120

ИСЧИСЛЕНІЕ

КОНЕЧНЫХЪ РАЗНОСТЕЙ.

БИБЛІОТЕКА ТЕХНОЛОГИЧЕСКАГО ИНСТИТУТА

А. МАРКОВЪ.

15321

II 4951/Е17

инв. № 4949.

ОТДѢЛЪ ПЕРВЫЙ.

ИНТЕРПОЛИРОВАНІЕ.

57

САНКТПЕТЕРБУРГЪ.
ТИПОГРАФІЯ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ.
Вас. Остр., 9 лин., № 12.
1889.

По опредѣленію Физико-Математическаго Факультета С.-Петербургскаго Университета, печатать разрѣшается. 16 Декабря 1888 года.

Деканъ *А. Совьтовъ.*

ОГЛАВЛЕНІЕ.

стр.

Глава I. О формулахъ интерполированія..... 1—16

Глава II. Конечныя разности различныхъ порядковъ..... 17—26

Глава III. Выраженіе разностей черезъ производныя и производныхъ черезъ разности..... 27—36

Глава IV. О составленіи и употребленіи математическихъ таблицъ..... 37—64

Глава V. Приложеніе интерполированія къ вычисленію интеграловъ..... 65—90

Глава VI. О нѣкоторыхъ свойствахъ функцій Лежандра и о разложеніи интеграла

$$\int_c^\partial \frac{dx}{z-x} = \log \frac{z-c}{z-\partial}$$

въ непрерывную дробь..... 91—100

Глава VII. Нѣкоторыя обобщенія.....101—121

ГЛАВА I.

О формулахъ интерполированія.

§ 1. Задачу интерполированія въ довольно общемъ видѣ можно поставить такъ.

Для нѣкоторой функціи $f(z)$ вычислены, соотвѣтсвенно даннымъ значеніямъ z:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_{m-1},\ a_m,$$

значенія самой функціи и нѣсколькихъ ея послѣдовательныхъ производныхъ:

$$\left.\begin{array}{llll}
f(a_1), & f(a_2), & f(a_3),\ \ldots, f(a_{m-1}), & f(a_m) \\
f'(a_1), & f'(a_2), & f'(a_3),\ \ldots, f'(a_{m-1}), & f'(a_m) \\
f''(a_1), & f''(a_2), & f''(a_3),\ \ldots, f''(a_{m-1}), & f''(a_m) \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
f^{\alpha_1-1}(a_1), & f^{\alpha_2-1}(a_2), & f^{\alpha_3-1}(a_3), \ldots, f^{\alpha_{m-1}-1}(a_{m-1}), & f^{\alpha_m-1}(a_m)
\end{array}\right\} (1).$$

Требуется воспользоваться этими числами для вычисленія $f(z)$ при нѣкоторомъ новомъ данномъ значеніи z:

$$z = x.$$

Такая постановка вопроса заключаетъ въ себѣ много неопредѣленнаго и оставляетъ мѣсто для произвола.

Изъ различныхъ способовъ пользоваться данными (1) мы разсмотримъ только одинъ.

Онъ состоитъ въ томъ, что подбираютъ цѣлую функцію $F(z)$ наинизшей степени, которая удовлетворяла бы условіямъ:

$$\left.\begin{array}{ll} F(a_1)=f(a_1), & F(a_2)=f(a_2), \ldots\ldots, F(a_m)=f(a_m) \\ F'(a_1)=f'(a_1), & F'(a_2)=f'(a_2), \ldots\ldots, F'(a_m)=f'(a_m) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ F^{\alpha_1-1}(a_1)=f^{\alpha_1-1}(a_1), & F^{\alpha_2-1}(a_2)=f^{\alpha_2-1}(a_2), \ldots, F^{\alpha_m-1}(a_m)=f^{\alpha_m-1}(a_m) \end{array}\right\} (2).$$

и затѣмъ полагаютъ приближенно

$$f(x)=F(x) \qquad (3).$$

Подобныя приближенныя равенства называются **формулами интерполированія.**

Здѣсь представляются двѣ задачи: надо, во первыхъ, **найти формулу интерполированія** и, во вторыхъ, **оцѣнить погрѣшность ея.**

§ 2. Приступая къ опредѣленію функціи $F(z)$, прежде всего важно замѣтить, что система (2) содержитъ

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m$$

условій.

Соотвѣтственно этому, обозначая для краткости сумму

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m$$

буквою n, полагаемъ $F(z)$ равною нѣкоторой цѣлой функціи $n-1^{\text{ой}}$ степени относительно z:

$$F(z)=P_0+P_1z+P_2z^2+\ldots+P_{n-1}z^{n-1}.$$

Тогда число неизвѣстныхъ коэффиціентовъ

$$P_0, P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$$

будетъ равно числу условій (2) и эти послѣднія приведутся къ системѣ n уравненій первой степени относительно неизвѣстныхъ

$$P_0, P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}.$$

Если же искомую нами цѣлую функцію представимъ въ слѣдующемъ видѣ

$$\begin{array}{ll} Q_0 & +Q_{\alpha_1}(z-a_1)^{\alpha_1}+\ldots+Q_{n-\alpha_m}(z-a_1)^{\alpha_1}\ldots(z-a_{m-1})^{\alpha_{m-1}} \\ +Q_1(z-a_1) & +Q_{\alpha_1+1}(z-a_1)^{\alpha_1}(z-a_2)+\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +Q_2(z-a_1)^2 & +Q_{\alpha_1+2}(z-a_1)^{\alpha_1}(z-a_2)^2+\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ +Q_{\alpha_1-1}(z-a_1)^{\alpha_1-1}+\ldots\ldots+Q_{n-1}(z-a_1)^{\alpha_1}\ldots(z-a_{m-1})^{\alpha_{m-1}}(z-a_m)^{\alpha_m-1} & \end{array}$$

то можно будетъ легко опредѣлять неизвѣстныя

$$Q_0, Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n-1}$$

по порядку одно за другимъ: стоитъ только разсматривать въ системѣ (2) послѣдовательно сначала условія перваго столбца, затѣмъ втораго, третьяго и т. д.

Пусть напримѣръ функція $F(z)$ должна удовлетворять пяти условіямъ

$$F(a_1)=f(a_1),\ F'(a_1)=f'(a_1),\ F(a_2)=f(a_2),\ F'(a_2)=f'(a_2),$$
$$F(a_3)=f(a_3).$$

Полагая

$$F(z)=Q_0+Q_1(z-a_1)+Q_2(z-a_1)^2+Q_3(z-a_1)^2(z-a_2)+$$
$$+Q_4(z-a_1)^2(z-a_2)^2,$$

приходимъ къ пяти уравненіямъ

$$Q_0 = f(a_1),\ Q_1 = f'(a_1),\ Q_0 + Q_1(a_2 - a_1) + Q_2(a_2 - a_1)^2 = f(a_2),$$

$$Q_1 + 2Q_2(a_2 - a_1) + Q_3(a_2 - a_1)^2 = f'(a_2),$$

$$\left.\begin{aligned} &Q_0 + Q_1(a_3 - a_1) + Q_2(a_3 - a_1)^2 + \\ &\quad + Q_3(a_3 - a_1)^2(a_3 - a_2) + Q_4(a_3 - a_1)^2(a_3 - a_2)^2 \end{aligned}\right\} = f(a_3),$$

изъ которыхъ послѣдовательно находимъ

$$Q_0 = f(a_1),\ Q_1 = f'(a_1),\ Q_2 = \frac{f(a_2) - f(a_1) - (a_2 - a_1)f'(a_1)}{(a_2 - a_1)^2}$$

$$Q_3 = \frac{(a_2 - a_1)\{f'(a_1) + f'(a_2)\} + 2\{f(a_1) - f(a_2)\}}{(a_2 - a_1)^3}$$

$$Q_4 = \frac{f(a_3)}{(a_3 - a_1)^2(a_3 - a_2)^2} + \frac{(3a_1 - a_2 - 2a_3)f(a_1)}{(a_3 - a_1)^2(a_2 - a_1)^3} + \frac{(3a_2 - a_1 - 2a_3)f(a_2)}{(a_3 - a_2)^2(a_1 - a_2)^3}$$

$$- \frac{f'(a_1)}{(a_2 - a_1)^2(a_3 - a_1)} - \frac{f'(a_2)}{(a_1 - a_2)^2(a_3 - a_2)}.$$

При послѣдовательномъ опредѣленіи коэффиціентовъ

$$Q_0,\ Q_1,\ \ldots,\ Q_{n-1}$$

не трудно убѣдиться въ томъ, что **условіямъ** (2) **удовлетворяетъ одна и только одна цѣлая функція** $F(z)$, $n - 1^{\text{ой}}$ **или низшей степени.**

Тѣмъ же условіямъ (2) удовлетворяютъ и многія другія цѣлыя функціи $F(z)$, только не $n - 1^{\text{ой}}$, а высшей степени.

Разность между любою изъ нихъ и цѣлою функціею $F(z)$, составленною по выше указанному правилу, должна дѣлиться безъ остатка на произведеніе

$$(z - a_1)^{\alpha_1}(z - a_2)^{\alpha_2} \ldots (z - a_m)^{\alpha_m}.$$

Итакъ, для составленія цѣлой функціи $F(z)$ наинизшей степени слѣдуетъ взять то или другое общее выраженіе цѣлой функціи $n - 1^{\text{ой}}$ степени отъ z и затѣмъ подобрать коэффиціенты этого выраженія согласно нашимъ условіямъ (2).

Разсмотримъ подробнѣе нѣкоторые частные случаи.

Первый случай (формула Тайлора): $m = 1,\ \alpha_1 = n,\ a_1 = a.$

Въ этомъ случаѣ таблица (1) приводится къ одному столбцу и для функціи $F(z)$ имѣемъ слѣдующія условія:

$$F(a) = f(a),\ F'(a) = f'(a),\ \ldots,\ F^{n-1}(a) = f^{n-1}(a).$$

По формулѣ Тайлора получаемъ

$$F(z) = f(a) + \frac{z-a}{1}f'(a) + \frac{(z-a)^2}{1.\,2}f''(a) + \ldots + \frac{(z-a)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{n-1}(a) \qquad (4).$$

Второй случай (формула Лагранжа):

$$m = n,\ \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 1.$$

Таблица (1) приводится къ одной строкѣ и соотвѣтственно этому для функціи $F(z)$ имѣемъ слѣдующія условія:

$$F(a_1) = f(a_1),\ F(a_2) = f(a_2),\ \ldots,\ F(a_m) = f(a_m).$$

Пользуясь формулою Лагранжа, находимъ:

$$\left.\begin{aligned} &F(z) = Z_1 f(a_1) + Z_2 f(a_2) + \ldots + Z_m f(a_m), \\ &\text{гдѣ вообще} \\ &(z - a_1)(z - a_2)\ldots(z - a_m) = \omega(z), \\ &Z_i = \frac{\omega(z)}{(z - a_i)\,\omega'(a_i)} \end{aligned}\right\} \qquad (5).$$

Третій случай:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 2,\ \alpha_{k+1} = \alpha_{k+2} = \ldots = \alpha_m = 1,\ k + m = n.$$

Таблица (1) приводится къ двумъ строкамъ и соотвѣтственно этому для функціи $F(z)$ имѣемъ слѣдующія условія:

$$F(a_1)=f(a_1),\ldots,F(a_k)=f(a_k),F(a_{k+1})=f(a_{k+1}),\ldots,F(a_m)=f(a_m),$$
$$F'(a_1)=f'(a_1),\ldots,F'(a_k)=f'(a_k).$$

Для рѣшенія нашей задачи составимъ сначала функцію

$$\left.\begin{aligned} F_0(z) &= Z_1 f(a_1) + Z_2 f(a_2) + \ldots + Z_m f(a_m) \\ \text{гдѣ} \quad Z_i &= \frac{\omega(z)}{(z-a_i)\,\omega'(a_i)} \\ \text{и} \quad \omega(z) &= (z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_m) \end{aligned}\right\} \quad (6).$$

Затѣмъ полагаемъ

$$F(z) = F_0(z) + \omega(z).\ \Theta(z).$$

Здѣсь $\Theta(z)$ нѣкоторая неизвѣстная цѣлая функція отъ z. Она должна удовлетворять слѣдующимъ условіямъ:

$$f'(a_1) = F'_0(a_1) + \omega'(a_1)\Theta(a_1), f'(a_2) = F'_0(a_2) + \omega'(a_2)\Theta(a_2), \ldots,$$
$$f'(a_k) = F'_0(a_k) + \omega'(a_k)\Theta(a_k).$$

Отсюда выводимъ

$$\Theta(a_1)=\frac{f'(a_1)-F'_0(a_1)}{\omega'(a_1)}, \Theta(a_2)=\frac{f'(a_2)-F'_0(a_2)}{\omega'(a_2)}, \ldots, \Theta(a_k)=\frac{f'(a_k)-F'_0(a_k)}{\omega'(a_k)}$$

и потому согласно формулѣ Лагранжа

$$\Theta(z) = U_1\{f'(a_1) - F'_0(a_1)\} + U_2\{f'(a_2) - F'_0(a_2)\} + \ldots$$
$$+ U_k\{f'(a_k) - F'_0(a_k)\},$$

гдѣ вообще

$$U_j = \frac{\omega(z)(a_j-a_{k+1})(a_j-a_{k+2})\ldots(a_j-a_m)}{(z-a_j)\{\omega'(a_j)\}^2(z-a_{k+1})(z-a_{k+2})\ldots(z-a_m)} \quad (7).$$

Съ другой стороны, составляя производную отъ $F_0(z)$ по z, получаемъ

$$F'_0(z) = Z'_1 f(a_1) + Z'_2 f(a_2) + \ldots + Z'_m f(a_m),$$

при чемъ

$$Z'_i = \frac{(z-a_i)\,\omega'(z) - \omega(z)}{(z-a_i)^2\,\omega'(a_i)}.$$

Полагая здѣсь послѣдовательно

$$z = a_1, a_2, \ldots, a_k$$

можемъ вычислить

$$F'_0(a_1), F'_0(a_2), \ldots, F'_0(a_k).$$

Для насъ важно замѣтить, что $F'_0(a_1), F'_0(a_2), \ldots, F'_0(a_k)$ линейныя однородныя выраженія относительно $f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_m)$ и вовсе не содержатъ производныхъ $f'(a_1), f'(a_2), \ldots, f'(a_k)$.

Поэтому, не вдаваясь въ дальнѣйшія преобразованія, можемъ написать формулу слѣдующаго вида:

$$\left.\begin{aligned} F(z) &= F_0(z) + \omega(z)\Theta(z) \\ &= V_1 f(a_1) + V_2 f(a_2) + \ldots + V_m f(a_m) + \\ &\quad + U_1\omega(z) f'(a_1) + U_2\omega(z) f'(a_2) \ldots + U_k\omega(z) f'(a_k) \end{aligned}\right\} (8).$$

Здѣсь

$$V_1, V_2, \ldots, V_m, U_1, U_2, \ldots, U_k$$

нѣкоторыя вполнѣ опредѣленныя функціи отъ z и вовсе не зависятъ отъ значеній

$$f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_m), f'(a_1), f'(a_2), \ldots, f'(a_k);$$

притомъ

$$U_1, U_2, \ldots, U_k$$

опредѣляются по формулѣ (7).

Напримѣръ, при $k=2$ и $m=0$, получаемъ

$$F_0(z)=\frac{z-a_2}{a_1-a_2}f(a_1)+\frac{z-a_1}{a_2-a_1}f(a_2),\ F'_0(z)=\frac{f(a_1)}{a_1-a_2}+\frac{f(a_2)}{a_2-a_1}$$

$$\omega(z)=(z-a_1)(z-a_2),\ U_1=\frac{z-a_2}{(a_1-a_2)^2},\ U_2=\frac{z-a_1}{(a_2-a_1)^2}$$

$$\Theta(z)=\frac{z-a_2}{(a_1-a_2)^2}f'(a_1)+\frac{z-a_1}{(a_2-a_1)^2}f'(a_2)$$
$$-\frac{2z-a_1-a_2}{(a_1-a_2)^3}f(a_1)-\frac{2z-a_1-a_2}{(a_2-a_1)^3}f(a_2).$$

$$F(z)=F_0(z)+\omega(z)\Theta(z)$$
$$=\frac{(z-a_2)\{(a_1-a_2)^2-(2z-a_1-a_2)(z-a_1)\}}{(a_1-a_2)^3}f(a_1)+\frac{(z-a_1)(z-a_2)^2}{(a_1-a_2)^2}f'(a_1)$$
$$+\frac{(z-a_1)\{(a_2-a_1)^2-(2z-a_1-a_2)(z-a_2)\}}{(a_2-a_1)^3}f(a_2)+\frac{(z-a_1)^2(z-a_2)}{(a_2-a_1)^2}f'(a_2).$$
$$=\left(\frac{z-a_2}{a_1-a_2}\right)^2\left\{\frac{3a_1-a_2-2z}{a_1-a_2}f(a_1)+(z-a_1)f'(a_1)\right\}$$
$$+\left(\frac{z-a_1}{a_2-a_1}\right)^2\left\{\frac{3a_2-a_1-2z}{a_2-a_1}f(a_2)+(z-a_2)f'(a_2)\right\}$$

Четвертый случай: $m=2,\ a_1=a,\ a_2=b,\ \alpha_1=\alpha,\ \alpha_2=\beta.$
Можемъ положить

$$F(z)=(z-b)^\beta\sum_{i=0,1,2,\ldots,\alpha-1}A_i(z-a)^i+(z-a)^\alpha\sum_{k=0,1,2,\ldots,\beta-1}B_k(z-b)^k;$$

тогда найдемъ

$$A_i=\left\{\frac{d^i}{dz^i}\frac{f(z)}{(z-b)^\beta}\right\}_{z=a}=\frac{f^i(a)}{(a-b)^\beta}-\beta\frac{f^{i-1}(a)}{(a-b)^{\beta+1}}+\ldots$$

$$B_k=\left\{\frac{d^k}{dz^k}\frac{f(z)}{(z-a)^\alpha}\right\}_{z=b}=\frac{f^k(b)}{(b-a)^\alpha}-\alpha\frac{f^{k-1}(b)}{(b-a)^{\alpha+1}}+\ldots$$

§ 3. Возвращаясь къ общему случаю, займемся оцѣнкою погрѣшности приближенной формулы

$$f(x)=F(x).$$

Для этой цѣли составляемъ новую цѣлую функцію $n^{\text{ой}}$ степени отъ z

$$\Phi(z)=F(z)+K(z-a_1)^{\alpha_1}(z-a_2)^{\alpha_2}\ldots(z-a_m)^{\alpha_m}$$

и постоянное K подбираемъ такъ, чтобы имѣло мѣсто равенство

$$f(x)=\Phi(x)=F(x)+K(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\ldots(x-a_m)^{\alpha_m},$$

откуда

$$K=\frac{f(x)-F(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\ldots(x-a_m)^{\alpha_m}}.$$

Затѣмъ, обозначивъ буквою A наибольшее, а буквою B наименьшее изъ чиселъ

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m,\ x\ ^{*}),$$

замѣчаемъ, что уравненіе

$$f(z)=\Phi(z),$$

въ предѣлахъ отъ $z=B$ до $z=A$, имѣетъ по крайней мѣрѣ $n+1$ корней.

Слѣдовательно по теоремѣ Ролля въ тѣхъ же предѣлахъ (отъ $z=B$ до $z=A$)

уравненіе $f'(z)=\Phi'(z)$ имѣетъ по крайней мѣрѣ n корней
„ $f''(z)=\Phi''(z)$ „ „ „ $n-1$ „
„ $f'''(z)=\Phi'''(z)$ „ „ „ $n-2$ „
. . . . . .
уравненіе $f^n(z)=\Phi^n(z)$ имѣетъ по крайней мѣрѣ одинъ корень.

Обозначая одинъ изъ тѣхъ корней уравненія

$$f^n(z)=\Phi^n(z),$$

которые лежатъ между A и B, буквою ξ и принимая во вниманіе равенство

$$\Phi^n(z)=1.2.3\ldots n.K,$$

приходимъ къ слѣдующему результату

$$K=\frac{f^n(\xi)}{1.2.3\ldots n}.$$

---

*) Всѣ числа нашихъ вычисленій мы постоянно предполагаемъ вещественными.

Итакъ погрѣшность приближенной формулы

$$f(x) = F(x)$$

равна

$$\frac{(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\ldots(x-a_m)^{\alpha_m}}{1.2\ldots n} f^n(\xi),$$

гдѣ ξ означаетъ нѣкоторое число среднее между числами

$$a_1, a_2, \ldots, a_m, x.$$

Иначе сказать, **приближенную формулу** (3) **мы можемъ замѣнить точною**

$$f(x) = F(x) + \frac{(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\ldots(x-a_m)^{\alpha_m}}{1.2\ldots n} f^n(\xi) \quad (9).$$

Примѣняя этотъ результатъ къ вышеразобраннымъ частнымъ случаямъ, находимъ, что функціи (4) соотвѣтствуетъ формула

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) \ldots + \frac{(x-a)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{n-1}(a) + \frac{(x-a)^n}{1.2\ldots n} f^n(\xi) \quad (10),$$

функціи (5) — формула

$$f(x) = \sum_{i=1,2,3,\ldots m} \frac{\omega(x)}{(x-a_i)\,\omega'(a_i)} f(a_i) + \frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_m)}{1.2\ldots m} f^m(\eta) \quad (11)$$

и наконецъ функціи (8) — формула

$$f(x) = F_0(x) + \omega(x)\,\Theta(x)$$
$$+ \frac{(x-a_1)^2(x-a_2)^2\ldots(x-a_k)^2(x-a_{k+1})\ldots(x-a_m)}{1.2\ldots n} f^n(\zeta) \quad (12).$$

Здѣсь ξ, η, ζ означаютъ нѣкоторыя неизвѣстныя числа, изъ которыхъ первое (ξ) лежитъ между a и x, а два остальныя (η и ζ) лежатъ между наибольшимъ и наименьшимъ изъ чиселъ

$$a_1, a_2, \ldots, a_m, x.$$

§ 4. Займемся еще тѣми случаями, когда между данными (1) установленъ нѣкоторый опредѣленный порядокъ и при томъ число ихъ зависитъ отъ насъ; такъ что по желанію можно ограничиться однимъ первымъ даннымъ, или двумя первыми данными, или тремя и т. д.

Тогда полезно формулу интерполированія писать такъ, чтобы по мѣрѣ прибавленія новыхъ данныхъ въ ней приходилось только прибавлять новые члены безъ измѣненія прежнихъ.

Для уясненія сказаннаго остановимся сначала на томъ случаѣ, когда задаются послѣдовательно

$$f(a), f'(a), f''(a), \ldots, f^{n-1}(a), \ldots$$

Соотвѣтствующее выраженіе (4) для $F(z)$ представлено у насъ какъ разъ въ желаемомъ видѣ.

При одномъ данномъ

$$F(z) = f(a),$$

при двухъ данныхъ

$$F(z) = f(a) + \frac{z-a}{1} f'(a),$$

при трехъ данныхъ

$$F(z) = f(a) + \frac{z-a}{1} f'(a) + \frac{(z-a)^2}{1.2} f''(a)$$

и т. д.

Число членовъ въ выраженіи (4) равно числу данныхъ и по мѣрѣ прибавленія новыхъ данныхъ приходится въ этомъ выраженіи прибавлять только новые члены.

Положимъ затѣмъ, что соотвѣтственно нѣкоторому безконечному ряду чиселъ

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

задаются послѣдовательно

$$f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n), \ldots$$

Соотвѣтствующая функція $F(z)$ можетъ быть опредѣлена, при m данныхъ, по формулѣ (5) Лагранжа.

Эта формула имѣетъ такой видъ, что по мѣрѣ прибавленія новыхъ данныхъ приходится не только вводить новые члены, но и прежніе измѣнять.

Она даетъ, напримѣръ: при одномъ данномъ

$$F(z) = f(a_1),$$

при двухъ данныхъ

$$F(z) = f(a_1)\frac{z-a_2}{a_1-a_2} + f(a_2)\frac{z-a_1}{a_2-a_1},$$

при трехъ данныхъ

$$F(z) = f(a_1)\frac{(z-a_2)(z-a_3)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)} + f(a_2)\frac{(z-a_1)(z-a_3)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)} + f(a_3)\frac{(z-a_1)(z-a_2)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)}$$

и т. д.

Постараемся преобразовать ее такъ, чтобы выше установленное условіе неизмѣняемости членовъ имѣло мѣсто.

Для этой цѣли необходимо и достаточно функцію $F(z)$, соотвѣтствующую n даннымъ

$$f(a_1),\ f(a_2),\ \ldots,\ f(a_n)$$

представлять въ слѣдующемъ видѣ

$$F(z) = Q_0 + Q_1(z-a_1) + Q_2(z-a_1)(z-a_2) + \ldots$$
$$+ Q_{n-1}(z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_{n-1}) \quad (13),$$

гдѣ коэффиціенты

$$Q_0,\ Q_1,\ Q_2,\ \ldots,\ Q_{n-1}$$

не зависятъ отъ z.

Тогда при одномъ данномъ

$$F(z) = Q_0$$

и затѣмъ, прибавляя послѣдовательно второе, третье и т. д. данныя, мы должны соотвѣтственно прибавлять члены

$$Q_1(z-a_1),\ Q_2(z-a_1)(z-a_2)$$

и т. д.

Что касается коэффиціентовъ

$$Q_0,\ Q_1,\ Q_2,\ \ldots,\ Q_{n-1},$$

то они должны быть опредѣлены изъ уравненій

$$f(a_1) = Q_0$$
$$f(a_2) = Q_0 + Q_1(a_2-a_1)$$
$$f(a_3) = Q_0 + Q_1(a_3-a_1) + Q_2(a_3-a_1)(a_3-a_2)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f(a_n) = Q_0 + Q_1(a_n-a_1) + \ldots + Q_{n-1}(a_n-a_1)(a_n-a_2)\ldots(a_n-a_{n-1}).$$

Приступая къ рѣшенію этихъ уравненій, вводимъ слѣдующія функціи отъ z

$$\left.\begin{aligned}
f_0(z) &= f(z)\\
f_1(z) &= \frac{f_0(z)-f_0(a_1)}{z-a_1}\\
f_2(z) &= \frac{f_1(z)-f_1(a_2)}{z-a_2}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
f_{n-1}(z) &= \frac{f_{n-2}(z)-f_{n-2}(a_{n-1})}{z-a_{n-1}}
\end{aligned}\right\} \quad (14).$$

Тогда

$$\begin{aligned}
f(z) &= f_0(z)\\
&= f_0(a_1) + (z-a_1)f_1(z)\\
&= f_0(a_1) + (z-a_1)f_1(a_2) + (z-a_1)(z-a_2)f_2(z)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&= f_0(a_1) + (z-a_1)f_1(a_2) + (z-a_1)(z-a_2)f_2(a_3) + \ldots\\
&\quad + (z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_{n-2})f_{n-2}(a_{n-1})\\
&\quad + (z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_{n-1})f_{n-1}(z)
\end{aligned}$$

и соотвѣтственно этому

$$f(a_1) = f_0(a_1)$$

$$f(a_2) = f_0(a_1) + (a_2 - a_1) f_1(a_2)$$

$$f(a_3) = f_0(a_1) + (a_3 - a_1) f_1(a_2) + (a_3 - a_1)(a_3 - a_2) f_2(a_3)$$

. . . . . .

$$f(a_n) = f_0(a_1) + (a_n - a_1) f_1(a_2) + (a_n - a_1)(a_n - a_1) f_2(a_3) + \ldots$$
$$+ (a_n - a_1)(a_n - a_2) \ldots (a_n - a_{n-1}) f_{n-1}(a_n).$$

Сравнивая послѣднія равенства съ уравненіями, опредѣляющими коэффиціенты Q, приходимъ къ слѣдующимъ формуламъ:

$$Q_0 = f(a_1), Q_1 = f_1(a_2), Q_2 = f_2(a_3), \ldots, Q_{n-1} = f_{n-1}(a_n) \quad . . (15).$$

Съ другой стороны, выводимъ послѣдовательно

$$\left.\begin{array}{l}
f_0(z) = f(z), \; f_0(a_1) = f(a_1) \\[2ex]
f_1(z) = \dfrac{f(z)}{z - a_1} + \dfrac{f(a_1)}{a_1 - z}, \; f_1(a_2) = \dfrac{f(a_2)}{a_2 - a_1} + \dfrac{f(a_1)}{a_1 - a_2} \\[2ex]
f_2(z) = \dfrac{f(z)}{(z - a_1)(z - a_2)} + \dfrac{f(a_2)}{(a_2 - a_1)(a_2 - z)} + \dfrac{f(a_1)}{(a_1 - a_2)(a_1 - z)} \\[2ex]
f_2(a_3) = \dfrac{f(a_3)}{(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)} + \dfrac{f(a_2)}{(a_2 - a_1)(a_2 - a_3)} + \dfrac{f(a_1)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)} \\[2ex]
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\[2ex]
f_{n-1}(z) = \dfrac{f(z)}{(z - a_1)(z - a_2) \ldots (z - a_{n-1})} + \\[2ex]
\quad + \dfrac{f(a_{n-1})}{(a_{n-1} - a_1) \ldots (a_{n-1} - a_{n-2})(a_{n-1} - z)} \ldots + \dfrac{f(a_1)}{(a_1 - a_2) \ldots (a_1 - a_{n-1})(a_1 - z)} \\[2ex]
f_{n-1}(a_n) = \dfrac{f(a_n)}{(a_n - a_1)(a_n - a_2) \ldots (a_n - a_{n-1})} + \\[2ex]
\quad + \dfrac{f(a_{n-1})}{(a_{n-1} - a_1) \ldots (a_{n-1} - a_{n-2})(a_{n-1} - a_n)} \ldots + \dfrac{f(a_1)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \ldots (a_1 - a_n)}.
\end{array}\right\} (16).$$

Отсюда между прочимъ видно, что Q_{k-1} не зависитъ отъ порядка чиселъ

$$a_1, a_2, \ldots, a_k.$$

Приложимъ наши формулы къ тому частному случаю, когда

$$a_1 = a, \; a_2 = a + h, \; a_3 = a + 2h, \ldots, a_n = a + (n-1)h, \ldots$$

гдѣ a и h означаютъ нѣкоторыя данныя числа.

Въ этомъ случаѣ

$$f_0(a_1) = f(a)$$

$$h f_1(a_2) = f(a + h) - f(a)$$

$$1.\, 2h^2 f_2(a_3) = f(a + 2h) - 2f(a + h) + f(a)$$

$$1.\, 2.\, 3h^3 f_3(a_4) = f(a + 3h) - 3f(a + 2h) + 3f(a + h) - f(a)$$

. . . . . .

$$1.2 \ldots (n-1) h^{n-1} f_{n-1}(a_n) = f(a + (n-1)h) - \frac{n-1}{1} f(a + (n-2)h) +$$
$$+ \frac{(n-1)(n-2)}{1.\,2} f(a + (n-3)h) \ldots \pm f(a).$$

Такимъ образомъ мы приходимъ къ **формулѣ Ньютона для интерполированія черезъ равные промежутки:**

$$f(x) = G_0 + G_1(x - a) + G_2(x - a)(x - a - h) + \ldots$$
$$+ G_{n-1}(x - a)(x - a - h) \ldots (x - a - (n-1)h)$$

гдѣ вообще

$$1.2 \ldots k h^k G_k = f(a + kh) - \frac{k}{1} f(a + (k-1)h) +$$
$$+ \frac{k(k-1)}{1.\,2} f(a + (k-2)h) \ldots \pm f(a).$$

Погрѣшность ея, согласно общимъ разсужденіямъ, равна

$$\frac{(x - a)(x - a - h) \ldots (x - a - (n-1)h)}{1.\,2 \ldots n} f^n(\xi).$$

Здѣсь ξ означаетъ нѣкоторое число среднее между наибольшимъ и наименьшимъ изъ чиселъ

$$a,\ a+h,\ a+2h,\ \ldots,\ a+(n-1)h,\ x.$$

Выраженіе „интерполированіе черезъ равные промежутки“ указываетъ на то обстоятельство, что всѣ разности

$$a_2-a_1,\ a_3-a_2,\ \ldots,\ a_n-a_{n-1},\ \ldots$$

равны между собой.

