Bericht zur Hausübung 5.

„Simulation eines Diffusionsprozesses“

LV-Leiter: Prof. Georg Pflug

Timur Sudak

A01277687

Wien

2017

*In dieser Hausaufgabe machen wir **Ito-Simulationen**. Aber dafür brauchen wir **Euler-Maruyama-Verfahren.***

Wir haben für unsere erste Simulation so eine SDE Formel:

$$dXt = Xt + (6 - 2 * Xt) + \sqrt{Xt} * \sigma * dWt$$

Und dafür nutzen wir Euler-Maruyama-Verfahren:

$$Xt = Xt - 1 + U * (\frac{6-2*Xt-1}{anz.schritte}) + ((\frac{\sqrt{Xt-1}}{\sqrt{anz.schritte}}) * \sigma)$$

Dann schreiben wir unsere zweite Formel:

$$DXt = Xt + U * \left((6 - 2 * X) + cos(Xt)\right) + \sqrt{Xt} * \sigma * dWt$$

Und unter Verwendung von Euler-Maruyama-Verfahren, kriegen wir:

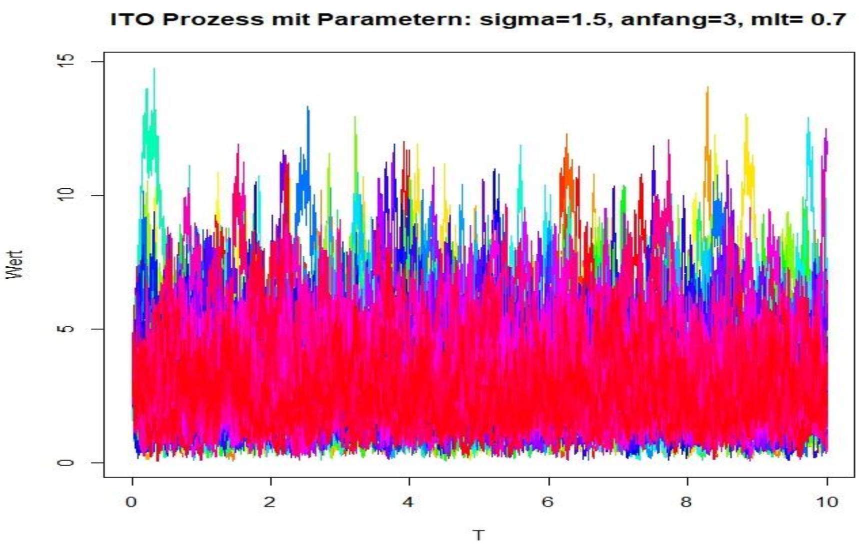
$$Xt = Xt - 1 + U * \left(\frac{(6-2*Xt-1)+cos(Xt-1)}{anz.schritte}\right) + \left(\frac{\sqrt{Xt-1}}{\sqrt{anz.schritte)}}\right) * \sigma$$

wo U und σ unsere Konstante sind.

Jetzt nehmen wir unsere erste Formel. Wir wollen das simulieren und verschiedene Parameter vergleichen.

Wir schauen jetzt, wie verändern sich Simulationen, wenn wir sigma in erster Modell Wechseln. Aber unsere sigma hier ist keine Standardabweichung, sondern einfache Konstante, die ein Einfluss auf Diffusion hat.

Hier sigma=1.5:

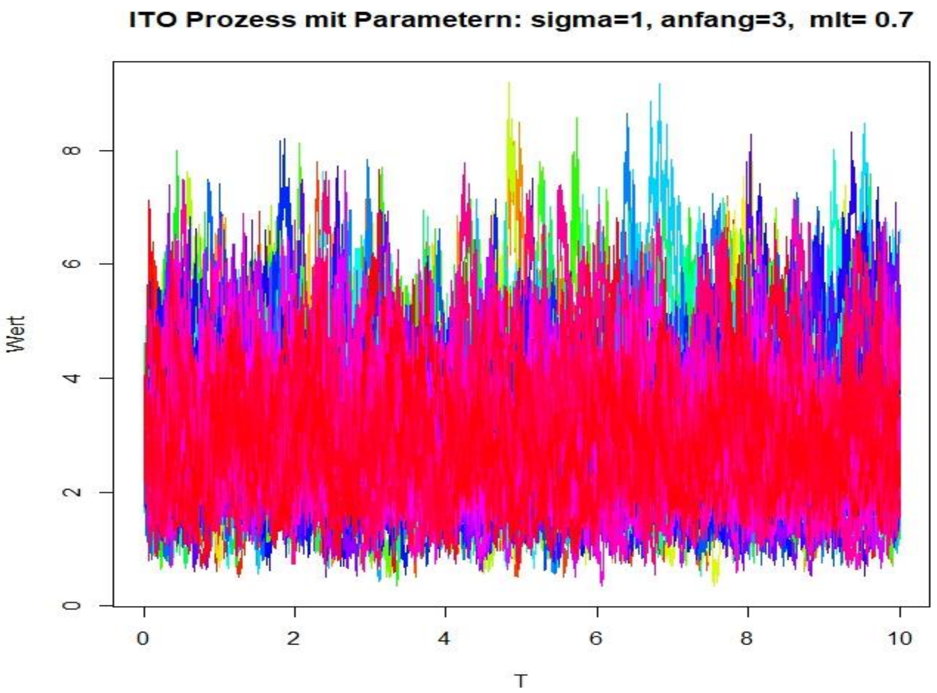


Als wir wissen aus unserer Formel:

$$Xt = Xt - 1 + U * (\frac{6 - 2 * Xt - 1}{anz.schritte}) + ((\frac{\sqrt{Xt - 1}}{\sqrt{anz.schritte}}) * \sigma)$$

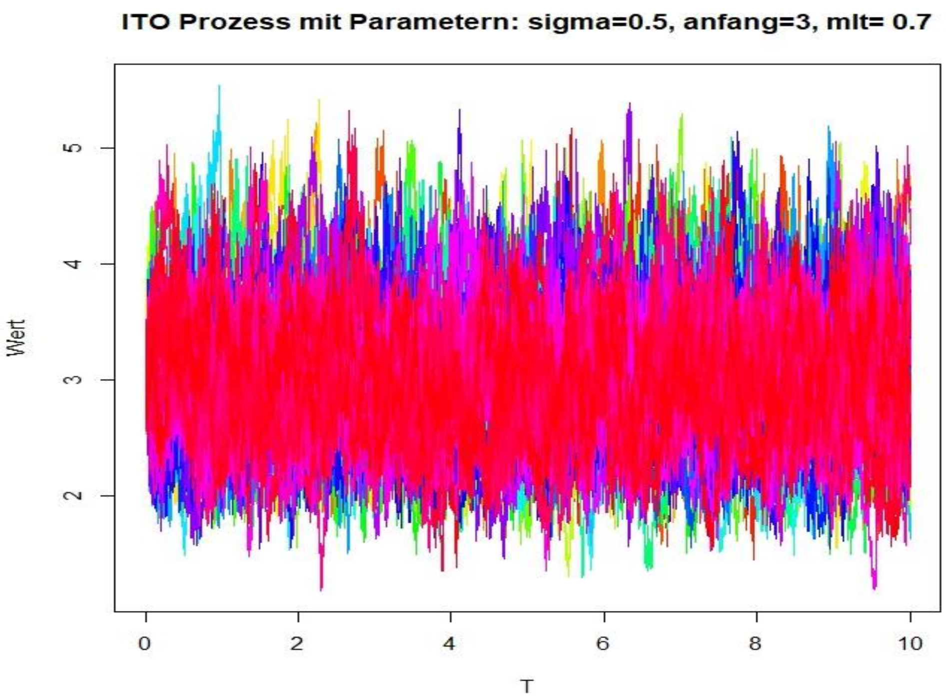
dass wenn bei uns sigma zu groß ist, dann führt bei diesem Prozess eine Diffusion. Was heißt in unserem Modell die Abweichung von dem Mittelwert.

