{R})$. $\vartheta^{\mathcal{V}^\vee}_{p;x} := \sum_{\substack{In(\gamma)=p \\ \gamma(0)=x}} Mono(\gamma)$.

Consistencia de $\mathfrak{D}^{\mathcal{V}^\vee}$ implica que las expresiones locales se pegan a una función global $\vartheta_p^{\mathcal{V}^\vee}$.

Ejemplo:



$$\vartheta^{\mathcal{V}^\vee}_{-e_2^*;x} = z^{-e_2^*} + z^{-e_1^*-e_2^*} + z^{-e_1^*}$$

Multiplicación de funciones ϑ:

Teorema (Gross–Hacking–Keel–Kontsevich): Sean $p, q \in \mathcal{V}^{trop}(\mathbb{Z})$. Denota los constantes de estructura de funciones ϑ en $\mathcal{V}^\vee$ como $\alpha^r_{p,q}$: $\vartheta_p \cdot \vartheta_q = \sum_{r \in \mathcal{V}^{trop}(\mathbb{Z})} \alpha^r_{p,q} \vartheta_r$. Entonces,

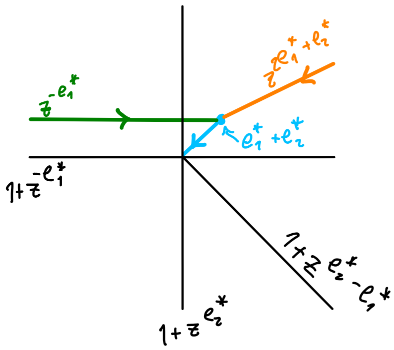
$$\alpha^r_{p,q} = \sum_{\substack{(\gamma_1,\gamma_2) \\ I(\gamma_1)=p,\ I(\gamma_2)=q \\ \gamma_1(0)=\gamma_2(0)=r \\ F(\gamma_1)+F(\gamma_2)=r}} c(\gamma_1)\cdot c(\gamma_2)$$

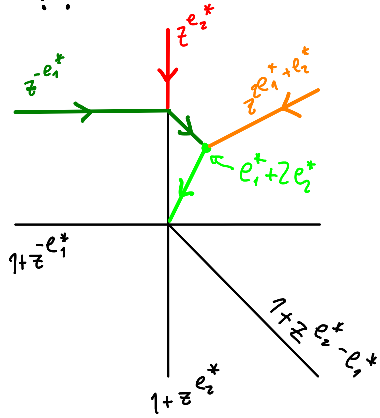
$\leftarrow$ Cuenta de curvas tropicales en $\mathcal{V}^{trop}(\mathbb{R})$

discos tropicales pegados como en el ejemplo

Ejemplo:

$$\vartheta^{\mathcal{V}^\vee}_{-e_1^*} \cdot \vartheta^{\mathcal{V}^\vee}_{2e_1^*+e_2^*} = ??$$





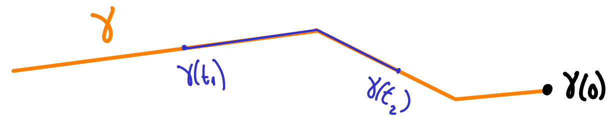
$$\Rightarrow \vartheta^{\mathcal{V}^\vee}_{-e_1^*} \cdot \vartheta^{\mathcal{V}^\vee}_{2e_1^*+e_2^*} = \vartheta^{\mathcal{V}^\vee}_{e_1^*+e_2^*} + \vartheta^{\mathcal{V}^\vee}_{e_1^*+2e_2^*}$$

Si ~~S c M~~ $S\subset \mathcal{V}^{trop}(\mathbb{Z})$ es base para un anillo de funciones o de secciones, entonces

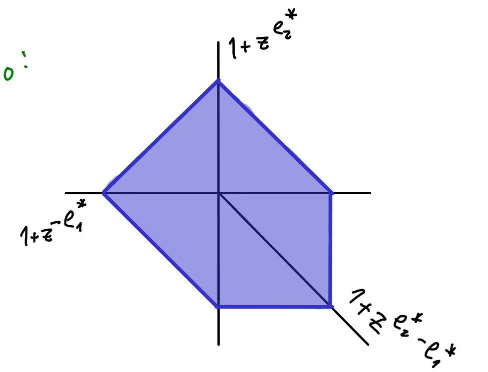
~~S está cerrado bajo adición.~~ $p,q\in S$, $\alpha^r_{pq}\neq 0 \Rightarrow r\in S$. ← Se puede interpretar como adición multivaluada: $r\in$ "$p+q$"

Def (Cheung, M, Nájera Chávez): Un subconjunto cerrado $S\subset \mathcal{V}^{trop}(\mathbb{R})$ es **convexo en términos de líneas quebradas** si para cada $s_1, s_2\in S(\mathbb{Q})$ cada "segmento quebrado" conectando s_1 y s_2 está completamente contenido en S.