Литература.

Briggs. Arithmetica logarithmica.
Trigonometria Britannica.

Newton. Philosophiae naturalis principiae. Liber tertius, lemma V.
Opuscula mathematica. Methodus differentialis.

Stirling. Methodus differentialis.

Lagrange. Leçons élémentaires. Leçon cinquième (Oeuvres VII).
Sur les interpolations (Oeuvres VII).

Laplace. Théorie analytique des probabilités. Livre premier, §§ 3, 4.

Gauss. Theoria interpolationis (Werke III).

Ampère. Fonctions interpolaires (Annales de Gergonne, 1826).

Cauchy. Sur les fonctions interpolaires (Comptes rendus XI).
Mémoire sur l'interpolation (Journal de Lionville, 1837).

Tchébychef. Sur l'interpolation par la méthode des moindres carrés (Mémoires de l'Académie de St. Pétersbourg, 1859).
Sur l'interpolation dans le cas d'un grand nombres de données (Mém. de l'Académie de St. Pétersbourg, 1859).

Hermite. Sur la formule de Lagrange (Crelle's Journal 84).

Possé. Sur quelques applications des fractions continues.

ГЛАВА II.

Конечныя разности различныхъ порядковъ.

§ 5. Останавливаясь еще на формулѣ Ньютона, покажемъ какимъ образомъ вычисленіе ея коэффиціентовъ приводится къ послѣдовательнымъ вычитаніямъ.

Для этой цѣли составимъ посредствомъ послѣдовательныхъ вычитаній слѣдующую таблицу *)

$$\left.\begin{array}{llll}
f(a) & ,\ f(a+h)-f(a)=\Delta f(a), & \Delta f(a+h)-\Delta f(a)=\Delta^2 f(a), & \Delta^3 f(a)\ldots \\
f(a+h) & ,\ f(a+2h)-f(a+h)=\Delta f(a+h), & \Delta^2 f(a+h), & \Delta^3 f(a+h)\ldots \\
f(a+2h), & f(a+3h)-f(a+2h)=\Delta f(a+2h), & \Delta^2 f(a+2h), & \ldots\ldots\ldots \\
f(a+3h), & f(a+4h)-f(a+3h)=\Delta f(a+3h), & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\
f(a+4h), & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\}(17).$$

---

*) Каждый столбецъ этой таблицы выводится изъ предыдущаго столбца совершенно также, какъ второй — изъ перваго.

Мы полагаемъ для краткости

$$\left.\begin{array}{l} f(z+h) \quad - \quad f(z) = \Delta f(z) \\ \Delta f(z+h) \quad - \Delta f(z) = \Delta^2 f(z) \\ \Delta^2 f(z+h) \quad - \Delta^2 f(z) = \Delta^3 f(z) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Delta^{n-1} f(z+h) - \Delta^{n-1} f(z) = \Delta^n f(z) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \quad (18).$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ условимся называть

$$\Delta f(z),\ \Delta^2 f(z),\ \Delta^3 f(z), \dots.$$

конечными разностями, или просто разностями, отъ $f(z)$: соотвѣтственно перваго порядка, втораго, третьяго и т. д.

Употребляя такой способъ выраженія, можемъ сказать, что наша таблица (17) содержитъ:

въ первомъ столбцѣ послѣдовательныя значенія функціи $f(z)$,
во второмъ столбцѣ соотвѣтственныя значенія первой разности $\Delta f(z)$,
въ третьемъ „ „ „ второй разности $\Delta^2 f(z)$

и т. д.

Замѣтимъ, что разность $n^{го}$ порядка отъ $f(z)$ равна первой разности отъ разности $n-1^{го}$ порядка отъ $f(z)$:

$$\Delta^n f(z) = \Delta\Delta^{n-1} f(z) = \Delta^{n-1} f(z+h) - \Delta^{n-1} f(z).$$

Отсюда нетрудно вывесть еще болѣе общее равенство

$$\Delta^{\alpha+\beta} f(z) = \Delta^\alpha \Delta^\beta f(z),$$

гдѣ α и β означаютъ какія угодно цѣлыя положительныя числа.

Покажемъ теперь, что коэффиціенты формулы Ньютона отличаются отъ членовъ первой строки составленной нами таблицы только нѣкоторыми постоянными множителями; именно

$$G_0 = f(a),\ G_1 = \frac{\Delta f(a)}{1.h},\ G_2 = \frac{\Delta^2 f(a)}{1.2h^2},\ G_3 = \frac{\Delta^3 f(a)}{1.2.3.h^3}, \dots.$$

Всѣ эти равенства заключаются какъ частные случаи въ слѣдующемъ

$$\Delta^k f(z) = f(z+kh) - \frac{k}{1} f(z+(k-1)h) + \frac{k(k-1)}{1.2} f(z+(k-2)h) \dots$$
$$+ (-1)^k f(z) \qquad (19),$$

гдѣ k означаетъ произвольное цѣлое положительное число.

Что же касается равенства (19), то въ справедливости его при $k=1$ и при $k=2$ нетрудно убѣдиться непосредственно:

$$\Delta f(z) \quad = f(z+h) \quad - f(z)$$
$$\Delta f(z+h) = f(z+2h) - f(z+h)$$
$$\Delta^2 f(z) = \Delta f(z+h) - \Delta f(z) = f(z+2h) - 2f(z+h) + f(z).$$

Сверхъ того, если оно имѣетъ мѣсто при нѣкоторомъ значеніи k

$$k = m,$$

то должно сохранять свою силу и при увеличеніи k на единицу; такъ какъ тогда

$$\Delta^m f(z) \quad = \quad f(z+mh) - \frac{m}{1} f(z+(m-1)h) + \frac{m(m-1)}{1.2} f(z+(m-2)h) \dots$$

$$\Delta^m f(z+h) = f(z+(m+1)h) - \frac{m}{1} f(z+mh) + \frac{m(m-1)}{1.2} f(z+(m-1)h)$$
$$- \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} f(z+(m-2)h) \dots$$

$$\Delta^{m+1} f(z) = \Delta^m f(z+h) - \Delta^m f(z)$$
$$= f(z+(m+1)h) - \left(\frac{m}{1}+1\right) f(z+mh) + \frac{m}{1}\left(\frac{m-1}{2}+1\right) f(z+(m-1)h) \dots$$
$$+ (-1)^{i+1} \frac{m(m-1)\dots(m-i+1)}{1.2\dots i}\left(\frac{m-i}{i+1}+1\right) f(z+(m-i)h) \dots + (-1)^{m+1} f(z)$$
$$= f(z+(m+1)h) - \frac{m+1}{1} f(z+mh) + \frac{(m+1)m}{1.2} f(z+(m-1)h) \dots$$
$$\dots + (-1)^{m+1} f(z).$$

Поэтому, прибавляя къ k единицу за единицей, нетрудно убѣдиться въ справедливости формулы (19) послѣдовательно при

$$k = 1,\ 2,\ 3,\ 4, \text{ и т. д.},$$

т. е. вообще при всякомъ цѣломъ положительномъ значеніи k.

Доказавъ такимъ образомъ формулу (19), можемъ представить **формулу Ньютона, съ дополнительнымъ членомъ**, въ слѣдующемъ видѣ

$$\left.\begin{aligned} f(x) = f(a) + \frac{x-a}{h}\Delta f(a) + \frac{(x-a)(x-a-h)}{1.2h^2}\Delta^2 f(a) + \frac{(x-a)(x-a-h)(x-a-2h)}{1.2.3\,h^3}\Delta^3 f(a) \\ + \ldots + \frac{(x-a)(x-a-h)\ldots(x-a-(n-1)h)}{1.2\ldots n\,h^n}\Delta^n f(a) + \frac{(x-a)(x-a-h)\ldots(x-a-nh)}{1.2\ldots(n+1)} f^{n+1}(\xi) \end{aligned}\right\}(20),$$

гдѣ ξ означаетъ нѣкоторое число среднее между наибольшимъ и наименьшимъ изъ чиселъ

$$a,\ a + nh,\ x.$$

§ 6. Изъ формулы (20) Ньютона не трудно, между прочимъ, получить слѣдующую

$$\left.\begin{aligned} f(a+nh) = f(a) + \frac{n}{1}\Delta f(a) + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 f(a) + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 f(a) + \ldots \\ \ldots + \frac{n}{1}\Delta^{n+1} f(a) + \Delta^n f(a) \end{aligned}\right\}(21).$$

Послѣднюю формулу можно доказать и независимо отъ формулы Ньютона.

Для этой цѣли прежде всего изъ формулъ

$$f(z+h) - f(z) = \Delta f(z)$$

$$f(z+2h) - f(z+h) = \Delta f(z+h)$$

$$\Delta f(z+h) - \Delta f(z) = \Delta^2 f(z)$$

выводимъ

$$f(z+h) = f(z) + \Delta f(z)$$

$$\Delta f(z+h) = \Delta f(z) + \Delta^2 f(z)$$

$$f(z+2h) = f(z+h) + \Delta f(z+h) = f(z) + 2\Delta f(z) + \Delta^2 f(z)$$

и такимъ образомъ убѣждаемся въ справедливости формулы (21) при $n=1$ и при $n=2$.

Затѣмъ, прибавляя къ n единицу за единицей, можемъ распространить ее на всѣ цѣлыя положительныя значенія n, такъ какъ изъ равенствъ

$$f(z+nh) = f(z) + \frac{n}{1}\Delta f(z) + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 f(z) \ldots + \Delta^n f(z)$$

и

$$\Delta f(z+nh) = \Delta f(z) + \frac{n}{1}\Delta^2 f(z) \ldots + \frac{n}{1}\Delta^n f(z) + \Delta^{n+1} f(z)$$

нетрудно посредствомъ сложенія вывесть слѣдующее

$$f(z+(n+1)h) = f(z+nh) + \Delta f(z+nh) =$$

$$= f(z) + \frac{n+1}{1}\Delta f(z) + \frac{(n+1)n}{1.2}\Delta^2 f(z) + \ldots + \frac{n+1}{1}\Delta^n f(z) + \Delta^{n+1} f(z)$$

Подставляя въ формулѣ (21) вмѣсто n послѣдовательно

$$0,\ 1,\ 2, \ldots, n-1,\ n,$$

получаемъ

$$\begin{aligned} f(a) &= f(a) \\ f(a+h) &= f(a) + \Delta f(a) \\ f(a+2h) &= f(a) + 2\Delta f(a) + \Delta^2 f(a) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(a+nh) &= f(a) + \frac{n}{1}\Delta f(a) + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 f(a) + \ldots + \Delta^n f(a). \end{aligned}$$

Всѣ эти равенства заключаются въ одномъ

$$f(a+mh) = f(a) + \frac{m}{1}\Delta f(a) + \frac{m(m-1)}{1.2}\Delta^2 f(a) + \ldots$$

$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}\Delta^n f(a),$$

гдѣ m означаетъ произвольное цѣлое положительное число, не превосходящее n, или нуль.

Отсюда видно, что цѣлая функція

$$F(z) = f(a) + \frac{z-a}{h}\Delta f(a) + \frac{(z-a)(z-a-h)}{1.2\ h^2}\Delta^2 f(a) + \ldots.$$

$$+ \frac{(z-a)(z-a-h)\ldots(z-a-(n-1)h)}{1.2\ldots n\ h^n}\Delta^n f(a)$$

совпадаетъ съ $f(z)$ при

$$z = a,\ a+h,\ a+2h, \ldots,\ a+nh.$$

Полагая на этомъ основаніи

$$f(x) = F(x),$$

мы приходимъ снова къ формулѣ Ньютона.

§ 7. Переходя къ составленію разностей отъ нѣкоторыхъ функцій, обратимъ вниманіе на слѣдующее весьма простое предложеніе.

Если

$$f(z) = C_1\varphi_1(z) + C_2\varphi_2(z) + \ldots + C_i\varphi_i(z)$$

гдѣ

$$C_1,\ C_2, \ldots,\ C_i$$

числа постоянныя, то

$$\Delta f(z) = C_1\Delta\varphi_1(z) + C_2\Delta\varphi_2(z) + \ldots + C_i\Delta\varphi_i(z)$$

$$\Delta^2 f(z) = C_1\Delta^2\varphi_1(z) + C_2\Delta^2\varphi_2(z) + \ldots + C_i\Delta^2\varphi_i(z)$$

и вообще

$$\Delta^n f(z) = C_1\Delta^n\varphi_1(z) + C_2\Delta^n\varphi_2(z) + \ldots + C_i\Delta^n\varphi_i(z).$$

Пусть теперь $f(z)$ означаетъ нѣкоторую цѣлую функцію $n^{\text{ой}}$ степени отъ z:

$$f(z) = A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + A_2 z^{n-2} + \ldots + A_{n-1}z + A_n.$$

Тогда

$$\Delta f(z) = A_0\left\{(z+h)^n - z^n\right\} + A_1\left\{(z+h)^{n-1} - z^{n-1}\right\} + \ldots + A_{n-1}\left\{(z+h) - z\right\}$$

$$= A_0\left\{nhz^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}h^2z^{n-2} + \ldots\right\} + A_1\left\{(n-1)hz^{n-2} + \ldots\right\} + \ldots$$

$$= A_0nhz^{n-1} + \left\{\frac{n(n-1)}{1.2}h^2A_0 + (n-1)hA_1\right\}z^{n-2} + \ldots$$

Итакъ, первая разность цѣлой функціи $n^{\text{ой}}$ степени отъ z, со старшимъ членомъ

$$A_0 z^n,$$

приводится къ цѣлой же функціи $n-1^{\text{ой}}$ степени отъ z, со старшимъ членомъ

$$A_0 nhz^{n-1}.$$

Переходя затѣмъ отъ $\Delta f(z)$ послѣдовательно къ

$$\Delta^2 f(z) = \Delta\Delta f(z),\ \Delta^3 f(z) = \Delta\Delta^2 f(z), \ldots,$$

нетрудно убѣдиться въ справедливости слѣдующаго предложенія.

Если $f(z)$ означаетъ цѣлую функцію $n^{\text{ой}}$ степени отъ z и старшій членъ ея равенъ

$$A_0 z^n,$$

то $\Delta^m f(z)$ при $m < n$ приводится къ цѣлой функціи $n-m^{\text{ой}}$ степени отъ z со старшимъ членомъ

$$A_0 n(n-1)\ldots(n-m+1)h^m z^{n-m},$$

при $m = n$ обращается въ

$$A_0 1.2\ldots n.h^n$$

и наконецъ при $m > n$ обращается въ нуль.

Останавливаясь на томъ частномъ случаѣ, когда

$$f(z) = (z-b)(z-b-h)(z-b-2h)\ldots(z-b-(n-1)h),$$

гдѣ b означаетъ нѣкоторое данное число, выводимъ

$$\Delta(z-b)(z-b-h)\ldots(z-b-(n-1)h) = (z+h-b)(z-b)\ldots(z-b-(n-2)h)$$

$$-(z-b)(z-b-h)\ldots(z-b-(n-1)h)$$

$$= nh(z-b)(z-b-h)\ldots(z-b-(n-2)h)$$

$$\frac{\Delta^2(z-b)(z-b-h)\ldots(z-b-(n-1)h)}{n(n-1)h^2} = (z-b)(z-b-h)\ldots(z-b-(n-3)h)$$

и вообще

$$\frac{\Delta^m(z-b)(z-b-h)..(z-b-(n-1)h)}{n(n-1)...(n-m+1)h^m} = (z-b)...(z-b-(n-m-1)h) \quad (22).$$

Здѣсь m означаетъ произвольное цѣлое положительное число, не превосходящее n.

Эти результаты могутъ служить для опредѣленія коэффиціентовъ нѣкоторыхъ формулъ интерполированія.

Въ видѣ примѣра разсмотримъ тотъ случай, когда задаются послѣдовательно

$$f(a),\ f(a+h),\ f(a-h),\ f(a+2h),\ f(a-2h), \ldots.$$

Соотвѣтствующей формулѣ интерполированія можно придать слѣдующій видъ

$$f(x) = H_0 + H_1(x-a) + H_2(x-a)(x-a-h) +$$

$$+ H_3(x-a+h)(x-a)(x-a-h) + H_4(x-a+h)(x-a)(x-a-h)(x-a-2h)$$

$$+ H_5(x-a+2h)(x-a+h)(x-a)(x-a-h)(x-a-2h) + \ldots.$$

Здѣсь число членовъ, въ правой части, равно числу данныхъ.

Составляя разности различныхъ порядковъ, получаемъ

$$\frac{\Delta f(x)}{h} = H_1 + 2H_2(x-a) + 3H_3(x-a+h)(x-a) + \ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\Delta^2 f(x)}{1.2.h^2} = H_2 + \frac{3.2}{1.2}H_3(x-a+h) + \frac{4.3}{1.2}H_4(x-a+h)(x-a) + \ldots\ldots$$

$$\frac{\Delta^3 f(x)}{1.2.3.h^3} = H_3 + \frac{4.3.2}{1.2.3}H_4(x-a+h) + \frac{5.4.3}{1.2.3}H_5(x-a+2h)(x-a+h) + \ldots$$

$$\frac{\Delta^4 f(x)}{1.2.3.4.h^4} = H_4 + \frac{5.4.3.2}{1.2.3.4}H_5(x-a+2h) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

. . . . . .

откуда затѣмъ выводимъ

$$H_0 = f(a),\ H_1 = \frac{\Delta f(a)}{h},\ H_2 = \frac{\Delta^2 f(a-h)}{1.2.h^2},\ H_3 = \frac{\Delta^3 f(a-h)}{1.2.3.h^3}, \ldots.$$

Такимъ образомъ мы приходимъ къ новой формулѣ интерполированія черезъ равные промежутки

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{h}\Delta f(a) + \frac{(x-a)(x-a-h)}{1.2.h^2}\Delta^2 f(a-h) +$$

$$+ \frac{(x-a+h)(x-a)(x-a-h)}{1.2.3\,h^3}\Delta^3 f(a-h) + \ldots.$$

которая имѣетъ много общаго съ формулой Ньютона.

Составимъ еще разности отъ

$$\frac{A}{(z+b)(z+b+h)....(z+b+(n-1)h)},\ a^z,\ \sin(cz+d) \text{ и } \cos(cz+d),$$

гдѣ A, b, a, c и d означаютъ числа постоянныя.

При

$$f(z) = \frac{A}{(z+b)(z+b+h)\ \ldots(z+b+(n-1)h)}$$

получаемъ

$$\Delta f(z) = \frac{A}{(z+b+h)(z+b+2h)....(z+b+nh)} - \frac{A}{(z+b)..(z+b+(n-1)h)}$$

$$= \frac{-Anh}{(z+b)(z+b+h)...(z+b+nh)}$$

$$\Delta^2 f(z) = \frac{-Anh}{(z+b+h)(z+b+2h)....(z+b+(n+1)h)} - \frac{-Anh}{(z+b)....(z+b+nh)}$$

$$= \frac{An(n+1)h^2}{(z+b)(z+b+h)....(z+b+(n+1)h)}$$

и вообще

$$\Delta^m \frac{A}{(z+b)(z+b+h)....(z+b+(n-1)h)} = \frac{(-1)^m An(n+1)....(n+m-1)h^m}{(z+b)....(z+b+(n+m-1)h)} \quad (23).$$

При

$$f(z) = a^z$$

получаемъ

$$\Delta f(z) = a^{z+h} - a^z = (a^h - 1)a^z,$$

$$\Delta^2 f(z) = (a^h - 1)a^{z+h} - (a^h - 1)a^z = (a^h - 1)^2 a^z$$

и вообще

$$\Delta^m a^z = (a^h - 1)^m a^z \qquad (24).$$

При

$$f(z) = \sin(cz + d)$$

выводимъ

$$\Delta f(z) = \sin(cz + ch + d) - \sin(cz + d) = 2\sin\frac{ch}{2}\cos\left(cz + \frac{ch}{2} + d\right)$$

$$= 2\sin\frac{ch}{2}\sin\left(cz + d + \frac{ch + \pi}{2}\right)$$

$$\Delta^2 f(z) = 2\sin\frac{ch}{2}\cdot\Delta\sin\left(cz + d + \frac{ch + \pi}{2}\right)$$

$$= \left(2\sin\frac{ch}{2}\right)^2\sin\left(cz + d + 2\frac{ch + \pi}{2}\right)$$

и вообще

$$\Delta^m \sin(cz + d) = \left(2\sin\frac{ch}{2}\right)^m \sin\left(cz + d + m\frac{ch + \pi}{2}\right) \qquad (25).$$

Совершенно также получимъ

$$\Delta^m \cos(cz + d) = \left(2\sin\frac{ch}{2}\right)^m \cos\left(cz + d + m\frac{ch + \pi}{2}\right) \qquad (26).$$

Закончимъ эту главу формулою, аналогичною извѣстной формулѣ Лейбница, для выраженія разностей различныхъ порядковъ отъ произведенія двухъ функцій:

$$\Delta^n \varphi(z)\psi(z) = \varphi(z + nh)\,\Delta^n\psi(z) + \frac{n}{1}\Delta\varphi(z + nh - h)\,\Delta^{n-1}\psi(z)$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2\varphi(z + nh - 2h)\,\Delta^{n-2}\psi(z) + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{n}{1}\Delta^{n-1}\varphi(z + h)\,\Delta\psi(z) + \left(\Delta^n\varphi(z)\right)\psi(z).$$

ГЛАВА III.

Выраженіе разностей черезъ производныя и производныхъ черезъ разности.

§ 8. Формула Тайлора

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1}f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{n-1}(a) + \frac{(x-a)^n}{1.2\ldots n}f^n(\xi)$$

при $x = a + h$ даетъ

$$\Delta f(a) = f(a + h) - f(a) = hf'(a) + \frac{h^2}{1.2}f''(a) + \ldots$$

$$+ \frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{n-1}(a) + \frac{h^n}{1.2\ldots n}f^n(\xi).$$

Такимъ образомъ $\Delta f(a)$ выражается черезъ производныя

$$f'(a),\ f''(a), \ldots.$$

Займемся теперь выводомъ подобныхъ же выраженій для

$$\Delta^2 f(a),\ \Delta^3 f(a), \ldots.$$

и выводомъ обратныхъ формулъ для выраженія производныхъ

$$f'(a),\ f''(a),\ f'''(a), \ldots.$$

черезъ разности

$$\Delta f(a),\ \Delta^2 f(a),\ \Delta^3 f(a), \ldots.$$

Для этой цѣли прежде всего вспомнимъ, что уравненіе

$$f(z) = f(a) + \frac{z-a}{h}\Delta f(a) + \frac{(z-a)(z-a-h)}{1.2\,h^2}\Delta^2 f(a) + \ldots.$$

$$+ \frac{(z-a)\ldots(z-a-(n-1)h)}{1.2\ldots n.h^n}\Delta^n f(a) + K\frac{(z-a)\ldots(z-a-nh)}{1.2\ldots(n+1)},$$

гдѣ подъ буквою K мы подразумѣваемъ какое угодно данное число, имѣетъ по крайней мѣрѣ $n+1$ корней:

$$z = a,\ a+h, \ldots,\ a+nh.$$

Слѣдовательно по теоремѣ Ролля уравненіе

$$f^m(z) = \frac{d^m(z-a)\ldots(z-a-(m-1)h)}{1.2\ldots m.h^m dz^m}\Delta^m f(a) + \ldots + \frac{d^m(z-a)\ldots(z-a-(n-1)h)}{1.2\ldots n h^n dz^m}\Delta^n f(a)$$

$$+ K\frac{d^m(z-a)\ldots(z-a-nh)}{1.2\ldots(n+1)dz^m} \qquad (27),$$

полученное изъ предыдущаго посредствомъ m-кратнаго дифференцированія по z, должно имѣть между a и $a+nh$ не менѣе $n-m+1$ корней.

Отсюда, полагая

$$m = n \text{ и } K = 0,$$

выводимъ

$$\Delta^n f(a) = h^n f^n(\xi) \qquad (28),$$

при чемъ неизвѣстное число ξ лежитъ между a и $a+nh$.

Обозначимъ затѣмъ буквою x нѣкоторое данное число, лежащее внѣ предѣловъ a и $a+nh$, и опредѣлимъ при $m < n$ число K такъ, чтобы выраженіе

$$f^m(z) - \frac{d^m(z-a)\ldots(z-a-(m-1)h)}{1.2\ldots m.h^m dz^m}\Delta^m f(a) - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$- \frac{d^m(z-a)\ldots(z-a-(n-1)h)}{1.2\ldots n.h^n dz^m}\Delta^n f(a) - K\frac{d^m(z-a)\ldots(z-a-nh)}{1.2\ldots(n+1)dz^m}$$

обращалось въ нуль при $z = x$.

Тогда, примѣняя къ уравненію (27) теорему Ролля $n-m+1$ разъ, получимъ

$$K = f^{n+1}(\xi)$$

и соотвѣтственно этому можемъ написать слѣдующую формулу

$$f^m(x) = \frac{d^m(x-a)(x-a-h)\ldots(x-a-(m-1)h)}{1.2\ldots m.h^m dx^m}\Delta^m f(a) + \ldots.$$

$$+ \frac{d^m(x-a)\ldots(x-a-(n-1)h)}{1.2\ldots n.h^n dx^m}\Delta^n f(a) + \frac{d^m(x-a)\ldots(x-a-nh)}{1.2\ldots(n+1)dx^m}f^{n+1}(\xi) \quad (29),$$

гдѣ ξ заключается между наибольшимъ и наименьшимъ изъ чиселъ

$$a,\ a+nh,\ x.$$

Полагая въ послѣдней формулѣ

$$x = a,$$

выводимъ

$$h^m f^m(x) = B_m^m\Delta^m f(x) + \ldots + B_m^n\Delta^n f(x) + B_m^{n+1}h^{n+1}f^{n+1}(\xi) \qquad (30).$$

Здѣсь

$$B_m^i = \left\{\frac{d^m(z-a)(z-a-h)\ldots(z-a-(i-1)h)}{1.2\ldots i\,h^{i-m}dz^m}\right\}_{z=a} = \left\{\frac{d^m t(t-1)\ldots(t-i+1)}{1.2\ldots i\,dt^m}\right\}_{t=0} \quad (31)$$

и ξ означаетъ нѣкоторое среднее число между x и $x+nh$.

Такимъ образомъ производная

$$f^m(x)$$

выражается черезъ разности

$$\Delta^m f(x),\ \Delta^{m+1} f(x),\ \Delta^{m+2} f(x), \ldots.$$

Намъ надо еще показать какъ выражаются разности черезъ производныя.

Для этой цѣли разсмотримъ выраженіе

$$\omega(z) = f(z) - f(a) - \frac{z-a}{1}f'(a) - \ldots - \frac{(z-a)^n}{1.2\ldots n}f^n(a) - L\frac{(z-a)^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}.$$

Замѣняя въ формулѣ (28)

$$f \text{ на } \omega,\ a \text{ на } x,\ n \text{ на } m,$$

получаемъ

$$\Delta^m \omega(x) = h^m \omega^m(\xi).$$

Мы обозначаемъ здѣсь буквою x нѣкоторое данное число и буквою ξ неизвѣстное, лежащее между x и $x+mh$.

Положимъ теперь, что

$$x \geqq a,\ \ h > 0$$

и $f^{n+1}(z)$ при всѣхъ значеніяхъ z, лежащихъ между a и $x+mh$, заключается между двумя данными числами L_0 и L_1; такъ что

$$L_0 \leqq f^{n+1}(z) \leqq L_1 \text{ при } a \leqq z \leqq x+mh.$$

Въ такомъ случаѣ, принимая во вниманіе равенства

$$\omega(a) = \omega'(a) = \ldots = \omega^n(a) = 0,\ \ \omega^{n+1}(z) = f^{n+1}(z) - L,$$

и

$$\Delta^m \omega(x) = h^m \omega^m(\xi),$$

нетрудно заключить, что $\Delta^m \omega(x)$ при $L = L_0$ число положительное, а при $L = L_1$ отрицательное.

Поэтому при нѣкоторомъ значеніи L, лежащемъ между L_0 и L_1, выраженіе $\Delta^m \omega(x)$ равное

$$\Delta^m f(x) - \frac{\Delta^m (x-a)^m}{1.2\ldots m} f^m(a) \ldots - \frac{\Delta^m (x-a)^n}{1.2\ldots n} f^n(a) - L \frac{\Delta^m (x-a)^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}$$

обращается въ нуль и мы имѣемъ

$$\Delta^m f(x) = \frac{\Delta^m (x-a)^m}{1.2\ldots m} f^m(a) \ldots + \frac{\Delta^m (x-a)^n}{1.2\ldots n} f^n(a) + L \frac{\Delta^m (x-a)^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} \quad (32).$$

А изъ послѣдней формулы при $x = a$ вытекаетъ, какъ частный случай, слѣдующая

$$\Delta^m f(x) = A_m^m h^m f^m(x) + \ldots + A_m^n h^n f^n(x) + A_m^{n+1} h^{n+1} f^{n+1}(\eta) \quad (33).$$

Здѣсь

$$A_m^i = \frac{1}{h^i} \left\{ \frac{\Delta^m (x-a)^i}{1.2\ldots i} \right\}_{x=a} = \frac{m^i - \frac{m}{1}(m-1)^i + \frac{m(m-1)}{1.2}(m-2)^i \ldots \pm m}{1.2\ldots i} \quad (34).$$

и η означаетъ нѣкоторое среднее число между x и $x+mh$.

§ 9. Формулы (30) и (33) можно представить довольно просто въ символическомъ видѣ.

Съ этою цѣлью, останавливаясь на случаѣ *)

$$f(z) = e^z$$

и принимая во вниманіе равенства

$$e^z = \frac{de^z}{dz} = \frac{d^2 e^z}{dz^2} = \frac{d^3 e^z}{dz^3} = \ldots.$$

$$\Delta e^z = (e^h - 1) e^z,\ \ \Delta^2 e^z = (e^h - 1)^2 e^z,\ \ \Delta^3 e^z = (e^h - 1)^3 e^z, \ldots.$$

выводимъ: изъ формулы (33)

$$(e^h - 1)^m = A_m^m h^m + A_m^{m+1} h^{m+1} + \ldots + A_m^n h^n + A_m^{n+1} h^{n+1} e^{\eta - x}$$

и изъ формулы (30)

$$h^m = B_m^m (e^h - 1)^m + \ldots + B_m^n (e^h - 1)^n + B_m^{n+1} h^{n+1} e^{\xi - x}.$$

Послѣднее равенство черезъ замѣну

$$h \text{ на } \log(1+t)$$

можно преобразовать въ слѣдующее

$$\left\{\log(1+t)\right\}^m = B_m^m t^m + \ldots + B_m^n t^n + B_m^{n+1} t^{n+1} \left\{\frac{\log(1+t)}{t}\right\}^{n+1} e^{\xi - x}.$$

Отсюда видно, что

$$A_m^m,\ A_m^{m+1},\ A_m^{m+2}, \ldots.$$

соотвѣтственно равны коэффиціентамъ при

$$h^m,\ h^{m+1},\ h^{m+2}, \ldots.$$

*) Символъ log означаетъ Нэперовы логарифмы и e — основаніе ихъ.

