

КОНСПЕКТЫ ЛЕКЦИЙ ПО АЛГЕБРЕ

Автор: *Каляев Тимур*

ЧТО ТАКОЕ АЛГЕБРА И КАК ОНА РАЗВИВАЛАСЬ?

Сегодня многие говорят об алгебраизации математики, то есть о проникновении идей и методов алгебры как в теоретические, так и в прикладные разделы математики. Так поменялось положение вещей в математике примерно в середине прошлого века.

Алгебра с древних времен составляла довольно существенную часть математики.

Что есть алгебра? Это наука об алгебраических операциях, выполняемых над элементами различных множеств. При этом исходно алгебраические операции выросли из элементарных операций над числами (сложение, умножение и т.п.). Дальше элементарные понятия обобщаются на более широкие классы множеств, после этого про них доказываются какие-то теоремы, которые помогают при рассмотрении примеров получать полезные результаты.

Попробуем кратко рассказать основные шаги развития алгебры в предыдущих веках.

Древние цивилизации Вавилона и Египта. Греческая цивилизация. “Арифметика” Диофанта, III век н.э.:

- Арифметические действия над множествами целых и рациональных положительных чисел;
- Алгебраические формулы в геометрических и астрономических расчетах;
- Формулировка задач на построение (удвоение куба и трисекция угла).

Восточная цивилизация средних веков, VIII–X века:

- Алгебраические уравнения первой и второй степени;
- Возникновение термина “алгебра”.

Эпоха Возрождения, XV–XVI века, Ферро, Тарталья, Кардано, Феррари, Бомбелли, Виет:

- Решение общих алгебраических уравнений третьей и четвертой степени;

- Создание современной алгебраической символики.

XVII–XVIII века, Декарт, Ферма, Ньютон, Лейбниц, Эйлер, Даламбер, Лагранж, Крамер, Лаплас, Вандермонд:

- Возникновение аналитической геометрии;
- Оживление деятельности в теории чисел;
- Поиски общих формул для решения алгебраических уравнений;
- Первые подходы к доказательству существования корня уравнения с числовыми коэффициентами;
- Начало теории определителей.

XIX–начало XX века, Гаусс, Дирихле, Куммер, Кронекер, Дедекинд, Золотарев, Вороной, Марков:

- Доказательство основной теоремы о существовании корней уравнений с числовыми коэффициентами;
- Интенсивное развитие теории алгебраических чисел.

XIX–начало XX века, Чебышев, Эрмит, Лобаческий, Гурвиц:

- Поиски методов приближенного решения алгебраических уравнений;
- Условия на коэффициенты, обеспечивающие заданное расположение корней.

XIX–начало XX века, Руффини, Абель, Якоби, Галуа, Риман, Коши, Жордан, Силев:

- Решение проблемы о неразрешимости общих уравнений степени ≥ 5 в радикалах;
 - Развитие теории алгебраических функций;
 - Создание теории Галуа;
 - Начала теории конечных групп, преимущественно на базе групп перестановок.
- и тд.

1 Некоторые прикладные задачи.

Из школьной алгебры известны формулы

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

для решений квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Уравнение третьей степени

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

подстановкой $x \rightarrow x - a/3$ приводится к виду

$$x^3 + px + q = 0.$$

Корни x_1, x_2, x_3 этого уравнения следующим образом выражаются через его коэффициенты. Если положить

$$D = -4p^3 - 27q^3, \quad \varepsilon = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2},$$

$$u = \sqrt[3]{-\frac{27}{2}q + \frac{3}{2}\sqrt{-3D}}, \quad v = \sqrt[3]{-\frac{27}{2}q - \frac{3}{2}\sqrt{-3D}}$$

(кубические корни выбираются так, чтобы $uv = -3p$), то можно показать, что

$$x_1 = \frac{1}{3}(u + v), \quad x_2 = \frac{1}{3}(\varepsilon^2 u + \varepsilon v), \quad x_3 = \frac{1}{3}(\varepsilon u + \varepsilon^2 v).$$

Эти формулы называются *формулами Кардано* (1545 г.) и связаны также с именами других итальянских математиков эпохи Возрождения (Ферро, Тарталья). Эти формулы справедливы при любых значениях коэффициентов.

Аналогичные формулы были найдены для уравнений четвёртой степени, и на протяжении почти трёхсот лет предпринимались безуспешные попытки “решить в радикалах” общее уравнение пятой степени. Лишь в 1813 году Руффини (в первом приближении) и Абель (независимо и уже совсем строго) доказал теорему о том, что общее алгебраическое уравнение

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

при $n > 4$ не разрешимо в радикалах.