Sigma=1:

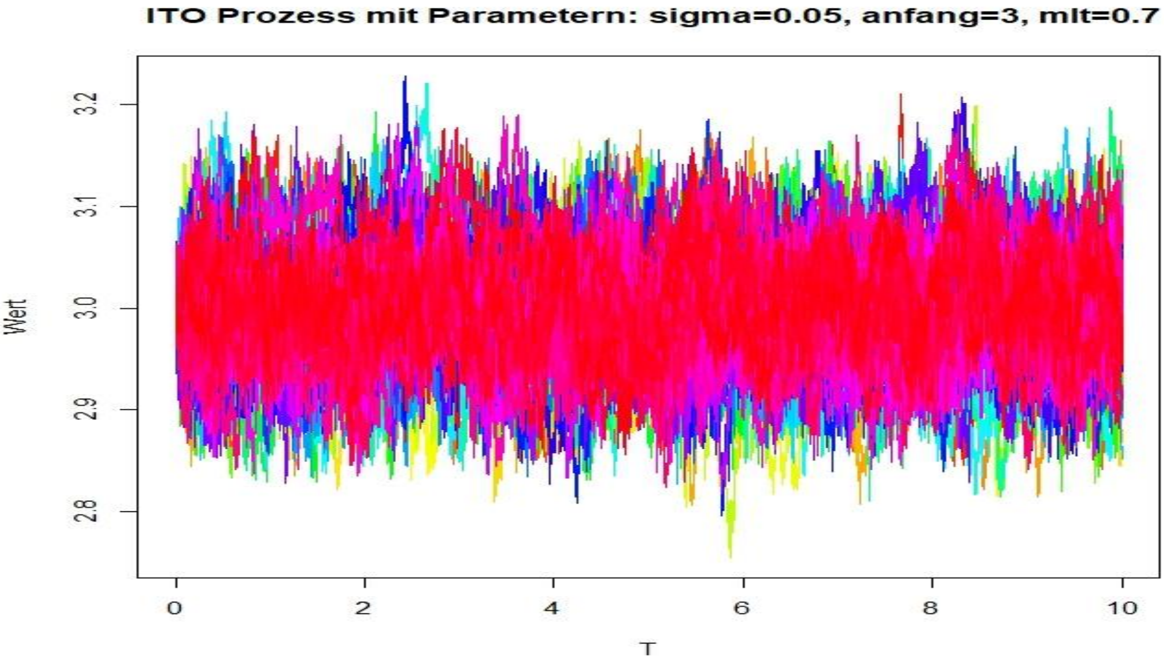


Bei diesem Bild sehen wir schon, dass hier Diffusion schwächer im Vergleich zum ersten Bild und der Prozess schwankt weniger um den Mittelwert.

Sigma=0.5:



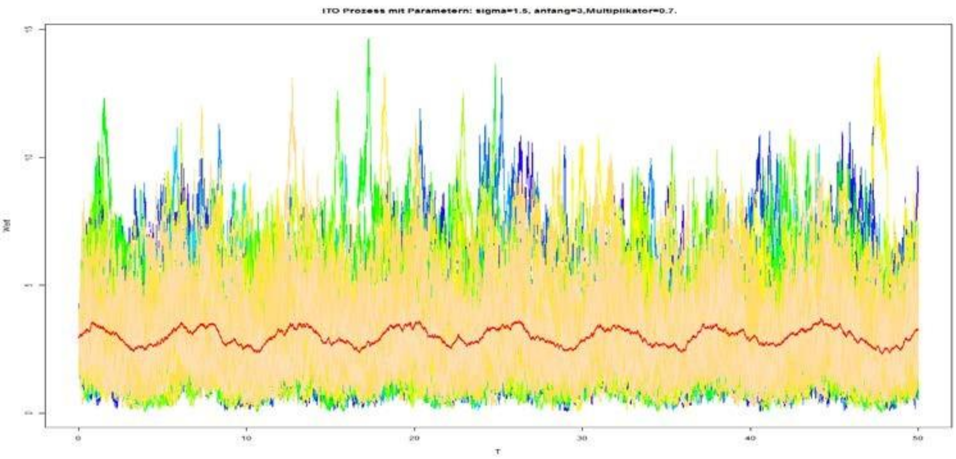
Sigma=0.05:



Bei letzten zwei Bilder sehen wir sehr kleine Diffusion und kriegen wir mean reverting zu oft. Es heißt, dass Drift bei unserem Prozess führt.

Jetzt schauen wir zweite SDE an. Und vergleichen verschiedene Parametern in diesem Modell: Hier haben wir zwei Konstante. Das ist Multiplikator und Sigma, die wieder nur Konstanten sind, die sein Einfluss auf Drift und Diffusion haben.

Fangen wir jetzt wieder mit Sigma=1.5 an:

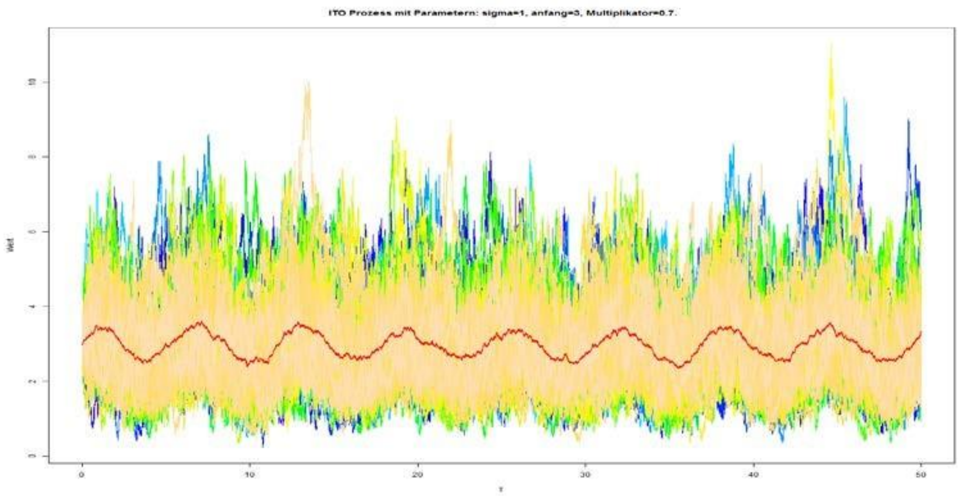


Hier haben wir wieder eine Führung von Diffusion. Schauen jetzt wieder unsere Formel an

$$Xt = Xt-1 + U * \left(\frac{(6-2*Xt-1)+cos(Xt-1)}{anz.schritte}\right) + \left(\frac{\sqrt{Xt-1}}{\sqrt{anz.schritte)}}\right) * \sigma$$