въ разложеніи по степенямъ h выраженія

$$(e^h - 1)^m,$$

а

$$B_m^m,\ B_m^{m+1},\ B_m^{m+2}, \ldots.$$

соотвѣтственно равны коэффиціентамъ при

$$t^m,\ t^{m+1},\ t^{m+2}, \ldots.$$

въ разложеніи по степенямъ t выраженія

$$\left\{\log(1+t)\right\}^m.$$

Теперь, чтобы придти къ желаемымъ символическимъ формуламъ, остается только замѣнить

$$h \text{ на } h\frac{\partial}{\partial x} \quad \text{а} \quad t \text{ на } \Delta$$

и установить равенство

$$e^{h\frac{\partial}{\partial x}} - 1 = \Delta.$$

Такимъ образомъ получаемъ

$$\Delta^m = \left(e^{h\frac{\partial}{\partial x}} - 1\right)^m = A_m^m h^m \frac{\partial^m}{\partial x^m} + A_m^{m+1} h^{m+1} \frac{\partial^{m+1}}{\partial x^{m+1}} + \ldots.$$

$$h^m \frac{\partial^m}{\partial x^m} = \left\{\log(1+\Delta)\right\}^m = B_m^m \Delta^m + B_m^{m+1} \Delta^{m+1} + \ldots.$$

и соотвѣтственно этому замѣняемъ формулы (30) и (33) слѣдующими символическими

$$\frac{\partial^m f(x)}{\partial x^m} = \left\{\frac{\log(1+\Delta)}{h}\right\}^m f(x) \text{ или просто } \frac{\partial^m}{\partial x^m} = \left\{\frac{\log(1+\Delta)}{h}\right\}^m \qquad (30^a)$$

и

$$\Delta^m f(x) = \left\{e^{h\frac{\partial}{\partial x}} - 1\right\}^m f(x) \text{ или просто } \Delta^m = \left(e^{h\frac{\partial}{\partial x}} - 1\right)^m \qquad (33^a).$$

Смыслъ введенныхъ здѣсь символовъ достаточно ясенъ изъ предыдущаго.

Весь символизмъ состоитъ въ томъ, что надо разсматривать

$$\Delta,\ \Delta^2,\ \Delta^3,\ \Delta^4, \ldots.$$

не какъ степени числа Δ, а какъ знаки разностей различныхъ порядковъ, и

$$\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial^2}{\partial x^2},\ \frac{\partial^3}{\partial x^3}, \ldots.$$

не какъ степени числа $\frac{\partial}{\partial x}$, а какъ знаки производныхъ различныхъ порядковъ.

Тогда равенство

$$\Delta = e^{h\frac{\partial}{\partial x}} - 1$$

превращается въ символическое представленіе формулы Тайлора

$$f(x+h) - f(x) = \Delta f(x) = \frac{h}{1}\frac{\partial f(x)}{\partial x} + \frac{h^2}{1.2}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} + \frac{h^3}{1.2.3}\frac{\partial^3 f(x)}{\partial x^3} + \ldots.$$

и для вывода формулъ (30^a) и (33^a) надо поступать съ этимъ символическимъ равенствомъ какъ съ обыкновеннымъ.

Обратимъ еще вниманіе на выраженіе разностей соотвѣтствующихъ одному значенію h черезъ разности соотвѣтствующія другому значенію h.

Пусть

$$\Delta_1 f(z) = f(z+h_1) - f(z),$$

$$\Delta_1^2 f(z) = \Delta_1 f(z+h_1) - \Delta_1 f(z),$$

$$\Delta_1^3 f(z) = \Delta_1^2 f(z+h_1) - \Delta_1^2 f(z),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Delta_1^m f(z) = \Delta_1^{m-1} f(z+h_1) - \Delta_1^{m-1} f(z).$$

Поступая съ символическими равенствами

$$\Delta = e^{h\frac{\partial}{\partial x}} - 1 \quad \text{и} \quad \Delta_1 = e^{h_1\frac{\partial}{\partial x}} - 1$$

какъ съ обыкновенными, выводимъ

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\log(1+\Delta)}{h}, \quad h_1 \frac{\partial}{\partial x} = \frac{h_1}{h} \log(1+\Delta),$$

$$\Delta_1^{\,m} = \left\{ e^{\frac{h_1}{h}\log(1+\Delta)} - 1 \right\}^m = \left\{ (1+\Delta)^{\frac{h_1}{h}} - 1 \right\}^m$$

и соотвѣтственно этому пишемъ слѣдующую символическую формулу

$$\Delta_1^{\,m} f(x) = \left\{ (1+\Delta)^{\frac{h_1}{h}} - 1 \right\}^m f(x) \qquad (35).$$

Такой выводъ, конечно, нельзя назвать строгимъ.

Однако нетрудно убѣдиться, что полученный нами результатъ вѣренъ по крайней мѣрѣ въ тѣхъ случаяхъ, когда $f(x)$ цѣлая функція отъ x, или $\frac{h_1}{h}$ число цѣлое и положительное.

Въ другихъ же случаяхъ правая часть формулы (35) приводится къ суммѣ безконечнаго ряда, сходимость котораго нами не доказана.

Одно это замѣчаніе достаточно обнаруживаетъ нестрогость предыдущаго вывода.

Конечно такое же замѣчаніе слѣдовало бы сдѣлать и относительно формулъ (30^a) и (33^a), если бы только мы не считали ихъ равносильными вполнѣ точнымъ формуламъ (30) и (33).

Положимъ для примѣра

$$h_1 = \frac{h}{10}.$$

Тогда для всякой цѣлой функціи $f(x)$, четвертой или низшей степени отъ x, формула (35) даетъ слѣдующія вполнѣ точныя равенства

$$\Delta_1 f(x) = \frac{1}{10}\Delta f(x) - \frac{9}{200}\Delta^2 f(x) + \frac{57}{2000}\Delta^3 f(x) - \frac{1653}{80000}\Delta^4 f(x),$$

$$\Delta_1^2 f(x) = \frac{1}{100}\Delta^2 f(x) - \frac{9}{1000}\Delta^3 f(x) + \frac{309}{40000}\Delta^4 f(x),$$

$$\Delta_1^3 f(x) = \frac{1}{1000}\Delta^3 f(x) - \frac{27}{20000}\Delta^4 f(x),$$

$$\Delta_1^4 f(x) = \frac{1}{10000}\Delta^4 f(x).$$

Для другихъ функцій послѣднія равенства не точны, но при достаточно малыхъ значеніяхъ h погрѣшность ихъ мала.

Таблица значеній.

$$(m+1)(m+2)\cdots i\, A_m^i = C_m^i$$

	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$	$i=6$	$i=7$	$i=8$	$i=9$	$i=10$
$m=1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$m=2$		1	3	7	15	31	63	127	255	511
$m=3$			1	6	25	90	301	966	3025	9330
$m=4$				1	10	65	350	1701	7770	34105
$m=5$					1	15	140	1050	6951	42525
$m=6$						1	21	266	2646	22827
$m=7$							1	28	462	5880
$m=8$								1	36	750
$m=9$									1	45
$m=10$										1

Для послѣдовательнаго вычисленія чиселъ

$$C_m^i = (m+1)(m+2)\cdots i\, A_m^i$$

можно пользоваться слѣдующимъ соотношеніемъ

$$C_m^{i+1} = m\, C_m^i + C_{m-1}^i$$

Таблица значеній.

$$(-1)^{i-m}(m+1)(m+2)\cdots i\,B_m^i = D_m^i$$

	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$	$i=6$	$i=7$	$i=8$	$i=9$	$i=10$
$m=1$	1	1	2	6	24	120	720	5040	40320	362880
$m=2$		1	3	11	50	274	1764	13068	109584	1026576
$m=3$			1	6	35	225	1624	13132	118124	1172700
$m=4$				1	10	85	735	6769	67284	723680
$m=5$					1	15	175	1960	22449	269325
$m=6$						1	21	322	4536	63273
$m=7$							1	28	546	9450
$m=8$								1	36	870
$m=9$									1	45
$m=10$										1

Для послѣдовательнаго вычисленія чиселъ

$$D_m^i = (-1)^{i-m}(m+1)(m+2)\cdots i\,B_m^i$$

можно пользоваться слѣдующимъ соотношеніемъ

$$D_m^{i+1} = i\,D_m^i + D_{m-1}^i.$$

Литература.

Lagrange. Sur une nouvelle espèce de calcul (Oeuvres III).
Mémoire sur la méthode d'interpolation (Oeuvres V).

ГЛАВА IV.

О составленіи и употребленіи математическихъ таблицъ.

§ 10. Положимъ, что намъ надо вычислить таблицу послѣдовательныхъ значеній нѣкоторой функціи $f(z)$:

$$f(a),\ f(a+h),\ f(a+2h),\ f(a+3h),\ f(a+4h), \ldots \qquad (36),$$

гдѣ разность между каждыми двумя смежными значеніями z равна одному и тому же числу h.

При такихъ вычисленіяхъ часто бываетъ **полезно разсматривать также разности различныхъ порядковъ**

$$\Delta f(z),\ \Delta^2 f(z),\ \Delta^3 f(z), \ldots$$

т. е. составлять таблицу (17).

Пусть напримѣръ

$$f(z) = 10z^3 - 101z^2 - 109z + 1799,\ a = 0,\ h = 1.$$

Тогда таблица (17) принимаетъ слѣдующій видъ

z	$f(z)$	$\Delta f(z)$	$\Delta^2 f(z)$	$\Delta^3 f(z)$
0	+1799	— 200	—142	+60
1	+1599	— 342	— 82	+60
2	+1257	— 424	— 22	+60
3	+ 833	— 446	+ 38	+60
4	+ 387	— 408	+ 98	+60
5	— 21	— 310	+158	+60
6	— 331	— 152	+218	+60
7	— 483	+ 66	+278	+60
8	— 417	+ 344	+338	+60
9	— 73	+ 682	+398	+60
10	+ 609	+1080	+458	+60
...	....	....	....	....

Здѣсь всѣ значенія $\Delta^3 f(z)$ равны $+60$.

Вмѣстѣ съ тѣмъ не трудно видѣть, что по вычисленіи

$$f(0)=1799,\ \Delta f(0)=-200,\ \Delta^2 f(0)=-142$$

всѣ остальныя числа нашей таблицы можно получать одно за другимъ посредствомъ сложенія (или вычитанія); именно:

$$\Delta^2 f(1)=-142+60=-82,\ \Delta^2 f(2)=-82+60=-22,$$

$$\Delta^2 f(3)=-22+60=+38\ldots$$

$$\Delta f(1)=-200-142=-342,\ \Delta f(2)=-342-82=-424,$$

$$\Delta f(3)=-424-22=-446\ldots$$

$$f(1)=1799-200=1599,\quad f(2)=1599-342=1257,$$

$$f(3)=1257-424=833\ldots$$

Обращаясь къ общему случаю, положимъ, что въ таблицѣ (17) вычислены

$$f(a),\ \Delta f(a),\ldots,\ \Delta^{n-1} f(a),\ \Delta^n f(a)$$

и всѣ значенія $\Delta^{n+1} f(z)$:

$$\Delta^{n+1} f(a),\ \Delta^{n+1} f(a+h),\ \Delta^{n+1} f(a+2h),\ldots\ldots$$

Имѣя эти числа, посредствомъ сложенія находимъ

$$\Delta^n f(a+h) = \Delta^n f(a) + \Delta^{n+1} f(a),\ldots\ldots$$

$$\Delta^{n-1} f(a+h) = \Delta^{n-1} f(a) + \Delta^n f(a),\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Delta f(a+h)=\Delta f(a)+\Delta^2 f(a),\ \Delta f(a+2h)=\Delta f(a+h)+\Delta^2 f(a+h),\ldots$$

$$f(a+h)=f(a)+\Delta^2 f(a),\ f(a+2h)=f(a+h)+\Delta f(a+h),\ldots\ldots$$

Если $f(z)$ цѣлая функція $n^{\text{ой}}$ степени отъ z, то разность $n+1^{\text{го}}$ порядка

$$\Delta^{n+1} f(z)$$

обращается въ нуль при всякомъ значеніи z и достаточно вычислить

$$f(a),\ \Delta f(a),\ \Delta^2 f(a),\ldots,\ \Delta^n f(a),$$

чтобы можно было получать всѣ остальныя числа таблицы (17) одно за другимъ посредствомъ сложенія.

Въ этомъ случаѣ нетрудно также распространить таблицу (17) и въ обратную сторону, при помощи слѣдующихъ равенствъ

$$\Delta^n f(a)=\Delta^n f(a-h)=\Delta^n f(a-2h)=\Delta^n f(a-3h)=\ldots\ldots$$

$$\Delta^{n-1} f(a-h)=\Delta^{n-1} f(a)-\Delta^n f(a-h),\ldots\ldots$$

$$\Delta^{n-2} f(a-h)=\Delta^{n-2} f(a)-\Delta^{n-1} f(a-h),\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Delta f(a-h)=\Delta f(a)-\Delta^2 f(a-h),\ldots\ldots$$

$$f(a-h)=f(a)-\Delta f(a-h),\ f(a-2h)=f(a-h)-\Delta f(a-2h),\ldots$$

Такимъ образомъ, напримѣръ, распространяя въ обратную сторону составленную раньше таблицу значеній

$$f(z)=10z^3-101z^2-109z+1799,\ \Delta f(z),\ \Delta^2 f(z),\ \Delta^3 f(z),$$

получаемъ

...	....	....	....	....
−4	− 21	+968	−382	+60
−3	+ 947	+586	−322	+60
−2	+1533	+264	−262	+60
−1	+1797	+ 2	−202	+60
0	+1799	−200	−142	+60
z	$f(z)$	$\Delta f(z)$	$\Delta^2 f(z)$	$\Delta^3 f(z)$

Найденныя нами числа между прочимъ показываютъ, что уравненіе

$$10z^3-101z^2-109z+1799=0$$

имѣетъ по одному корню въ каждомъ изъ слѣдующихъ трехъ промежутковъ:

можду 4 и 5, между 9 и 10, между −4 и −3.

Для другихъ функцій $f(z)$ выраженіе $\Delta^{n+1} f(z)$ не приводится къ нулю, но часто бываетъ на столько мало, что **въ приближенныхъ вычисленіяхъ можно**, пренебрегая имъ, **составлять таблицу (17)** по даннымъ значеніямъ

$$f(a),\ \Delta f(a),\ \Delta^2 f(a),\ldots,\ \Delta^n f(a)$$

также какъ для цѣлыхъ функцій $n^{\text{ой}}$ степени

Для оцѣнки погрѣшности такихъ приближенныхъ вычисленій замѣтимъ, что они даютъ вмѣсто $f(z)$ цѣлую функцію

$$F(z)=f(a)+\frac{z-a}{h}\Delta f(a)+\frac{(z-a)(z-a-h)}{1.2\,h^2}\Delta^2 f(a)+\ldots+\frac{(z-a)\ldots(z-a-(n-1)h)}{1.2\ldots nh^n}\Delta^n f(a),$$

которая совпадаетъ съ $f(z)$ при

$$z=a,\ a+h,\ a+2h,\ldots,\ a+nh$$

и удовлетворяетъ условію

$$\Delta^{n+1} F(z)=0.$$

Разность же

$$f(z)-F(z)$$

согласно формулѣ (20) равна

$$\frac{(z-a)(z-a-h)\ldots(z-a-nh)}{1.2\ldots(n+1)} f^{n+1}(\xi),$$

гдѣ ξ лежитъ между наибольшимъ и наименьшимъ изъ чиселъ

$$z,\ a,\ a+nh.$$

Въ нашей таблицѣ перемѣнное число z послѣдовательно равно

$$a,\ a+h,\ a+2h,\ldots,\ a+nh,\ a+(n+1)h,\ldots.$$

Замѣняя соотвѣтственно этому z на $a+kh$, получаемъ для вышеупомянутой погрѣшности слѣдующее выраженіе

$$\frac{k(k-1)\ldots(k-n)}{1.2\ldots(n+1)} h^{n+1} f^{n+1}(\xi).$$

Здѣсь буква k означаетъ цѣлое положительное число, а ξ заключается между a и $a+kh$.

До сихъ поръ мы предполагали, что табличныя значенія

$$f(a),\ \Delta f(a),\ldots,\ \Delta^n f(a)$$

вполнѣ точны.

Если же истинныя значенія этихъ чиселъ отличаются отъ табличныхъ, то наши вычисленія заключаютъ еще другую ошибку, такъ какъ тогда истинныя значенія $F(z)$, вообще говоря, не совпадаютъ съ табличными.

Обозначимъ разности между истинными и табличными значеніями

$$f(a),\ \Delta f(a),\ \Delta^2 f(a), \ldots,\ \Delta^n f(a)$$

соотвѣтственно черезъ

$$\varepsilon_0,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2, \ldots,\ \varepsilon_n.$$

Тогда разность между истиннымъ и табличнымъ значеніемъ $F(a+kh)$ равна

$$\varepsilon_0 + \frac{k}{1}\varepsilon_1 + \frac{k(k-1)}{1.2}\varepsilon_2 + \ldots + \frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{1.2\ldots n}\varepsilon_n.$$

Итакъ, если всѣ числа таблицы (17) мы выводимъ посредствомъ сложенія, пренебрегая разностями $n+1^{\text{го}}$ порядка, изъ такихъ приближенныхъ значеній

$$f(a),\ \Delta f(a),\ \Delta^2 f(a), \ldots,\ \Delta^n f(a),$$

которыя отличаются отъ истинныхъ соотвѣтственно на

$$-\varepsilon_0,\ -\varepsilon_1,\ -\varepsilon_2, \ldots,\ -\varepsilon_n$$

то разность между истиннымъ значеніемъ $f(a+kh)$ и табличнымъ равна

$$\varepsilon_0 + k\varepsilon_1 + \frac{k(k-1)}{1.2}\varepsilon_2 + \ldots + \frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{1.2\ldots n}\varepsilon_n + \frac{k(k-1)\ldots(k-n)}{1.2\ldots(n+1)}h^{n+1}f^{n+1}(\xi)$$

Пусть напримѣръ

$$f(z) = \operatorname{Log} z \text{ (при основаніи } 10),\ a = 30000,\ h = 1$$

и намъ даны приближенныя равенства

$$f(a) = 4{,}477121254 \quad \text{съ точностью до } \frac{1}{10^9},$$

$$\Delta f(a) = 0{,}00001447624 \quad \text{съ точностью до } \frac{1}{10^{11}},$$

$$\Delta^2 f(a) = -0{,}000000000483 \quad \text{съ точностью до } \frac{1}{2.10^{12}}.$$

Полагая

$$4{,}477121254 = A,\ 0{,}00001447624 = B,\ 0{,}000000000483 = C$$

$$f(a) - A = \varepsilon_0,\ \Delta f(a) - B = \varepsilon_1,\ \Delta^2 f(a) - C = \varepsilon_2$$

$$F_1(z) = A + B(z-a) + C\frac{(z-a)(z-a-1)}{1.2}$$

составимъ таблицу послѣдовательныхъ значеній

$$F_1(z),\ \Delta F_1(z),\ \Delta^2 F_1(z)$$

при

$$z = a,\ a+1,\ a+2, \ldots\ldots$$

z	$F_1(z)$	$\Delta F_1(z)$	$\Delta^2 F_1(z)$
30000	4,477121254000	0,000014476240	—0,000000000483
30001	4,477135730240	14475757	483
30002	4,477150205997	14475274	483
30003	4,477164681271	14474791	483
30004	4,477179156062	14474308	483
30005	4,477193630370	14473825	483
30006	4,477208104195	14473342	483
30007	4,477222577537	14472859	483
30008	4,477237050396	14472376	483
30009	4,477251522772	14471893	483
....	.....	.....	.....

Въ этой таблицѣ намъ даны числа первой строки

$$F_1(a) = A,\ \Delta F_1(a) = B,\ \Delta^2 F_1(a) = C$$

и числа послѣдняго столбца

$$\Delta^2 F_1(a) = \Delta^2 F_1(a+1) = \Delta^2 F_1(a+2) = \ldots.$$

а всѣ прочія мы находимъ одно за другимъ посредствомъ сложенія.

Разность

$$f(a+k) - F_1(a+k)$$

согласно предыдущему равна

$$\varepsilon_0 + k\varepsilon_1 + \frac{k(k-1)}{1.2}\varepsilon_2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3}f'''(\xi),$$

при чемъ

$$\xi > a = 30000,\ \varepsilon_0^2 < \left(\frac{1}{10^9}\right)^2,\ \varepsilon_1^2 < \left(\frac{1}{10^{11}}\right)^2,\ \varepsilon_2^2 < \left(\frac{1}{2.10^{12}}\right)^2.$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ имѣемъ

$$f(z) = \operatorname{Log} z,\ f'(z) = \frac{M}{z},\ f''(z) = -\frac{M}{z^2},\ f'''(z) = \frac{2M}{z^3},$$

гдѣ M означаетъ модуль обыкновенныхъ логарифмовъ

$$0{,}4342944819\ldots$$

Отсюда нетрудно заключить, что численное значеніе разности

$$\operatorname{Log}(a+k) - F_1(a+k)$$

меньше

$$\frac{1}{10^9} + \frac{k}{10^{11}} + \frac{k^2}{4.10^{12}} + \frac{11k^3}{2.10^{15}}.$$

Послѣднее выраженіе возрастаетъ вмѣстѣ съ k и остается меньше $\frac{1}{10^8}$ до тѣхъ поръ, пока k меньше 100.

Итакъ, если начатую нами таблицу значеній

$$F_1(z),\ \Delta F_1(z),\ \Delta^2 F_1(z)$$

продолжить до $z = 100$ и считать $\operatorname{Log} z$ равнымъ $F_1(z)$, то ни въ одномъ изъ чиселъ

$$\operatorname{Log} 30001,\ \operatorname{Log} 30002, \ldots,\ \operatorname{Log} 30100$$

погрѣшность не превзойдетъ $\frac{1}{10^8}$.

Приведемъ для сравненія нѣсколько значеній $F_1(z)$ и $\operatorname{Log} z$:

$\operatorname{Log} 30000 = 4{,}47712.12547\ldots,$	$F_1(30000) = 4{,}47712.12540.00,$
$\operatorname{Log} 30010 = 4{,}47726.59954\ldots,$	$F_1(30010) = 4{,}47726.59946.65,$
$\operatorname{Log} 30050 = 4{,}47784.44763\ldots,$	$F_1(30050) = 4{,}47784.44743.25,$
$\operatorname{Log} 30100 = 4{,}47856.64955\ldots,$	$F_1(30100) = 4{,}47856.64871.50,$
$\operatorname{Log} 30200 = 4{,}48000.69429\ldots,$	$F_1(30200) = 4{,}48000.68903.00,$
$\operatorname{Log} 31000 = 4{,}49136.16938\ldots,$	$F_1(31000) = 4{,}49135.62355.00,$
$\operatorname{Log} 40000 = 4{,}60205.99913\ldots,$	$F_1(40000) = 4{,}59773.60690.00,$

§ 11. Таблица (17) можетъ служить также для повѣрки результатовъ, если всѣ числа

$$f(a),\ f(a+h),\ f(a+2h), \ldots.$$

вычислены независимо другъ отъ друга.

Дѣло въ томъ, что погрѣшность числа

$$f(a+mh),$$

также какъ и само это число, входитъ въ выраженіе

$$\Delta^n f(z) = f(z+nh) - \frac{n}{1}f(z+(n-1)h) + \frac{n(n-1)}{1.2}f(z+(n-2)h) \ldots \pm f(z)$$

при $z = a + (m-n)h$ со множителемъ 1,

„ $z = a + (m-n+1)h$ „ „ n,

„ $z = a + (m-n+2)h$ „ „ $\frac{n(n-1)}{1.2}$,

. . . . . .

„ $z = a + (m-n+i)h$ „ „ $\frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{1.2\ldots i}$,

. . . . . .

„ $z = a + (m-1)h$ „ „ n,

„ $z = a + mh$ „ „ 1,

и дѣлается тамъ замѣтнѣе по крайней мѣрѣ въ тѣхъ случаяхъ, когда истинныя значенія $\Delta^n f(z)$ весьма малы.

Здѣсь слѣдуетъ различить двѣ категоріи ошибокъ.

Однѣ ошибки входятъ, болѣе или менѣе, во всѣ результаты (36) и происходятъ отъ того, что мы по необходимости отбрасываемъ нѣкоторыя весьма малыя величины.

Такія ошибки можно назвать неизбѣжными въ отличіе отъ ошибокъ другой категоріи, которыя мы назовемъ случайными.

Эти послѣднія проскальзываютъ только при вычисленіи нѣкоторыхъ отдѣльныхъ чиселъ и происходятъ отъ недосмотровъ.

Высшій предѣлъ неизбѣжныхъ ошибокъ въ полученныхъ значеніяхъ $f(z)$ мы предполагаемъ извѣстнымъ

Обозначимъ его буквою δ.

Обозначимъ также черезъ

δ_i разность между истиннымъ и полученнымъ значеніемъ $f(a+ih)$

δ'_i „ „ „ „ „ $\Delta f(a+ih)$

δ''_i „ „ „ „ „ $\Delta^2 f(a+ih)$

δ'''_i „ „ „ „ „ $\Delta^3 f(a+ih)$

и т. д.

При такихъ обозначеніяхъ, останавливаясь на разностяхъ третьяго порядка, можемъ написать слѣдующее равенство

$$\delta'''_i = \delta_{i+3} - 3\delta_{i+2} + 3\delta_{i+1} - \delta_i,$$

А это равенство показываетъ, что численное значеніе δ'''_i меньше 8δ, если только ни въ одномъ изъ чиселъ

$$f(a+ih),\ f(a+(i+1)h),\ f(a+(i+2)h),\ f(a+(i+3)h)$$

нѣтъ случайной ошибки.

Напротивъ, если численное значеніе δ'''_i больше 8δ, то присутствіе случайной ошибки, въ томъ или другомъ изъ чиселъ

$$f(a+ih),\ f(a+(i+1)h),\ f(a+(i+2)h),\ f(a+(i+3)h),$$

несомнѣнно.

Возьмемъ теперь семь послѣдовательныхъ чиселъ

$$f(a+mh-3h), \ldots\ldots, f(a+mh), \ldots\ldots, f(a+mh+3h)$$

и положимъ, что изъ нихъ только одно среднее

$$f(a+mh)$$

содержитъ случайную ошибку; такъ что

$$\delta^2_{m-3} < \delta^2,\ \delta^2_{m-2} < \delta^2,\ \delta^2_{m-1} < \delta^2,\ \delta^2_{m+1} < \delta^2,\ \delta^2_{m+2} < \delta^2,\ \delta^2_{m+3} < \delta^2.$$

Тогда изъ равенствъ

$$\delta'''_{m-3} = \delta_m - 3\delta_{m-1} + 3\delta_{m-2} - \delta_{m-3},$$

$$\delta'''_{m-2} = \delta_{m+1} - 3\delta_m + 3\delta_{m-1} - \delta_{m-2},$$

$$\delta'''_{m-1} = \delta_{m+2} - 3\delta_{m+1} + 3\delta_m - \delta_{m-1},$$

$$\delta'''_m = \delta_{m+3} - 3\delta_{m+2} + 3\delta_{m+1} - \delta_m,$$

нетрудно вывесть слѣдующія неравенства

$$\delta'''_{m-3} - 7\delta < \delta_m < \delta'''_{m-3} + 7\delta,$$

$$-\frac{1}{3}\delta'''_{m-2} - \frac{5}{3}\delta < \delta_m < -\frac{1}{3}\delta'''_{m-2} + \frac{5}{3}\delta,$$

$$\frac{1}{3}\delta'''_{m-1} - \frac{5}{3}\delta < \delta_m < \frac{1}{3}\delta'''_{m-1} + \frac{5}{3}\delta,$$

$$-\delta'''_m - 7\delta < \delta_m < -\delta'''_m + 7\delta,$$

которыя до нѣкоторой степени опредѣляютъ δ_m, если только намъ извѣстны приближенныя значенія

$$\delta'''_{m-3},\ \delta'''_{m-2},\ \delta'''_{m-1},\ \delta'''_m.$$

Если послѣднимъ неравенствамъ нельзя удовлетворить всѣмъ одновременно, то мы должны заключить о присутствіи случайной ошибки въ томъ или другомъ изъ чиселъ

$$f(a+mh-3h), \ldots, f(a+mh-h),\ f(a+mh+h), \ldots, f(a+mh+3h).$$

Такимъ образомъ по значеніямъ разностей различныхъ порядковъ мы можемъ иногда не только судить о присутствіи ошибки, но даже опредѣлить ея мѣсто и, до нѣкоторой степени, величину; однако не всегда.

Для той же цѣли могутъ служить выраженія, составленныя изъ нѣсколькихъ разностей; напримѣръ

$$\Delta^3 f(z) + \Delta^3 f(z-h) = f(z+3h) - 2f(z+2h) + 2f(z) - f(z-h),$$

$$\Delta^3 f(z) + 3\Delta^3 f(z-h) + 6\Delta^3 f(z-2h) + 2\Delta^3 f(z-3h) = f(z+3h) - 8f(z) + 9f(z-h) - 2f(z-3h),$$

$$2\Delta^3 f(z)+6\Delta^3 f(z-h)+3\Delta^3 f(z-2h)+\Delta^3 f(z-3h)=2f(z+3h)-9f(z+h)$$
$$+8f(z) \quad - f(z-h).$$

§ 12. Положимъ, что таблица (36) послѣдовательныхъ значеній функціи $f(z)$ составлена и надлежащимъ образомъ вывѣрена

Такою таблицею затѣмъ пользуются не только для непосредственнаго опредѣленія находящихся въ ней значеній $f(z)$, но и для приближеннаго вычисленія другихъ значеній той же функціи посредствомъ одной изъ формулъ интерполированія.

Значеніе математическихъ таблицъ и формулъ интерполированія мы покажемъ на нѣсколькихъ примѣрахъ.

Примѣръ 1.

Возьмемъ обыкновенную таблицу семизначныхъ логарифмовъ и разсмотримъ извѣстное примѣненіе этой таблицы къ вычисленію логарифма любого числа.

Пусть надо вычислить логарифмъ даннаго числа B.

Умножая B на нѣкоторую цѣлую положительную или отрицательную степень числа 10, мы всегда можемъ получить такое число

$$10^i B,$$

цѣлая часть котораго

$$A$$

число пятизначное.

Полагая соотвѣтственно этому

$$10^i B = A + x,$$

находимъ изъ таблицы значенія

$$\operatorname{Log} A \text{ и } \operatorname{Log}(A+1) - \operatorname{Log} A$$

и вычисляемъ логариѳмъ B по приближенной формулѣ

$$\operatorname{Log} B = \operatorname{Log} A + x\{\operatorname{Log}(A+1) - \operatorname{Log} A\} - i.$$

Чтобы оцѣнить погрѣшность въ вычисленномъ такимъ образомъ значеніе $\operatorname{Log} B$, обратимся къ формулѣ (20) Ньютона.