В 1831 году двадцатилетний Эварист Галуа сделал фундаментальное открытие в этой области, которое стало известно только через 15 лет. Он дал универсальный критерий для разрешимости в радикалах любого уравнения с рациональными коэффициентами. При этом критерий формулируется совершенно в терминах современной алгебры, а не алгебры XIX века, когда эту теорию мало кто мог понять. Мы в

курсе дойдем до этой теории и соответствующих доказательств, но только к самому концу 3 семестра. Эта теория (называемая теорией Галуа) удивительным образом включает в себя большую часть теории полей и теории групп.

Давайте для начала немного обсудим, что такое эти самые поля и группы, так как они являются большой частью предмета нашего изучения.

Примерами полей являются привычные нам рациональные числа (которые обозначаются буквой \mathbb{Q}) и действительные числа (обозначение: \mathbb{R}).

Что можно делать с этими числами? Складывать, вычитать, умножать, делить (только не на ноль!).

Давайте формализуем это понятие.

Поле называется множеством F , на котором введены две операции $+$ (сложение) и \times (умножение) так, что:

1. $\forall a, b, c \in F \ (a + b) + c = a + (b + c)$ (*ассоциативность по сложению*);
2. $\forall a, b \in F \ a + b = b + a$ (*коммутативность по сложению*);
3. существует такой элемент $0 \in F$ (называемый *нулём*), что $\forall a \in F \ a + 0 = a$;
4. $\forall a \in F \ \exists b \in F : a + b = 0$, элемент b называется *противоположным* к a и обозначается через $-a$;
5. $\forall a, b, c \in F \ (a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ (*ассоциативность по умножению*);
6. $\forall a, b \in F \ a \times b = b \times a$ (*коммутативность по умножению*);
7. существует такой элемент $1 \neq 0 \in F$ (называемый *единицей*), что $\forall a \in F \ a \times 1 = a$;
8. $\forall a \in F \ \exists b \in F : a \times b = 1$, элемент b называется *обратным* к a и обозначается через a^{-1} ;
9. $\forall a, b, c \in F \ a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ (*дистрибутивность*).

Заметим, что рациональные и действительные числа являются полями, но вообще полей (и даже очень полезных!) очень много. В этом семестре мы будем подробно проходить поле комплексных чисел \mathbb{C} , которое содержит все корни всех алгебраических уравнений с действительными коэффициентами, а также приведём примеры ещё некоторых полезных полей. В третьем семестре у нас будет отдельная большая тема “поля”, в том числе, мы полностью поймём, какими бывают поля с конечным числом элементов.

Теперь давайте выясним, что такое группа.

Все поля по сложению и поля по умножению без нуля являются группами. Также группой являются целые числа.

Формально, группа \mathbf{G} это множество с операцией \times или \cdot (*умножение*), для которой выполняются следующие аксиомы:

1. $\forall a, b, c \in \mathbf{G} \ (a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ (*ассоциативность по умножению*);
2. существует такой элемент $e \in \mathbf{G}$ (называемый *единицей*), что $\forall a \in \mathbf{G} \ a \times e = e \times a = a$;
3. $\forall a \in \mathbf{G} \ \exists b \in \mathbf{G} : a \times b = e$, элемент b называется *обратным* к a и обозначается через a^{-1} .

Оказывается, поля и группы тесно связаны с теорией Галуа, благодаря которой мы сможем доказать теорему о неразрешимости алгебраических уравнений степени ≥ 5 , а также доказать, что неразрешимы следующие две древние задачи:

1. Циркулем и линейкой разделить угол на три равные части;
2. Циркулем и линейкой построить куб, объём которого в 2 раза больше данного куба.

2 Задача о состояниях многоатомной молекулы.

Пусть у нас имеется какая-то фигура на плоскости или в пространстве. Рассмотрим все ее движения (то есть отображения точек этой фигуры в себя, сохраняющие расстояния). На множестве таких движений можно ввести операцию композиции (ещё её называют суперпозицией) \circ . Множество всех движений будет удовлетворять аксиоме ассоциативности (композиция всегда ассоциативна).

Кроме того, всегда существует тождественное движение (ни одна точка фигуры не двигается), композиция которого с любым другим движением не меняет это движение.

Наконец, к любому движению можно подобрать обратное: возьмем наше движение и отобразим все точки в обратную сторону.

Таким образом, множество движений любой фигуры является группой относительно операции композиции. Эта группа также называется группой симметрий данной фигуры.

Теперь рассмотрим некоторую молекулу — это система частиц (атомных ядер, окруженных электронами). Если в начальный момент времени конфигурация системы близка к равновесной, то частицы, входящие в систему, всегда будут оставаться около положения равновесия и не будут приобретать больших скоростей. Движения такого типа называются колебаниями относительно равновесной конфигурации, а система — устойчивой.

Любое малое колебание молекулы вблизи положения устойчивого равновесия является композицией так называемых нормальных колебаний. Часто можно определить все параметры молекулы (потенциальную энергию, нормальные частоты), зная внутренние симметрии молекулы.