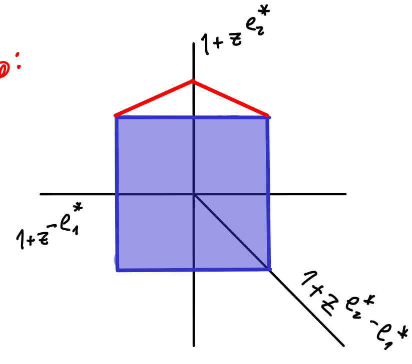
Segmento quebrado: Restricción de una línea quebrada $\gamma:(-\infty,0]\to \mathcal{V}^{trop}(\mathbb{R})$ a un intervalo $[t_1,t_2]$.



Ejemplo:



No Ejemplo:



Se puede utilizar convexidad en términos de líneas quebradas para describir el espacio de secciones o anillo de secciones de un divisor o haz lineal como el caso tórico.

El anillo graduado:

Def (Gross-Hacking-Keel-Kontsevich): Un subconjunto cerrado $S\subset \mathcal{V}^{trop}(\mathbb{R})$ es **positivo** si para cada $a,b\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$, $p\in aS(\mathbb{Z})$, $q\in bS(\mathbb{Z})$, y $r\in\mathcal{V}^{trop}(\mathbb{Z})$ con $\alpha^r_{pq}\neq 0$, tenemos que: $r\in(a+b)S$.

Teorema (Cheung, M, Nájera Chávez): El subconjunto cerrado $S\subset \mathcal{V}^{trop}(\mathbb{R})$ es positivo si y solo si S es convexo en términos de líneas quebradas.

Idea de la prueba:

El problema - Funciones ϑ se parametrizan con **direcciones asintóticas** de líneas quebradas. Convexidad en términos de líneas quebradas se trata los **extremos** de segmentos quebrados.

La resolución - Reinterpretar multiplicación como promedio ponderado por el tiempo (motivado por "jagged paths" de Gross-Siebert)

Un poco más honesto: Aún no podemos expresar la multiplicación en dichos términos. Sin hacer referencia a los pares de líneas quebradas no sabemos decir cuales segmentos quebrados no extremos contribuyen al producto. En cambio podemos decir que un segmento contribuye a un producto después de escalar los punto tropicales. $\vartheta_{ap}\cdot\vartheta_{bq}\rightsquigarrow\vartheta_{Nap}\cdot\vartheta_{Nbq}$. Lo que hacemos se ve como transformación

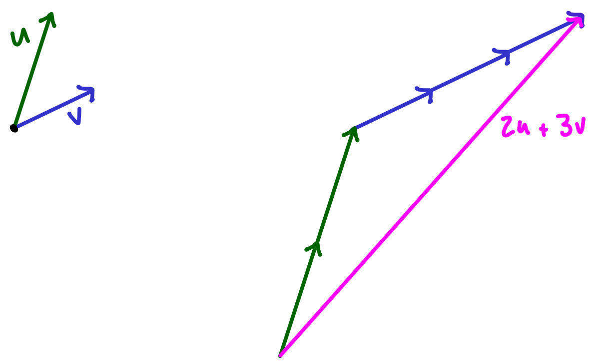
observación de Greg Muller → de Fourier, cambiando momento por posición. Entender eso y formular la multiplicación de funciones ϑ en términos de segmentos quebrados sería un buen proyecto para estudiante de doctorado.