При

$$f(z) = \operatorname{Log}(A+z) - i, \ a = 0, \ h = 1, \ n = 1$$

формула (20) даетъ

$$\operatorname{Log} B = \operatorname{Log}(A+x) - i$$
$$= \operatorname{Log} A + x\{\operatorname{Log}(A+1) - \operatorname{Log} A\} - i + \frac{Mx(1-x)}{2(A+\xi)^2}.$$

Здѣсь

$$0 \leqq x < 1, \ 10^4 \leqq A < 10^5, \ \xi > 0, \ M = 0{,}434\ldots.$$

и потому погрѣшность допускаемаго нами равенства

$$\operatorname{Log} B = \operatorname{Log} A + x\{\operatorname{Log}(A+1) - \operatorname{Log} A\} - i,$$

равная

$$\frac{Mx(1-x)}{2(A+\xi)^2},$$

меньше

$$\frac{1}{16.10^8}.$$

Слѣдуетъ еще обратить вниманіе на неизбѣжныя ошибки въ табличныхъ значеніяхъ

$$\operatorname{Log} A \text{ и } \operatorname{Log}(A+1).$$

За высшій предѣлъ этихъ ошибокъ для хорошо вывѣренной таблицы можно принять

$$\frac{1}{2.10^7}.$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ соотвѣтствующая погрѣшность въ значеніи выраженія

$$\operatorname{Log} A + x\{\operatorname{Log}(A+1) - \operatorname{Log} A\}$$

также не превосходитъ $\frac{1}{2.10^7}$.

На этомъ основаніи, **пользуясь по общеизвѣстному правилу обыкновенною таблицею семизначныхъ логарифмовъ, мы можемъ расчитывать**

для логарифма любого числа получить такое приближенное значеніе, которое отличается отъ истиннаго на величину меньшую

$$\frac{1}{2.10^7} + \frac{1}{16.10^8},$$

если только наши собственныя вычисленія будутъ вполнѣ безошибочны.

Примѣръ 2.

Таблица семизначныхъ логарифмовъ служитъ, какъ извѣстно, и для рѣшенія обратной задачи, когда по данному значенію $\operatorname{Log} B$ надо найти B.

Именно, мы подбираемъ цѣлое пятизначное число

$$A$$

и цѣлое положительное или отрицательное число i такъ, чтобы данное намъ значеніе

$$\operatorname{Log} B$$

заключалось между

$$\operatorname{Log} A - i \text{ и } \operatorname{Log}(A+1) - i.$$

Затѣмъ вычисляемъ число y по формулѣ

$$y = \frac{\operatorname{Log} B - \operatorname{Log} A + i}{\operatorname{Log}(A+1) - \operatorname{Log} A}$$

и полагаемъ

$$B = \frac{A+y}{10^i}.$$

Здѣсь

$$\operatorname{Log} A \text{ и } \operatorname{Log}(A+1)$$

означаютъ не истинныя а табличныя значенія логарифмовъ чиселъ A и $A+1$.

Замѣтимъ еще, что вмѣсто истиннаго значенія $\operatorname{Log} B$ обыкновенно приходится довольствоваться приближеннымъ.

Приступая къ оцѣнкѣ погрѣшности въ найденномъ такимъ образомъ значеніи числа B, ограничимся тѣми случаями, когда изъ нашихъ данныхъ вытекаютъ неравенства

$$\frac{A}{10^i} < B < \frac{A+1}{10^i}.$$

Тогда согласно предыдущему

$$\operatorname{Log} B$$

отличается отъ

$$\operatorname{Log} A + \{10^i B - A\}\{\operatorname{Log}(A+1) - \operatorname{Log} A\} - i$$

менѣе чѣмъ на

$$\frac{1}{2.10^7} + \frac{1}{16.10^8}.$$

По этому погрѣшность приближенной формулы

$$B = \frac{A}{10^i} + \frac{1}{10^i}\,\frac{\operatorname{Log} B - \operatorname{Log} A + i}{\operatorname{Log}(A+1) - \operatorname{Log} A}$$

меньше

$$\frac{\frac{1}{2.10^{7+i}} + \frac{1}{16.10^{8+i}}}{\operatorname{Log}(A+1) - \operatorname{Log} A}.$$

Съ другой стороны погрѣшности ε въ значеніи $\operatorname{Log} B$ соотвѣтствуетъ погрѣшность

$$\frac{\frac{\varepsilon}{10^i}}{\operatorname{Log}(A+1) - \operatorname{Log} A}$$

въ значеніи выраженія

$$\frac{y}{10^i} = \frac{1}{10^i}\,\frac{\operatorname{Log} B - \operatorname{Log} A + i}{\operatorname{Log}(A+1) - \operatorname{Log} A}.$$

На этомъ основаніи нетрудно придти къ слѣдующему заключенію: **если погрѣшность въ данномъ значеніи $\operatorname{Log} B$ меньше ε, то извѣстное приближенное равенства**

$$B = \frac{A+y}{10^i} = \frac{A}{10^i} + \frac{1}{10^i}\,\frac{\operatorname{Log} B - \operatorname{Log} A + i}{\operatorname{Log}(A+1) - \operatorname{Log} A}$$

даетъ возможность, при помощи обыкновенной таблицы логариѳмовъ, получить для B такое приближенное значеніе, которое отличается отъ истиннаго менѣе чѣмъ на

$$\frac{\frac{\varepsilon}{10^i}+\frac{1}{2.10^{7+i}}+\frac{1}{16.10^{8+i}}}{\operatorname{Log}(A+1)-\operatorname{Log}A}.$$

Примѣръ 3.

Обращаясь къ составленной мною таблицѣ значеній интеграла

$$\int_z^\infty e^{-t^2}dt$$

предложимъ себѣ вычислить

$$\int_{0,4769363}^\infty e^{-t^2}dt.$$

Для этого вычисленія беремъ изъ таблицы слѣдующія числа

z	$f(z)=\int_z^\infty e^{-t^2}dt$	$10^{11}\Delta f(z)$	$10^{11}\Delta^2 f(z)$	$10^{11}\Delta^3 f(z)$
0,476	0,44385958433	— 79687911	+ 75987	+ 84
0,477	0,44306270522	— 79611924	+ 76071	
0,478	0,44226658598	— 79535853		
0,479	0,44147122745			

Затѣмъ въ формулѣ (20) Ньютона полагаемъ

$$f(z)=\int_z^\infty e^{-t^2}dt,\ a=0,476,\ h=0,001,\ x=0,4769363,\ n=3$$

$$f(a)=0,44385958433,\ \Delta f(a)=-\frac{79687911}{10^{11}},\ \Delta^2 f(a)=\frac{75987}{10^{11}},\ \Delta^3 f(a)=\frac{84}{10^{11}}$$

и отбрасываемъ дополнительный членъ

$$\frac{(x-a)(x-a-h)(x-a-2h)(x-a-3h)}{1.2.3.4}f^{\text{IV}}(\xi).$$

Такимъ образомъ приходимъ къ слѣдующему приближенному равенству

$$\int_{0,4769363}^\infty e^{-t^2}dt=0,44385958433-0,9363\,.\,\frac{79687911}{10^{11}}+$$

$$+\frac{0,9363(0,9363-1)}{1.2}\,.\,\frac{75987}{10^{11}}+\frac{0,9363\,(0,9363-1)\,(0,9363-2)}{1.2.3}\,\frac{84}{10^{11}}$$

и, выполняя указанныя дѣйствія, получаемъ:

$$0,9363-1=-0,0637,\ 0,9363-2=-1,0637$$

84	759572	796903303
73601× *)	73600× *)	36390× *)
840	45574	717212973
50	2279	23907099
3	532	4781420
893 : 3	48385 : 2	239071
		— 746140563
		+ 0,44385958433
— 298	— 24193	0,443113443767
+ 75987	— 79687911	
+ 759572	— 796903303	

$$\int_{0,4769363}^\infty e^{-t^2}dt=0,44311344377.$$

Нашъ результатъ, конечно, нельзя считать вполнѣ точнымъ, такъ какъ въ формулѣ Ньютона мы отбросили дополнительный членъ и замѣнили истинныя значенія

$$f(a)=\int_{0,476}^\infty e^{-t^2}dt,\ f(a+h)=\int_{0,477}^\infty e^{-t^2}dt,\ f(a+2h)=\int_{0,478}^\infty e^{-t^2}dt,\ f(a+3h)=\int_{0,479}^\infty e^{-t^2}dt$$

приближенными

Къ этимъ двумъ причинамъ неточности результатъ присоединяется еще третья: погрѣшность выкладокъ.

Относительно погрѣшностей табличныхъ значеній

---

*) Придерживаясь правила Уитреда (Oughtred), мы пишемъ множитель въ обратномъ порядкѣ.

$$\int_{0,476}^{\infty} e^{-t^2}dt,\ \int_{0,477}^{\infty} e^{-t^2}dt,\ \int_{0,478}^{\infty} e^{-t^2}dt,\ \int_{0479}^{\infty} e^{-t^2}dt$$

можно ручаться, что ни одна изъ нихъ не достигаетъ $\frac{1}{2.10}$.

На этомъ основаніи нетрудно убѣдиться, что погрѣшность *) результата, происходящая отъ неточности таблицъ, меньше $\frac{6}{10^{12}}$.

Нетрудно также убѣдиться, что для нашего примѣра дополнительный членъ формулы Ньютона меньше $\frac{1}{10^{13}}$ а погрѣшность происходящая отъ неточности выкладокъ меньше $\frac{3}{10^{12}}$.

Слѣдовательно истинное значеніе интеграла

$$\int_{0,4769363}^{\infty} e^{-t^2}dt$$

отличается отъ найденнаго нами

$$0,44311344377$$

менѣе чѣмъ на

$$\frac{1}{10^{11}}.$$

Примѣръ 4.

Таже таблица значеній интеграла

$$\int_{z}^{\infty} e^{-t^2}dt$$

можетъ служить и для приближеннаго рѣшенія уравненій слѣдующаго вида

$$\int_{x}^{\infty} e^{-t^2}dt = A,$$

гдѣ A означаетъ число данное, а x — неизвѣстное.

Пусть напримѣръ

*) При разысканіи высшаго предѣла этой погрѣшности мы преобразуемъ формулу Ньютона въ формулу Лагранжа.

$$A = 0,08862269255.$$

При такомъ значеніи A для опредѣленія неизвѣстнаго x беремъ изъ таблицы слѣдующія числа

z	$f(z)=\int_z^\infty e^{-t^2}dt$	$10^{11}\Delta f(z)$	$10^{11}\Delta^2 f(z)$	$10^{11}\Delta^3 f(z)$
1,163	0,08864522603	— 25827455	+ 60057	— 90
1,164	0,08838695148	— 25767398	+ 59967	
1,165	0,08812927750	— 25707431		
1,166	0,08787220319			

Затѣмъ, пользуясь формулой Ньютона, замѣняемъ предложенное трансцендентное уравненіе

$$\int_{x}^{\infty} e^{-t^2}dt = 0,08862269255$$

уравненіемъ третьей степени

$$\begin{aligned}0,08862269255 = 0,08864522603 &- 0,25827455(x-1,163)\\ &+ 0,300285(x-1,163)(x-1,164)\\ &- 0,15(x-1,163)(x-1,164)(x-1,165)\end{aligned}$$

которое можно представить также въ слѣдующемъ видѣ

$$x = 1,163 + \frac{0,08864522603 - 0,08862269255 + \psi(x)}{0,25827455}$$

гдѣ

$$\begin{aligned}\psi(x) = 0,300285&(x-1,163)(x-1,164)\\ &- 0,15(x-1,163)(x-1,164)(x-1,165).\end{aligned}$$

Рѣшеніе послѣдняго уравненія облегчается тѣмъ обстоятельствомъ, что $x - 1,163$ величина малая.

На этомъ основаніи можно положить: для перваго приближенія

$$x = 1,163 + \frac{0,08864522603 - 0,08862269255}{0,25827455} = x_1$$

для втораго приближенія

$$x = 1{,}163 + \frac{0{,}08864522603 - 0{,}08862269255 + \psi(x_1)}{0{,}25827455} = x_2,$$

для третьяго приближенія

$$x = 1{,}163 + \frac{0{,}08864522603 - 0{,}08862269255 + \psi(x_2)}{0{,}25827455} = x_3$$

и т. д.

Такимъ образомъ, еслибы дѣло шло о рѣшеніи составленнаго нами уравненія третьей степени, можно было бы достигнуть какой угодно точности.

Но намѣченный нами корень уравненія третьей степени, по всей вѣроятности, не равенъ искомому корню трансцендентнаго уравненія

$$\int_x^\infty e^{-t^2} dt = 0{,}08862269255$$

и потому слишкомъ большая точность здѣсь неумѣстна.

Прежде чѣмъ приступить къ выкладкамъ займемся еще оцѣнкою возможной погрѣшности и условимся всѣ наши числа выражать десятичными дробями.

Положимъ, что мы остановились на приближенномъ равенствѣ

$$x = p.$$

О степени точности такого приближеннаго равенства можно судить по величинѣ разности

$$\int_x^\infty e^{-t^2} dt - \int_p^\infty e^{-t^2} dt:$$

если численное значеніе этой разности меньше ε' но больше ε'', то при

$$1{,}163 < p < 1{,}164$$

должны имѣть мѣсто слѣдующія неравенства

$$\varepsilon' > \text{числен. знач.} \int_x^p e^{-t^2} dt > \text{чис. зн.}\ (p - x)\, e^{-(1{,}164)^2}$$

$$> \text{чис. зн.}\ \frac{p - x}{0{,}001} \int_{1{,}164}^{1{,}165} e^{-t^2} dt > \text{чис. зн.}\ 0{,}2576\,(p - x)$$

и

$$\varepsilon'' < \text{числен. знач.} \int_x^p e^{-t^2} dt < \text{чис. зн.}\ (p - x)\, e^{-(1{,}163)^2}$$

$$< \text{чис. зн.}\ \frac{p - x}{0{,}001} \int_{1{,}162}^{1{,}163} e^{-t^2} dt < \text{чис. зн.}\ 0{,}26\,(p - x),$$

откуда

$$\frac{\varepsilon''}{0{,}26} < \text{чис. зн.}\ (p - x) < \frac{\varepsilon'}{0{,}2576}.$$

Всѣ наши вычисленія основаны на формулѣ Ньютона и на табличныхъ значеніяхъ интеграловъ

$$\int_{1{,}163}^\infty e^{-t^2} dt,\ \int_{1{,}164}^\infty e^{-t^2} dt,\ \int_{1{,}165}^\infty e^{-t^2} dt,\ \int_{1{,}166}^\infty e^{-t^2} dt.$$

Истинныя же значенія интеграловъ

$$\int_{1{,}163}^\infty e^{-t^2} dt,\ \int_{1{,}164}^\infty e^{-t^2} dt,\ \int_{1{,}165}^\infty e^{-t^2} dt,\ \int_{1{,}166}^\infty e^{-t^2} dt$$

неизвѣстны и мы можемъ только утверждать, что каждое изъ нихъ отличается отъ соотвѣтствующаго числа таблицы менѣе чѣмъ на $\frac{1}{2.10^{11}}$.

Точное значеніе дополнительнаго члена формулы Ньютона также остается неизвѣстнымъ.

Принимая во вниманіе наши замѣчанія, нетрудно убѣдиться, что ни въ одномъ изъ найденныхъ по вышеуказанному способу приближенныхъ значеній x нельзя поручиться уже за одинадцатую цифру послѣ запятой, такъ какъ погрѣшность можетъ достигать до

$$\frac{\frac{1}{2.10^{11}}}{0{,}3} = \frac{1}{6\,.\,10^{10}}.$$

Поэтому во всѣхъ числахъ

$$x_1,\ x_2, \ldots.$$

мы отбросимъ двѣнадцатыя и дальнѣйшія цифры послѣ запятой.

Произведемъ теперь всѣ необходимыя выкладки:

```
0,08864522603
0,08862269255
-------------
0,000022533480 | 0,25827455
     20661964  |-----------
     --------  | 0,00008724622 = x1 − 1,163
      1871516  | 1,16308724622 = x1   (первое приближеніе)
      1807922  | 0,00091275378 = 1,164 − x1
      -------  | 0,00191275378 = 1,165 − x1
        63594
        51655
        -----
        11939
        10331
        -----
         1608
         1550
         ----
           58
           52
           --
            6
            5
           --
        δ=+1
```

```
        0,15
   ..72 191000 ×
   ------------
          150
          135
            2
   ------------
      + 287
  + 0,300285
   ------------
     0,300572
  873 572190000 ×
   ------------
       270515
         3006
          601
          210
           15
            1
   ------------
     0,000274348
```

```
0,000274348
 226427800000×
 -------------
        21948
         1920
           55
           11
            2
 -------------
ψ(x1)= −0,000000023936
            δ= +1
 -------------
−0,000000023935 | 0,25827455
       23245    |-----------
       -----    | −0,00000009267
         690    | +1,16308724622 = x1
         517    |-----------------
         ---    | 1,16308715355 = x2 (второе приближеніе)
         173    | 0,00008715355 = x2 − 1,163
         155    | 0,00091284645 = 1,164 − x2
         ---    | 0,00191284645 = 1,165 − x2
          18
          18
          --
           0
```



```
        0,15
  ...82 191000 ×
  -------------
      +287
  + 0,300285
  -------------
    0,300572
  546 482190000 ×
  -------------
      270515
        3006
         601
         240
          12
           2
  -------------
    0,000274376
```

```
−0,000274376
  553517800000 ×
  -------------
        21950
         1920
           27
           14
            1
  -------------
−0,000000023912 = ψ(x2)
      + 23935
  -------------
  0,000000000023 | 0,25827455
           23    |-----------
                 | 0,00000000009 = x3−x2
```

$x_3 = 1{,}16308715364$ (третье приближеніе).

Всѣ дальнѣйшія приближенія, при нашемъ способѣ вычисленія, совпадаютъ съ третьимъ.

Чтобы судить о степени точности приближеннаго равенства

$$x = 1{,}16308715364$$

вычислимъ значеніе интеграла

$$\int_{1,16308715364}^{\infty} e^{-t^2} dt$$

по тому способу который былъ изложенъ въ третьемъ примѣрѣ:

```
        90          601144          258548926
 ... 82191×   ...36482190×        463517800×
 ----------   -------------       -----------
        900        541030            20683914
        810          6011             1809842
          9          1202               25855
          3           481               12927
 ----------           24                 776
   1722 : 3            4                 155
                 -------                  11
                548752 : 2        -----------
                                  − 22533480
   + 574        − 274376
 + 60057        − 25827455        +0,08864522603
 ----------     ----------        --------------
     601144       258548926        0,088622692550
```

$$\int_{1,16308715364}^{\infty} e^{-t}\, dt = 0{,}08862269255$$

Здѣсь, конечно, слѣдуетъ обратить вниманіе на три причины погрѣшности, о которыхъ мы говорили уже въ третьемъ примѣрѣ (дополнительный членъ, неточность таблицы, неточность выкладокъ).

И нетрудно убѣдиться, что истинное значеніе интеграла

$$\int_{1,16308715364}^{\infty} e^{-t^2} dt$$

отличается отъ

$$0,08862269255$$

менѣе чѣмъ на $\frac{12}{10^{12}}$.

Соотвѣтственно этому численное значеніе разности

$$x - 1,16308715364$$

навѣрно меньше

$$\frac{12}{25.10^{10}} = \frac{48}{10^{12}}.$$

Слѣдовательно, отбросивъ одинадцатую цифру послѣ запятой, мы можемъ положить

$$x = 1,1630871536$$

съ точностью до $\frac{1}{10^{10}}$.

Примѣръ 5.

Послѣдній примѣръ мы возьмемъ изъ **„Trigonometria britannica“**, имѣя въ виду изложить способъ **Бригга** для дѣленія промежутка h на пять равныхъ частей.

Положимъ

$$f(z) = 1000\, z^6$$

и составимъ слѣдующую таблицу

z	$f(z)$	$\Delta f(z)$	$\Delta^2 f(z)$	$\Delta^3 f(z)$	$\Delta^4 f(z)$	$\Delta^5 f(z)$
4	4096000	$4207765\frac{5}{8}$	$3113468\frac{3}{4}$	$1620937\frac{1}{2}$	564375	118125
4,5	$8303765\frac{5}{8}$	$7321234\frac{3}{8}$	$4734406\frac{1}{4}$	$2185312\frac{1}{2}$	682500	
5	15625000	$12055640\frac{5}{8}$	$6919718\frac{3}{4}$	$2867812\frac{1}{2}$		
5,5	$27680640\frac{5}{8}$	$18975359\frac{3}{8}$	$9787531\frac{1}{4}$			
6	46656000	$28762890\frac{5}{8}$				
6,5	$75418890\frac{5}{8}$					

Здѣсь

$$\Delta^6 f(z) = 11250$$

Затѣмъ предложимъ себѣ преобразовать эту таблицу въ другую гдѣ h не 0,5 а 0,1.

Для этой цѣли, конечно, можетъ служить формула (35).

Но Бриггъ пользуется иными формулами, изъ которыхъ однѣ содержатъ разности только нечетныхъ порядковъ, а другія — только четныхъ.

Чтобы придти къ нимъ возьмемъ ту формулу, которая приведена у насъ въ началѣ 25-ой страницы:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{h}\Delta f(a) + \frac{(x-a)(x-a-h)}{1.2.h^2}\Delta^2 f(a-h) +$$

$$+ \frac{(x-a+h)(x-a)(x-a-h)}{1.2.3.h^3}\Delta^3 f(a-h) + \ldots$$

Отсюда выводимъ

$$\Delta_1^{2k} f(x) = G_k^k \Delta^{2k} f(x + k\sigma) + G_k^{k+1}\Delta^{2k+2} f(x + k\sigma - h) + \ldots$$

$$\Delta_1^{2k+1} f(x) = H_k^k \Delta^{2k+1} f\left(x + \frac{2k+1}{2}\sigma\right) + H_k^{k+1}\Delta^{2k+3} f\left(x + \frac{2k+1}{2}\sigma - h\right) + \ldots$$

гдѣ

$$\sigma = h_1 - h,$$

$$G_k^i = \left\{\Delta_1^{2k} \frac{(x-a+ih-h)\ldots(x-a)\ldots(x-a-ih)}{1.2.3\ldots 2i\, h^{2i}}\right\}_{x=a-kh_1},$$

$$H_k^i = \left\{\Delta_1^{2k+1} \frac{(x-a+ih)\ldots(x-a)\ldots(x-a-ih)}{1.2.3\ldots(2i+1)\, h^{2i+1}}\right\}_{x=a-kh_1-\frac{\sigma}{2}}.$$

Останавливаясь на томъ частномъ случаѣ, когда $h_1 = 5h$ и $f(z)$ означаетъ цѣлую функцію шестой степени, получаемъ формулы Бригга *):

$$\Delta^6 f(x+12h) = \left(\frac{1}{5}\right)^6 \Delta_1^6 f(x),$$

$$\Delta^5 f(x+10h) = \left(\frac{1}{5}\right)^5 \Delta_1^5 f(x),$$

$$\Delta^4 f(x+8h) = \left(\frac{1}{5}\right)^4 \Delta_1^4 f(x) - 4\Delta^6 f(x+7h),$$

$$\Delta^3 f(x+6h) = \left(\frac{1}{5}\right)^3 \Delta_1^3 f(x) - 3\Delta^5 f(x+5h),$$

$$\Delta^2 f(x+4h) = \left(\frac{1}{5}\right)^2 \Delta_1^2 f(x) - 2\Delta^4 f(x+3h) - \frac{7}{5}\Delta^6 f(x+2h),$$

$$\Delta f(x+2h) = \frac{1}{5}\Delta_1 f(x) - \Delta^3 f(x+h) - \frac{1}{5}\Delta^5 f(x).$$

Положимъ $h = 0,1$ и обратимся къ нашему примѣру.

По формуламъ Бригга вычисляемъ шесть чиселъ

$$\Delta^6 f(x) = 0,72,$$

$$\Delta^5 f(5) = \frac{118125}{5^5} = 37,8,$$

$$\Delta^4 f(4,8) = \frac{564375}{5^4} - 4 \times 0,72 = 900,12,$$

$$\Delta^3 f(5,1) = \frac{2185312,5}{5^3} - 3 \times 37,8 = 17369,1,$$

$$\Delta^2 f(4,9) = \frac{4734406,25}{5^2} - 2 \times 900,12 - \frac{7 \times 0,72}{5} = 187575,002,$$

$$\Delta f(5,2) = \frac{12055640,625}{5} - 17369,1 - \frac{37,8}{5} = 2393751,465.$$

Другія же числа новой таблицы находимъ одно за другимъ посредствомъ сложеній и вычитаній:

*) У Бригга формулы доведены до разностей 20-го порядка.

z	$f(z)$	$\Delta f(z)$	$\Delta^2 f(z)$	$\Delta^3 f(z)$	$\Delta^4 f(z)$	$\Delta^5 f(z)$
4,5	8303765,625	1170531,271	134387,162	12069,54	795,36	34,20
4,6	9474296,896	1304918,433	146456,702	12864,90	829,56	34,92
4,7	10779215,329	1451375,135	159321,602	13694,46	864,48	35,64
4,8	12230590,464	1610696,737	173016,062	14558,94	**900,12**	36,36
4,9	13841287,201	1783712,799	**187575,002**	15459,06	936,48	37,08
5	**15625000,000**	1971287,801	203034,062	16395,54	973,56	**37,80**
5,1	17596287,801	2174321,863	219429,602	**17369,10**	1011,36	
5,2	19770609,664	**2393751,465**	236798,702	18380,46		
5,3	22164361,129	2630550,167	255179,162			
5,4	24794911,296	2885729,329				
5,5	27680640,625					

Выведенныя нами формулы представляютъ удобное средство для дѣленія промежутка h_1 на какое угодно нечетное число равныхъ частей.

А для дѣленія промежутка h_1 на четное число частей формула

$$\Delta_1^{2k+1} f(x) = H_k^k \Delta^{2k+1} f\left(x + \frac{2k+1}{2}\sigma\right) + \ldots$$

непригодна, такъ какъ при четномъ значеніи $\frac{h_1}{h}$ выраженіе $\frac{\sigma}{2h}$ число дробное.

Тогда вмѣсто нея можно пользоваться одною изъ слѣдующихъ

$$\Delta_1^{2k+1} f(x) = J_k^k \frac{\Delta^{2k+1} f\left(x + \frac{2k+1}{2}\sigma + \frac{h}{2}\right) + \Delta^{2k+1} f\left(x + \frac{2k+1}{2}\sigma - \frac{h}{2}\right)}{2}$$

$$+ J_k^{k+1} \frac{\Delta^{2k+3} f\left(x + \frac{2k+1}{2}\sigma - \frac{h}{2}\right) + \Delta^{2k+3} f\left(x + \frac{2k+1}{2}\sigma - \frac{3h}{2}\right)}{2}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{\Delta^{2k+1} f\left(x + k\sigma + \frac{\sigma+h}{2}\right) + \Delta^{2k+1} f\left(x + k\sigma + \frac{\sigma-h}{2}\right)}{2} = K_k^k \Delta_1^{2k+1} f(x)$$

$$+ K_k^{k+1} \Delta_1^{2k+1} f(x - h_1) + \ldots,$$

гдѣ

$$J_k^i = \left\{ \Delta_1^{2k+1} \frac{(x-a+ih)\ldots(x-a)\ldots(x-a-ih)}{1\ 2.3\ldots(2i+1)\,h^{2i+1}} \right\}_{x=a-\frac{2k+1}{2}h_1}$$

$$2K_k^i = \left\{ \Delta^{2k+1} \frac{(x-a+ih_1)\ldots(x-a)\ldots(x-a-ih_1)}{1\ 2\ 3\ldots(2i+1)\,h_1^{2i+1}} \right\}_{x=a-kh+\frac{h_1}{2}}$$

$$+ \left\{ \Delta^{2k+1} \frac{(x-a+ih_1-h)\ldots(x-a-h)\ldots(x-a-ih_1-h)}{1.2.3\ldots(2i+1)\,h_1^{2i+1}} \right\}_{x=a-kh+\frac{h_1}{2}}.$$

Всѣмъ этимъ формуламъ соотвѣтствуютъ также новыя формулы для выраженія разностей черезъ производныя и обратно — производныхъ черезъ разности:

$$\Delta^n f\left(x-\frac{nh}{2}\right) = L_n^n h^n \frac{d^n f(x)}{dx^n} + L_n^{n+2} h^{n+2} \frac{d^{n+2} f(x)}{dx^{n+2}} + \ldots,$$

$$h^n \frac{d^n f\left(x+\frac{nh}{2}\right)}{dx^n} = M_n^n \Delta^n f(x) + M_n^{n+2} \Delta^{n+2} f(x-h) + \ldots,$$

причемъ

$$\left(e^{\frac{h}{2}} - e^{-\frac{h}{2}}\right)^n = L_n^n h^n + L_n^{n+2} h^{n+2} + L_n^{n+4} h^{n+4} + \ldots$$

$$\left\{ \log\left(1+\frac{t^2}{2}+t\sqrt{1+\frac{t^2}{4}}\right) \right\}^n = M_n^n t^n + M_n^{n+2} t^{n+2} + \ldots.$$

Литература.

Cotes. Harmonia mensurarum. De constructione tabularum.

Prony. Notice sur les grandes Tables logarithmique et trigonométriques, calculées au Bureau du cadastre.

Lagrange, Laplace et Delambre. Rapport sur ces Tables.

Lacroix. Traité des différences et des séries.

Legendre. Exercices de calcul intégral. Construction des tables elliptiques.

Markoff. Table des valeurs de l'intégrale $\int_x^\infty e^{-t^2}\,dt$.

ГЛАВА V.

Приложеніе интерполированія къ вычисленію интеграловъ.

§ 13. Интерполированіе представляетъ одно изъ средствъ для приближеннаго вычисленія опредѣленныхъ интеграловъ.

Именно соотвѣтственно формулѣ интерполированія

$$f(x) = F(x) \tag{3}$$

полагаютъ

$$\int_c^\partial f(x)\,dx = \int_c^\partial F(x)\,dx \tag{36}$$

Вспомнимъ, что цѣлая функція $F(z)$ опредѣляется по условіямъ (2) и дополнительный членъ формулы (3) равенъ

$$\frac{(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\ldots(x-a_m)^{\alpha_m}}{1.2.3\ldots n} f^n(\xi).$$

Поэтому дополнительный членъ формулы (36) равенъ

$$\int_c^\partial \frac{(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\ldots(x-a_m)^{\alpha_m}}{1.2.3\ldots n} f^n(\xi)\,dx \tag{37}$$

Здѣсь ξ измѣняется вмѣстѣ съ x и постоянно заключается между наибольшимъ и наименьшимъ изъ чиселъ

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m,\ x.$$

Если же для всѣхъ значеній x, лежащихъ между c и ∂, произведеніе

$$(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\ldots(x-a_m)^{\alpha_m}$$

имѣетъ одинъ и тотъ же знакъ, то на основаніи одной изъ первыхъ теоремъ интегральнаго исчисленія можно въ выраженіи (37) вынести изъ подъ знака интеграла нѣкоторое среднее значеніе $f^n(\xi)$; такъ что тогда дополнительный членъ формулы (36) равенъ

$$\frac{f^n(\eta)}{1.2.3\ldots n}\int_c^\partial (x-a_1)^{\alpha_1}\ldots(x-a_m)^{\alpha_m}dx.$$

Неизвѣстное число η лежитъ между наибольшимъ и наименьшимъ изъ чиселъ

$$a_1,\ a_2,\ldots,\ a_m,\ c,\ \partial.$$

Формула (36) можетъ служить для приближеннаго вычисленія интеграла

$$\int_c^\partial f(x)\,dx$$

по даннымъ значеніямъ

$$f(a_1)\quad,\ f(a_2),\ \ldots\ldots,\ f(a_m),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f^{\alpha_1-1}(a_1),\ f^{\alpha_2-1}(a_2),\ \ldots,\ f^{\alpha_m-1}(a_m),$$

если только дополнительный членъ (37) достаточно малъ.