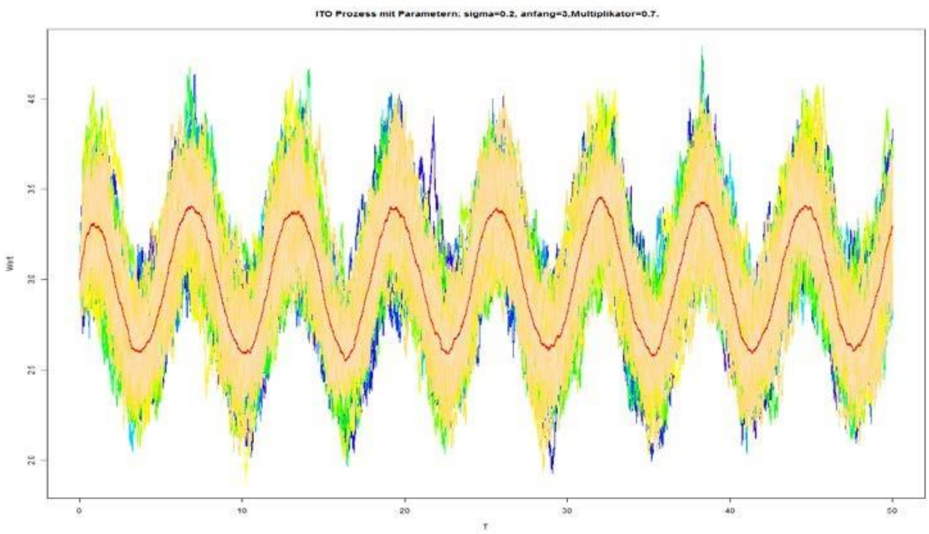
wenn wir zu große Sigma machen, dann kriegen wir großer $ddWW$, was zufälliger Prozess ist. Dann führt bei uns Diffusion.

Dann ändern wir Sigma hier auf 1:



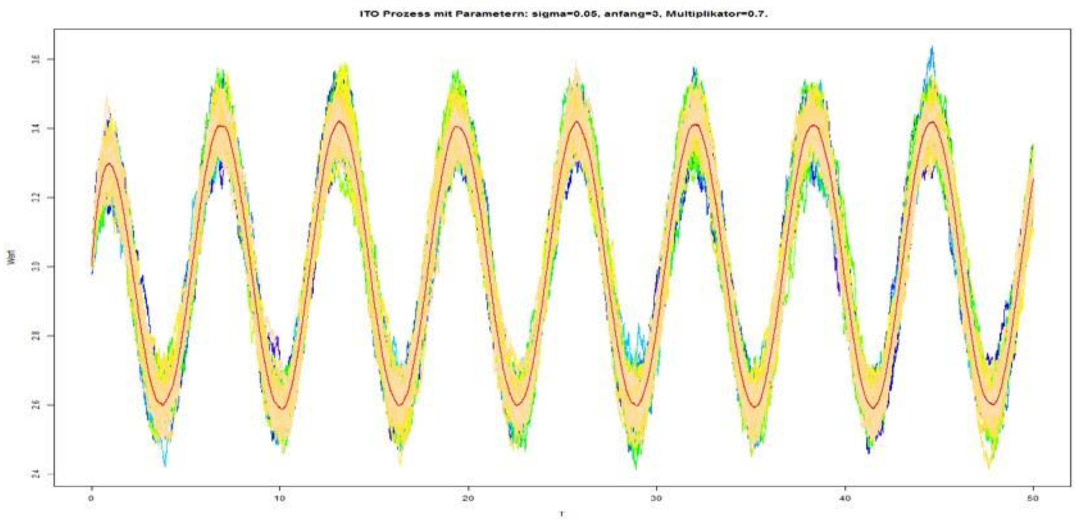
Dann schwächt hier wieder Diffusion und kommt hier näher zum mean Reverting mit Zyklusschwankungen.

Machen wir unsere Sigma noch kleiner, jetzt Sigma=0.2:



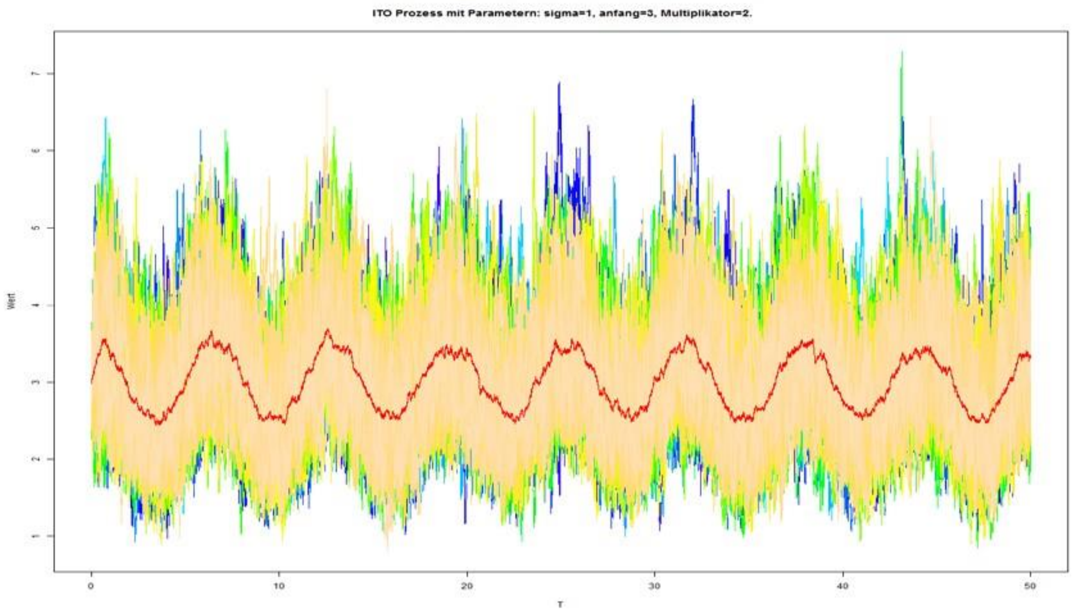
Hier geht es komplett um Mean reverting mit Zyklusschwankungen. Als wir wissen aus unserer Gleichung, dass bei kleinem sigma Diffusion seine Macht verliert. Und dann hat die Macht Drift mit cos in seiner Funktion. Deshalb sehen wir einen Prozess, der der Form von cos hat.

Aber bei Sigma=0.05:



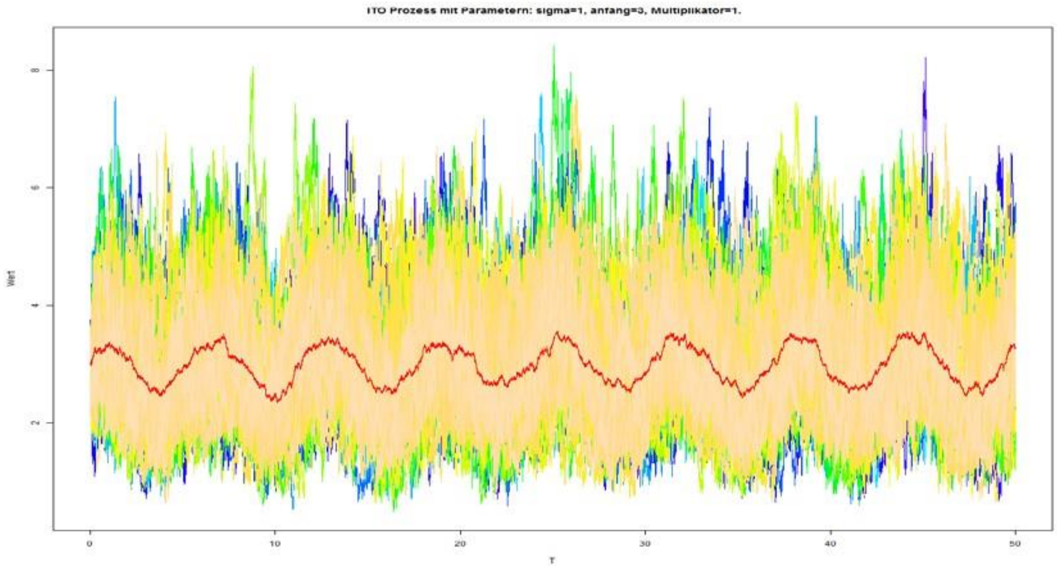
Jetzt können wir auch Multiplikator, was die Konstante bei Drift ist.