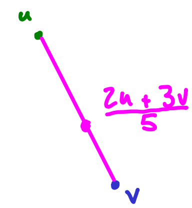
Caso tórico:

Adición normal

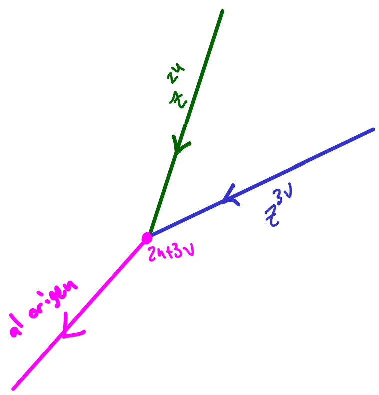
$$z^{2u}\cdot z^{3v} = z^{2u+3v}$$

promedio ponderado

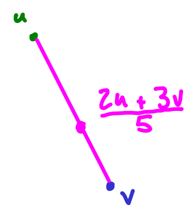




Líneas quebradas

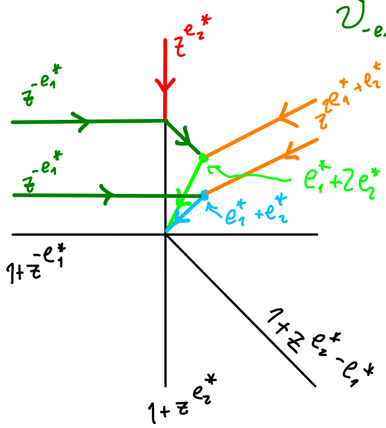


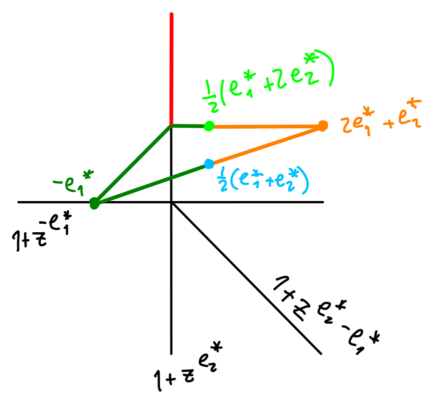
Segmentos quebrados



Caso de variedades de conglomerado:

$$\vartheta^{\mathcal{V}^\vee}_{-e_1^*}\cdot\vartheta^{\mathcal{V}^\vee}_{2e_1^*+e_2^*} = \vartheta^{\mathcal{V}^\vee}_{e_1^*+e_2^*} + \vartheta^{\mathcal{V}^\vee}_{e_1^*+2e_2^*}$$





Convexo en términos de líneas quebradas ⇒ positivo:

- Empiece con $a,b\in\mathbb{Z}_{>0}$, $p\in aS(\mathbb{Z})$, $q\in bS(\mathbb{Z})$, y $r\in\mathcal{V}^{trop}(\mathbb{Z})$ con $\alpha^r_{p,q}\neq 0$.
- Elige (γ_1,γ_2) contribuyendo a $\alpha^r_{p,q}$.
- Utilizando (γ_1,γ_2), construye un segmento quebrado γ conectando $\frac{p}{a}\in S(\mathbb{Q})$ con $\frac{q}{b}\in S(\mathbb{Q})$, y pasando por $\frac{r}{a+b}$.
- S convexo en términos de líneas quebradas $\Rightarrow$ $\frac{r}{a+b}\in S$, y $r\in(a+b)S$.

Positivo ⇒ Convexo en términos de líneas quebradas:

- Similar, pero empiece con el segmento quebrado y construye (γ_1,γ_2).

Conclusión: La noción natural de convexidad en $\mathcal{V}^{trop}(\mathbb{R})$ tiene las mismas consequencias geometricas para modelos mínimos parciales de $\mathcal{V}^\vee$ que convexidad en $M_\mathbb{R}$ tiene para variedades tóricas $Y\supset T_N$.

Dualidad de Batyrev y Batyrev-Borisov

Def: Una variedad normal Y es **Gorenstein Fano** si $-K_Y$ es Cartier ($\rightsquigarrow$ Gorenstein) y amplio ($\rightsquigarrow$ Fano).

Un divisor D es **Cartier** si localmente D es el divisor de ceros y polos de una función racional.

Sea Y_Σ la variedad tórica definida por el abanico Σ en $N_{\mathbb{R}}$.

$$-K_{Y_\Sigma} = \sum_{\rho \in \Sigma(1)} D_\rho$$ $\leftarrow$ rayos de Σ

conos máximales de Σ

$-K_{Y_\Sigma}$ es Cartier $\iff$ para cada $\sigma \in \Sigma(\text{máx})$ existe $m_\sigma \in M$ tal que

$$\langle n_\rho, m_\sigma \rangle = 1 \quad \text{para cada } \rho \in \sigma(1)$$

generador primativo de ρ

En tal caso $-K_{Y_\Sigma}\big|_{U_\sigma} = (z^{m_\sigma})$.