Кстати замѣтимъ, что этотъ дополнительный членъ обращается въ нуль для всякой цѣлой функціи $f(z)$, $n-1^{\text{ой}}$ или низшей степени.

Такой способъ вычисленія интеграловъ мы называемъ **способомъ параболъ**, имѣя въ виду геометрическое значеніе формулы (36), которое состоитъ въ замѣнѣ кривой

$$y=f(x)$$

параболою $n-1^{\text{ой}}$ степени

$$y=F(x).$$

§ 14. Разсмотримъ подробнѣе тѣ случаи, когда

$$\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_m=1.$$

Тогда согласно формулѣ Лагранжа

$$F(z)=\frac{\omega(z)}{(z-a_1)\omega'(a_1)}f(a_1)+\frac{\omega(z)}{(z-a_2)\omega'(a_2)}f(a_2)+\ldots+\frac{\omega(z)}{(z-a_m)\omega'(a_m)}f(a_m)$$

и приближенная формула (36) даетъ

$$\int_c^\partial f(x)\,dx=A_1f(a_1)+A_2f(a_2)+\ldots+A_mf(a_m) \qquad (38)$$

гдѣ

$$\left.\begin{array}{l}\omega(z)=(z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_m),\\ A_1=\int_c^\partial\frac{\omega(x)\,dx}{(x-a_1)\omega'(a_1)},\ A_2=\int_c^\partial\frac{\omega(x)\,dx}{(x-a_2)\omega'(a_2)},\ldots,\ A_m=\int_c^\partial\frac{\omega(x)\,dx}{(x-a_m)\omega'(a_m)}\end{array}\right\} \qquad (39).$$

Значенія коэффиціентовъ $A_1,\ A_2,\ldots,\ A_m$ можно представить также въ слѣдующемъ видѣ:

$$A_1=\frac{\psi(a_1)}{\omega'(a_1)},\ A_2=\frac{\psi(a_2)}{\omega'(a_2)},\ldots,\ A_m=\frac{\psi(a_m)}{\omega'(a_m)} \qquad (39),$$

если положимъ

$$\int_c^\partial\frac{\omega(z)-\omega(x)}{z-x}dx=\int_c^\partial\frac{\omega(x)-\omega(z)}{x-z}dx=\psi(z) \qquad (39).$$

Числамъ

$$m,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m$$

можно давать различныя значенія.

Полагая

$$m=1,$$

приходимъ къ весьма простой приближенной формулѣ

$$\int_c^\partial f(x)\,dx=(\partial-c)\,f(a_1) \qquad (40),$$

дополнительный членъ которой, согласно § 13, равенъ

$$\int_c^\partial (x-a_1)f'(\xi)\,dx.$$

Тотъ же дополнительный членъ можно представить еще въ болѣе простомъ видѣ, если a_1 лежитъ внѣ предѣловъ c и ∂ или совпадаетъ съ однимъ изъ нихъ; такъ какъ тогда, при измѣненіи x отъ c до ∂, разность $x-a_1$ не мѣняетъ своего знака и потому

$$\int_c^\partial (x-a_1)f'(\xi)\,dx = f'(\eta)\int_c^\partial (x-a_1)\,dx = \frac{(\partial-c)(\partial+c-2a_1)}{2}f'(\eta).$$

Здѣсь неизвѣстное число η заключается между c и a_1 или между a_1 и ∂.

Обратимъ вниманіе на слѣдующіе частные случаи формулы (40):

при $a_1=c$ имѣемъ $\int_c^\partial f(x)dx=(\partial-c)f(c)$ $\quad(40^\alpha)$,

при $a_1=\partial$ „ $\int_c^\partial f(x)dx=(\partial-c)f(\partial)$ $\quad(40^\beta)$,

при $a_1=\frac{c+\partial}{2}$ „ $\int_c^\partial f(x)dx=(\partial-c)f\left(\frac{c+\partial}{2}\right)$ $\quad(40^\gamma)$.

Дополнительные члены формулъ (40^α) и (40^β) соотвѣтственно равны

$$\frac{(\partial-c)^2}{2}f'(\eta)\quad(41^\alpha)\quad\text{и}\quad-\frac{(\partial-c)^2}{2}f'(\zeta)\quad(41^\beta),$$

гдѣ η и ζ означаютъ нѣкоторыя среднія числа между c и ∂.

Что же касается формулы (40^γ), то ея дополнительный членъ мы выразимъ черезъ нѣкоторое значеніе второй производной отъ $f(x)$ по x.

Для этой цѣли воспользуемся слѣдующимъ весьма простымъ равенствомъ

$$f(x)=f\left(\frac{c+\partial}{2}\right)+\left(x-\frac{c+\partial}{2}\right)f'\left(\frac{c+\partial}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(x-\frac{c+\partial}{2}\right)^2f''(\xi),$$

гдѣ ξ мѣняется вмѣстѣ съ x и лежитъ между x и $\frac{c+\partial}{2}$.

Изъ этого равенства, которое представляетъ частный случай формулы Тайлора, посредствомъ интегрированія выводимъ

$$\int_c^\partial f(x)\,dx=\int_c^\partial f\left(\frac{c+\partial}{2}\right)dx+\int_c^\partial\left(x-\frac{c+\partial}{2}\right)f'\left(\frac{c+\partial}{2}\right)dx+\int_c^\partial\frac{1}{2}\left(x-\frac{c+\partial}{2}\right)^2f''(\xi)dx$$

$$=(\partial-c)f\left(\frac{c+\partial}{2}\right)+\frac{1}{2}f''(\theta)\int_c^\partial\left(x-\frac{c+\partial}{2}\right)^2dx$$

$$=(\partial-c)f\left(\frac{c+\partial}{2}\right)+\frac{(\partial-c)^3}{24}f''(\theta)$$

и такимъ образомъ приходимъ къ заключенію, что дополнительный членъ формулы (40^γ) равенъ

$$\frac{(\partial-c)^3}{24}f''(\theta)\qquad(41^\gamma).$$

Здѣсь θ означаетъ также нѣкоторое среднее число между c и ∂.

Для уменьшенія погрѣшности часто бываетъ **полезно разбивать вычисляемый интегралъ на нѣсколько интеграловъ**, а затѣмъ уже къ этимъ послѣднимъ примѣнять тотъ или другой способъ приближеннаго вычисленія.

Желая оправдать наше замѣчаніе, разобьемъ интегралъ

$$\int_c^\partial f(x)\,dx$$

на слѣдующіе s интеграловъ:

$$\int_c^{c+\frac{\partial-c}{s}} f(x)\,dx,\quad \int_{c+\frac{\partial-c}{s}}^{c+2\frac{\partial-c}{s}} f(x)\,dx,\quad \int_{c+2\frac{\partial-c}{s}}^{c+3\frac{\partial-c}{s}} f(x)\,dx,\ldots,\quad \int_{\partial-\frac{\partial-c}{s}}^{\partial} f(x)\,dx;$$

буква s означаетъ, конечно, цѣлое положительное число.

Примѣняя къ каждому изъ написанныхъ здѣсь s интеграловъ формулу (40^α), получаемъ приближенныя равенства

$$\int_c^{c+\frac{\partial-c}{s}} f(x)\,dx = \frac{\partial-c}{c} f(c),$$

$$\int_{c+\frac{\partial-c}{s}}^{c+2\frac{\partial-c}{s}} f(x)\,dx = \frac{\partial-c}{s} f\left(c+\frac{\partial-c}{s}\right),$$

. . . . . .

$$\int_{\partial-\frac{\partial-c}{s}}^{\partial} f(x)\,dx = \frac{\partial-c}{s} f\left(\partial-\frac{\partial-c}{s}\right),$$

погрѣшности которыхъ соотвѣтственно равны

$$\frac{(\partial-c)^2}{2s^2} f'(\eta_1),\ \frac{(\partial-c)^2}{2s^2} f'(\eta_2), \ldots, \frac{(\partial-c)^2}{2s^2} f'(\eta_s),$$

причемъ

$$c < \eta_1 < c+\frac{\partial-c}{s} < \eta_2 < c+2\frac{\partial-c}{s} < \ldots < \partial-\frac{\partial-c}{s} < \eta_s < \partial\ ^{*)}.$$

Отсюда посредствомъ сложенія выводимъ весьма извѣстную и простую приближенную формулу

$$\int_c^{\partial} f(x)\,dx = \frac{\partial-c}{s}\left\{f(c)+f\left(c+\frac{\partial-c}{s}\right)+\ldots+f\left(\partial-\frac{\partial-c}{s}\right)\right\} \quad (42).$$

И не трудно убѣдиться, что дополнительный членъ этой формулы равенъ

$$\frac{(\partial-c)^2}{2s} f'(\eta) \quad (43),$$

гдѣ η означаетъ нѣкоторое среднее число между c и ∂ и удовлетворяетъ условію

$$f'(\eta_1)+f'(\eta_2)+\ldots+f'(\eta_s) = s f'(\eta).$$

*) Мы предполагаемъ $\partial > c$.

Выраженіе (43) отличается отъ (41^α), главнымъ образомъ, дѣлителемъ s.

На этомъ основаніи, замѣняя формулу (41^α) на (42), можемъ расчитывать уменьшить погрѣшность въ s разъ.

Переходя къ другому частному случаю формулы (38), положимъ

$$m = 2,\ a_1 = c,\ a_2 = \partial.$$

Тогда

$$A_1 = A_2 = \frac{\partial-c}{2}$$

и мы получаемъ также весьма простую приближенную формулу

$$\int_c^{\partial} f(x)\,dx = \frac{\partial-c}{2}\left\{f(c)+f(\partial)\right\} \quad (44),$$

дополнительный членъ которой согласно замѣчаніямъ § 13 равенъ

$$\int_c^{\partial} \frac{(x-c)(x-\partial)}{2} f''(\xi)\,dx = f''(\eta)\int_c^{\partial} \frac{(x-c)(x-\partial)}{2}\,dx$$

$$= f''(\eta)\int_{-1}^{+1} \frac{(\partial-c)^3(t^2-1)}{16}\,dt = -\frac{(\partial-c)^3}{12} f''(\eta) \quad (45).$$

Здѣсь

$$t = \frac{2x-c-\partial}{\partial-c}$$

а η означаетъ нѣкоторое среднее число между c и ∂.

Разобьемъ теперь предложенный интегралъ

$$\int_c^{\partial} f(x)\,dx$$

на s интеграловъ

$$\int_c^{c+\frac{\partial-c}{s}} f(x)\,dx,\ \int_{c+\frac{\partial-c}{s}}^{c+2\frac{\partial-c}{s}} f(x)\,dx, \ldots,\ \int_{\partial-\frac{\partial-c}{s}}^{\partial} f(x)\,dx$$

и къ каждому изъ этихъ послѣднихъ примѣнимъ формулу (44).

Такимъ образомъ, полагая для краткости

$$f(c)=y_0,\ f\left(c+\frac{\partial-c}{s}\right)=y_1,\ldots,\ f\left(c+l\frac{\partial-c}{s}\right)=y_l,\ldots,\ f(\partial)=y_s,$$

выводимъ

$$\int_c^{c+\frac{\partial-c}{s}} f(x)\,dx=\frac{\partial-c}{2s}(y_0+y_1)$$

$$\int_{c+\frac{\partial-c}{s}}^{c+2\frac{\partial-c}{s}} f(x)\,dx=\frac{\partial-c}{2s}(y_1+y_2)$$

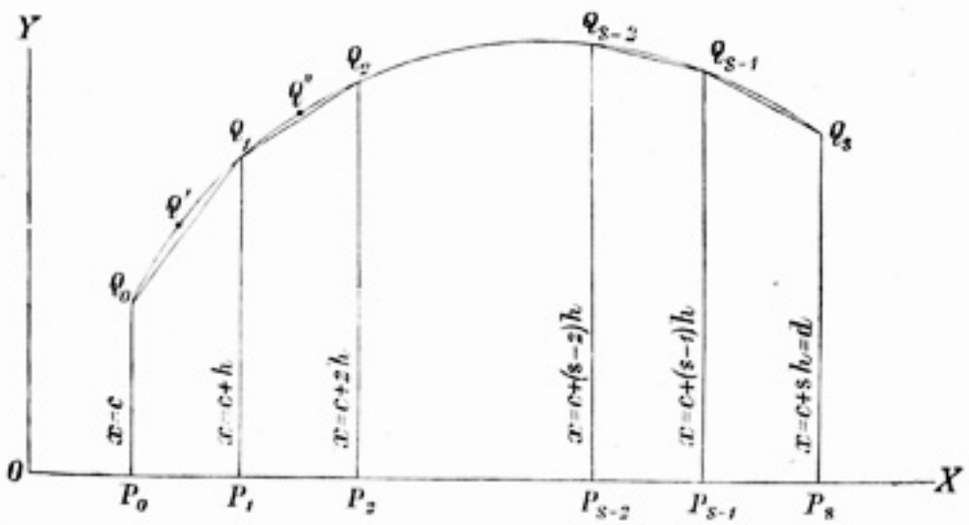
. . . . . .

$$\int_{c+(s-1)\frac{\partial-c}{s}}^{\partial} f(x)\,dx=\frac{\partial-c}{2s}(y_{s-1}+y_s)$$

и затѣмъ

$$\int_c^{\partial} f(x)\,dx=\frac{\partial-c}{2s}\left\{y_0+2y_1+2y_2+\ldots+2y_{s-1}+y_s\right\}\quad(46).$$

Геометрическое значеніе (см. черт.) формулы (46) состоитъ въ томъ, что площадь



$$P_0Q_0Q'Q_1Q''Q_2\ldots\ldots Q_{s-1}Q_sP_sP_{s-1}\ldots P_2P_1P_0,$$

ограниченную осью $x^{овъ}$, двумя прямыми

$$P_0Q_0(x=c),\ P_sQ_s(x=\partial)$$

параллельными оси x и кривою

$$Q_0Q'Q_1Q''Q_2\ldots Q_{s-1}Q_s\ \ (y=f(x)),$$

считаютъ приблизительно равною суммѣ площадей трапецій

$$P_0Q_0Q_1P_1,\ \ P_1Q_1Q_2P_2,\ \ P_2Q_2Q_3P_3,\ldots,P_{s-1}Q_{s-1}Q_sP_s.$$

Поэтому приближенное вычисленіе интеграловъ по формулѣ (46) называютъ также вычисленіемъ **по способу трапецій**.

Относительно дополнительнаго члена формулы (46) нетрудно убѣдиться, что онъ равенъ

$$-\frac{(\partial-c)^3}{12s^2}f''(\eta)\qquad(47),$$

гдѣ η означаетъ нѣкоторое среднее число между c и ∂.

Выраженіе (47) отличается отъ (45), главнымъ образомъ, дѣлителемъ s^2.

На этомъ основаніи, замѣняя формулу (44) на (46), можемъ расчитывать уменьшить погрѣшность въ s^2 разъ.

Обратимъ особое вниманіе также на тотъ случай формулы (38), когда

$$m=3,\ a_1=c,\ a_2=\frac{c+\partial}{2},\ a_3=\partial.$$

Въ этомъ случаѣ

$$A_1=\int_c^{\partial}\frac{(2x-c-\partial)(x-\partial)}{(\partial-c)^2}dx=\frac{\partial-c}{4}\int_{-1}^{+1}t(t-1)\,dt=\frac{1}{6}(\partial-c),$$

$$A_2=-4\int_c^{\partial}\frac{(x-c)(x-\partial)}{(\partial-c)^2}dx=\frac{\partial-c}{2}\int_{-1}^{+1}(1-t^2)\,dt=\frac{4}{6}(\partial-c),$$

$$A_s=\int_c^{\partial}\frac{(2x-c-\partial)(x-c)}{(\partial-c)^2}dx=\frac{\partial-c}{4}\int_{-1}^{+1}t(t+1)\,dt=\frac{1}{6}(\partial-c),$$

и формула (38) обращается въ слѣдующую

$$\int_c^\partial f(x)\,dx = \frac{\partial - c}{6}\left\{f(c) + 4f\left(\frac{c+\partial}{2}\right) + f(\partial)\right\} \qquad (48).$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ, полагая въ выраженіи (37)

$$m = n = 3,\ \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1,\ a_1 = c,\ a_2 = \frac{c+\partial}{2},\ a_3 = \partial,$$

находимъ, что дополнительный членъ формулы (48) равенъ

$$\int_c^\partial \frac{(x-c)(2x-c-\partial)(x-\partial)}{12} f'''(\xi)\,dx.$$

Здѣсь среднее значеніе $f'''(\xi)$ нельзя вынести изъ подъ знака интеграла, такъ какъ произведеніе

$$(x-c)(2x-c-\partial)(x-\partial)$$

въ предѣлахъ интегрированія мѣняетъ свой знакъ.

Тотъ же дополнительный членъ можно выразить еще проще черезъ нѣкоторое значеніе четвертой производной отъ $f(x)$ по x.

Для этой цѣли замѣтимъ, что цѣлая функція

$$\Phi(z) = \frac{(2z-c-\partial)(z-\partial)}{(\partial-c)^2} f(c) - 4\frac{(z-c)(z-\partial)}{(\partial-c)^2} f\left(\frac{c+\partial}{2}\right)$$
$$+ \frac{(2z-c-\partial)(z-c)}{(\partial-c)^2} f(\partial) + K(z-c)(2z-c-\partial)(z-\partial)$$

третьей степени отъ z удовлетворяетъ, при всякомъ значеніи коэффиціента K, условіямъ

$$\Phi(c) = f(c),\ \Phi\left(\frac{c+\partial}{2}\right) = f\left(\frac{c+\partial}{2}\right),\ \Phi(\partial) = f(\partial).$$

При нѣкоторомъ же значеніи K кромѣ того имѣемъ

$$\Phi'\left(\frac{c+\partial}{2}\right) = f'\left(\frac{c+\partial}{2}\right)$$

и соотвѣтственно этому можемъ положить

$$f(x) = \Phi(x) + \frac{(x-c)(2x-c-\partial)^2(x-\partial)}{4\ 1.2.3.4} f^{\text{iv}}(\xi),$$

гдѣ ξ мѣняется вмѣстѣ съ x и постоянно заключается между наименьшимъ и наибольшимъ изъ чиселъ

$$x,\ c,\ \partial.$$

Отсюда посредствомъ интегрированія выводимъ

$$\int_c^\partial f(x)\,dx = \int_c^\partial \Phi(x)\,dx + \int_c^\partial \frac{(x-c)(2x-c-\partial)^2(x-\partial)}{4.1.2.3.4} f^{\text{iv}}(\xi)\,dx$$

$$= \frac{\partial-c}{6}\left\{f(c) + 4f\left(\frac{c+\partial}{2}\right) + f(\partial)\right\} + K\int_c^\partial (x-c)(2x-c-\partial)(x-\partial)\,dx$$

$$+ f^{\text{iv}}(\eta)\int_c^\partial \frac{(x-c)(2x-c-\partial)^2(x-\partial)}{4.1.2.3.4}\,dx$$

$$= \frac{\partial-c}{6}\left\{f(c) + 4f\left(\frac{c+\partial}{2}\right) + f(\partial)\right\} + K\int_{-1}^{+1} \frac{t(t^2-1)}{8}(\partial-c)^4\,dt$$

$$+ \left(\frac{\partial-c}{2}\right)^5 f^{\text{iv}}(\eta)\int_{-1}^{+1} \frac{t^2(t^2-1)}{1.2.3.4}\,dt$$

и наконецъ

$$\int_c^\partial f(x)\,dx = \frac{\partial-c}{6}\left\{f(c) + 4f\left(\frac{c+\partial}{2}\right) + f(\partial)\right\} - \frac{4}{15}\cdot\left(\frac{\partial-c}{2}\right)^5 \frac{f^{\text{iv}}(\eta)}{1.2.3.4}$$

И такъ дополнительный членъ формулы (48) равенъ

$$-\frac{4}{15}\left(\frac{\partial-c}{2}\right)^5 \frac{f^{\text{iv}}(\eta)}{1.2.3.4} = -\left(\frac{\partial-c}{2}\right)^5 \frac{f^{\text{iv}}(\eta)}{90} \qquad (49).$$

Здѣсь η означаетъ нѣкоторое среднее число между c и ∂.

Примѣняя формулу (48) къ интеграламъ

$$\int_c^{c+\frac{\partial-c}{s}} f(x)\,dx,\quad \int_{c+\frac{\partial-c}{s}}^{c+2\frac{\partial-c}{s}} f(x)\,dx,\ \ldots,\quad \int_{\partial-\frac{\partial-c}{s}}^{\partial} f(x)\,dx$$

и полагая для краткости

$$f(c) = y_0,\ f\left(c+\frac{\partial-c}{2s}\right) = y_{\frac{1}{2}},\ f\left(c+\frac{\partial-c}{s}\right) = y_1,\ldots,f\left(\partial-\frac{\partial-c}{2s}\right) = y_{s-\frac{1}{2}},\ f(\partial) = y_s,$$

получаемъ слѣдующія приближенныя равенства

$$\int_c^{c+\frac{\partial-c}{s}} f(x)\,dx = \frac{\partial-c}{6s}\left\{y_0 + 4y_{\frac{1}{2}} + y_1\right\}$$

$$\int_{c+\frac{\partial-c}{s}}^{c+2\frac{\partial-c}{s}} f(x)\,dx = \frac{\partial-c}{6s}\left\{y_1 + 4y_{\frac{3}{2}} + y_2\right\}$$

$$\int_{c+2\frac{\partial-c}{s}}^{c+3\frac{\partial-c}{s}} f(x)\,dx = \frac{\partial-c}{6s}\left\{y_2 + 4y_{\frac{5}{2}} + y_3\right\}$$

. . . . . .

$$\int_{\partial-\frac{\partial-c}{s}}^{\partial} f(x)\,dx = \frac{\partial-c}{6s}\left\{y_{s-1} + 4y_{s-\frac{1}{2}} + y_s\right\}$$

и затѣмъ

$$\int_c^{\partial} f(x)\,dx = \frac{\partial-c}{6s}\left\{y_0 + 4y_{\frac{1}{2}} + 2y_1 + 4y_{\frac{3}{2}} + \ldots + 2y_{s-1} + 4y_{s-\frac{1}{2}} + y_s\right\} \qquad (50).$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ нетрудно убѣдиться, что дополнительный членъ формулы (50), которая извѣстна подъ именемъ **формулы Симпсона,** можно приравнять

$$-\left(\frac{\partial-c}{2}\right)^5 \frac{f^{\text{IV}}(\eta)}{90s^4} \qquad (51),$$

гдѣ η опять означаетъ нѣкоторое среднее число между c и ∂.

Выраженіе (51) отличается отъ (49), главнымъ образомъ, дѣлителемъ s^4.

Поэтому можно надѣяться черезъ замѣну формулы (48) на (50) уменьшить погрѣшность въ s^4 разъ.

Возвращаясь къ формулѣ (38) при произвольномъ значеніи цѣлаго положительнаго числа m, положимъ въ ней

$$a_1 = c,\ a_2 = c + \frac{\partial-c}{m-1},\ a_3 = c + 2\frac{\partial-c}{m-1}, \ldots, a_{m-1} = \partial - \frac{\partial-c}{m-1},\ a_m = \partial.$$

Такимъ образомъ мы приходимъ къ слѣдующей приближенной формулѣ

$$\int_c^{\partial} f(x)\,dx = (\partial - c)\sum \overset{i}{\underset{m}{H}}\, f\left(c + i\frac{\partial-c}{m}\right) \qquad (52)$$

которая представляетъ собою, такъ называемый, **способъ Котеса.**

Здѣсь

$$\overset{i}{\underset{m}{H}} = \int_c^{\partial} \frac{(x-c)\ldots\left(x-c-(i-1)\frac{\partial-c}{m-1}\right)\left(x-c-(i+1)\frac{\partial-c}{m-1}\right)\ldots(x-\partial)(m-1)^{m-1}}{i.(i-1)\ldots 2.1\ (-1).(-2)\ldots(i-m+1)(\partial-c)^m}\,dx$$

$$= \int_0^{m-1} \frac{z(z-1)\ldots(z-i+1)(z-i-1)\ldots(z-m+1)}{i(i-1)\ldots 1(-1)(-2)\ldots(i-m+1)}\,\frac{dz}{m-1} \qquad (53)$$

и суммированіе обозначенное буквою Σ относится къ значку i, который надо полагать послѣдовательно равнымъ

$$0,\ 1,\ 2, \ldots, m-1.$$

Названіе „способъ Котеса" произошло отъ того, что Котесъ вычислилъ значенія коэффиціентовъ $\overset{i}{\underset{m}{H}}$ при

$$m = 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10 \text{ и } 11.$$

Приведемъ здѣсь числа найденныя Котесомъ:

$$\overset{0}{\underset{2}{H}} = \overset{1}{\underset{2}{H}} = \frac{1}{2};$$

$$\overset{0}{\underset{3}{H}} = \overset{2}{\underset{3}{H}} = \frac{1}{6},\ \overset{1}{\underset{3}{H}} = \frac{4}{6};$$

$$\overset{0}{\underset{4}{H}} = \overset{3}{\underset{4}{H}} = \frac{1}{8},\ \overset{1}{\underset{4}{H}} = \overset{2}{\underset{4}{H}} = \frac{3}{8};$$

$$\overset{0}{\underset{5}{H}} = \overset{4}{\underset{5}{H}} = \frac{7}{90},\ \overset{1}{\underset{5}{H}} = \overset{3}{\underset{5}{H}} = \frac{32}{90},\ \overset{2}{\underset{5}{H}} = \frac{12}{90};$$

$$\overset{0}{\underset{6}{H}}=\overset{5}{\underset{6}{H}}=\frac{19}{288},\ \overset{1}{\underset{6}{H}}=\overset{4}{\underset{6}{H}}=\frac{75}{288},\ \overset{2}{\underset{6}{H}}=\overset{3}{\underset{6}{H}}=\frac{50}{288};$$

$$\overset{0}{\underset{7}{H}}=\overset{6}{\underset{7}{H}}=\frac{41}{840},\ \overset{1}{\underset{7}{H}}=\overset{5}{\underset{7}{H}}=\frac{216}{840},\ \overset{2}{\underset{7}{H}}=\overset{4}{\underset{7}{H}}=\frac{27}{840},\ \overset{3}{\underset{7}{H}}=\frac{272}{840};$$

$$\overset{0}{\underset{8}{H}}=\overset{7}{\underset{8}{H}}=\frac{751}{17280},\ \overset{1}{\underset{8}{H}}=\overset{6}{\underset{8}{H}}=\frac{3577}{17280},\ \overset{2}{\underset{8}{H}}=\overset{5}{\underset{8}{H}}=\frac{1323}{17280},\ \overset{3}{\underset{8}{H}}=\overset{4}{\underset{8}{H}}=\frac{2989}{17280};$$

$$\overset{0}{\underset{9}{H}}=\overset{8}{\underset{9}{H}}=\frac{989}{28350},\ \overset{1}{\underset{9}{H}}=\overset{7}{\underset{9}{H}}=\frac{5888}{28350},\ \overset{2}{\underset{9}{H}}=\overset{6}{\underset{9}{H}}=\frac{-928}{28350},\ \overset{3}{\underset{9}{H}}=\overset{5}{\underset{9}{H}}=\frac{10496}{28350},$$

$$\overset{4}{\underset{9}{H}}=\frac{-4540}{28350};$$

$$\overset{0}{\underset{10}{H}}=\overset{9}{\underset{10}{H}}=\frac{2857}{89600},\ \overset{1}{\underset{10}{H}}=\overset{8}{\underset{10}{H}}=\frac{15741}{89600},\ \overset{2}{\underset{10}{H}}=\overset{7}{\underset{10}{H}}=\frac{1080}{89600},\ \overset{3}{\underset{10}{H}}=\overset{6}{\underset{10}{H}}=\frac{19344}{89600},$$

$$\overset{4}{\underset{10}{H}}=\overset{5}{\underset{10}{H}}=\frac{5778}{89600};$$

$$\overset{0}{\underset{11}{H}}=\overset{10}{\underset{11}{H}}=\frac{16067}{598752},\ \overset{1}{\underset{11}{H}}=\overset{9}{\underset{11}{H}}=\frac{106300}{598752},\ \overset{2}{\underset{11}{H}}=\overset{8}{\underset{11}{H}}=\frac{-48525}{598752},$$

$$\overset{3}{\underset{11}{H}}=\overset{7}{\underset{11}{H}}=\frac{272400}{598752},\ \overset{4}{\underset{11}{H}}=\overset{6}{\underset{11}{H}}=-\frac{260550}{598752},\ \overset{5}{\underset{11}{H}}=\frac{427368}{598752}.$$

Замѣтимъ кстати, что формула (52) обращается при $m=2$ въ (44), а при $m=3$ въ (48).

§ 15. Гауссъ, имѣя въ виду достигнуть по возможности высшей степени точности, предложилъ подбирать числа

$$a_1,\ a_2,\ldots,\ a_m$$

такъ, чтобы формула (38) была вполнѣ вѣрна для всякой цѣлой функціи $f(z)$ степень которой не превосходитъ $2m-1$.

Прежде, чѣмъ остановиться на способѣ Гаусса, скажемъ нѣсколько словъ о болѣе общемъ способѣ, который соотвѣтствуетъ тому случаю формулы (36), когда нѣкоторыя изъ чиселъ

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ldots,\ \alpha_m$$

равны двойкѣ а остальныя—единицѣ.

Пусть

$$\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_k=2,\ \alpha_{k+1}=\alpha_{k+2}=\ldots=\alpha_m=1,\ n=m+k.$$

Тогда для опредѣленія функціи $F(z)$ имѣемъ формулы (6), (7) и (8). Эти формулы показываютъ, что

$$\int_c^\partial F(x)\,dx=C_1f(a_1)+C_2f(a_2)+\ldots+C_mf(a_m)+D_1f'(a_1)+\ldots+D_kf'(a_k),$$

гдѣ коэффиціенты

$$C_1,\ C_2,\ldots,\ C_m,\ D_1,\ldots,\ D_k$$

зависятъ только отъ значенія чиселъ

$$c,\ \partial,\ a_1,\ a_2,\ldots,\ a_k,\ a_{k+1},\ldots,\ a_m,$$

но не отъ характера функціи $f(x)$.

Соотвѣтственно этому имѣемъ слѣдующую приближенную формулу

$$\int_c^\partial f(x)dx=C_1f(a_1)+\ldots+C_mf(a_m)+D_1f'(a_1)+\ldots+D_kf'(a_k)\quad(54),$$

дополнительный членъ которой, равный

$$\int_c^\partial \frac{(x-a_1)^2(x-a_2)^2\ldots(x-a_k)^2(x-a_{k+1})\ldots(x-a_m)}{1.2.3\ldots(k+m)}f^{k+m}(\xi)\,dx,$$

обращается въ нуль всякій разъ, когда $f(z)$ цѣлая функція отъ z и степень этой функціи меньше $k+m$.

Опредѣленіе коэффиціентовъ

$$C_1,\ C_2,\ldots C_m,\ D_1,\ D_2,\ldots,\ D_k$$

не представляетъ никакихъ существенныхъ затрудненій.

