Билет 48. Восстановление функции двух переменных по ее полному дифференциалу. Пример.

Восстановим функцию двух переменных $z = z(x, y)$ по её полному дифференциалу $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$.

Пусть $P(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x}, P(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y}, \overline{F} = Pi + Qj$.

Выражение $Pdx + Qdy$ является полным дифференциалом функции $u = u(x, y) \Leftrightarrow \Leftrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

Пример. Восстановим функцию по её полному дифференциалу:

$$e^{x-y} \cdot (1 + x + y)dx + e^{x-y} \cdot (1 - x - y)dy$$

$$P(x, y) = e^{x-y} \cdot (1 + x + y)$$

$$Q(x, y) = e^{x-y} \cdot (1 - x - y)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = (e^{x-y} \cdot (1 - x - y))'_x = e^{x-y} \cdot (1 - x - y) - e^{x-y} = -e^{x-y}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = (e^{x-y} \cdot (1 + x + y))'_x = -e^{x-y} \cdot (1 + x + y) + e^{x-y} = -e^{x-y}$$

Поскольку $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, то полный дифференциал функции $u(x, y)$ существует.

$$\exists (x_0; y_0) = (0; 0) u(x, y) = \int\limits_{(x_0;y_0)}^{(x;y)} P(x_0; y_0)dx + Q(x, y)dy = \int\limits_{(0;0)}^{(x;y)} e^{x-0} \cdot (1 + x + 0)dx + e^{x-y} \cdot (1 - x - y)dy =$$

$$= \int\limits_0^x x \cdot e^x dx + \int\limits_0^y e^{x-y} \cdot (1 - x - y)dy = \begin{bmatrix} u = 1 - x - y & du = -dy \\ dv = e^{x-y}dy & v = -e^{x-y} \end{bmatrix} = (x \cdot e^x - e^x)\Big|_0^x +$$

$$+ \left(-(1 - x - y)e^{x-y}\Big|_0^y - \int\limits_0^y e^{x-y}dy \right) = x \cdot e^x - e^x - e^0 - (1 - x - y) \cdot e^{x-y} + (1 + x) \cdot e^x + e^{x-y}\Big|_0^y + C =$$

$$= -1 - (1 - x - y) \cdot e^{x-y} + e^{x-y} - e^x + C = (x + y) \cdot e^{x-y} - e^x + C$$