Def: Un politopo integral $P \subset M_{\mathbb{R}}$ es **reflexivo** si su politopo polar $P^\circ := \{ n \in N_{\mathbb{R}} : \langle n, m \rangle \geq -1 \ \forall\, m \in P\}$ también es un politopo integral.

Teorema:
- Si Y es una variedad tórica Gorenstein Fano de dimensión d, P_{-K_Y} es un politopo reflexivo de dimensión d.
- Si P es un politopo reflexivo de dimensión d, la variedad tórica proyectiva asosiada a P es Gorenstein Fano.

Sea Y una variedad tórica Gorenstein Fano y $D \in |-K_Y|$. $\leftarrow$ sistema lineal de $-K_Y$

Por la formula de adjunción: $K_D = (K_Y + D)|_D = 0$

Y Gorenstein $\Rightarrow$ D genérico tiene en peor caso singularidades canónicales.

D genérico es una variedad Calabi-Yau con singularidades leves.

El espejo de Landau-Ginzburg

Sea Y_P una variedad tórica Gorenstein Fano y $D = \sum_{\rho \in \Sigma(1)} D_\rho$ la frontera tórica.

El espejo de Landau-Ginzburg es $W = \sum_{\rho \in \Sigma(1)} z^{n_\rho} : T^\vee \longrightarrow \mathbb{C}$. $\leftarrow$ el toro dual

El dual de Batyrev

Los conjuntos de niveles de W casi son Calabi-Yau, pero no son compactos.

Podemos intentar reinterpretar W como sección de $\mathcal{O}_X(D')$ para algún $X \supset T^\vee$.

La solución minimalista: $X :=$ variedad tórica proyectiva asociada a $\mathrm{Newt}(W)$.

Observación: $\mathrm{Newt}(W) = P^\circ$. X también es Gorenstein Fano.

X e Y son **duales de Batyrev** y sus hiper-superficies anticanónicas son variedades Calabi-Yau espejos.

Hay una versión de esta construcción para intersecciones completas de codimensión d por Batyrev-Borisov.

Programa de investigación con Bosco, Lara Bossinger, Mandy Cheung, y Alfredo Nájera Chávez — Generalizar estás construcciónes para tratar modelos mínimos Gorenstein Fano de variedades de conglomerado en vez de variedades tóricas Gorenstein Fano.

Un paso (investigando con Bosco): Generalizar "politopo reflexivo en $M_{\mathbb{R}}$" a "subconjunto reflexivo de $\mathcal{V}^{\mathrm{trop}}(\mathbb{R})$". Contestar la siguiente pregunta:

¿Hay una correspondencia 1-1 entre subconjuntos reflexivos de $\mathcal{V}^{\mathrm{trop}}(\mathbb{R})$ y modelos mínimos Gorenstein Fano de $\mathcal{V}^{\vee}$?

Def: Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{V}^{\vee}$ variedades de conglomerado tal que:

- $\{\vartheta_p^{\mathcal{V}^\vee} : p \in \mathcal{V}^{\mathrm{trop}}(\mathbb{Z})\}$ es una base para $\mathcal{O}(\mathcal{V}^\vee)$
- $\{\vartheta_v^{\mathcal{V}} : v \in \mathcal{V}^{\vee\,\mathrm{trop}}(\mathbb{Z})\}$ es una base para $\mathcal{O}(\mathcal{V})$

El **emparejamiento tropical** es

$$\begin{aligned} \langle \cdot , \cdot \rangle : \mathcal{V}^{\mathrm{trop}}(\mathbb{Z}) \times \mathcal{V}^{\vee\,\mathrm{trop}}(\mathbb{Z}) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ (p , v) &\longmapsto v(\vartheta_p) \end{aligned}$$

Ojo: hay 2 opciones acá — $v(\vartheta_p)$ y $p(\vartheta_v)$. Se conjetura que son iguales. Trabajando en esto con Mandy Cheung, Travis Mandel y Greg Muller.