Положимъ теперь, что числамъ

$$a_1,\ a_2,\ldots,\ a_m$$

даны такія значенія, при которыхъ всѣ коэффиціенты

$$D_1,\ D_2, \ldots,\ D_k$$

приводятся къ нулю.

Въ этомъ случаѣ, подставляя въ формулѣ (54) вмѣсто $f(x)$ послѣдовательно

$$\frac{\omega(x)}{(x-a_1)\,\omega'(a_1)},\quad \frac{\omega(x)}{(x-a_2)\,\omega'(a_2)}, \ldots,\quad \frac{\omega(x)}{(x-a_m)\,\omega'(a_m)},\quad \omega(x)\,\varphi(x),$$

гдѣ

$$\omega(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_m),$$

а $\varphi(x)$ означаетъ произвольную цѣлую функцію $k-1^{\text{ой}}$ степени отъ x, получаемъ слѣдующія вполнѣ точныя равенства

$$\left.\begin{array}{l} C_1 = \int_c^\partial \frac{\omega(x)\,dx}{(x-a_1)\omega'(a_1)},\quad C_2 = \int_c^\partial \frac{\omega(x)\,dx}{(x-a_2)\omega'(a_2)}, \ldots,\quad C_m = \int_c^\partial \frac{\omega(x)\,dx}{(x-a_m)\,\omega'(a_m)} \\ \\ \int_c^\partial \omega(x)\,\varphi(x)\,dx = 0 \end{array}\right\} \quad (55)$$

Съ другой стороны, полагая въ формулѣ (54) функцію $f(x)$ послѣдовательно равною

$$\frac{\omega(x)\,\omega(x)}{(x-a_1)(x-a_{k+1})\ldots(x-a_m)},\quad \frac{\omega(x)\,\omega(x)}{(x-a_2)(x-a_{k+1})\ldots(x-a_m)}, \ldots,\quad \frac{\omega(x)\,\omega(x)}{(x-a_k)\ldots(x-a_m)},$$

видимъ, что коэффиціенты

$$D_1,\ D_2, \ldots,\ D_k$$

непремѣнно должны приводиться къ нулю, если интегралъ

$$\int_c^\partial \omega(x)\,\varphi(x)\,dx$$

обращается въ нуль для всякой цѣлой функціи

$$\varphi(x)$$

$k-1^{\text{ой}}$ степени отъ x.

Итакъ условія

$$D_1 = 0,\ D_2 = 0, \ldots,\ D_k = 0$$

равносильны одному

$$\int_c^\partial \omega(x)\,\varphi(x)\,dx = 0,$$

которое въ свою очередь по произвольности цѣлой функціи $\varphi(x)$, $k-1^{\text{ой}}$ степени, равносильно слѣдующимъ k условіямъ

$$\int_c^\partial \omega(x)dx = 0,\ \int_c^\partial x\omega(x)dx = 0,\ \int_c^\partial x^2\omega(x)dx = 0, \ldots, \int_c^\partial x^{k-1}\omega(x)dx = 0 \quad (56).$$

При соблюденіи этихъ условій формула (54) совпадаетъ съ (38).

Вмѣстѣ съ тѣмъ, конечно, формула (38) будетъ вполнѣ вѣрна для всѣхъ такихъ цѣлыхъ функцій

$$f(x),$$

степень которыхъ меньше $k+m$.

Нетрудно также убѣдиться и въ необходимости условій (56) для того, чтобы формула (38) была вполнѣ вѣрна для всѣхъ только что упомянутыхъ цѣлыхъ функцій $f(x)$.

Разсматривая затѣмъ условія (56) и полагая въ нихъ

$$\omega(z) = z^m + p_1 z^{m-1} + p_2 z^{m-2} + \ldots + p_{m-1} z + p_m \qquad (57),$$

приходимъ къ системѣ k уравненій первой степени

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial^{m+1}-c^{m+1}}{m+1} + p_1\frac{\partial^m-c^m}{m} + p_2\frac{\partial^{m-1}-c^{m-1}}{m-1} + \ldots + p_{m-1}\frac{\partial^2-c^2}{2} + p_m(\partial-c) = 0 \\ \frac{\partial^{m+2}-c^{m+2}}{m+2} + p_1\frac{\partial^{m+1}-c^{m+1}}{m+1} + p_2\frac{\partial^m-c^m}{m} + \ldots + p_{m-1}\frac{\partial^3-c^3}{3} + p_m\frac{\partial^2-c^2}{2} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial^{m+k}-c^{m+k}}{m+k} + p_1\frac{\partial^{m+k-1}-c^{m+k-1}}{m+k-1} + \ldots + p_{m-1}\frac{\partial^{k+1}-c^{k+1}}{k+1} + p_m\frac{\partial^k-c^k}{k} = 0 \end{array}\right\} (58)$$

съ m неизвѣстными

$$p_1,\ p_2, \ldots, p_m.$$

Число k равно или меньше m.

Если k меньше m, то уравненій (58) недостаточно для полнаго опредѣленія коэффиціентовъ

$$p_1,\ p_2, \ldots,\ p_m$$

и мы можемъ присоединить къ этимъ уравненіямъ еще $m-k$ какихъ нибудь добавочныхъ условій: можемъ задать, напримѣръ, значенія чиселъ

$$a_{k+1},\ a_{k+2}, \ldots,\ a_m.$$

Здѣсь мы обратимъ вниманіе исключительно на слѣдующіе случаи:

1) $k=m$; 2) $k=m-1$, $a_m=c$; 3) $k=m-1$, $a_m=\partial$;

4) $k=m-2$, $a_{m-1}=c$, $a_m=\partial$.

И прежде всего докажемъ, что **въ первомъ изъ этихъ четырехъ случаевъ, который соотвѣтствуетъ вышеупомянутому способу Гаусса, искомая функція $\omega(z)$ равна**

$$\frac{1}{2m(2m-1)\ldots(m+1)}\ \frac{d^m(z-c)^m(z-\partial)^m}{dz^m}.$$

Для этой цѣли составимъ еще другую цѣлую функцію

$$\Omega(z)=\frac{(z-c)^m}{1.2\ldots m}\omega(c)+\frac{(z-c)^{m+1}}{1.2\ldots(m+1)}\omega'(c)+\ldots+\frac{(z-c)^{2m}}{1.2\ldots 2m}\omega^{(m)}(c),$$

которая удовлетворяетъ слѣдующимъ условіямъ

$$\Omega(c)=\Omega'(c)=\Omega''(c)=\ldots=\Omega^{m-1}(c)=0,\ \ \Omega^m(z)=\omega(z).$$

Затѣмъ въ уравненіи

$$\int_c^\partial \omega(x)\varphi(x)\,dx=0 \qquad (55),$$

гдѣ $\varphi(x)$ означаетъ произвольную цѣлую функцію $m-1$ степени ($k=m$), замѣняемъ $\omega(x)$ на $\Omega^m(x)$ и посредствомъ интегрированія по частямъ выводимъ

$$\int_c^\partial \Omega^m(x)\varphi(x)\,dx=\Omega^{m-1}(\partial)\varphi(\partial)-\int_c^\partial \Omega^{m-1}(x)\varphi'(x)\,dx$$

$$=\Omega^{m-1}(\partial)\varphi(\partial)-\Omega^{m-2}(\partial)\varphi'(\partial)+\int_c^\partial \Omega^{m-2}(x)\varphi''(x)\,dx$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$=\Omega^{m-1}(\partial)\varphi(\partial)-\Omega^{m-2}(\partial)\varphi'(\partial)+\ldots\pm\Omega(\partial)\varphi^{m-1}(\partial)$$

Слѣдовательно при нашихъ условіяхъ выраженіе

$$\Omega^{m-1}(\partial)\varphi(\partial)-\Omega^{m-2}(\partial)\varphi'(\partial)+\ldots\pm\Omega(\partial)\varphi^{m-1}(\partial)$$

должно обращаться въ нуль для всякой цѣлой функціи $\varphi(z)$, степень которой меньше m.

Отсюда уже нетрудно заключить, что

$$\Omega^{m-1}(\partial)=\Omega^{m-2}(\partial)=\ldots=\Omega'(\partial)=\Omega(\partial)=0$$

и потому $\Omega(z)$ отличается отъ произведенія

$$(z-c)^m(z-\partial)^m$$

только постояннымъ множителемъ.

Итакъ

$$\Omega(z)=K(z-c)^m(z-\partial)^m$$

и

$$\omega(z)=K\frac{d^m(z-c)^m(z-\partial)^m}{dz^m} \qquad (59),$$

гдѣ K не зависитъ отъ z.

До сихъ поръ весь нашъ выводъ былъ основанъ только на слѣдующихъ трехъ свойствахъ искомой функціи $\omega(z)$:

1) $\omega(z)$ цѣлая функція отъ z,

2) степень этой функціи не больше m,

3) $$\int_c^\partial \omega(x)\varphi(x)\,dx=0$$

для всякой цѣлой функціи $\varphi(z)$, степень которой меньше m.

Поэтому формула (59) даетъ намъ общее выраженіе для всѣхъ функцій $\omega(z)$, обладающихъ такими свойствами.

Эти функціи мы будемъ называть **функціями Лежандра.**

При однихъ и тѣхъ же значеніяхъ

$$c,\ \partial,\ m$$

функціи Лежандра отличаются другъ отъ друга только множителемъ, не зависящимъ отъ z.

Выбирая изъ нихъ ту, у которой коэффиціентъ при z^m равенъ единицѣ, приходимъ къ желаемому результату:

$$\omega(z) = \frac{1}{2m(2m-1)\ldots(m+1)} \frac{d^m (z-c)^m (z-\partial)^m}{dz^m} \qquad (60).$$

Итакъ, если числа

$$a_1,\ a_2, \ldots,\ a_m$$

совпадаютъ съ корнями уравненія

$$\frac{d^m (z-c)^m (z-\partial)^m}{dz^m} = 0 \qquad (61),$$

то формула (38) вполнѣ вѣрна для всѣхъ цѣлыхъ функцій $f(z)$, степень которыхъ меньше $2m$.

И обратно, если для всѣхъ такихъ функцій $f(z)$ формула (38) вѣрна, то числа

$$a_1,\ a_2 \ldots\ a_m$$

совпадаютъ съ корнями уравненія (61).

Здѣсь важно убѣдиться въ томъ, что **всѣ корни уравненія (61) вещественны и различны между собой.**

Для этой цѣли предположимъ, что при непрерывномъ возрастаніи z отъ c до ∂ выраженіе

$$\frac{d^m (z-c)^m (z-\partial)^m}{dz^m}$$

мѣняетъ свой знакъ ровно l разъ.

Пусть, именно, такое измѣненіе знака

$$\frac{d^m (z-c)^m (z-\partial)^m}{dz^m}$$

происходитъ только при переходѣ z черезъ слѣдующія значенія

$$a_1,\ a_2, \ldots,\ a_l.$$

Въ такомъ случаѣ произведеніе

$$(z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_l)\frac{d^m (z-c)^m (z-\partial)^m}{dz^m}$$

для всѣхъ значеній z, лежащихъ между c и ∂, должно имѣть постоянно одинъ и тотъ же знакъ и потому интегралъ

$$\int_c^\partial (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_l)\frac{d^m (x-c)^m (x-\partial)^m}{dx^m}dx$$

не можетъ обращаться въ нуль.

Между тѣмъ изъ предыдущаго намъ извѣстно, что интегралъ

$$\int_c^\partial \varphi(x)\frac{d^m (x-c)^m (x-\partial)^m}{dx^m}dx$$

непремѣнно обращается въ нуль, если $\varphi(z)$ цѣлая функція отъ z и степень ея меньше m.

Поэтому l не меньше а равно m.

Такимъ образомъ мы убѣждаемся не только въ томъ, что всѣ корни уравненія (61) вещественны и различны, но также и въ томъ, что всѣ они заключаются между c и ∂.

Замѣняя затѣмъ въ формулахъ (38) и (39)

$$\omega(z) \text{ на } \omega_m(z) = \frac{1}{2m(2m-1)\ldots(m+1)} \frac{d^m (z-c)^m (z-\partial)^m}{dz^m}$$

приходимъ къ приближенной формулѣ

$$\int_c^\partial f(x) = \frac{\psi_m(a_1)}{\omega'_m(a_1)}f(a_1) + \frac{\psi_m(a_2)}{\omega'_m(a_2)}f(a_2) + \ldots + \frac{\psi_m(a_m)}{\omega'_m(a_m)}f(a_m) \qquad (62),$$

которая выражаетъ собою **способъ Гаусса.**

Въ ней

$$\left.\begin{aligned} &\omega_m(z) = (z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_m) = \frac{1}{2m(2m-1)\ldots(m+1)}\frac{d^m (z-c)^m (z-\partial)^m}{dz^m} \\ &\text{и} \\ &\psi_m(z) = \int_c^\partial \frac{\omega_m(z)-\omega_m(x)}{z-x}dx \end{aligned}\right\} (63).$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ изъ предыдущихъ разсужденій слѣдуетъ, что **дополнительный членъ формулы (62) Гаусса равенъ**

$$\frac{f^{2m}(\xi)}{1.2\ldots 2m}\int_c^\partial \frac{1}{(2m)^2\ldots(m+1)^2}\,\frac{d^m(x-c)^m(x-\partial)^m}{dx^m}\,\frac{d^m(x-c)^m(x-\partial)^m}{dx^m}\,dx$$

$$=-\frac{f^{2m}(\xi)}{1.2\ldots 2m}\int_c^\partial \frac{1}{(2m)^2\ldots(m+1)^2}\,\frac{d^{m+1}(x-c)^m(x-\partial)^m}{dx^{m+1}}\,\frac{d^{m-1}(x-c)^m(x-\partial)^m}{dx^{m-1}}\,dx$$

$$=\frac{f^{2m}(\xi)}{1.2\ldots 2m}\int_c^\partial \frac{1}{(2m)^2\ldots(m+1)^2}\,\frac{d^{m+2}(x-c)^m(x-\partial)^m}{dx^{m+2}}\,\frac{d^{m-2}(x-c)^m(x-\partial)^m}{dx^{m-2}}\,dx$$

. . . . . .

$$=\frac{(-1)^m f^{2m}(\xi)}{1.2\ldots 2m}\int_c^\partial \frac{1}{(2m)^2\ldots(m+1)^2}\,\frac{d^{2m}(x-c)^m(x-\partial)^m}{dx^{2m}}\,(x-c)^m(x-\partial)^m\,dx$$

$$=\frac{(-1)^m f^{2m}(\xi)}{1.2\ldots 2m}\int_c^\partial \frac{1.2\ldots 2m}{(2m)^2(2m-1)^2\ldots(m+1)^2}\,(x-c)^m(x-\partial)^m\,dx$$

$$=\frac{(-1)^{m+1} f^{2m}(\xi)}{1.2\ldots 2m}\int_c^\partial \frac{1.2\ldots m}{(m+1)(m+2)\ldots(2m)}\,\frac{m}{m+1}\,(x-c)^{m+1}(x-\partial)^{m-1}dx$$

$$=\frac{(-1)^{m+2} f^{2m}(\xi)}{1.2\ldots 2m}\int_c^\partial \frac{1.2\ldots m}{(m+1)(m+2)\ldots(2m)}\,\frac{m}{m+1}\cdot\frac{m-1}{m+2}\,(x-c)^{m+2}(x-\partial)^{m-2}dx$$

. . . . . .

$$=\left\{\frac{1.2.3\ldots m}{(m+1)(m+2)\ldots(2m)}\right\}^2\frac{f^{2m}(\xi)}{1.2\ldots 2m}\int_c^\partial (x-c)^{2m}\,dx$$

$$=\frac{(\partial-c)^{2m+1}}{2m+1}\left\{\frac{1.2.3\ldots m}{(m+1)(m+2)\ldots(2m)}\right\}^2\frac{f^{2m}(\xi)}{1.2\ldots 2m} \qquad (64),$$

гдѣ ξ означаетъ нѣкоторое среднее число между c и ∂, а всѣ преобразованія основаны на интегрированіи по частямъ.

Послѣ того, какъ мы разсмотрѣли подробно первый случай изъ намѣченныхъ выше четырехъ (стр. 82), нетрудно убѣдиться, что тремъ остальнымъ соотвѣтствуютъ слѣдующія формулы *)

$$\int_c^\partial f(x)\,dx=\sum_{i=1,2,\ldots m}\frac{\psi_m(b_i)+\alpha_m\psi_{m-1}(b_i)}{\omega'_m(b_i)+\alpha_m\omega'_{m-1}(b_i)}f(b_i)$$

$$+\frac{f^{2m-1}(\eta)}{1.2\ldots(2m-1)}\int_c^\partial (x-c)\left\{\frac{\omega_m(x)+\alpha_m\omega_{m-1}(x)}{x-c}\right\}^2dx \qquad (65),$$

*) Въ седьмой главѣ, обобщая эти формулы, мы вдаемся въ большія подробности.

$$\int_c^\partial f(x)\,dx=\sum_{i=1,2,\ldots m}\frac{\psi_m(b'_i)+\alpha'_m\psi_{m-1}(b'_i)}{\omega'_m(b'_i)+\alpha'_m\omega'_{m-1}(b'_i)}f(b'_i)$$

$$+\frac{f^{2m-1}(\zeta)}{1.2\ldots(2m-1)}\int_c^\partial (x-\partial)\left\{\frac{\omega_m(x)+\alpha'_m\omega_{m-1}(x)}{x-\partial}\right\}^2dx \qquad (66),$$

$$\int_c^\partial f(x)\,dx=\sum_{i=1,2,\ldots m}\frac{\psi_m(b''_i)+\alpha''_m\psi_{m-2}(b''_i)}{\omega'_m(b''_i)+\alpha''_m\omega'_{m-2}(b''_i)}f(b''_i)$$

$$+\frac{f^{2m-2}(\theta)}{1.2\ldots(2m-2)}\int_c^\partial (x-c)(x-\partial)\left\{\frac{\omega_m(x)+\alpha''_m\omega_{m-2}(x)}{(x-c)(x-\partial)}\right\}^2dx \qquad (67).$$

Здѣсь

$$\omega_{m-1}(z)=\frac{1}{(2m-2)(2m-3)\ldots m}\,\frac{d^{m-1}(z-c)^{m-1}(z-\partial)^{m-1}}{dz^{m-1}},$$

$$\omega_{m-2}(z)=\frac{1}{(2m-4)(2m-5)\ldots(m-1)}\,\frac{d^{m-2}(z-c)^{m-2}(z-\partial)^{m-2}}{dz^{m-2}},$$

$$\omega'_m(z)=\frac{d\omega_m(z)}{dz},\quad \omega'_{m-1}(z)=\frac{d\omega_{m-1}(z)}{dz},\quad \omega'_{m-2}(z)=\frac{d\omega_{m-2}(z)}{dz},$$

$$\psi_{m-1}(z)=\int_c^\partial\frac{\omega_{m-1}(z)-\omega_{m-1}(x)}{z-x}dx,\quad \psi_{m-2}(z)=\int_c^\partial\frac{\omega_{m-2}(z)-\omega_{m-2}(x)}{z-x}dx,$$

$$\alpha_m=-\frac{\omega_m(c)}{\omega_{m-1}(c)},\quad \alpha'_m=-\frac{\omega_m(\partial)}{\omega_{m-1}(\partial)},\quad \alpha''_m=-\frac{\omega_m(c)}{\omega_{m-2}(c)}=-\frac{\omega_m(\partial)}{\omega_{m-2}(\partial)},$$

$b_1, b_2, \ldots, b_m$ корни уравненія $\omega_m(z)+\alpha_m\omega_{m-1}(z)=0$,

$b'_1, b'_2, \ldots, b'_m$ корни уравненія $\omega_m(z)+\alpha'_m\omega_{m-1}(z)=0$,

$b''_1, b''_2, \ldots, b''_m$ корни уравненія $\omega_m(z)+\alpha''_m\omega_{m-1}(z)=0$,

η, ζ, θ нѣкоторыя среднія числа между c и ∂.

Замѣтимъ еще, что при помощи подстановки

$$x=c+(\partial-c)t$$

можно преобразовать уравненіе (61) въ такое

$$\frac{d^m t^m(t-1)^m}{dt^m}=0 \qquad (68),$$

корни котораго не зависятъ ни отъ c ни отъ ∂.

Вмѣстѣ съ тѣмъ можно придать формулѣ (62) слѣдующій видъ

$$\int_c^\partial f(x)dx=(\partial-c)\left\{E_1 f\left(c+(\partial-c)t_1\right)+\ldots+E_m f\left(c+(\partial-c)t_m\right)\right\} \quad (69),$$

гдѣ вообще

$$E_i=\int_0^1 \frac{(t-t_1)(t-t_2)\ldots(t-t_{i-1})(t-t_{i+1})\ldots(t-t_m)}{(t_i-t_1)(t_i-t_2)\ldots(t_i-t_{i-1})(t_i-t_{i+1})\ldots(t_i-t_m)}dt,$$

а

$$t_1,\ t_2,\ldots,\ t_m$$

означаютъ корни уравненія (68).

Гауссъ вычислилъ приближенныя значенія

$$t_i,\ E_i,\ \operatorname{Log} E_i \text{ при } m=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7.$$

Вотъ числа найденныя Гауссомъ

m	t		E		$\operatorname{Log} E$
$m=1$	0,5		1		
$m=2$	0,2113248654	051871	$\frac{1}{2}$		
	0,7886751345	948129	$\frac{1}{2}$		
$m=3$	0,1127016653	792583	$\frac{5}{18}$		
	0,5		$\frac{4}{9}$		
	0,8872983346	207417	$\frac{5}{18}$		
$m=4$	0,0694318442	029754	0,1739274225	687284	9,2403680612
	0,3300094782	075677	0,3260725774	312716	9,5133142764
	0,6699905217	924323	0,3260725774	312716	9,5133142764
	0,9305681557	970246	0,1739274225	687284	9,2403680612
$m=5$	0,0469100770	306680	0,1184634425	280945	9,0735843490
	0,2307653449	471585	0,2393143352	496832	9,3789687142
	0,5		0,2844444444	$444444=\frac{64}{225}$	9,4539974559
	0,7692346550	528415	0,2393143352	496832	9,3789687142
	0,9530899229	693320	0,1184634425	280945	9,0735843490
$m=6$	0,0337652428	984240	0,0856622461	895852	8,9327894580
	0,1693953067	668678	0,1803807865	240693	9,2561902763
	0,3806904069	584015	0,2339569672	863455	9,3691359831
	0,6193095930	415985	0,2339569672	863455	9,3691359831
	0,8306046932	331322	0,1803807865	240693	9,2561902763
	0,9662347571	015760	0,0856622461	895852	8,9327894580

m	t		E		$\operatorname{Log} E$
$m=7$	0,0254460438	286202	0,0647424830	844348	8,8111893529
	0,1292344072	003028	0,1398526957	446384	9,1456708421
	0,2970774243	113015	0,1909150252	525595	9,2808401093
	0,5		0,2089795918	$367347=\frac{256}{1225}$	9,3201038766
	0,7029225756	886985	0,1909150252	525595	9,2808401093
	0,8707655927	996972	0,1398526957	446384	9,1456708421
	0,9745539561	713798	0,0647424830	844348	8,8111893529

Возьмемъ для примѣра

$$\int_{100000}^{200000} \frac{dx}{\log x}.$$

При

$$f(z)=\frac{1}{\log z},\ c=100000,\ \partial=200000$$

дополнительный членъ формулы Симпсона (50) число отрицательное, а дополнительный членъ формулы Гаусса (69) напротивъ число положительное.

Имѣя въ виду это замѣчаніе, полагаемъ въ формулахъ (50) и (69)

$$f(z)=\frac{1}{\log z},\ c=100000,\ \partial=200000,\ s=5,\ m=4$$

и производимъ вычисленіе

$$\frac{10000}{\log 100000} < 868{,}58897 \qquad \frac{20000}{\log 160000} < 1669{,}04101$$

$$\frac{40000}{\log 110000} < 3445{,}82943 \qquad \frac{40000}{\log 170000} < 3321{,}27884$$

$$\frac{20000}{\log 120000} < 1710{,}09642 \qquad \frac{20000}{\log 180000} < 1652{,}79529$$

$$\frac{40000}{\log 130000} < 3396{,}94402 \qquad \frac{40000}{\log 190000} < 3290{,}88656$$

$$\frac{20000}{\log 140000} < 1687{,}84951 \qquad \frac{10000}{\log 200000} < 819{,}26434$$

$$\frac{40000}{\log 150000} < 3356{,}15785 \qquad 10753{,}26604$$

$$14465{,}46620$$
$$10753{,}26604$$
$$25218{,}73224 \;\Big|\; 3$$
$$8406{,}24408 > \int_{100000}^{200000} \frac{dx}{\log x}$$

$$\frac{17392{,}74225\ldots}{\log 106943{,}18142\ldots} > 1501{,}95705$$

$$\frac{32607{,}25774\ldots}{\log 133000{,}94782\ldots} > 2763{,}76923$$

$$\frac{32607{,}25774\ldots}{\log 166999{,}05217\ldots} > 2711{,}45463$$

$$\frac{17392{,}74225\ldots}{\log 193056{,}81557\ldots} > 1429{,}06203$$

$$\int_{100000}^{200000} \frac{dx}{\log x} > 8406{,}24294$$

Наши вычисленія показываютъ, что съ точностью до $\frac{1}{200}$ можно положить

$$\int_{100000}^{200000} \frac{dx}{\log x} = 8406{,}24.$$

Литература.

Cotes. Harmonia mensurarum. De methodo differentiali.

Simpson. Mathematical Dissertations. Of the Areas of Curves.

Gauss. Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi (Werke III).

Jacobi. Ueber Gauss' neue Methode (Crelle's Journal I).

Christoffel. Ueber die Gauss'sche Quadratur und eine Verallgemeinerung derselben (Crelle's Journal LV).

Heine. Handbuch der Kugelfunctionen. Mechanische Quadratur.

Markoff. Sur la méthode de Gauss (Math. Annalen XXV).

Mansion. Sur l'évaluation approchée des aires planes (Annales de la Société scientifique de Bruxelles, 1881).
Détermination du reste dans la formule de quadrature de Gauss (Bulletin de l'Académie de Belgique, 1886).

ГЛАВА VI.

О нѣкоторыхъ свойствахъ функцій Лежандра и о разложеніи интеграла

$$\int_c^\partial \frac{dx}{z-x} = \log \frac{z-c}{z-\partial}$$

въ непрерывную дробь.

§ 16. Докажемъ, что функціи Лежандра

$$\omega(z) = K \frac{d^m (z-c)^m (z-\partial)^m}{dz^m}$$

удовлетворяютъ линейному дифференціальному уравненію втораго порядка

$$(z-c)(z-\partial)\,\omega''(z) + (2z-c-\partial)\,\omega'(z) - m(m+1)\,\omega(z) = 0 \qquad (70).$$

Для этой цѣли разсмотримъ интегралъ

$$\int_c^\partial \omega(x) \frac{d\,(x-c)(x-\partial)\,\varphi'(x)}{dx}\,dx,$$

гдѣ $\varphi(x)$ означаетъ произвольную цѣлую функцію $m-1^{\text{ой}}$ степени.

Такой интегралъ по доказанному въ предыдущей главѣ долженъ обращаться въ нуль.

Съ другой стороны интегрированіе по частямъ даетъ:

$$\int_c^\partial \omega(x)\frac{d(x-c)(x-\partial)\varphi'(x)}{dx}dx = -\int_c^\partial (x-c)(x-\partial)\omega'(x)\varphi'(x)dx$$

$$= \int_c^\partial \frac{d(x-c)(x-\partial)\omega'(x)}{dx}\varphi(x)dx.$$

Слѣдовательно интегралъ

$$\int_c^\partial \frac{d(x-c)(x-\partial)\omega'(x)}{dx}\varphi(x)dx = 0$$

равенъ нулю для всякой цѣлой функціи $\varphi(x)$, степень которой меньше m.

Отсюда заключаемъ, что

$$\frac{d(z-c)(z-\partial)\omega'(z)}{dz}$$

принадлежитъ къ числу функцій Лежандра и можетъ отличаться отъ

$$\omega(z)$$

только множителемъ не зависящимъ отъ z.

Остается сравнить между собой старшіе члены функцій

$$\omega(z) \text{ и } \frac{d(z-c)(z-\partial)\omega'(z)}{dz},$$

чтобы придти къ уравненію

$$\frac{d(z-c)(z-\partial)\omega'(z)}{dz} = m(m+1)\omega(z)$$

вполнѣ равносильному съ (70).

§ 17. Перейдемъ къ выводу линейной зависимости

$$\omega_{m+1}(z) = \left(z - \frac{c+\partial}{2}\right)\omega_m(z) - \frac{m^2(\partial-c)^2}{4.(2m-1)(2m+1)}\omega_{m-1}(z) \qquad (71)$$

между тремя послѣдовательными функціями Лежандра:

$$\omega_{m+1}(z) = \frac{1}{(2m+2)(2m+1)\ldots(m+2)}\,\frac{d^{m+1}(z-c)^{m+1}(z+\partial)^{m+1}}{dz^{m+1}},$$

$$\omega_m(z) = \frac{1}{2m(2m-1)\ldots(m+1)}\,\frac{d^m(z-c)^m(z-\partial)^m}{dz^m},$$

$$\omega_{m-1}(z) = \frac{1}{(2m-2)(2m-3)\ldots m}\,\frac{d^{m-1}(z-c)^{m-1}(z-\partial)^{m-1}}{dz^{m-1}}.$$

Такъ какъ старшіе члены цѣлыхъ функцій

$$\omega_{m+1}(z),\ \omega_m(z)$$

соотвѣтственно равны

$$z^{m+1},\ z^m,$$

то простое дѣленіе $\omega_{m+1}(z)$ на $\omega_m(z)$ даетъ

$$\omega_{m+1}(z) = (z+q_{m+1})\omega_m(z) + \lambda(z),$$

гдѣ q_{m+1} не зависитъ отъ z и степень цѣлой функціи $\lambda(z)$ меньше m.

Вмѣстѣ съ тѣмъ имѣемъ

$$\int_c^\partial \lambda(x)\varphi(x)dx = \int_c^\partial \omega_{m+1}(x)\varphi(x)dx - \int_c^\partial (x+q_{m+1})\omega_m(x)\varphi(x)dx = 0$$

для всякой цѣлой функціи $\varphi(x)$, степень которой меньше $m-1$.

Слѣдовательно $\lambda(z)$ принадлежитъ къ числу функцій Лежандра и отличается отъ $\omega_{m-1}(z)$ только множителемъ независящимъ отъ z.

