ДЗ доп. главы матлогики от 13.09.2021

Тимур Шангареев

23 сентября 2021 г.

Аннотация

Your abstract.

1 Задача 1

1.1 Вопрос 1

A)

$\phi \vDash \xi$ по определению: $\forall$интерпретация M, т.ч $: M \vDash \phi,$ будет верно $M \vDash \xi$

B)

$\vDash \phi \to \xi$ равносильно $\forall M[\neg\phi \vee \xi] = max(1 - M[\phi], M[\xi]) = 1$

Докажем "тогда и только тогда"

1.1.1 $A \Rightarrow B$

Если у ϕ есть модель/интерпретация (она выполнима) $M_1[\phi] = 1$, то $M_1[\xi] = 1$ и модель M_1 является моделью $\phi \to \xi$.

Если у ϕ нет модели, то для $\forall$ интерпретации $M_2[\phi] = 0$. Вне зависимости от значения $M_2[\xi]$, $M_2[\phi \to \xi] = 1$ $\Box$

1.1.2 $B \Rightarrow A$

Если вып. B, то $\forall M$ не может быть одновременно, что $M[\phi] = 1, M[\xi] = 0$. (Интуитивно посмотрели на 4 возможных комбинаций значений формул ϕ и ξ в одной интерпретации).

Пусть $M \vDash \phi$, т.е $M[\phi] = 1$. Тогда для истинности в B необходимо и достаточно, чтобы $M[\xi] = 1$, т.е $M \vDash \xi$ $\Box$

1.2 Вопрос 2

A) $\vDash \phi \leftrightarrow \xi$ по определению: $\forall$интерпретация M : $M \vDash ((\phi \wedge \xi) \vee (\neg\phi \wedge \neg\xi))$

Раскрываем далее:

$$M[(\phi \wedge \xi) \vee (\neg\phi \wedge \neg\xi)] =$$
$$max(M[\phi \wedge \xi],\, M[\neg\phi \wedge \neg\xi]) =$$
$$max(min(M[\phi], M[\xi]),\, min(1 - M[\phi], 1 - M[\xi])) = 1$$

B)
$\phi \vDash \xi$ и $\xi \vDash \phi$, т.е $\forall M_1, M_2$ $(M_1[\phi] = 1,\ M_2[\xi] = 1) :\ M_1[\xi] = 1, M_2[\phi] = 1$
Очевидно, что не получится, чтобы один из ϕ, ξ был выполним, а другой нет. Либо оба выполнимы ($\exists$ интерпретация), либо оба не выполнимы.

Докажем "тогда и только тогда"

1.2.1 $A \Rightarrow B$

Пусть $\exists M_1[\phi] = 1$ и $\exists M_2[\xi] = 1$, тогда

$$1 = M_1[\phi \leftrightarrow \xi] = M_1[\xi],$$

$$1 = M_2[\phi \leftrightarrow \xi] = M_2[\phi].$$

Если же $\forall M : M[\phi] = 0 = M[\xi]$, то подставив в A, также получим единицу

$$\square$$

1.2.2 $B \Rightarrow A$

При выполнении B, очевидно, множества моделей формул ϕ, ξ будут совпадать. Точно также подставляя в A, получим, что каждая такая модель является моделью $\phi \leftrightarrow \xi$. Интепретации M, в которых не выполнимы ϕ, ξ подставим в случай A, тогда $M[\phi \leftrightarrow \xi] = 1$ $\square$.

2 Задача 2

2.1 a

$$\neg\neg\varphi \sim \varphi$$

$$\neg\neg\varphi \models \varphi \text{ и } \varphi \models \neg\neg\varphi \quad (*)$$

$$M[\neg\neg\varphi] = 1 - M[\neg\varphi] = 1 - (1 - M[\varphi]) = M[\varphi]$$

Из последней строки очевидно следует, что модели у φ, и $\neg\neg\varphi$ будут совпадать. и будет выполняться вторая строка $(*)$. $\square$

2.2 b

Надо проверить, что $\forall M[\varphi \vee \neg\varphi] = 1$:

$$M[\varphi \vee \neg\varphi] = max(M[\varphi], 1 - M[\varphi])$$

$M[\varphi]$ принимает 2 возможных значения: 1 и 0. Очевидно, какое-бы не подставили в максимум, максимум всегда будет равен 1. $\square$

2.3 c

$\phi \wedge (\psi \vee \eta) \sim (\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \eta)$