Def (Bosco, M): Sea $S \subset \mathcal{V}^{\mathrm{trop}}(\mathbb{R})$. El **subconjunto polar de S** es

$$S^\circ := \{ v \in \mathcal{V}^{\vee\,\mathrm{trop}}(\mathbb{R}) : \langle p, v\rangle \geq -1 \quad \forall\, p \in S(\mathbb{Q})\}.$$

Def: Sea $S \subset \mathcal{V}^{\mathrm{trop}}(\mathbb{R})$. La **envolvente convexa de S en términos de líneas quebradas** es

$$\mathrm{conv}_{BL}(S) := \bigcap_{\substack{S(\mathbb{Q}) \subset S' \\ S' \text{ convexo en términos} \\ \text{de líneas quebradas}}} S'.$$

Def (Bosco, M): Sea $S \subset \mathcal{V}^{\mathrm{trop}}(\mathbb{R})$. S es **integral** si existe $A \subset \mathcal{V}^{\mathrm{trop}}(\mathbb{Z})$ finito tal que $S(\mathbb{Q}) = \mathrm{conv}_{BL}(A)(\mathbb{Q})$.

Def (Bosco, M): Sea $S \subset \mathcal{V}^{\mathrm{trop}}(\mathbb{R})$ un subconjunto integral. S es **reflexivo** si $S^\circ \subset \mathcal{V}^{\vee\,\mathrm{trop}}(\mathbb{R})$ también es integral.

Esperanza:

- Si (Y, D) es un modelo mínimo Gorenstein Fano de $\mathcal{V}^\vee$, $S_D \subset \mathcal{V}^{\mathrm{trop}}(\mathbb{R})$ es reflexivo.

Subconjunto definido por emparejamiento con componentes de D

- Si $S \subset \mathcal{V}^{\mathrm{trop}}(\mathbb{R})$ es reflexivo, la variedad proyectiva definida por S es un modelo mínimo Gorenstein Fano de $\mathcal{V}^\vee$.

Def: Sea $f = \sum_{v \in \mathcal{V}^{\vee\, trop}(\mathbb{Z})} a_v \vartheta_v^{\vee} : \mathcal{V} \to \mathbb{C}$ una función regular.

El **subconjunto de Newton tropical de f** es $\mathrm{Newt}_{\vartheta}(f) := \mathrm{Conv}_{BL}(v : a_v \neq 0)$.

Def: Sea $f = \sum_{v \in \mathcal{V}^{\vee\, trop}(\mathbb{Z})} a_v \vartheta_v^{\vee} : \mathcal{V} \to \mathbb{C}$ una función regular.

$$f^{trop} : \mathcal{V}^{trop}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$p \longmapsto \min_{a_v \neq 0} (\langle p, v \rangle) \leftarrow \mathrm{ord}_{D_p}(f)$$

Teorema (Bosco, M): Sea $f = \sum_{v \in \mathcal{V}^{\vee\, trop}(\mathbb{Z})} a_v \vartheta_v^{\vee} : \mathcal{V} \to \mathbb{C}$ una función regular, y

$S_f := \{ p \in \mathcal{V}^{trop}(\mathbb{R}) : f^{trop}(p) \geq -1 \}$. Entonces:

$S_f(\mathbb{Q}) = \mathrm{Newt}_{\vartheta}(f)^{\circ}(\mathbb{Q})$.

Corolario (Bosco, M): Sea (Y, D) un modelo mínimo Gorenstein Fano de $\mathcal{V}^{\vee}$, con $D = D_1 + \dots + D_r$. El espejo Landau-Ginzburg es $W = \vartheta_{\mathrm{ord}_{D_1}(\cdot)} + \dots + \vartheta_{\mathrm{ord}_{D_r}(\cdot)} : \mathcal{V} \to \mathbb{C}$, y entonces $S_D = S_W$,

$S_D(\mathbb{Q}) = \mathrm{Newt}_{\vartheta}(W)^{\circ}(\mathbb{Q})$. ← Como el caso tórico

Para estudiar la esperanza hay que contestar:

Pregunta 1:

¿Hay un criterio de Cartier para divisores en modelos mínimos parciales de variedades de conglomerado?

Pregunta 2:

¿Hay un criterio de amplitud para divisores en modelos mínimos parciales de variedades de conglomerado?

Los criterios en el caso tórico:

Sea $D = \sum a_\rho D_\rho$ un divisor en la variedad tórica Y_Σ.

Criterio 1: D es Cartier si y solo si para cada $\sigma \in \Sigma(\text{máx})$ existe $m_\sigma \in M$ tal que $\langle n_\rho, m_\sigma \rangle = -a_\rho$ para cada $\rho \in \sigma(1)$.