Итакъ

$$\omega_{m+1}(z) = (z+q_{m+1})\omega_m(z) - p_{m+1}\omega_{m-1}(z).$$

Для опредѣленія постоянныхъ

$$p_{m+1} \text{ и } q_{m+1}$$

дадимъ z частныя значенія

$$c \text{ и } \partial.$$

Пользуясь извѣстною формулою Лейбница

$$\frac{d^m uv}{dz^m} = u\frac{d^m v}{dz^m} + m\frac{du}{dz}\frac{d^{m-1}v}{dz^{m-1}} + \frac{m(m-1)}{1.2}\frac{d^2u}{dz^2}\frac{d^{m-2}u}{dz^{m-2}} + \ldots + \frac{d^m u}{dz^m}v,$$

находимъ

$$\omega_m(z)=\frac{1.2\ldots m}{2m(2m-1)\ldots(m+1)}\left\{(z-\partial)^m+\left(\frac{m}{1}\right)^2(z-\partial)^{m-1}(z-c)+\right.$$

$$\left.\left(\frac{m(m-1)}{1.2}\right)^2(z-\partial)^{m-2}(z-c)^2+\ldots+(z-c)^m\right\},$$

$$\omega_m(c)=\frac{1.2\ldots m}{2m(2m-1)\ldots(m+1)}(c-\partial)^m,\quad \omega_m(\partial)=\frac{1.2\ldots m}{2m(2m-1)\ldots(m+1)}(\partial-c)^m.$$

На томъ же основаніи

$$\omega_{m+1}(c)=\frac{1.2\ldots(m+1)}{(2m+2)(2m+1)\ldots(m+2)}(c-\partial)^{m+1}=\frac{m+1}{2(2m+1)}(c-\partial)\omega_m(c),$$

$$\omega_{m-1}(c)=\frac{1.2\ldots(m-1)}{(2m-2)(2m-3)\ldots m}(c-\partial)^{m-1}=\frac{2(2m-1)}{m(c-\partial)}\omega_m(c),$$

$$\omega_{m+1}(\partial)=\frac{m+1}{2(2m+1)}(\partial-c)\omega_m(\partial),\quad \omega_{m-1}(\partial)=\frac{2(2m-1)}{m(\partial-c)}\omega_m(\partial).$$

Принимая во вниманіе всѣ эти равенства, получаемъ два уравненія

$$\frac{(m+1)(c-\partial)}{2(2m+1)}=(c+q_{m+1})-\frac{2(2m-1)}{m(c-\partial)}p_{m+1}\ (\text{при } z=c),$$

$$\frac{(m+1)(\partial-c)}{2(2m+1)}=(\partial+q_{m+1})-\frac{2(2m-1)}{m(\partial-c)}p_{m+1}\ (\text{при } z=\partial)$$

и изъ нихъ выводимъ:

$$q_{m+1}=-\frac{c+\partial}{2},\quad p_{m+1}=\frac{m^2(\partial-c)^2}{4(2m-1)(2m+1)}.$$

Такимъ образомъ соотношеніе (71) доказано вполнѣ для всѣхъ значеній m превосходящихъ единицу.

Совершенно также связаны между собой

$$\psi_{m+1}(z)=\int_c^\partial\frac{\omega_{m+1}(z)-\omega_{m+1}(x)}{z-x}dx,$$

$$\psi_m(z)=\int_c^\partial\frac{\omega_m(z)-\omega_m(x)}{z-x}dx$$

и

$$\psi_{m-1}(z)=\int_c^\partial\frac{\omega_{m-1}(z)-\omega_{m-1}(x)}{z-x}dx.$$

Въ самомъ дѣлѣ, замѣняя

$$\omega_{m+1}(z)\ \text{и}\ \omega_{m+1}(x)$$

соотвѣтственно равными имъ выраженіями

$$(z+q_{m+1})\omega_m(z)-p_{m+1}\omega_{m+1}(z)\ \text{и}\ (x+q_{m+1})\omega_m(x)-p_{m+1}\omega_{m+1}(x),$$

получаемъ посредствомъ весьма простыхъ преобразованій

$$\psi_{m+1}(z)=\int_c^\partial\frac{(z+q_{m+1})\omega_m(z)-(x+q_{m+1})\omega_m(x)}{z-x}dx-p_{m+1}\int_c^\partial\frac{\omega_{m-1}(z)-\omega_{m-1}(x)}{z-x}dx$$

$$=(z+q_{m+1})\int_c^\partial\frac{\omega_m(z)-\omega_m(x)}{z-x}dx+\int_c^\partial\omega_m(x)dx-p_{m+1}\psi_{m-1}(z)$$

и затѣмъ

$$\psi_{m+1}(z)=(z+q_{m+1})\psi_m(z)-p_{m+1}\psi_{m-1}(z)\qquad(72),$$

такъ какъ

$$\int_c^\partial\omega_m(x)dx=0.$$

Замѣтимъ, что

$$\omega_1(z)=\frac{1}{2}\cdot\frac{d(z-c)(z-\partial)}{dz}=z-\frac{c+\partial}{2},$$

$$\omega_2(z)=\frac{1}{12}\cdot\frac{d^2(z-c)^2(z-\partial)^2}{dz^2}=z^2-(c+\partial)z+\frac{c^2+\partial^2+4c\partial}{6}=\left(z-\frac{c+\partial}{2}\right)^2-\frac{(\partial-c)^2}{12},$$

$$\psi_1(z)=\int_c^\partial\frac{z-x}{z-x}dx=\partial-c,$$

$$\psi_2(z)=\int_c^\partial(z+x)dx-(c+\partial)\int_c^\partial dx=(\partial-c)\left\{z-\frac{\partial+c}{2}\right\}.$$

Поэтому формулы (71) и (72) можно распространить и на случай

$$m=1,$$

если положимъ

$$\omega_0(z)=1\ \text{и}\ \psi_0(z)=0.$$

Разсмотримъ непрерывную дробь

$$\cfrac{p_1}{z+q_1-\cfrac{p_2}{z+q_2-\cfrac{p_3}{z+q_3-\ddots}}} \qquad (73),$$

гдѣ

$$\left.\begin{array}{l} p_1=\partial-c,\ p_2=\frac{(\partial-c)^2}{12},\ p_3=\frac{(\partial-c)^2}{15},\ldots,\ p_{m+1}=\frac{m^2(\partial-c)^2}{4(2m-1)(2m+1)},\ldots \\ -\frac{\partial+c}{2}=q_1=q_2=q_3=\ldots=q_{m+1}=\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (74).$$

И составимъ ея подходящія дроби

$$\frac{P_1}{Q_1}=\frac{p_1}{z+q_1},\ \frac{P_2}{Q_2}=\cfrac{p_1}{z+q_1-\cfrac{p_2}{z+q_2}},\ldots\ldots\ldots$$

по извѣстнымъ формуламъ

$$P_1=p_1\ \ ,\ P_2=(z+q_2)p_1,\ldots\ldots\ldots\ldots,\ P_{m+1}=(z+q_{m+1})P_m-p_{m+1}P_{m-1},\ldots$$

$$Q_1=z+q_1,\ Q_2=(z+q_2)(z+q_1)-p_2,\ldots,\ Q_{m+1}=(z+q_{m+1})Q_m-p_{m+1}Q_{m-1},\ldots$$

Изъ сравненія этихъ формулъ съ (71) и (72) видно, что

$$\psi_m(z) \text{ и } \omega_m(z)$$

соотвѣтственно совпадаютъ съ

$$P_m \text{ и } Q_m.$$

Поэтому

$$\frac{\psi_m(z)}{\omega_m(z)}=\cfrac{p_1}{z+q_1-\cfrac{p_2}{z+q_2-\ddots-\cfrac{p_{m-1}}{z+q_{m-1}-\cfrac{p_m}{z+q_m}}}}. \qquad (75).$$

§ 18. Докажемъ, что при безпредѣльномъ возрастаніи числа m дробь

$$\frac{\psi_m(z)}{\omega_m(z)}$$

приближается къ предѣлу равному

$$\int_c^\partial \frac{dx}{z-x}=\log\frac{z-c}{z-\partial},$$

если только z не лежитъ между c и ∂.

Для этой цѣли прежде всего изъ формулъ (71) и (72) выводимъ

$$\frac{\psi_{m+1}(z)\,\omega_m(z)-\psi_m(z)\,\omega_{m+1}(z)}{p_1\,p_2\cdots p_m\,p_{m+1}}=\frac{\psi_m(z)\,\omega_{m-1}(z)-\psi_{m-1}(z)\,\omega_m(z)}{p_1\,p_2\cdots p_m}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$=\frac{\psi_1(z)\,\omega_0(z)-\psi_0(z)\,\omega_1(z)}{p_1}=1 \qquad (76).$$

Затѣмъ, обозначая буквою v нѣкоторое новое произвольное число и полагая для краткости

$$\frac{\omega_m(z)\,\omega_{m-1}(v)-\omega_m(v)\,\omega_{m-1}(z)}{(z-v)\,p_1\,p_2\cdots p_m}=\{m,\ z,\ v\} \qquad (77),$$

изъ равенствъ

$$\omega_{m+1}(z)=(z+q_{m+1})\,\omega_m(z)-p_{m+1}\,\omega_{m-1}(z)$$

$$\omega_{m+1}(v)=(v+q_{m+1})\,\omega_m(v)-p_{m+1}\,\omega_{m-1}(v)$$

получаемъ

$$\{m+1,\ z,\ v\}=\frac{\omega_m(z)\,\omega_m(v)}{p_1\,p_2\cdots p_m\,p_{m+1}}+\{m,\ z,\ v\}.$$

На томъ же основаніи

$$\{m,\ z,\ v\}=\frac{\omega_{m-1}(z)\,\omega_{m-1}(v)}{p_1\,p_2\cdots p_m}+\{m-1,\ z,\ v\}.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\{2,\ z,\ v\}=\frac{\omega_1(z)\,\omega_1(v)}{p_1\,p_2}+\{1,\ z,\ v\}=\frac{\omega_1(z)\,\omega_1(v)}{p_1\,p_2}+\frac{1}{p_1},$$

откуда

$$\{m,\ z,\ v\}=\frac{1}{p_1}+\frac{\omega_1(z)\,\omega_1(v)}{p_1\,p_2}+\ldots+\frac{\omega_{m-1}(z)\,\omega_{m-1}(v)}{p_1\,p_2\cdots p_m} \qquad (78).$$

Пусть

$$c<\partial<z.$$

Тогда

$$\omega_1(z)>0,\ \omega_2(z)>0,\ \ldots\ldots,\ \omega_{m-1}(z)>0,\ \omega_m(z)>0,\ \ldots.$$

$$\omega_1(\partial)>0,\ \omega_2(\partial)>0,\ \ldots\ldots,\ \omega_{m-1}(\partial)>0,\ \omega_m(\partial)>0,\ \ldots.$$

$$\{m, z, \partial\} > \frac{1}{p_1} \quad \text{и} \quad \frac{\omega_m(\partial)}{\omega_m(z)} < \left(\frac{\partial - c}{z - c}\right)^m,$$

такъ какъ по доказанному въ предыдущей главѣ всѣ корни уравненій

$$\omega_1(z) = 0,\ \omega_2(z) = 0, \ldots,\ \omega_{m-1}(z) = 0,\ \omega_m(z) = 0, \ldots$$

лежатъ между c и ∂.

Съ другой стороны формулы (62), (64) и (66) предыдущей главы при

$$f(x) = \frac{1}{z - x}$$

даютъ намъ слѣдующія неравенства

$$\frac{\psi_m(z)}{\omega_m(z)} < \int_c^\partial \frac{dx}{z-x} < \frac{\omega_{m-1}(\partial)\psi_m(z) - \omega_m(\partial)\psi_{m-1}(z)}{\omega_{m-1}(\partial)\omega_m(z) - \omega_m(\partial)\omega_{m-1}(z)} \qquad (79).$$

Слѣдовательно

$$0 < \int_c^\partial \frac{dx}{z-x} - \frac{\psi_m(z)}{\omega_m(z)} < \frac{\omega_{m-1}(\partial)\psi_m(z) - \omega_m(\partial)\psi_{m-1}(z)}{\omega_{m-1}(\partial)\omega_m(z) - \omega_m(\partial)\omega_{m-1}(z)} - \frac{\psi_m(z)}{\omega_m(z)}$$

$$< \frac{\omega_m(\partial)}{\omega_m(z)} \cdot \frac{1}{(z-\partial)\{m, z, \partial\}} < \frac{p_1}{z-\partial}\left(\frac{\partial - c}{z - c}\right)^m \qquad (80)$$

Совершенно также при

$$z < c < \partial$$

получимъ

$$0 < \frac{\psi_m(z)}{\omega_m(z)} - \int_c^\partial \frac{dx}{z-x} < \frac{p_1}{c-z}\left(\frac{\partial - c}{\partial - z}\right)^m \qquad (81).$$

А изъ неравенствъ (80) и (81) уже не трудно заключить, что при достаточно большихъ значеніяхъ m дробь

$$\frac{\psi_m(z)}{\omega_m(z)}$$

будетъ отличаться отъ интеграла

$$\int_c^\partial \frac{dx}{z-x} = \log\left(\frac{z-c}{z-\partial}\right)$$

сколь угодно мало, если только z не лежитъ между c и ∂.

Другими словами

$$\text{предѣлъ} \left\{\frac{\psi_m(z)}{\omega_m(z)}\right\}_{m=\infty} = \int_c^\partial \frac{dx}{z-x} \begin{pmatrix} z < c < \partial \\ \text{или} \\ c < \partial < z \end{pmatrix}.$$

Сопоставляя эту формулу съ (75) приходимъ къ замѣчательному разложенію интеграла

$$\int_c^\partial \frac{dx}{z-x}$$

въ непрерывную дробь:

$$\int_c^\partial \frac{dx}{z-x} = \cfrac{p_1}{z + q_1 - \cfrac{p_2}{z + q_2 - \cfrac{p_3}{z + q_3 \cdot \ldots}}} \qquad (82).$$

Примѣръ: $c = 0,\ \partial = 1,\ z = 2.$

$$\int_0^1 \frac{dx}{2-x} = \log 2 = \cfrac{1}{2 - \cfrac{\frac{1}{12}}{2 - \frac{1}{2} - \cfrac{\frac{1}{15}}{2 - \frac{1}{2} - \ldots}}} = \cfrac{2}{3 - \cfrac{1}{9 - \cfrac{4}{15 - \cfrac{9}{21 - \cfrac{16}{27 - \ldots}}}}}$$

Подходящія дроби

$$\frac{2}{3},\ \frac{2}{3 - \frac{1}{9}} = \frac{18}{26},\ \frac{2}{3 - \cfrac{1}{9 - \frac{4}{15}}} = \frac{262}{378},\ \frac{2}{3 - \cfrac{1}{9 - \cfrac{4}{15 - \frac{9}{21}}}} = \frac{5340}{7704}$$

$$\frac{2}{3 - \cfrac{1}{9 - \cfrac{4}{15 - \cfrac{9}{21 - \frac{16}{27}}}}} = \frac{139988}{201960},\ \frac{2}{3 - \cfrac{1}{9 - \cfrac{4}{15 - \cfrac{9}{21 - \cfrac{16}{27 - \frac{25}{33}}}}}} = \frac{4486104}{6472080} > 0{,}693147179, \ldots\ldots$$

меньше чѣмъ log 2.

Напротивъ дроби

$$\frac{2}{3-1}=1,\quad \frac{2}{3-\frac{1}{9-2}}=\frac{14}{20},\quad \frac{2}{3-\frac{1}{9-\frac{4}{15-3}}}=\frac{208}{300},\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\ldots\ldots,\quad \frac{2}{3-\frac{1}{9-\frac{4}{15-\frac{9}{21-\frac{16}{27-\frac{25}{33-6}}}}}}=\frac{3646176}{5260320}<0{,}693147185,\ldots\ldots\ldots\ldots$$

какъ показываютъ неравенства (79), больше чѣмъ $\log 2$.

Приведенныхъ нами чиселъ достаточно для того, чтобы съ точностью до $\frac{1}{2.10^8}$ можно было положить

$$\log 2 = 0{,}69314718.$$

Литература.

Legendre. Exercices de calcul intégral. Tome second, Cinquième partie, § X.

Laplace. Traité de mécanique céleste. Tome cinquième, Livre XI, Chapitre II.

Supplement au 5-e volume du Traité de mécanique céleste.

Heine. Handbuch der Kugelfunctionen.

ГЛАВА VII.

Нѣкоторыя обобщенія.

§ 19. Вмѣсто

$$\int_c^\partial f(x)\,dx$$

будемъ теперь разсматривать

$$\int_c^\partial g(x)\,f(x)\,dx,$$

гдѣ $g(x)$ означаетъ нѣкоторую данную функцію отъ x.

И соотвѣтственно формулѣ интерполированія

$$f(x)=F(x) \tag{3}$$

положимъ

$$\int_c^\partial g(x)\,f(x)\,dx=\int_c^\partial g(x)\,F(x)\,dx.$$

Эта новая формула можетъ служить для приближеннаго вычисленія интеграла

$$\int_c^\partial g(x)\,f(x)\,dx$$

по даннымъ значеніямъ

$$f(a_1), \quad f(a_2), \ldots\ldots, f(a_m),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f^{\alpha_1-1}(a_1),\ f^{\alpha_2-1}(a_2)\ldots\ldots,\ f^{\alpha_m-1}(a_m),$$

если только ея дополнительный членъ

$$\int_c^\partial g(x)\frac{(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\ldots(x-a_m)^{\alpha_m}}{1.2.3\ldots n}f^n(\xi)\,dx$$

достаточно малъ.

Пусть

$$\alpha_1=\alpha_2=\ldots.=\alpha_k=2,\ \alpha_{k+1}=\alpha_{k+2}=\ldots=\alpha_m=1.$$

Тогда для опредѣленія функціи $F(z)$ имѣемъ формулы (6), (7) и (8). Онѣ показываютъ, что

$$\int_c^\partial g(x)F(x)dx=C_1f(a_1)+\ldots+C_mf(a_m)+D_1f'(a_1)+\ldots+D_kf'(a_k),$$

гдѣ коэффиціенты

$$C_1,\ C_2,\ldots,\ C_m,\ D_1,\ldots,\ D_k$$

не зависятъ отъ $f(x)$.

Такимъ образомъ мы приходимъ къ приближенной формулѣ

$$\int_c^\partial g(x)f(x)dx=C_1f(a_1)+\ldots+C_mf(a_m)+D_1f'(a_1)+\ldots+D_kf'(a_k) \quad (83),$$

дополнительный членъ которой, равный

$$\int_c^\partial g(x)\frac{(x-a_1)^2\ldots(x-a_k)^2\,(x-a_{k+1})\ldots(x-a_m)}{1.2.3\ldots(k+m)}f^{k+m}(\xi)\,dx, \quad (84),$$

обращается въ нуль всякій разъ, когда $f(z)$ цѣлая функція отъ z и степень этой функціи меньше $k+m$.

Положимъ теперь, что числамъ

$$a_1,\ a_2,\ldots.,\ a_m$$

даны такія значенія, при которыхъ всѣ коэффиціенты

$$D_1,\ D_2,\ldots.,\ D_k$$

обращаются въ нуль.

Въ этомъ случаѣ, подставляя въ формулѣ (83) вмѣсто $f(x)$ послѣдовательно

$$\frac{\omega(x)}{(x-a_1)\,\omega'(a_1)},\ \frac{\omega(x)}{(x-a_2)\,\omega'(a_2)},\ldots.,\ \frac{\omega(x)}{(x-a_m)\,\omega'(a_m)},\ \omega(x)\,\varphi(x),$$

гдѣ

$$\omega(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_m)$$

а $\varphi(x)$ произвольная цѣлая функція $k-1^{\text{ой}}$ степени отъ x, получаемъ слѣдующія вполнѣ точныя равенства

$$\left.\begin{array}{c} C_1=\int_c^\partial\frac{g(x)\,\omega(x)\,dx}{(x-a_1)\,\omega'(a_1)},\ldots,C_m=\int_c^\partial\frac{g(x)\,\omega(x)\,dx}{(x-a_m)\,\omega'(a_m)}, \\ \int_c^\partial g(x)\,\omega(x)\,\varphi(x)\,dx=0. \end{array}\right\} \quad (85).$$

Съ другой стороны, полагая въ формулѣ (83) функцію $f(x)$ послѣдовательно равною

$$\frac{\omega(x)\,\omega(x)}{(x-a_1)(x-a_{k+1})\ldots(x-a_m)},\ \frac{\omega(x)\,\omega(x)}{(x-a_2)(x-a_{k+1})\ldots(x-a_m)},\ldots,\ \frac{\omega(x)\,\omega(x)}{(x-a_k)\ldots(x-a_m)},$$

видимъ, что коэффиціенты

$$D_1,\ D_2,\ldots,\ D_k$$

непремѣнно должны приводиться къ нулю, если интегралъ

$$\int_c^\partial g(x)\,\omega(x)\,\varphi(x)\,dx$$

обращается въ нуль для всякой цѣлой функціи

$$\varphi(x)$$

$k-1^{\text{ой}}$ степени отъ x.

Итакъ условія

$$D_1 = 0\,,\ D_2 = 0\,,\ \ldots,\ D_k = 0$$

равносильны одному:

$$\int_c^\partial g(x)\,\omega(x)\,\varphi(x)\,dx = 0\,,$$

которое въ свою очередь по произвольности цѣлой функціи $\varphi(x)$, $k-1^{\text{ой}}$ степени, равносильно слѣдующимъ k условіямъ

$$\int_c^\partial g(x)\,\omega(x)dx = 0,\quad \int_c^\partial xg(x)\,\omega(x)dx = 0,\ldots,\ \int_c^\partial x^{k-1}g(x)\,\omega(x)dx = 0.$$

Полагая затѣмъ

$$\omega(z) = z^m + p_1 z^{m-1} + p_2 z^{m-2} + \ldots + p_{m-1} z + p_m \qquad (86),$$

получаемъ k уравненій первой степени

$$\left.\begin{array}{l}
\int_c^\partial x^m g(x)dx + p_1 \int_c^\partial x^{m-1} g(x)\,dx + \ldots + p_m \int_c^\partial g(x)dx = 0 \\[2ex]
\int_c^\partial x^{m+1} g(x)dx + p_1 \int_c^\partial x^m g(x)\,dx + \ldots + p_m \int_c^\partial xg(x)dx = 0 \\[2ex]
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\[2ex]
\int_c^\partial x^{m+k-1} g(x)\,dx + \ldots\ \ldots\ldots\ldots\ldots + p_m \int_c^\partial x^{k-1} g(x)dx = 0
\end{array}\right\} (87)$$

съ m неизвѣстными

$$p_1,\ p_2,\ldots,\ p_m.$$

Число k равно или меньше m.

Если k меньше m, то уравненій (87) недостаточно для полнаго опредѣленія коэффиціентовъ

$$p_1,\ p_2,\ldots,\ p_m$$

и мы можемъ присоединить къ этимъ уравненіемъ $m-k$ какихъ нибудь добавочныхъ условій: можемъ задать, напримѣръ, значенія чиселъ

$$a_{k+1},\ a_{k+2},\ldots,\ a_m.$$

Мы обратимъ вниманіе исключительно на слѣдующіе случаи:

$$1)\ k = m;\ 2)\ k = m-1,\ a_m = c;\ 3)\ k = m-1,\ a_m = \partial;$$

$$4)\ k = m-2,\ a_{m-1} = c,\ a_m = \partial.$$

При этомъ предположимъ, что

$$g(x) \geqq 0$$

для всѣхъ значеній x, лежащихъ между c и ∂.

Тогда для каждаго изъ указанныхъ нами четырехъ случаевъ существуетъ, какъ мы докажемъ, одна и только одна функція $\omega(z)$, удовлетворяющая условіямъ этого случая.

Начиная съ перваго случая, возьмемъ вмѣсто $\omega(z)$ нѣсколько болѣе общее выраженіе

$$\omega^0(z) = p_0^0 z^m + p_1^0 z^{m-1} + \ldots + p_{m-1}^0 z + p_m^0 \qquad (88)$$

и предложимъ себѣ подобрать коэффиціенты

$$p_0^0,\ p_1^0,\ldots,\ p_{m-1}^0,\ p_m^0$$

такъ, чтобы интегралъ

$$\int_c^\partial g(x)\,\omega^0(x)\,\varphi(x)\,dx$$

обращался въ нуль для всякой цѣлой функціи $\varphi(x)$, степень которой меньше m.

Поставленное нами условіе сводится къ системѣ m однородныхъ уравненій первой степени

$$\left.\begin{array}{l}
p_0^0\int_c^\partial x^m g(x)dx+p_1^0\int_c^\partial x^{m-1}g(x)dx+\ldots+p_m^0\int_c^\partial g(x)dx=0,\\
p_0^0\int_c^\partial x^{m+1}g(x)dx+p_1^0\int_c^\partial x^m g(x)dx+\ldots+p_m^0\int_c^\partial xg(x)dx=0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
p_0^0\int_c^\partial x^{2m-1}g(x)dx+p_1^0\int_c^\partial x^{2m-2}g(x)dx+\ldots+p_m^0\int_c^\partial x^{m-1}g(x)dx=0
\end{array}\right\}(89)$$

съ $m+1$ неизвѣстными.

$$p_0^0,\ p_1^0,\ p_2^0,\ \ldots,\ p_{m-1}^0,\ p_m^0.$$

Эта система допускаетъ безчисленное множество рѣшеній *) (кромѣ очевиднаго: $p_0^0=p_1^0=p_2^0=\ldots=p_m^0=0$).

Останавливаясь на одномъ изъ нихъ, предположимъ, что при непрерывномъ возрастаніи z отъ c до ∂ функція $\omega^0(z)$ мѣняетъ свой знакъ ровно l разъ.

Пусть, именно, такое измѣненіе знака $\omega^0(z)$ происходитъ только при переходѣ z черезъ слѣдующія значенія

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_l.$$

Въ такомъ случаѣ произведеніе

$$(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_l)\,\omega^0(x)$$

для всѣхъ значеній x, лежащихъ между c и ∂, должно имѣть постоянно одинъ и тотъ же знакъ и потому интегралъ

$$\int_c^\partial (x-a_1)\ldots(x-a_l)\,g(x)\,\omega^0(x)\,dx$$

не можетъ обращаться въ нуль.

*) Baltzer. Theorie und Anwendung der Determinanten. § 8 (Vierte Auflage).

Между тѣмъ интегралъ

$$\int_c^\partial \varphi(x)\,g(x)\,\omega^0(x)\,dx$$

непремѣнно обращается въ нуль, если только $\varphi(x)$ цѣлая функція отъ x и степень этой функціи меньше m.

Поэтому l не меньше, а равно m.

Такимъ образомъ мы убѣждаемся, что уравненіе

$$\omega^0(z)=0$$

должно имѣть ровно m различныхъ вещественныхъ корней и всѣ его корни лежатъ между c и ∂.

Слѣдовательно p_0^0 не нуль.

Вмѣстѣ съ тѣмъ, конечно, не можетъ обращаться въ нуль и опредѣлитель

$$\begin{vmatrix}
\int_c^\partial x^{m-1}g(x)dx, & \int_c^\partial x^{m-2}g(x)dx, & \ldots\ldots, & \int_c^\partial g(x)\,dx\\
\int_c^\partial x^m g(x)\,dx, & \int_c^\partial x^{m-1}g(x)dx, & \ldots\ldots, & \int_c^\partial x\,g(x)\,dx\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\int_c^\partial x^{2m-2}g(x)dx, & \int_c^\partial x^{2m-3}g(x)dx, & \ldots\ldots, & \int_c^\partial x^{m-1}g(x)dx
\end{vmatrix}$$

Отсюда заключаемъ, что уравненія (89) вполнѣ опредѣляютъ значенія отношеній

$$\frac{p_1^0}{p_0^0},\ \frac{p_2^0}{p_0^0},\ \ldots,\ \frac{p_{m-1}^0}{p_0^0},\ \frac{p_m^0}{p_0^0}.$$

Иначе сказать, всѣ функціи $\omega^0(z)$, удовлетворяющія поставленному нами условію, отличаются другъ отъ друга только множителемъ не зависящимъ отъ z.

Ту изъ нихъ, у которой коэффиціентъ при z^m равенъ единицѣ, обозначимъ черезъ $\omega_m(z)$.

Она и представляетъ собою функцію $\omega(z)$ соотвѣтствующую первому изъ вышеуказанныхъ четырехъ случаевъ: $k=m$.

Полагая затѣмъ

$$\int_c^\partial g(x)\frac{\omega_m(z)-\omega_m(x)}{z-x}dx=\psi_m(z),$$

приходимъ къ обобщенной формулѣ Гаусса

$$\int_c^\partial g(x)f(x)dx=\sum_{i=1,2,\dots,m}\frac{\psi_m(a_i)}{\omega'_m(a_i)}f(a_i)+\frac{f^{2m}(\xi)}{1.2\dots 2m}\int_c^\partial g(x)\{\omega_m(x)\}^2dx \quad (90).$$

Здѣсь $a_1, a_2, \dots, a_m$ корни уравненія $\omega_m(z)=0$.

Перейдемъ ко второму случаю: $k=m-1$, $a_m=c$.

И, подразумѣвая подъ

$$\omega_m(z) \text{ и } \psi_m(z)$$

только что введенныя функціи, разсмотримъ разность

$$\omega(z)-\omega_m(z).$$

По условіямъ вопроса

$$\int_c^\partial g(x)\{\omega(x)-\omega_m(x)\}\varphi(x)dx=\left\{\begin{array}{l}\int_c^\partial g(x)\,\omega(x)\,\varphi(x)\,dx\\ -\int_c^\partial g(x)\omega_m(x)\varphi(x)dx\end{array}\right\}=0$$

для всякой цѣлой функціи $\varphi(x)$, степень которой меньше $m-1$.

Поэтому $\omega(z)-\omega_m(z)$ можетъ отличаться отъ $\omega_{m-1}(z)$ только нѣкоторымъ множителемъ α_m независящимъ отъ z; такъ что

$$\omega(z)=\omega_m(z)+\alpha_m\,\omega_{m-1}(z).$$

Для опредѣленія α_m надо принять во вниманіе условіе

$$\omega(c)=0,$$

которое даетъ

$$\alpha_m=-\frac{\omega_m(c)}{\omega_{m-1}(c)}.$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ

$$\int_c^\partial g(x)\frac{\omega(z)-\omega(x)}{z-x}dx=\left\{\begin{array}{l}\int_c^\partial g(x)\frac{\omega_m(z)-\omega_m(x)}{z-x}dx\\ +\alpha_m\int_c^\partial g(x)\frac{\omega_{m-1}(z)-\omega_{m-1}(x)}{z-x}dx\end{array}\right\}$$

$$=\psi_m(z)+\alpha_m\,\psi_{m-1}(z).$$

Составленная нами функція

$$\omega_m(z)-\frac{\omega_m(c)}{\omega_{m-1}(c)}\omega_{m-1}(z)$$

обращается въ нуль при z и c.

При непрерывномъ же возрастаніи z отъ c до ∂ она мѣняетъ свой знакъ ровно $m-1$ разъ.

Убѣдиться въ этомъ нетрудно: стоитъ только разсуждать совершенно также, какъ мы раньше разсуждали о функціи $\omega^0(z)$.

Послѣ всѣхъ этихъ замѣчаній можемъ написать формулу

$$\int_c^\partial g(x)f(x)dx=\sum_{i=1,2,\dots,m}\frac{\psi_m(b_i)+\alpha_m\psi_{m-1}(b_i)}{\omega'_m(b_i)+\alpha_m\omega'_{m-1}(b_i)}f(b_i)$$

$$+\frac{f^{2m-1}(\eta)}{1.2\dots(2m-1)}\int_c^\partial(x-c)\left\{\frac{\omega_m(x)+\alpha_m\omega_{m-1}(x)}{x-c}\right\}^2g(x)dx\,(91),$$

которая представляетъ собою обобщеніе формулы (65) пятой главы.

Здѣсь

$b_1, b_2, \dots, b_m$ корни урав. $\omega_m(z)+\alpha_m\,\omega_{m-1}(z)=0$ и $\alpha_m=\frac{-\omega_m(c)}{\omega_{m-1}(c)}$.

