ФИЛИАЛ МГУ имени М. В. ЛОМОНОСОВА в городе БАКУ

ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

КУРСОВАЯ РАБОТА

«О поведении на бесконечности решений в полосе»

студента III курса группы № 217

Каляева Тимура Джанбулатовича

Научный руководитель:

д.ф.-м.н, профессор

Чечкин Григорий Александрович

Баку — 2020

Оглавление

Введение

Густые каскадные соединения являются моделями во многих областях как естественных, так и прикладных наук, например нанотехнологий, микротехники, современной инженерии (микрорадиаторы), многих физических и биологических систем.

Колебательные системы с концентрированными массами, имеющими диаметр порядка $\mathcal{O}(\varepsilon)$, изучаются достаточно давно. Экспериментально установлено, что наличие масс ведет к изменению главных частот колебаний и локализации колебаний в окрестности концентрированных масс.

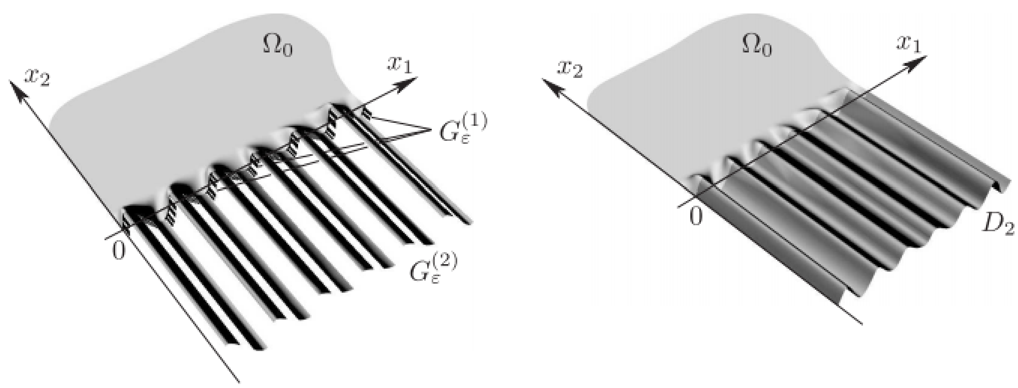

Рис.1 Густые каскадные соединения.

В процессе изучения колебаний густых каскадных соединений возникает задача о нахождении коэффиентов уравнения. Каждый коэффицент является решением некой краевой задачи Неймана, при этом не каждое решение имеет ограниченое решение на области. В этой работе мы рассматриваем одну из таких краевых задач. Мы докажем лемму, в которой доказывается условие разрешимости краевой задачи, приведем поставленную задачу к разрешимому случаю и найдем решение, а также его асимптотики.

В главе 1 рассматривается постановка задачи. Была определена область $\Pi = \Pi^- \cup \Pi^+ \cup \Pi_{l_1}$. Для этой области исследуем краевую задачу (1) и вводим теорему 1 определяющую решение задачи (1) с данными ассимптотиками. Теорема будет доказана в главе 3.

В главе 2 изучается условие разрешимости, доказанное в лемме (1), а также свойства решений, описанные в замечаниях (1) и (2).

В главе 3 доказывается теорема 1, определяющая разрешимость поставленной задачи (1). Её доказательство вытекает из леммы (1), сформулированной и доказанной в главе 2. Проведя некоторые рассуждения, мы получаем, что решение задачи существует когда $\mu = \frac{4h_1 l_1 \lambda_0}{h_2}$, и полученное решение определено с точностью до константы, а также симметрично по η_1 относительно $\frac{1}{2}$.

1. Постановка задачи

Пусть a, b_1, b_2, h_1, h_2 - положительные действительные числа такие, что:

$$0 < b_1 < b_2 < \frac{1}{2}, \quad 0 < b_1 - \frac{h_1}{2}, \quad b_1 + \frac{h_1}{2} < b_2 - \frac{h_1}{2}, \quad b_2 + \frac{h_1}{2} < \frac{1}{2} - \frac{h_2}{2}.$$

Эти неравенства означают,что интервалы

$$\begin{gathered}\left(b_1 - \tfrac{h_1}{2}, b_1 + \tfrac{h_1}{2}\right), \quad \left(b_2 - \tfrac{h_1}{2}, b_2 + \tfrac{h_1}{2}\right), \quad \left(\tfrac{1-h_2}{2}, \tfrac{1+h_2}{2}\right) \\ \left(1 - b_2 - \tfrac{h_1}{2}, 1 - b_2 + \tfrac{h_1}{2}\right), \quad \left(1 - b_1 - \tfrac{h_1}{2}, 1 - b_1 + \tfrac{h_1}{2}\right)\end{gathered}$$

содержатся в (0,1) и не пересекаются.