Criterio 2: Si Y_Σ es completa y D Cartier, D es amplio si y solo si:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_D : |\Sigma| &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto \langle n, m_\sigma \rangle \quad \text{para } n \in \sigma \end{aligned}\right\} \text{"función soporte de D"}$$

es estrictamente convexa.

Para generalizar el criterio de Cartier, hay que tener una noción de abanico para el modelo mínimo (Y, D) de $\mathcal{V}^\vee$.

Def: El **complejo de intersección dual** $\Sigma_{(Y,D)}$ es un complejo de conos en $\mathcal{V}^{\vee\,trop}(\mathbb{R})$ cuyos conos son $\{\sigma_I := \mathrm{Cono}(\mathrm{ord}_{D_i}(\cdot) : i \in I) : I \subset \{1, \dots, r\},\ \bigcap_{i \in I} D_i \neq \emptyset\}$.

- Los rayos son $\mathbb{R}_{\geq 0} \cdot \mathrm{ord}_{D_i}(\cdot)$, y tenemos un cono para cada intersección no vacía de los componentes D_i.
- En el caso tórico $\Sigma_{(Y,D)}$ es el abanico de Y.
- Es más fácil ver que no haya problemas con definir σ_I así trabajando con $D^{can}_{(Y,D)}$.

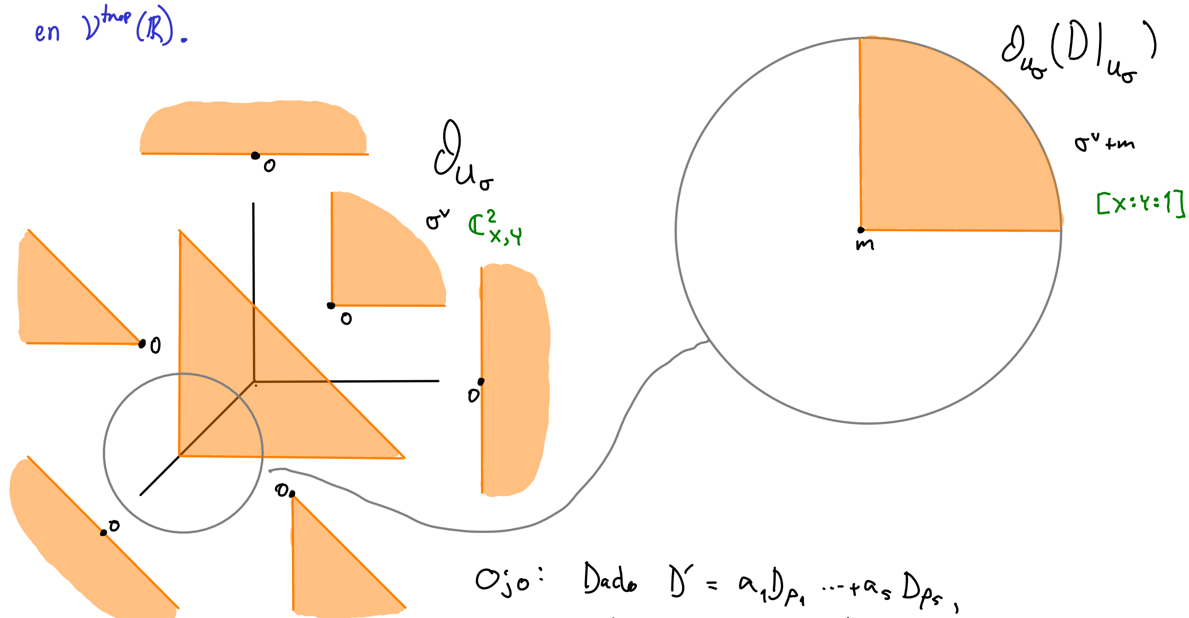
Def (Bosco, M): Define $\sigma_I^\vee := \{p \in \mathcal{V}^{trop}(\mathbb{R}) : \langle p, v \rangle \geq 0 \ \forall v \in \sigma_I\}$,

$A_{\sigma_I} := \mathbb{C}[\vartheta_p^{\mathcal{V}^\vee} : p \in \sigma_I^\vee(\mathbb{Z})]/\sim$, y

$U_{\sigma_I} := \mathrm{Spec}(A_{\sigma_I})$. $\widetilde{Y}_{\Sigma_{(Y,D)}}$ es el esquema con afines abiertos U_{σ_I}, $\sigma_I \in \Sigma_{(Y,D)}$, y pegamento definido por relaciones entre funciones ϑ.