Setzen wir am Anfang zum Beispiel Multiplikator=2, sigma=1:



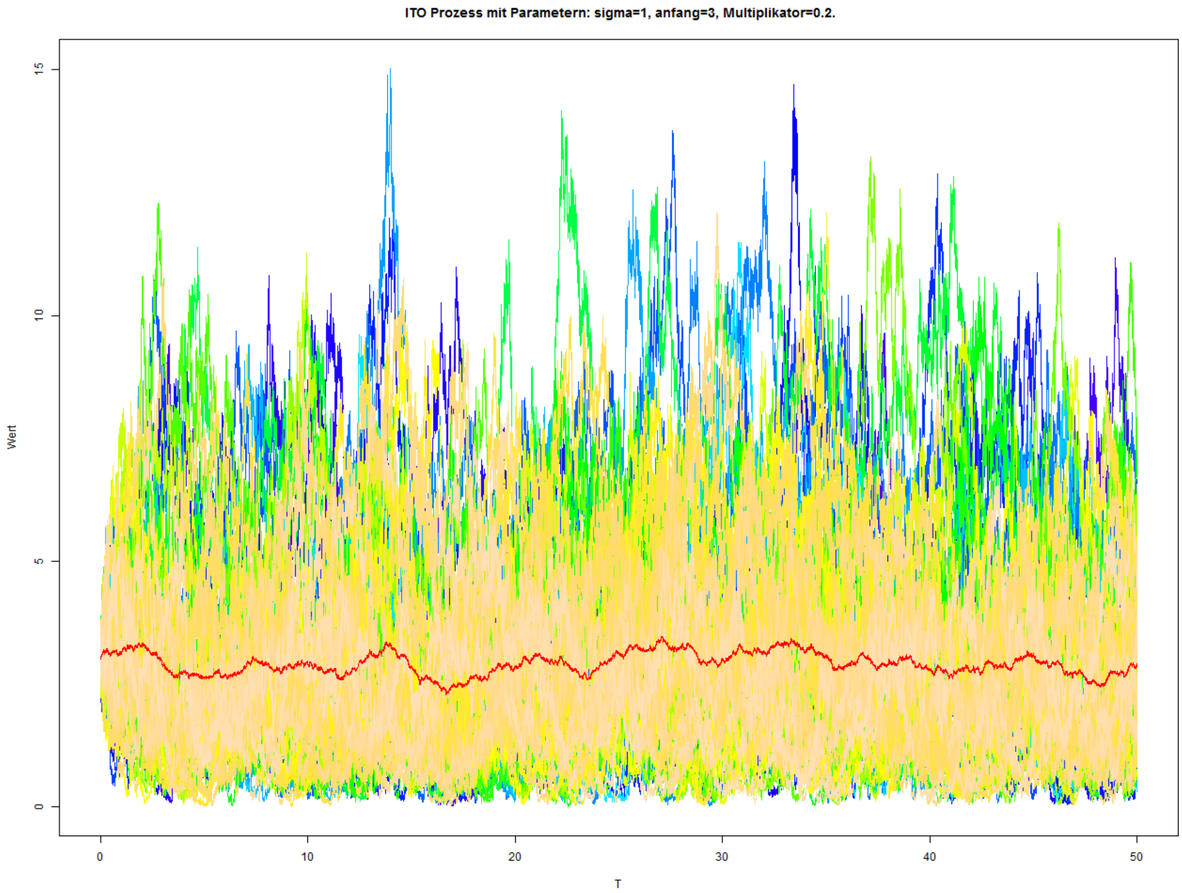
Multiplikator ist groß und deshalb unsere Drift groß ist.

Wenn wir das kleiner machen. Zum Beispiel: Multiplikator=1. Dann:



Hier der Form fast das gleich geblieben.

Dann machen wir unserer Multiplikator noch kleiner auf 0.2.Kriegen wir:



Als sehen wir hier unsere Drift sehr klein und hat fast gar kein Einfluss auf unseren Prozess. Diffusion hat hier eine führende Position und deshalb zufälliger Prozess dW hat einen großen Einfluss auf diesen Prozess.