Рассмотрим область:

$$\Pi = \Pi^- \cup \Pi^+ \cup \Pi_{l_1}.$$

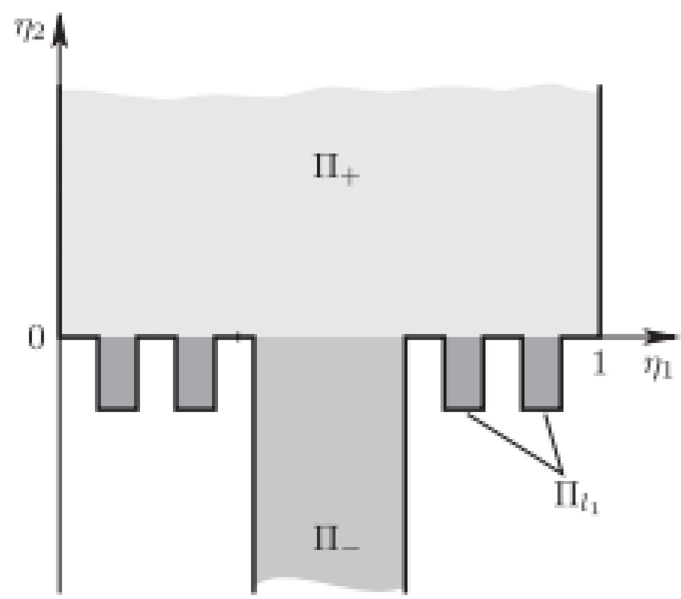

Рис.1 Ячейка периодичности.

Здесь:

$$\Pi^+ = (0, 1) \times (0, +\infty),$$

$$\Pi^- = \left(\frac{1}{2} - \frac{h_2}{2}, \frac{1}{2} + \frac{h_2}{2}\right) \times (-\infty, 0],$$

$$\Pi_{l_1} := \bigcup_{k=1}^{4} \bar{\Pi}_k,$$

$$\Pi_k = \left(d_k - \frac{h_1}{2}, d_k + \frac{h_1}{2}\right) \times (-l_1, 0]\,,$$

где $d_1 = b_1$, $d_2 = b_2$, $d_3 = 1 - b_2$, $d_4 = 1 - b_1$.

Рассмотрим следующую краевую задачу на этой области:

$$\begin{cases} -\Delta_\eta Z_1^{(0)}(\eta) = \begin{cases} 0, & \eta \in \Pi^+ \cup \Pi^-, \\ \lambda_0, & \eta \in \Pi_{l_1}, \end{cases} & \\ \partial_{\eta_1} Z_1^{(0)}(\eta) = 0, & \eta \in \partial\Pi_{\parallel}, \\ \partial_{\eta_1}^s Z_1^{(0)}\left(0, \eta_2\right) = \partial_{\eta_1}^s Z_1^{(0)}\left(1, \eta_2\right), & \eta_2 > 0, \quad s = 0, 1, \\ \partial_{\eta_2} Z_1^{(0)}\left(\eta_1, 0\right) = 0, & (\eta_1, 0) \in \partial\Pi, \\ \partial_{\eta_2} Z_1^{(0)}\left(\eta_1, -l_1\right) = 0, & (\eta_1, -l_1) \in \partial\Pi. \end{cases} \tag{1}$$

Теорема 1. *Существует решение* $Z_1^{(0)} \in H^1_{\mathrm{loc},\eta_2}(\Pi)$ *задачи (1) со следующими асимптотиками:*

$$Z_1^{(0)}(\eta) = \begin{cases} C_1^{(0)} + \mathcal{O}\left(\exp\left(-2\pi\eta_2\right)\right), & \eta_2 \to +\infty, \\ \frac{4h_1 l_1 \lambda_0}{h_2}\eta_2 - \frac{C_1^{(0)}}{h_2} + \mathcal{O}\left(\exp\left(\pi h_2^{-1}\eta_2\right)\right), & \eta_2 \to -\infty. \end{cases} \tag{2}$$

Более того, функция $Z_1^{(0)}$ *является четной по* η_1 *относительно* $\frac{1}{2}$.