Обозначим левую часть как L, правую как R:

$$M[L] = min(M[\phi], max(M[\psi], M[\eta])),$$

$$M[R] = max(min(M[\phi], M[\psi]), min(M[\phi], M[\eta]))$$

$L \sim R : \; L \models R$ и $R \models L$
$M[L] = 1 \Leftrightarrow M[\phi] = 1$ и $max(M[\psi], M[\eta]) = 1$
$M[R] = 1 \Leftrightarrow$ хотя бы один из минимумов равен 1 (минимум равен 1-це, когда оба его аргумента равны 1). Получается, что $M[\phi] = 1$ и $(M[\psi] = 1 \vee M[\eta] = 1)$. Учитывая , что

$$M[M[x] = 1] = M[x], \text{ Это легальный подход?}$$

рассмотрим выполнимость последнего: $M[(M[\psi] = 1 \vee M[\eta] = 1)] = max(M[\psi], M[\eta])$. Выполняется, когда максимум равен 1-це. Получаем одинаковые условия на значения M на формулах, из них равносильные переходы в обе стороны (в $M[L] = 1$ и $M[R] = 1$). $\square$

2.4 d

$\phi \vee (\psi \wedge \eta) \sim (\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \eta)$

Также раскрываем.
$1 = M[L] = max(M[\phi], min(M[\psi], M[\eta]))$.
$1 = M[R] = min(max(M[\phi], M[\psi]), max(M[\phi], M[\eta]))$. Для вып. последнего оба максимума должны быть равны 1-це:

$$max(M[\phi], M[\psi]) = max(M[\phi], M[\eta]) = 1.$$

Отсюда понятно, что $M[\phi] = 1$ или $M[\psi] = M[\eta] = 1$. При таких значениях $M[]$, $M[L] = 1$. В обратную сторону: доказываем обратно (берем значения M на формулах, т.ч. $M[L] = 1$). $\square$

2.5 e

$\phi \vee (\phi \wedge \psi) \sim \phi$
$\phi \models \phi \vee (\phi \wedge \psi) \quad (1)$
$\phi \vee (\phi \wedge \psi) \models \phi \quad (2)$
$M[\phi] = 1 \Rightarrow M[$правая часть (1)$] = max(1, min(1, M[\psi])) = 1 \Rightarrow M -$ общая модель.
$M[\phi \vee (\phi \wedge \psi)] = 1 \Rightarrow max(M[\phi], min(M[\phi], M[\psi])) = 1 \Rightarrow M[\phi] = 1$ иначе если 0, то мин. равен 0, а выражение тоже равно 0. $\square$

2.6 f

$\phi \wedge (\phi \vee \psi) \sim \phi$
$\phi \models \phi \wedge (\phi \vee \psi) \quad (1),$
$\phi \wedge (\phi \vee \psi) \models \phi \quad (2).$
$M[\phi] = 1, \quad min(1, max(1, M[\psi])) = 1.$ (1) д-но.
$min(M[\phi], max(M[\phi], M[\psi])) = 1 \Rightarrow M[\phi] = 1$, (2) д-но
$\square$

2.7 g

$\neg(\phi \wedge \psi) \sim \neg\phi \vee \neg\psi$

$M[L] = 1 - min(M[\phi], M[\psi]) = 1 \Rightarrow min(M[\phi], M[\psi]) = 0 \Rightarrow M[\phi] = 0 \vee M[\psi] = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 - M[\phi] = 1 \vee 1 - M[\psi] = 1 \Rightarrow max(1 - M[\phi], 1 - M[\psi]) = 1 \Rightarrow L \models R$

$R \Rightarrow L$ доказывается теми же преобразованиями в обратную сторону. $\square$

2.8 h

$\neg(\phi \vee \psi) \sim \neg\phi \wedge \neg\psi$

$M[L] = 1 - max(M[\phi], M[\psi]) = 1 \Rightarrow M[\phi] = 0 \wedge M[\psi] = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow M[R] = min(1 - M[\phi], 1 - M[\psi]) = 1 \Rightarrow L \models R$

$1 = M[R] = min(1 - M[\phi], 1 - M[\psi]) \Rightarrow M[\phi] = 0 \wedge M[\psi] = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow max(M[\phi], M[\psi]) = 0 \Rightarrow M[L] = 1 \Rightarrow R \models L$ $\square$.