Pregunta 3: Sea (Y, D) un modelo mínimo proyectivo dado por un subconjunto $S \subset \mathcal{V}^{trop}(\mathbb{R})$. Entonces $\Sigma_{(Y,D)}$ es el "abanico normal" de S. ¿Tenemos que $\widetilde{Y}_{\Sigma_{(Y,D)}} = Y$?

Problema: En el caso tórico se prueba esto utilizando traslaciones en $M_\mathbb{R}$ – que no existen en $\mathcal{V}^{trop}(\mathbb{R})$.



Ojo: Dado $D' = a_1 D_{p_1} + \dots + a_s D_{p_s}$, define $W_{D'} := z^{a_1 n_1} + \dots + z^{a_s n_s}$.

Entonces $\sigma^\vee = \{m \in M_\mathbb{R} : W_{D|_{U_\sigma}}^{trop}(m) \geq 0\}$ y $\sigma^\vee + m = \{m' \in M_\mathbb{R} : W_{D|_{U_\sigma}}^{trop}(m') \geq -1\}$.

En el caso de variedades de conglomerado, suele pasar que $\{p \in \mathcal{V}^{trop}(\mathbb{R}) : W_{D|_{U_\sigma}}^{trop}(p) \geq 0\}$ y $\{p \in \mathcal{V}^{trop}(\mathbb{R}) : W_{D|_{U_\sigma}}^{trop}(p) \geq -1\}$ tienen formas distintas — no se puede identificar sus $\mathcal{V}^{trop}(\mathbb{Z})$-puntos. $\dfrac{\vartheta_p^{\mathcal{V}^\vee}}{\vartheta_p^{\mathcal{V}^\vee}}$ generalmente no es una función ϑ.

Sin embargo, tenemos el **candidato criterio de Cartier:**

¿ D es Cartier si y solo si por cada $\sigma \in \Sigma_{(Y,D)}(\text{máx})$ existe $p_\sigma \in \mathcal{V}^{trop}(\mathbb{Z})$ tal que $\langle p_\sigma, v_\rho \rangle = -a_\rho$ para cada $\rho \in \sigma(1)$?

Otra opción que estamos explorando en el caso de variedades proyectivas es utilizar el atlas de afines abiertos de $\mathbb{P}^N$, sin hacer referencia al abanico.

Para generalizar el criterio de amplitud, hay que tener una noción de convexidad estricta para funciones soporte

$$\varphi_D : |\Sigma_{(Y,D)}| \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$v \longmapsto \langle p_\sigma, v \rangle \quad \text{para } v \in \sigma.$$

<u>Def</u> (Bosco, M): φ_D es una función soporte **convexa en términos líneas quebradas** si para cada segmento quebrado $\gamma : [t_1, t_2] \longrightarrow |\Sigma_{(Y,D)}|$ y $t \in [t_1, t_2]$, tenemos que:

$$\varphi_D(\gamma(t)) \geq \left(\frac{t_2 - t}{t_2 - t_1}\right) \varphi_D(\gamma(t_1)) + \left(\frac{t - t_1}{t_2 - t_1}\right) \varphi_D(\gamma(t_2)).$$

φ_D es **estrictamente convexa en términos líneas quebradas** si también para cada $\sigma \in \Sigma_{(Y,D)}$:

$$\langle p_\sigma, v \rangle = \varphi_D(v) \iff v \in \sigma.$$

Candidato criterio de amplitud: El divisor Cartier D es amplio si y solo si φ_D es estrictamente convexa en términos líneas quebradas.

Una herramienta importante de la geometría convexa poliedral para las pruebas tóricas es la suma de Minkowski: $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$.