2. Вспомогательные утверждения

Изучим некоторые свойства следующей краевой задачи

$$\begin{cases} -\Delta_\eta Z(\eta) = F(\eta), & \eta \in \Pi, \\ \partial_{\eta_1} Z(\eta) = B(\eta), & \eta \in \partial\Pi_\parallel, \eta_2 < 0, \\ \partial_{\eta_2} Z\left(\eta_1, 0\right) = 0, & (\eta_1, 0) \in \partial\Pi, \\ \partial^k_{\eta_1} Z(\eta)\big|_{\eta_1=0} = \partial^k_{\eta_1} Z(\eta)\big|_{\eta_1=1}, & \eta_2 > 0; k = 0, 1. \end{cases} \tag{3}$$

Для начала изучим разрешимость этой задачи. Пусть $\widehat{C}^\infty_0(\bar{\Pi})$ пространтво бесконечно дифференцируемых функций в $\bar{\Pi}$, которые удовлетворяют периодическим условиям $\partial^k_{\eta_1} Z(\eta)\big|_{\eta_1=0} = \partial^k_{\eta_1} Z(\eta)\big|_{\eta_1=1}$, $\eta_2 > 0$; $k = 0, 1$ и ограничены по η_2:

$$\forall v \in \widehat{C}^\infty_0(\bar{\Pi})\ \exists R > 0\ \forall \eta \in \bar{\Pi}\ |\eta_2| \geq R: \quad v(\eta) = 0.$$

Пусть $\mathcal{H}$ будет замыканием пространства $\widehat{C}^\infty_0(\bar{\Pi})$ по норме

$$\|u\|_{\mathcal{H}} = \left(\|\nabla_\eta u\|^2_{L_2(\Pi)} + \|\rho u\|^2_{L_2(\Pi)}\right)^{\frac{1}{2}},$$

где $\rho\left(\eta_3\right) = \frac{1}{1+|\eta_2|}$ $\quad(\eta_2 \in \mathbb{R})$. Будем называть функцию Z обощенным решением задачи (3), если для любой функции $v \in \mathcal{H}$ выполняется интегральное равенство

$$\int_\Pi \nabla_\eta Z \cdot \nabla_\eta v d\eta = \int_\Pi F v d\eta + \int_{\partial\Pi_\parallel} B v d\eta.$$

Лемма 1. *Пусть* $\frac{1}{\rho}F \in L_2(\Pi)$ *и* $\frac{1}{\rho}B \in L_2\left(\partial\Pi_\parallel\right)$, *и пусть*

$$\int_\Pi F(\eta) d\eta + \int_{\partial\Pi_\parallel} B(\eta) d\sigma_\eta = 0. \tag{4}$$

Тогда существует решение $Z \in \mathcal{H}$ *задачи (3), которое определено с точностью до константы.*

Доказательство. Перепишем уравнение (4) в виде

$$\langle Z, v\rangle - \int_{\Pi_{-2,2}} Zv d\eta = \int_{\Pi} Fv d\eta + \int_{\partial\Pi_{\parallel}} Bv d\eta, \tag{5}$$

где

$$\Pi_{\alpha,\beta} = \{\eta \in \Pi : \alpha < \eta_2 < \beta\}$$

и

$$\langle u, v\rangle = \int_{\Pi} \nabla_\eta u \cdot \nabla_\eta v d\eta + \int_{\Pi_{-2,2}} uv d\eta. \tag{6}$$

Тогда новое скалярное произедение (6) порождает эквивалентную норму в $\mathcal{H}$. Очевидно, что $\langle u, u\rangle \leq c_1 \|u\|^2_{\mathcal{H}} \quad (u \in \mathcal{H})$. Обратное неравенство с другой константой вытекает из неравенства Харди

$$\int_0^{+\infty} \frac{\phi^2(\eta_2)}{(1+\eta_2)^2} d\eta_2 \leq 4 \int_0^{+\infty} |\partial_{\eta_2}\phi|^2 d\eta_2 \quad \big(\phi \in C^1([0,+\infty)) \quad \text{with} \quad \phi(0) = 0\big)$$