Совершенно также, обобщая формулу (66), получаемъ

$$\int_c^\partial g(x)f(x)dx=\sum_{i=1,2,\dots,m}\frac{\psi_m(b'_i)+\alpha'_m\psi_{m-1}(b'_i)}{\omega'_m(b'_i)+\alpha'_m\omega'_{m-1}(b'_i)}f(b'_i)$$

$$+\frac{f^{2m-1}(\zeta)}{1.2\dots(2m-1)}\int_c^\partial(x-\partial)\left\{\frac{\omega_m(x)+\alpha'_m\omega_{m-1}(x)}{x-\partial}\right\}^2g(x)dx\,(92),$$

гдѣ

$b'_1, b'_2, \ldots, b'_m$ корни урав. $\omega_m(z) + \alpha'_m \omega_{m-1}(z) = 0$ и $\alpha'_m = \frac{-\omega_m(\partial)}{\omega_{m-1}(\partial)}$.

Наконецъ въ четвертомъ случаѣ, когда

$$k = m - 2, \quad a_{m-1} = c, \quad a_m = \partial,$$

искомую функцію $\omega(z)$ можно представить въ слѣдующемъ видѣ

$$\omega(z) = \begin{vmatrix} \omega_m(z), & \omega_m(c), & \omega_m(\partial) \\ \omega_{m-1}(z), & \omega_{m-1}(c), & \omega_{m-1}(\partial) \\ \omega_{m-2}(z), & \omega_{m-2}(c), & \omega_{m-2}(\partial) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \omega_{m-1}(c), & \omega_{m-1}(\partial) \\ \omega_{m-2}(c), & \omega_{m-2}(\partial) \end{vmatrix}.$$

§ 20. Разсуждая совершенно также какъ въ § 17, заключаемъ, что должны имѣть мѣсто такія формулы

$$\left.\begin{aligned} \omega_{m+1}(z) &= (z + q_{m+1})\,\omega_m(z) - p_{m+1}\,\omega_{m-1}(z), \\ \psi_{m+1}(z) &= (z + q_{m+1})\,\psi_m(z) - p_{m+1}\,\psi_{m-1}(z) \end{aligned}\right\} \quad (93)$$

и

$$\frac{\psi_m(z)}{\omega_m(z)} = \cfrac{p_1}{z + q_1 - \cfrac{p_2}{z + q_2 - \ddots - \cfrac{p_{m-1}}{z + q_{m-1} - \cfrac{p_m}{z + q_m}}}} \quad (94),$$

гдѣ

$$p_1, \; q_1, \; p_2, \; q_2, \ldots, \; p_m, \; q_m, \; p_{m+1}, \; q_{m+1}, \ldots$$

не зависятъ отъ z.

Выведемъ нѣкоторыя замѣчательныя выраженія для коэффиціентовъ

$$p_1, \; q_1, \; p_2, \; q_2 \ldots, \; p_m, \; q_m, \ldots$$

Первый изъ этихъ коэффиціентовъ p_1, очевидно, равенъ

$$\psi_1(z) = \int_c^\partial g(x)\,dx.$$

Затѣмъ формула

$$\omega_{m+1}(z) = (z + q_{m+1})\,\omega_m(z) - p_{m+1}\,\omega_{m-1}(z)$$

даетъ

$$\int_c^\partial (x + q_{m+1})\,g(x)\,\omega_m(x)\,\omega_m(x)\,dx = 0,$$

$$\int_c^\partial g(x)\,\omega_m(x)\,\omega_m(x)\,dx = p_{m+1}\int_c^\partial g(x)\,\omega_{m-1}(x)\,\omega_{m-1}(x)\,dx,$$

такъ какъ интегралы

$$\int_c^\partial g(x)\,\omega_{m+1}(x)\,\omega_m(x)\,dx, \quad \int_c^\partial g(x)\,\omega_{m+1}(x)\,\omega_{m-1}(x)\,dx$$

$$\int_c^\partial g(x)\,\omega_m(x)\,\omega_{m-1}(x)\,dx, \quad \int_c^\partial g(x)\,\omega_m(x)\left\{\omega_m(x) - x\,\omega_{m-1}(x)\right\}dx$$

приводятся къ нулю.

Слѣдовательно

$$\left.\begin{aligned} q_{m+1} &= -\frac{\int_c^\partial x\,g(x)\,\omega_m(x)\,\omega_m(x)\,dx}{\int_c^\partial g(x)\,\omega_m(x)\,\omega_m(x)\,dx}, \\ p_{m+1} &= \frac{\int_c^\partial g(x)\,\omega_m(x)\,\omega_m(x)\,dx}{\int_c^\partial g(x)\,\omega_{m-1}(x)\,\omega_{m-1}(x)\,dx}, \\ p_1 p_2 \ldots p_{m+1} &= \int_c^\partial g(x)\,\omega_m(x)\,\omega_m(x)\,dx \end{aligned}\right\} \quad (95).$$

Обратимъ вниманіе еще на формулы

$$\psi_m(z)\,\omega_{m-1}(z) - \psi_{m-1}(z)\,\omega_m(z) = p_1 p_2 \ldots p_m \quad (96)$$

и

$$\left.\begin{aligned} \left\{m, z, v\right\} &= \frac{1}{p_1} + \frac{\omega_1(z)\omega_1(v)}{p_1 p_2} + \frac{\omega_2(z)\omega_2(v)}{p_1 p_2 p_3} + \ldots + \frac{\omega_{m-1}(z)\omega_{m-1}(v)}{p_1 p_2 \ldots p_m}, \\ &\text{гдѣ} \\ \left\{m, z, v\right\} &= \frac{\omega_{m-1}(v)\,\omega_m(z) - \omega_m(v)\,\omega_{m-1}(z)}{(z - v)\,p_1 p_2 \ldots p_m} \end{aligned}\right\} \quad (97).$$

Послѣднія формулы вытекаютъ изъ (93) совершенно также, какъ (76) и (78) изъ (71) и (72).

§ 21. Докажемъ наконецъ, что при безпредѣльномъ возрастаніи числа m дробь

$$\frac{\psi_m(z)}{\omega_m(z)}$$

приближается къ предѣлу равному

$$\int_c^\partial \frac{g(x)}{z-x}dx,$$

если только z не лежитъ между c и ∂.

Пусть $c < \partial < z$.

Полагая

$$f(x) = \frac{1}{z-x},$$

изъ формулъ (90) и (92) выводимъ неравенства

$$\frac{\psi_m(z)}{\omega_m(z)} < \int_c^\partial \frac{g(x)}{z-x}dx < \frac{\omega_{m-1}(\partial)\psi_m(z) - \omega_m(\partial)\psi_{m-1}(z)}{\omega_{m-1}(\partial)\omega_m(z) - \omega_m(\partial)\omega_{m-1}(z)}$$

и затѣмъ

$$0 < \int_c^\partial \frac{g(x)}{z-x}dx - \frac{\psi_m(z)}{\omega_m(z)} < \frac{\omega_m(\partial)}{\omega_m(z)}\frac{1}{(z-\partial)\{m, z, \partial\}}$$

$$< \frac{p_1}{(z-\partial)}\frac{\omega_m(\partial)}{\omega_m(z)} < \frac{p_1}{z-\partial}\left(\frac{\partial-c}{z-c}\right)^m \qquad (98),$$

такъ какъ

$$\omega_1(z) > 0,\ \omega_1(\partial) > 0,\ \omega_2(z) > 0,\ \omega_2(\partial) > 0, \ldots, \omega_m(z) > 0,\ \omega_m(\partial) > 0,$$

$$\{m, z, \partial\} = \frac{1}{p_1} + \frac{\omega_1(z)\omega_1(\partial)}{p_1 p_2} + \ldots + \frac{\omega_{m-1}(z)\omega_{m-1}(\partial)}{p_1 p_2 \ldots p_m} > \frac{1}{p_1}$$

и

$$\frac{\omega_m(\partial)}{\omega_m(z)} < \left(\frac{\partial-c}{z-c}\right)^m.$$

Подобнымъ же образомъ при $z < c < \partial$ получаемъ неравенства

$$0 < \frac{\psi_m(z)}{\omega_m(z)} - \int_c^\partial \frac{g(z)}{z-x}dx < \frac{\omega_m(c)}{\omega_m(z)}\frac{1}{(c-z)\{m, z, c\}}$$

$$< \frac{p_1\,\omega_m(c)}{(c-z)\,\omega_m(z)} < \frac{p_1}{c-z}\left(\frac{\partial-c}{\partial-z}\right)^m \qquad (99).$$

Отсюда уже нетрудно видѣть, что

$$\text{предѣлъ}\left\{\frac{\psi_m(z)}{\omega_m(z)}\right\}_{m=\infty} = \int_c^\partial \frac{g(x)}{z-x}dx,$$

какъ при $c < \partial < z$, такъ и при $z < c < \partial$.

Сопоставляя затѣмъ этотъ результатъ съ формулою (94), приходимъ къ замѣчательному разложенію интеграла $\int_c^\partial \frac{g(x)}{z-x}dx$ въ непрерывную дробь:

$$\int_c^\partial \frac{g(x)}{z-x}dx = \cfrac{p_1}{z+q_1 - \cfrac{p_2}{z+q_2 - \cfrac{p_3}{z+q_3 - \ddots}}} \qquad (100).$$

Такой выводъ формулы (100) относится только къ тѣмъ случаямъ, когда c и ∂ числа конечныя.

Дополняя теперь нашъ выводъ, постараемся доказать формулу (100) и для нѣкоторыхъ изъ тѣхъ случаевъ, когда $c = -\infty$ или $\partial = +\infty$.

И прежде всего изъ равенствъ

$$\omega_1(z) = z + q_1, \qquad \omega_1(\partial) = \partial + q_1,$$

$$\frac{\omega_2(z)}{\omega_1(z)} = z + q_2 - p_2\frac{1}{\omega_1(z)}, \qquad \frac{\omega_2(\partial)}{\omega_1(\partial)} = \partial + q_2 - p_2\frac{1}{\omega_1(\partial)},$$

$$\frac{\omega_3(z)}{\omega_2(z)} = z + q_3 - p_3\frac{\omega_1(z)}{\omega_2(z)}, \qquad \frac{\omega_3(\partial)}{\omega_2(\partial)} = \partial + q_3 - p_3\frac{\omega_1(\partial)}{\omega_2(\partial)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\omega_m(z)}{\omega_{m-1}(z)} = z + q_m - p_m\frac{\omega_{m-2}(z)}{\omega_{m-1}(z)}, \quad \frac{\omega_m(\partial)}{\omega_{m-1}(\partial)} = \partial + q_m - p_m\frac{\omega_{m-2}(\partial)}{\omega_{m-1}(\partial)},$$

заключаемъ, что при $c < \partial < z$ должны имѣть мѣсто неравенства

$$\frac{\omega_m(z)}{\omega_{m-1}(z)} > \frac{\omega_m(\partial)}{\omega_{m-1}(\partial)}, \quad \frac{\omega_{m-2}(z)}{\omega_{m-1}(z)} < \frac{\omega_{m-2}(\partial)}{\omega_{m-1}(\partial)}$$

$$\frac{\omega_m(z)}{\omega_{m-1}(z)} : \frac{\omega_m(\partial)}{\omega_{m-1}(\partial)} = \frac{z+q_m - p_m \dfrac{\omega_{m-2}(z)}{\omega_{m-1}(z)}}{\partial + q_m - p_m \dfrac{\omega_{m-2}(\partial)}{\omega_{m-1}(\partial)}} > \frac{z+q_m}{\partial+q_m}, \quad \frac{\omega_m(z)}{\omega_m(\partial)} > \frac{z+q_m}{\partial+q_m}\,\frac{\omega_{m-1}(z)}{\omega_{m-1}(\partial)},$$

и потому

$$\frac{\omega_m(z)}{\omega_m(\partial)} > \frac{z+q_1}{\partial+q_1}\cdot\frac{z+q_2}{\partial+q_2}\cdots\frac{z+q_m}{\partial+q_m}$$

Послѣднее неравенство вмѣстѣ съ (98) даетъ

$$0 < \int_c^\partial \frac{g(x)}{z-x}\,dx - \frac{\psi_m(z)}{\omega_m(z)} < \frac{p_1}{z-\partial}\,\frac{\partial+q_1}{z+q_1}\,\frac{\partial+q_2}{z+q_2}\cdots\frac{\partial+q_m}{z+q_m}$$

$$< \frac{p_1}{z-\partial}\,\frac{1}{1+\dfrac{z-\partial}{\partial+q_1}}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{z-\partial}{\partial+q_2}}\cdots\frac{1}{1+\dfrac{z-\partial}{\partial+q_m}}$$

$$< \frac{p_1}{z-\partial}\,\frac{1}{1+(z-\partial)\left\{\dfrac{1}{\partial+q_1}+\dfrac{1}{\partial+q_2}+\cdots+\dfrac{1}{\partial+q_m}\right\}},$$

если $c < \partial < z$.

На этомъ основаніи можемъ распространить формулу (100) на всѣ тѣ случаи, при которыхъ

$$c = -\infty < \partial < z$$

и рядъ

$$\frac{1}{\partial+q_1},\ \frac{1}{\partial+q_2},\ \frac{1}{\partial+q_3},\ldots,\ \frac{1}{\partial+q_m},\ldots$$

расходящійся.

При помощи подобныхъ же неравенствъ можемъ распространить формулу (100) и на тѣ случаи, при которыхъ

$$z < c < \partial = +\infty$$

и рядъ

$$\frac{-1}{c+q_1},\ \frac{-1}{c+q_2},\ \frac{-1}{c+q_3},\ldots,\ \frac{-1}{c+q_m},\ldots$$

расходящійся.

§ 22. Приложимъ наши общія разсужденія къ примѣрамъ

Примѣръ 1.

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{(z-x)\sqrt{1-x^2}} = \cfrac{\pi}{z-\cfrac{\frac{1}{2}}{z-\cfrac{\frac{1}{4}}{z-\cfrac{\frac{1}{4}}{z-\cdots}}}} = \cfrac{\pi}{z-\cfrac{1}{2z-\cfrac{1}{2z-\cfrac{1}{2z-\cdots}}}} \tag{101}$$

Для вывода этой формулы вспомнимъ, что при цѣлыхъ положительныхъ значеніяхъ чиселъ m и n выраженія

$$\mathrm{Cos}\,m\arccos z = \frac{(z+\sqrt{z^2-1})^m + (z-\sqrt{z^2-1})^m}{2} \quad \text{и} \quad \cos n\arccos z$$

цѣлыя функціи отъ z и старшіе члены ихъ соотвѣтственно равны

$$2^{m-1}z^m \text{ и } 2^{n-1}z^n.$$

Вспомнимъ также, что всякую цѣлую функцію, $m-1^{\text{ой}}$ степени, отъ z можно представить подъ видомъ суммы

$$A_0 + A_1 z + A_2\,\mathrm{Cos}\,2\arccos z + \cdots + A_{m-1}\,\mathrm{Cos}\,(m-1)\arccos z,$$

гдѣ коэффиціенты $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$ не зависятъ отъ z.

Затѣмъ, полагая $x = \mathrm{Cos}\,t$, находимъ

$$\int_{-1}^{+1}\frac{\mathrm{Cos}\,m\arccos x.\,\mathrm{Cos}\,n\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^\pi \mathrm{Cos}\,mt\,\mathrm{Cos}\,nt\,dt = \begin{cases} 0 & \text{при } n \text{ не} = m, \\ \frac{\pi}{2} & \text{при } n = m > 0. \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{+1}\frac{\{A_0 + A_1 x + A_2\,\mathrm{Cos}\,2\arccos x + \ldots + A_{m-1}\,\mathrm{Cos}\,(m-1)\arccos x\}\,\mathrm{Cos}\,m\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 0$$

и отсюда заключаемъ, что для нашего примѣра

$$\omega_m(z) = \frac{1}{2^{m-1}}\,\mathrm{Cos}\,m\arccos z,$$

$$p_1 = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi,\ p_2 = \frac{1}{2},\ \frac{1}{4} = p_3 = p_4 = p_5 = \ldots,\ 0 = q_1 = q_2 = q_3 = \ldots.$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ имѣемъ

$$\psi_1(z) = \pi,\ \psi_2(z) = \pi z = \frac{\pi}{2}\,\frac{\mathrm{Sin}\,2\arccos z}{\mathrm{Sin}\arccos z},$$

$$\psi_3(z) = z\psi_2(z) - \frac{1}{4}\psi_1(z) = \frac{\pi}{2^2}\cdot\frac{\mathrm{Sin}\,3\arccos z}{\mathrm{Sin}\arccos z}$$

и вообще

$$\psi_m(z) = z\psi_{m-1}(z) - \frac{1}{4}\psi_{m-2}(z) = \frac{\pi}{2^{m-1}}\cdot\frac{\mathrm{Sin}\,m\arccos z}{\mathrm{Sin}\arccos z}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{z^2-1}}\,\frac{(z+\sqrt{z^2-1})^m - (z-\sqrt{z^2-1})^m}{2^m}.$$

Такимъ образомъ мы приходимъ не только къ формулѣ (101), но и къ слѣдующей

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(z-x)\sqrt{1-x^2}} = \text{пред.}\left\{\frac{(z+\sqrt{z^2-1})^m - (z-\sqrt{z^2-1})^m}{(z+\sqrt{z^2-1})^m + (z-\sqrt{z^2-1})^m}\,\frac{\pi}{\sqrt{z^2-1}}\right\}_{m=\infty} = \pm\frac{\pi}{\sqrt{z^2-1}}.$$

Здѣсь изъ двухъ знаковъ $\pm$ надо взять верхній $+$ при $z > +1$ и нижній — при $z < -1$, если квадратнымъ корнямъ

$$\sqrt{1-x^2} \text{ и } \sqrt{z^2-1}$$

придаемъ положительныя значенія.

При

$$-1 < z < +1$$

послѣдняя формула теряетъ смыслъ, равно какъ и (101).

Примѣръ 2.

Въ формулахъ (90), (91) и (92) положимъ

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ c = -1,\ \partial = +1.$$

Тогда согласно результатамъ предыдущаго примѣра

$$\omega_m(z) = \frac{1}{2^{m-1}}\,\mathrm{Cos}\,m\arccos z,\quad \alpha_m = \frac{-\omega_m(c)}{\omega_{m-1}(c)} = \frac{1}{2},\ \alpha'_m = \frac{-\omega_m(\partial)}{\omega_{m-1}(\partial)} = -\frac{1}{2}$$

$$\psi_m(z) = \frac{\pi}{2^{m-1}}\,\frac{\mathrm{Sin}\,m\arccos z}{\mathrm{Sin}\arccos z} = \frac{\pi}{m}\,\omega'_m(z),\ \frac{\psi_m(z)}{\omega'_m(z)} = \frac{\pi}{m},$$

$$\omega_m(z) + \alpha_m\,\omega_{m-1}(z) = \frac{\mathrm{Cos}\,m\arccos z + \mathrm{Cos}\,(m-1)\arccos z}{2^{m-1}},$$

$$\omega_m(z) + \alpha'_m\,\omega_{m-1}(z) = \frac{\mathrm{Cos}\,m\arccos z - \mathrm{Cos}\,(m-1)\arccos z}{2^{m-1}},$$

$$\frac{\psi_m(z) + \alpha_m\,\psi_{m-1}(z)}{\omega'_m(z) + \alpha_m\,\omega'_{m-1}(z)} = \pi\,\frac{\mathrm{Sin}\,m\arccos z + \mathrm{Sin}\,(m-1)\arccos z}{m\,\mathrm{Sin}\,m\arccos z + (m-1)\,\mathrm{Sin}\,(m-1)\arccos z},$$

$$\frac{\psi_m(z) + \alpha'_m\,\omega'_{m-1}(z)}{\omega'_m(z) + \alpha'_m\,\omega'_{m-1}(z)} = \pi\,\frac{\mathrm{Sin}\,m\arccos z - \mathrm{Sin}\,(m-1)\arccos z}{m\,\mathrm{Sin}\,m\arccos z - (m-1)\,\mathrm{Sin}\,(m-1)\arccos z},$$

$$\int_c^\partial g(x)\,\{\omega_m(x)\}^2\,dx = \frac{1}{2^{2m-2}}\int_0^\pi \{\mathrm{Cos}\,m\,t\}^2\,dt = \frac{\pi}{2^{2m-1}},$$

$$\int_c^\partial \{\omega_m(x) + \alpha_m\,\omega_{m-1}(x)\}^2\,\frac{g(x)\,dx}{x-c} = \frac{1}{2^{2m-3}}\int_0^\pi \left\{\mathrm{Cos}\left(m-\frac{1}{2}\right)t\right\}^2 dt = \frac{\pi}{2^{2m-2}},$$

$$\int_c^\partial \{\omega_m(x) + \alpha'_m\,\omega_{m-1}(x)\}^2\,\frac{g(x)\,dx}{x-\partial} = \frac{-1}{2^{2m-3}}\int_0^\pi \left\{\mathrm{Sin}\left(m-\frac{1}{2}\right)t\right\}^2 dt = \frac{-\pi}{2^{2m-2}}.$$

Соотвѣтственно этому формулы (90), (91) и (92) даютъ

$$\int_{-1}^{+1} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{m}\left\{f\left(\mathrm{Cos}\,\frac{\pi}{2m}\right) + f\left(\mathrm{Cos}\,\frac{3\pi}{2m}\right) + \cdots + f\left(\mathrm{Cos}\,\frac{(2m-1)\pi}{2m}\right)\right\}$$

$$+ \frac{f^{2m}(\zeta)}{1.2\ldots 2m}\cdot\frac{\pi}{2^{2m-1}},$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2m-1}\left\{\begin{matrix} 2f\left(\mathrm{Cos}\,\frac{\pi}{2m-1}\right) + 2f\left(\mathrm{Cos}\,\frac{3\pi}{2m-1}\right) \\ \ldots + 2f\left(\mathrm{Cos}\,\frac{(2m-3)\pi}{2m-1}\right) + f(-1) \end{matrix}\right\} + \frac{f^{2m-1}(\eta)}{1.2\ldots(2m-1)}\,\frac{\pi}{2^{2m-2}},$$

$$\int_{+1}^{-1} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2m-1}\left\{\begin{matrix} f(1) + 2f\left(\mathrm{Cos}\,\frac{2\pi}{2m-1}\right) + \\ 2f\left(\mathrm{Cos}\,\frac{4\pi}{2m-1}\right) \ldots + 2f\left(\mathrm{Cos}\,\frac{2m\pi}{2m-1}\right) \end{matrix}\right\} - \frac{f^{2m-1}(\eta)}{1.2\ldots(2m-1)}\,\frac{\pi}{2^{2m-2}},$$

гдѣ ξ, η, ζ нѣкоторыя среднія числа между -1 и $+1$.

Обращая затѣмъ вниманіе на функцію

$$\begin{vmatrix} \omega_m(z), & \omega_m(c), & \omega_m(\partial) \\ \omega_{m-1}(z), & \omega_{m-1}(c), & \omega_{m-1}(\partial) \\ \omega_{m-2}(z), & \omega_{m-2}(c), & \omega_{m-2}(\partial) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \omega_{m-1}(c), & \omega_{m-1}(\partial) \\ \omega_{m-2}(c), & \omega_{m-2}(\partial) \end{vmatrix},$$

которая указана въ концѣ § 19 и при

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad c = -1, \quad \partial = +1$$

равна

$$\frac{\operatorname{Cos} m \arccos z - \operatorname{Cos}(m-2)\arccos z}{2^{m-1}}$$

выводимъ еще одну формулу

$$\int_{-1}^{+1} \frac{f(x)dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2m-2}\left\{ f(1) + 2f\left(\operatorname{Cos}\frac{\pi}{m-1}\right) + 2f\left(\operatorname{Cos}\frac{2\pi}{m-1}\right) + \ldots + 2f\left(\operatorname{Cos}\frac{(m-2)\pi}{m-1}\right) + f(-1)\right\} - \frac{f^{2m-2}(\theta)}{1.2\ldots(2m-2)} \cdot \frac{\pi}{2^{2m-3}}.$$

Здѣсь θ также означаетъ нѣкоторое среднее число между -1 и $+1$.

Примѣняя эти формулы къ интеграламъ

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{\operatorname{Log}(11+x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = r \quad \text{и} \quad \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{dx}{\operatorname{Log}(11+x)} = \rho$$

получаемъ

$$\operatorname{Log}\left(11 + \operatorname{Cos}\frac{\pi}{4}\right) < 1{,}0684496 \qquad \frac{1}{\operatorname{Log}\left(11+\operatorname{Cos}\frac{\pi}{4}\right)} > 0{,}935935$$

$$\operatorname{Log}\left(11 + \operatorname{Cos}\frac{3\pi}{4}\right) < 1{,}0125375 \qquad \frac{1}{\operatorname{Log}\left(11+\operatorname{Cos}\frac{3\pi}{4}\right)} > 0{,}987617$$

$$2{,}0809871 \qquad\qquad 1{,}923552$$

$$r < 1{,}0404936 \text{ *)} \qquad \rho > 0{,}961776$$

*) Разность $r - \frac{1}{2}\left\{\operatorname{Log}\left(11+\operatorname{Cos}\frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{Log}\left(11+\operatorname{Cos}\frac{3\pi}{4}\right)\right\}$

заключается между $\frac{-\operatorname{Log} e}{32.10^4}$ и $\frac{-\operatorname{Log} e}{32.12^4}$.

$$\frac{1}{2}\operatorname{Log} 10 = 0{,}5 \qquad \frac{1}{2\operatorname{Log} 10} = 0{,}5$$

$$\operatorname{Log} 11 > 1{,}0413926 \qquad \frac{1}{\operatorname{Log} 11} < 0{,}960253$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{Log} 12 > 0{,}5395906 \qquad \frac{1}{2\operatorname{Log} 12} < 0{,}463315$$

$$2{,}0809832 \qquad\qquad 1{,}923568$$

$$r > 1{,}0404916 \qquad \rho < 0{,}961784$$

$$2\operatorname{Log}\left(11+\operatorname{Cos}\frac{\pi}{5}\right) > 2{,}14442749 \qquad \frac{2}{\operatorname{Log}\left(11+\operatorname{Cos}\frac{\pi}{5}\right)} < 1{,}8652998$$

$$2\operatorname{Log}\left(11+\operatorname{Cos}\frac{3\pi}{5}\right) > 2{,}05803527 \qquad \frac{2}{\operatorname{Log}\left(11+\operatorname{Cos}\frac{3\pi}{5}\right)} < 1{,}9436013$$

$$\operatorname{Log} 10 = 1 \qquad \frac{1}{\operatorname{Log} 10} = 1$$

$$5{,}20246276 \qquad\qquad 4{,}8089011$$

$$r > 1{,}04049255 \qquad \rho < 0{,}9617803$$

$$\operatorname{Log} 12 < 1{,}07918125 \qquad \frac{1}{\operatorname{Log} 12} > 0{,}9266284$$

$$2\operatorname{Log}\left(11+\operatorname{Cos}\frac{2\pi}{5}\right) < 2{,}10684972 \qquad \frac{2}{\operatorname{Log}\left(11+\operatorname{Cos}\frac{2\pi}{5}\right)} > 1{,}8985692$$

$$2\operatorname{Log}\left(11+\operatorname{Cos}\frac{4\pi}{5}\right) < 2{,}01643216 \qquad \frac{1}{\operatorname{Log}\left(11+\operatorname{Cos}\frac{4\pi}{5}\right)} > 1{,}9837017$$

$$5{,}20246313 \qquad\qquad 4{,}8088993$$

$$r < 1{,}04049263 \qquad \rho > 0{,}9617798$$

При помощи тѣхъ же формулъ находимъ

$$r = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{\operatorname{Log}(11+x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \text{пред.}\left\{\frac{1}{m}\operatorname{Log}\frac{\operatorname{Cos} m \arccos 11}{2^{m-1}}\right\}_{m=\infty}$$

$$= \text{пред.}\left\{\frac{1}{m}\operatorname{Log}\frac{(11+\sqrt{120})^m + (11-\sqrt{120})^m}{2^m}\right\}_{m=\infty}$$

$$= \operatorname{Log}\frac{11+\sqrt{120}}{2} = 1{,}04049258877\ldots.$$

Примѣръ 3.

Разсмотримъ тотъ случай формулы (100), когда

$$c=0,\ \partial=+\infty,\ g(x)=e^{-x}$$

Въ этомъ случаѣ

$$\omega_m(z)=(-1)^m e^z \frac{d^m e^{-z} z^m}{dz^m}=z^m-\frac{m^2}{1}z^{m-1}+\frac{m^2(m-1)^2}{1.2}z^{m-2}-\ldots,$$

такъ какъ

$$\int_0^\infty \frac{d^m e^{-x}x^m}{dx^m}\varphi(x)dx=(-1)^m\int_0^\infty e^{-x}x^m\frac{d^m\varphi(x)}{dx^m}dx=0$$

для всякой цѣлой функціи $\varphi(x)$, степень которой меньше m.

Вмѣстѣ съ тѣмъ имѣемъ

$$\int_0^\infty e^x\frac{d^m e^{-x}x^m}{dx^m}\,\frac{d^m e^{-x}x^m}{dx^m}dx=(-1)^m\int_0^\infty e^{-x}x^m\frac{d^m}{dx^m}\left\{e^x\,\frac{d^m e^{-x}x^m}{dx^m}\right\}dx$$

$$=1.2\ldots m\int_0^\infty e^{-x}x^m dx=\left\{1.2\ldots m\right\}^2,$$

$$\int_0^\infty e^x x\frac{d^m e^{-x}x^m}{dx^m}\cdot\frac{d^m e^{-x}x^m}{dx^m}dx=1.2\ldots m\int_0^\infty e^{-x}\left\{(m+1)x^{m+1}-m^2x^m\right\}dx$$

$$=(2m+1)\left\{1.2\ldots m\right\}^2.$$

Обращаясь затѣмъ къ формуламъ (100) находимъ

$$p_1=\int_0^\infty e^{-x}dx=1,\ p_2=1,\ p_3=2^2,\ p_4=3^2,\ldots,\ p_{m+1}=m^2,\ldots$$

$$q_1=-1,\ q_2=-3,\ q_3=-5,\ldots,\ q_{m+1}=-2m-1,\ldots.$$

Съ другой стороны извѣстно, что рядъ

$$1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{7},\ldots,\ \frac{1}{2m+1},\ldots.$$

расходящійся.

Слѣдовательно по доказанному въ § 21

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{z-x}dx=\cfrac{1}{z-1-\cfrac{1}{z-3-\cfrac{2^2}{z-5-\cfrac{3^2}{z-7-\cfrac{4^2}{z-9-\ldots}}}}} \tag{102}$$

при всякомъ отрицательномъ значеніи z.

Литература.

Mehler. Bemerkungen zur Theorie der mechanischen Quadraturen (Crelle's Journal LXIII).

Tchebychef. Sur les quadratures (Journal de Liouville, 1874).

Possé. Sur les quadratures (Nouvelles Annales, 1875).

Radau. Etude sur les formules d'approximation qui servent à calculer la valeur numérique d'une intégrale définie (Journal de Liouville, 1880).

Марковъ. О нѣкоторыхъ приложеніяхъ алгебраическихъ непрерывныхъ дробей.

Stieltjes. Quelques recherches sur la théorie des quadratures dites mécaniques (Annales de l'Ecole Normale, 1884).

Марковъ. Доказательство сходимости многихъ непрерывныхъ дробей (Сообщенія Харьковскаго мат. общества, 1885).

Possé. Sur quelques applications des fractions continues algébriques.

Сонинъ. О приближенныхъ вычисленіяхъ опредѣленныхъ интеграловъ.