En términos geometricos: $\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y(D_1)) \otimes \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y(D_2)) \hookrightarrow \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y(D_1 + D_2))$

$$P_{D_1} \quad + \quad P_{D_2} \qquad \subset \qquad P_{D_1 + D_2}$$

<u>Def</u> (Bosco, M): Sean S y T subconjuntos de $\mathcal{V}^{trop}(\mathbb{R})$. La **suma de Minkowski tropical** de S y T es

$$S +_\vartheta T := \{p \in \mathcal{V}^{trop}(\mathbb{Q}) : \exists\, s \in S(\mathbb{Q}),\, t \in T(\mathbb{Q}),\, a \in \mathbb{Z}_{>0} \text{ tal que } \alpha^{ap}_{as,at} \neq 0\}$$
$$= \{p \in \mathcal{V}^{trop}(\mathbb{Q}) : \exists\, \gamma : [0, \tau] \to \mathcal{V}^{trop}(\mathbb{R}) \text{ tal que } \gamma(0) \in S(\mathbb{Q}),\, \gamma(\tau) \in T(\mathbb{Q}),\, \gamma(\tfrac{\tau}{2}) = \tfrac{p}{2}\}$$

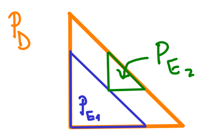
Casi Teorema (Bosco, M): $\mathrm{Conv}_{BL}(S +_g T) = \mathrm{conv}_{BL}(S) +_g \mathrm{Conv}_{BL}(T)$

Además de las aplicaciones en pruebas, la suma de Minkowski tropical tendra un papel importante en la generalización de la construcción de Batyrev-Borisov.

(Y, D) Gorenstein Fano, $D = E_1 + \cdots + E_s$ partición globalmente generada.

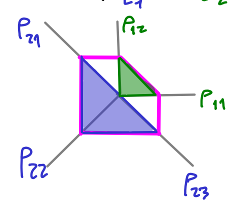
$P_D = P_{E_1} + \cdots + P_{E_s} \subset M_{\mathbb{R}}$ (Codim s Calabi-Yau dado por intersección de divisores genericos en $|E_i|$)

Ejemplo (Calculando con Bosco): $(\mathbb{P}^2, E_1, E_2)$ $\qquad P' := \mathrm{conv}\left(\bigcup_{i=1}^{s} P_{E_i}\right)$



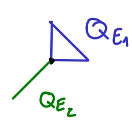
$\subset M_{\mathbb{R}}$ $\rightsquigarrow$

$P' = \mathrm{conv}(P_{E_1} \cup P_{E_2})$

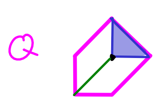


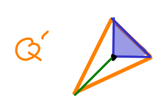
$\Sigma \subset M_{\mathbb{R}}$

$$Q_{E_i} := \{ n \in N_{\mathbb{R}} : \langle n, m \rangle \geq \varphi_{\sum_j D_{ij}}(m) \quad \forall\, m \in M_{\mathbb{R}} \}$$



$Q := Q_{E_1} + \cdots + Q_{E_s}$ $\qquad$ $Q' := \mathrm{conv}\left(\bigcup_{i=1}^{s} Q_{E_s}\right)$





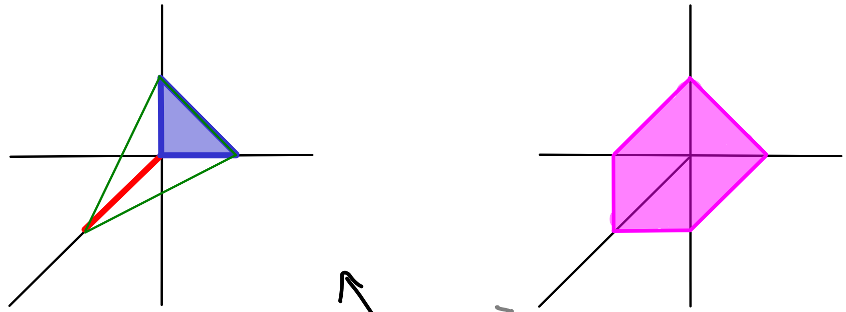
P_D y Q' son politopos reflexivos duales

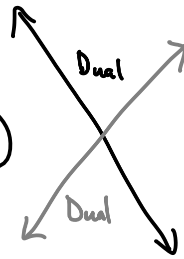
P' y Q son politopos reflexivos duales

Las intersecciones completas definidas por $P_D = P_{E_1} + \cdots + P_{E_s}$ y $Q = Q_{E_1} + \cdots + Q_{E_s}$ forman pares espejos de variedades Calabi-Yau.

Caso de variedades de conglomerado (con Bosco):

$\nabla = \mathrm{Conv}_{BL}(\nabla_1 \cup \nabla_2)$ $\Delta^* = \nabla_1 +_g \nabla_2$





$\Delta = \mathrm{Conv}_{BL}(\Delta_1 \cup \Delta_2)$ $\nabla^* = \Delta_1 +_g \Delta_2$