и неравенства

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_{\Pi} \rho^2(\eta_2)\, u^2(\eta) d\eta \\ &\quad \leq \textstyle\int_{\Pi_{-2,2}} \rho^2 u^2 d\eta + \int_{\Pi} \rho^2 \left((1-\chi(\eta_2))\, u\right)^2 d\eta \\ &\quad \leq \textstyle\int_{\Pi_{-2,2}} \rho^2 u^2 d\eta + c_\chi \left(\int_{\Pi} (\partial_{\eta_2} u)^2 d\eta + \int_{\Pi_{-2,2}} (\chi'(\eta_2)\, u)^2 d\eta\right) \\ &\quad \leq c_2 \langle u, u\rangle, \end{aligned} \tag{7}$$

где $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$, $0 \leq \chi \leq 1$ и

$$\chi(\eta_2) = \begin{cases} 1 & \text{if } |\eta_2| \leq 1 \\ 0 & \text{if } |\eta_2| \geq 2. \end{cases} \tag{8}$$

В силу условий леммы (1), неравенства (7) и неравенства

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Pi_{\|}} \rho^2(\eta_2)\, v^2(\eta) d\sigma_\eta &\leq \int_{-\infty}^{0} \rho(\eta_2) \int_{\partial\omega} v^2 d\sigma_{\eta_1} d\eta_2 \\ &\leq c \int_{\Pi} \left(|\nabla_\eta v|^2 + \rho(\eta_2)\, v^2\right) d\eta\end{aligned} \qquad (v \in \mathcal{H}) \tag{9}$$

правая сторона уравнения (5) определяет линейный непрерывный функционал из $\mathcal{H}$. Так как вложение $\mathcal{H} \subset L_2(\Pi_{-2,2})$ компактно, существует самосопряженный положительный компктный оператор $\mathcal{A} : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ такой, что

$$\langle \mathcal{A}u, v\rangle = \int_{\Pi_{-2,2}} u(\eta)v(\eta)d\eta \quad (\{u, v\} \in \mathcal{H}.$$

Таким образом, мы можем переписать выражение (5) в виде

$$Z - \mathcal{A}Z = f$$

и применить к нему теоремы Фредгольма. Очевидно, что все решения однородной задачи (3) является константами (интеграл Дирихле тривиален). Таким образом, получаем, что равенство (4) является условием разрешимости задачи (3).

$\square$

Замечание 1. *Пусть* $\exp(\delta_0 |\eta_2|) F \in L_2(\Pi)$ *и* $\exp(-\delta_0\eta_2) B \in L_2\left(\partial\Pi_{\|}\right) (\delta_0 > 0)$. *Учитывая характеристики решений эллептических задач в полупрямоугольниках мы можем подобрать решение задачи* $\widetilde{Z}$ *такое, что*

$$\exp(-\delta_1\eta_2)\, \widetilde{Z} \in H^1\left(\Pi^-\right),$$

где δ_1 *это случайное число, которое удовлетворяет неравенствам* $0 < \delta_1 < \delta_0$ *и*

$\delta_1 < \sqrt{\Lambda(\omega)}$. *Тут* $\Lambda(\omega)$ *это первое положительное собственное значение задачи Неймана на* $\omega = \left(\frac{1}{2} - \frac{h_2}{2}, \frac{1}{2} + \frac{h_2}{2}\right)$. *Очевидно, что решение* $\widetilde{Z}$ *имеет следующие асимптотики на полупрямоугольнике* Π^+*:*

$$\tilde{Z}(\eta) = C + O\left(\exp\left(-\delta_2 \eta_2\right)\right) \quad \left(\eta_2 \to +\infty\right). \tag{10}$$

Замечание 2. *Если функции* F *и* B *из замечания (1) четные или нечетные по переменной* η_1 *относительно* $\frac{1}{2}$, *то и решение* $\widetilde{Z}$ *имеет ту же симметрию. Например, если*

$$F\left(\eta_1, \eta_2\right) = F\left(1 - \eta_1, \eta_2\right) \quad \text{и} \quad B\left(\eta_1, \eta_2\right) = B\left(1 - \eta_1, \eta_2\right),$$

