

Практические задачи, серия 1, версия 2.0

В задачах А1 и А4 процесс $S(t)$ — это геометрическое броуновское движение на отрезке $[0, T]$ с параметрами $r > 0, \sigma > 0, S(0) = 1$. В графиках задач А2 и А3 число $e^{-r(T-t)}K$ должно находиться около середины отрезка, из которого берется x . Функция $c(t, x)$ (или $c(t, S(t))$) обозначает цену европейского колл опциона, посчитанного по формуле Блэка-Шоулза-Мертона.

А1. Смоделировать процесс $S(t)$. Проверить экспериментально формулу для математического ожидания $MS(T)$. Увидеть зависимость скорости сходимости к математическому ожиданию от σ (т.е. зафиксировать число случайных траекторий N , увеличивать σ и следить за отклонением среднего от $MS(T)$).

А2. Нарисовать графики $c(t, x)$ как функции от x при $t = 0, 0.5T, 0.8T, 0.99T$.

А3. Нарисовать графики греческих параметров $\delta, \gamma, \theta, \kappa, vega, \rho$ как функций от x .

А4. Рассмотрите портфель

$$X(t) = c(t, S(t)) - c_x(t, S(t))S(t),$$

где $c_x(t, S(t))$ — частная производная по x . Разделите отрезок $[0, T]$ точками $t_i = \frac{iT}{n}$, смоделируйте процесс $S(t)$ и постройте график портфеля $X(t)$ как функции от t в точках t_i . Постройте в том же окне график $e^{rt}X(0)$ как функции от t .

В1. Найдите значения параметров и переменной x , при которых $p_T(t, x) > 0$, т.е. производная стоимости европейского пута по T больше 0.

В2. Пусть копула $C(x, y)$ задает функцию совместного распределения пары случайных величин η_1 и η_2 , равномерно распределенных на отрезке $[0, 1]$. Вычислите приближенно функцию распределения $F(z)$ для случайной величины $M(\eta_1|\eta_2)$. Протестируйте алгоритм на копулах:

(а) $C(x, y) = xy$,

(б) $C_p(x, y) = p \max(x + y - 1, 0) + (1 - p) \min(x, y)$, где $0 \leq p \leq 1$.

В3. Напишите стратегии статистического арбитража на фьючерсах USD/RUB

(а) типа ревершн

(б) используя сходимость к справедливой цене

(в) используя сходимость цен фьючерсов с разными экспирациями.