1 Метод Ньютона

Линеаризуем систему относительно итерации k:

$$\mathbf{J} \cdot \Delta\mathbf{p} = -\mathbf{F}, \quad \mathbf{p}^{k+1} = \mathbf{p}^k + \Delta\mathbf{p}. \tag{1}$$

В случаях, где время не играет роли p_i^k обозначается p_i

1.1 F – R_{flux}

Для каждого узла i невязка F_i на итерации k рассчитывается как:

$$F_i(p^k) = F_i^{acc}(p^k, p^n) + F_i^{flux}(p^k) - Q_i = 0 \tag{2}$$

- **Временной член (Накопление):** разница массы между текущей итерацией k и завершенным шагом n:

$$F_i^{acc} = \frac{\Omega_i}{\Delta t}\left(c(p_i^k)p_i^k - c(p_i^n)p_i^n\right) \tag{3}$$

  p^n — константа, давление на конец предыдущего временного шага.

- **Пространственный член (Потоки):**

$$F_i^{flux} = \sum_{j \in \mathrm{adj}(i)} T_{ij}(p_i^k - p_j^k) \tag{4}$$

1.2 J – J_{flux}

1.2.1 Внедиагональные элементы ($j \neq i$)

Временной член F_i^{acc} зависит только от давления в самом узле i, поэтому его производная по p_j равна нулю.

$$J_{ij} = \frac{\partial F_i^{flux}}{\partial p_j} = -T_{ij} \tag{5}$$

Узлы i и j должны быть связаны ребром сетки. Если проницаемость K не зависит от давления, эти элементы вычисляются один раз.

1.2.2 Диагональные элементы ($j = i$)

Здесь учитывается изменение накопления в узле и сумма всех исходящих потоков:

$$J_{ii} = \frac{\Omega_i}{\Delta t} \cdot \left.\frac{\partial(c(p)p)}{\partial p}\right|_{p_i^k} + \sum_{j \in \mathrm{adj}(i)} T_{ij} \tag{6}$$

Первое слагаемое обновляется на каждой итерации k.

2 Применение теоремы о дивергенции

Интегрирование исходного уравнения по контрольному объёму V_i:

$$\int_{V_i} \frac{\partial}{\partial t}(c(p)p)dx - \int_{V_i} \nabla \cdot (K\nabla p)dx = \int_{V_i} Q(t)\delta(x - x_S)dx \tag{7}$$

После применения:

$$\int_{V_i} \frac{\partial}{\partial t}\big(c(p)p\big)\, dx - \int_{\partial V_i} K\nabla p \cdot n\, d\Gamma = \int_{V_i} Q(t)\delta(x - x_S)\, dx. \tag{8}$$

3 Аппроксимация давления и вычисление градиента

Давление аппроксимируется линейными базисными функциями. В каждом треугольнике T имеем

$$p_h(x,t) = \sum_{j=1}^{3} p_j(t)\lambda_j(x), \tag{9}$$

Функции λ_j линейны внутри треугольника, поэтому их градиенты постоянны. Следовательно, градиент давления внутри T равен

$$\nabla p_h = \sum_{j=1}^{3} p_j(t)\nabla\lambda_j. \tag{10}$$

4 Преобразование потокового члена внутри треугольника

Подставляя аппроксимацию p_h в потоковый член, рассматриваем вклад одного треугольника T, содержащего узел i.

Как было получено ранее, вклад треугольника T в поток через границу контрольного объёма V_i имеет вид

$$\int_{\partial V_i \cap T} K\nabla p_h \cdot n \, d\Gamma. \tag{11}$$

Для преобразования этого выражения рассмотрим интеграл по площади треугольника

$$\int_T \nabla \cdot (K\nabla p_h \lambda_i)\, dx. \tag{12}$$

Раскрывая дивергенцию произведения, получаем

$$\nabla \cdot (K\nabla p_h \lambda_i) = K\nabla p_h \cdot \nabla\lambda_i + \lambda_i \nabla \cdot (K\nabla p_h). \tag{13}$$

Так как p_h линейна внутри треугольника, градиент ∇p_h постоянен, следовательно

$$\nabla \cdot (K\nabla p_h) = 0. \tag{14}$$

Поэтому

$$\nabla \cdot (K\nabla p_h \lambda_i) = K\nabla p_h \cdot \nabla\lambda_i. \tag{15}$$

Применяя теорему Гаусса к интегралу по T, получаем

$$\int_T K\nabla p_h \cdot \nabla\lambda_i \, dx = \int_{\partial T} K\nabla p_h \lambda_i \cdot n_T \, d\Gamma. \tag{16}$$

Поскольку функция λ_i равна нулю на стороне треугольника, противоположной узлу i, интеграл по границе ∂T сводится к интегралу по той части, которая совпадает с $\partial V_i \cap T$.

Следовательно,

$$\int_{\partial V_i \cap T} K \nabla p_h \cdot n \, d\Gamma = \int_T K \nabla p_h \cdot \nabla \lambda_i \, dx. \tag{17}$$

5 Вычисление локальной проводимости T_{ij}

Подставляя аппроксимацию градиента давления $\nabla p_h = \sum_{j=1}^{3} p_j \nabla \lambda_j$ в полученное выражение для потока:

$$\int_{\partial V_i \cap T} K \nabla p_h \cdot n \, d\Gamma = \sum_{j=1}^{3} p_j \left(K \int_T \nabla \lambda_j \cdot \nabla \lambda_i \, dx \right) \tag{18}$$

Коэффициент связи между узлами i и j внутри треугольника T (локальная проводимость) определяется как:

$$T_{ij}^{T} = K \cdot |T| \cdot (\nabla \lambda_i \cdot \nabla \lambda_j) \tag{19}$$

Градиенты функций формы $\nabla \lambda$ для вершин i, j, k выводятся из условия линейности базисных функций внутри элемента. Мы ищем плоскость вида $\lambda_i(x, y) = a_i x + b_i y + c_i$, удовлетворяющую трем условиям:

- $\lambda_i(x_i, y_i) = 1$
- $\lambda_i(x_j, y_j) = 0$
- $\lambda_i(x_k, y_k) = 0$

Аналитическое решение этой системы.

$$\nabla \lambda_i = \frac{1}{2|T|} \begin{pmatrix} y_j - y_k \\ x_k - x_j \end{pmatrix}, \quad \nabla \lambda_j = \frac{1}{2|T|} \begin{pmatrix} y_k - y_i \\ x_i - x_k \end{pmatrix}, \quad \nabla \lambda_k = \frac{1}{2|T|} \begin{pmatrix} y_i - y_j \\ x_j - x_i \end{pmatrix} \tag{20}$$