то в силу симметрии $\left(\frac{1}{2} - \frac{h_2}{2}, \frac{1}{2} + \frac{h_2}{2}\right)$ *и использования замены* $\eta_1 = 1 - \eta_1'$ *в задаче (3) мы получаем, что разность* $\tilde{Z}\left(\eta_1, \eta_2\right) - \widetilde{Z}\left(1 - \eta_1, \eta_2\right)$ *является решением однородной задачи (3) и представление (10) удовлетворяет ему. В силу единственности такого решения разность зануляется.*

3. Доказательство теоремы

Доказательство. Покажем, что исходная задача (1) не удовлетворяет условию разрешимости и, следовательно, не имеет ограниченного решения на области П:

$$\int_{\Pi_{l_1}} \lambda_0 d\eta = 4h_1 l_1 \lambda_0 \neq 0.$$

Тогда будем искать решение для задачи (1) в виде

$$Z_1^{(0)}(\eta) = \mu \eta_2 \chi_-(\eta_2) + \widetilde{Z}_1^{(0)}(\eta), \quad \eta \in \Pi,$$

где $\chi_-(\eta_2)$ это сглаживающий оператор, такой что $0 \leq \chi_-(\eta_2) \leq 1$; он равен 0, если $\eta_2 \geq -1$ и равен 1, если $\eta_2 \leq -2$. Легко видеть, что $\widetilde{Z}_1^{(0)}(\eta)$ удовлетворяет следующей краевой задаче:

$$\begin{cases} -\Delta_\eta \widetilde{Z}_1^{(0)}(\eta) = \begin{cases} 0, & \eta \in \Pi^+, \\ \mu\left(\eta_2 \chi''_-(\eta_2) + 2\chi'_-(\eta_2)\right), & \eta \in \Pi^-, \\ \lambda_0, & \eta \in \Pi_{l_1}, \end{cases} \\ \partial^s_{\eta_1} \tilde{Z}_1^{(0)}(0, \eta_2) = \partial^s_{\eta_1} \tilde{Z}_1^{(0)}(1, \eta_2), & \eta_2 > 0, \quad s = 0, 1, \\ \partial_{\eta_2} \widetilde{Z}_1^{(0)}(\eta_1, 0) = 0, & (\eta_1, 0) \in \partial\Pi, \\ \partial_{\eta_1} \widetilde{Z}_1^{(0)}(\eta) = 0, & \eta \in \partial\Pi_{\|}, \eta_2 < 0, \\ \partial_{\eta_2} \widetilde{Z}_1^{(0)}(\eta_1, -l_1) = 0, & (\eta_1, -l_1) \in \partial\Pi. \end{cases} \tag{11}$$

Из докзанной ранее леммы (1) в главе 2 следует, что существует решение задачи (3) тогда и только тогда, когда

$$\int_{\Pi^-} \mu\left(\eta_2 \chi''_-(\eta_2) + 2\chi'_-(\eta_2)\right) d\eta + \int_{\Pi_{l_1}} \lambda_0 d\eta = 0,$$

и тогда

$$\mu = \frac{-\int_{\Pi_{l_1}} \lambda_0 d\eta}{\int_{\Pi^-} \eta_2 \chi''_-(\eta_2) + 2\chi'_-(\eta_2)\, d\eta} = \frac{4h_1 l_1 \lambda_0}{h_2}.$$

Более того, это решение определено с точностью до константы. Подбирая должным образом эту константу (по замечанию (1)), получаем асимптотики (2).

Так как правая часть уравнения и краевых условий задачи (11) четные по переменной η_1 относительно $\frac{1}{2}$, решение $\widetilde{Z}_1^{(0)}$ также будет иметь ту же четность в силу замечания (2). $\square$

Заключение

В данной работе была рассмотрена краевая задача Неймана для ячейки переодичности густого каскадного соединения. Для получения решения поставленной задачи (1), была сформулирована теорма 1, доказательство которой было главной целью данной задачи. Мы ввели вспогательные утверждения и лемму (1), из которых и следовало доказательство нашей главной теоремы, показанное в главе 3.

Литература

[1] *T.A. Mel'nyk* Homogenization of the Poisson equation in a thick periodic junction, Zeitsch. Anal. Anwend. 18(4)(1999), pp. $953-975$.

[2] *G.A. Chechkin, T.A. Mel'nyk* "Asymptotics of eigenelements to spectral problem in thick cascade junction with concentrated masses Appl. Anal., $\mathbf{91}:\mathbf{6}(2012)$ $1055-1095$.