Внутренние симметрии — это группа, как мы уже знаем. Изучение данной группы (ее представления, например) очень полезно, так как даёт нам возможность посчитать параметры колебания молекулы.

Таким образом, на сегодняшний день развитие структурной теории молекул невозможно себе представить без теории групп.

Гораздо более ранние (но до сих пор идущие) применения теории групп относятся к кристаллографии.

Еще в 1891 году русский кристаллограф Е. С. Федоров, а затем немецкий ученый А. Шенфлис нашли 230 пространственных кристаллографических групп, описывающих все имеющиеся в природе симметрии кристаллов.

3 Задача о кодировании сообщения.

В конструировании автоматических систем связи, наземных или космических, обычно в качестве элементарного сообщения берется упорядоченная последовательность — строка (или слово)

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

длины n , где $a_i = 0$ или 1 .

Так как операции сложения и умножения по модулю два совершенно естественны для компьютера, то поле из двух элементов \mathbb{F}_2 или \mathbb{Z}_2 — необходимый атрибут специалиста по обработке информации.

Это поле с такими правилами сложения:

$$0 + 0 = 1 + 1 = 0 \text{ и } 0 + 1 = 1 + 0 = 1$$

умножения:

$$0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0 \text{ и } 1 \cdot 1 = 1.$$

Иногда удобно использовать в качестве символов a_i элементы других конечных полей (например, поля \mathbb{F}_{2^k} из 2^k элементов, которое существует для любого натурального k).

С целью исключения помех, способных превратить 0 в 1 или наоборот, приходится брать a досаточно длинным и использовать специальную систему кодирования — выбор такого подмножества (кода) S_0 передаваемых строк из всего множества S , чтобы было возможно восстановить слово a по искаженному передаваемому слову a' при условии, что произошло не слишком много ошибок. Так возникают *коды, исправляющие ошибки*.

Кроме приведённых примеров использования теории групп и теории полей хочется сказать, что очень важной для практических задач дисциплиной является линейная алгебра — сейчас она нужна как для абсолютно всех других предметов высшей математики (функциональный анализ, теория вероятностей и математическая статистика, дифференциальные уравнения и уравнения в частных производных, вычислительная математика, дифференциальная геометрия и т.д.), так и для совершенно практических задач (например, машинного обучения).

Второй семестр будет полностью посвящен линейной алгебре, третий — теории групп, теории полей и колец, представлениям групп, а также основам теории Галуа.

Линейные уравнения $ax = b$ и системы вида

с вещественными коэффициентами решаются в средней школе. Наша цель — научиться оперировать с системой линейных алгебраических уравнений самого общего вида

Здесь m и n — произвольные натуральные числа.

При любых b_i линейную систему

$$\dots, a^{-3}, a^{-2}, a^{-1}, a^0 = e, a, a^2, a^3, \dots$$

Возможны два случая:

Случай 1 Все элементы в этом ряду различны (т.е. $a^k \neq a^l$ для всех целых чисел $k \neq l$). В этом случае будем говорить, что порядок элемента бесконечный (обозначение: $O(a) = \infty$).

Случай 2 В этом ряду $a^k = a^l$ для некоторых $k \neq l$. Пусть $k > l$. Тогда $a^{k-l} = e$, где $k - l > 0$, т.е. встретилась и натуральная степень элемента a , равная e .

Рассмотрим множество:

$$T = \{t \in \mathbb{Z} \mid t > 0, a^t = e\}. \quad (1)$$

Это непустое подмножество натуральных чисел. Следовательно, в T существует наименьший элемент n , который мы назовем порядком элемента a и обозначим через $O(a)$.

Таким образом:

1. $a^n = e$, $n > 0$;
2. если $a^k = e$, $k > 0$, то $k \geq n$.

Ясно, что если группа G конечна, то $O(g) < \infty$ для всех $g \in G$.

Лемма 1 Если $O(a) = n < \infty$, то

1. все элементы $e = a^0, a, a^2, \dots, a^{n-1}$ различны;
2. для любого $k \in \mathbb{Z}$ элемент a^k совпадает с одним из $e, a, a^2, \dots, a^{n-1}$, а именно, если $k = nq + r$, где $0 \leq r < n$, то $a^k = a^r$.

Доказательство:

1. Следует из определения порядка элемента $O(a)$.
2. Пусть $k \in \mathbb{Z}$. Тогда $k = nq + r$, где $0 \leq r < n$. Следовательно, $a^k = (a^n)^q a^r = e a^r = a^r$. \square

Лемма 2 Пусть $O(a) = n < \infty$. Тогда $a^k = e$ тогда и только тогда, когда $k = nq$.

Доказательство:

1. Если $k = nq$, то $a^k = (a^n)^q = e^q = e$.
2. Допустим противное, т.е. что $k = nq + r$, где $0 < r < n$. Тогда, $a^k = (a^n)^q a^r = e a^r = a^r \neq e$ (по лемме 1). Получили противоречие. \square