

2020 计蒜之道 预赛 第一场 题解

五子棋

根据棋盘上棋子的数量，判断应该谁走下一步。

枚举落子的位置，然后检查是否会使得棋盘出现至少五子连珠的局面。

注意边界、超过五子、无解输出 `tie` 等特殊情况。

染色

令 f_i 表示前 i 个元素的最大贡献。

如果没有特殊区间，显然转移方程为 $f_i = \max(w_i, b_i) + f_{i-1}$ 。

简单

区间不相交时，在 f_i 从 f_{i-1} 转移的基础上，当处理到区间 $[l, r]$ 的右端点 r 时考虑一下从 f_{i-1} 的转移即可($f_{i-1} + \text{sum}(l, r) + c$, $\text{sum}(l, r)$ 表示区间 $[l, r]$ 对应颜色贡献的和， c 表示这个区间带来的额外贡献)。

预处理每个元素染成白色/黑色的前缀和，时间复杂度 $O(n + m)$ 。

中等

发现 f_i 转移时可以枚举 j , ($j < i$)，假设 $(j, i]$ 范围内全部染成黑色 / 白色，求出所有在 $(j, i]$ 内特殊区间的价值之和就可以进行转移了，定义这个值为 $\text{calc}(j, i, \text{black/white})$ ，同时定义每个位置涂成黑色 / 白色带来贡献的前缀和为 b_i / w_i ，先写出转移方程：

$$f_i = \max_{j=0}^{i-1} \{f_j + \max\{\text{calc}(j, i, \text{black}) + b_i - b_j, \text{calc}(j, i, \text{white}) + w_i - w_j\}\}$$

(无需考虑跨过 j 的特殊区间，这些区间会被更小的 j 考虑到)

如果对于每个 j 都枚举所有区间判断并求和，总复杂度是 $O(n^2 m)$ ，考虑优化：转移过程中 i 是递增的，动态维护右端点 $\leq i$ 的区间并保持左端点有序，就可以利用前缀/后缀和优化转移了。维护过程可以用数组+插入排序或其他数据结构实现，当 i 加 1 后将所有以 i 为右端点的区间加入数据结构中，按顺序枚举 j 即可，这样时间复杂度变为 $O(n^2 + m)$ 。

仍然无法通过本题，发现 m 较小，可以改为枚举所有右端点 $\leq i$ 的区间而非所有 $j(j < i)$ ，时间复杂度 $O(n + m^2)$ 。

也可以转化为最大权闭合子图问题求最小割，~~需要线段树/ST表优化建图，也不知道能不能跑过。~~

困难

用线段树代替上文的数据结构，由于转移时 b_i 和 w_i 是定值，用线段树维护 $f_j - b_j$ 或 $f_j - w_j$ ，加入一个新的区间 $[l, i]$ 就相当于线段树 $l - 1$ 之前的位置全部加上新区间的贡献，然后求全局最大值（ i 后面的部分在求出 f 前可以设为 $-\infty$ ）即可。

时间复杂度 $O((n + m) \log n)$ 。