№26 Экстремумы функций нескольких переменных. Необходимые условия экстремума. Достаточные условия экстремума.

Экстремумы функций нескольких переменных

Определение: Точки локального минимума/максимума называются точками экстремума.
Определение: M_0-точка локального максимума(минимума) функции $u = u(x_1, x_2, ...x_n)$, если существует окрестность ε точки M_0, такая, что $u(M) < u(M_0)$ $(u(M) > u(M_0))$,и все $M \in \varepsilon(M_0)$

Необходимые условия экстремума

Теорема о необходимых условиях экстремума: Если M_0-точка экстремума, то частные производные функции в этой точке равны 0 или не существуют.
Доказательство: Пусть $u = u(x_1, x_2, ...x_n)$; если рассматриваем $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, то все остальные переменные фиксируем(принимаем за $const$), и в точке в точке экстремума производная по этой переменной равно 0 или не существет согласно необходимому условию экстремума фунции одной переменной.
Определение: Точки, в которых все частные производные равны 0 или не существуют, называются критическими(стационарными).

Достаточные условия экстремума

Теорема о достаточных условиях экстремума: Пусть $u = u(x_1, x_2, ...x_n)$ имеет непрерывные частные производные 2-ого порядка, и M_0-критическая точка, тогда $\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0$; $\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0$ и $du = 0$, тогда формула Тейлора в M_0: $u(M) = u(M_0) + \frac{1}{2}d^2u(M_0) + 0(\rho^2)$
Доказательство(правдоподобное рассуждение): Так как остаточный член $(0(\rho^2))$ вносит меньший вклад в прирощение, чем второе слагаемое $(\frac{1}{2}d^2u(M_0))$, то все зависит от второго диффиренциала.

$$\begin{cases} \mathrm{d}^2u(M_0) > 0, \text{ значит } M_0\text{-точка минимума.} \\ \mathrm{d}^2u(M_0) < 0, \text{ значит } M_0\text{-точка максимума.} \\ \mathrm{d}^2u(M_0)\text{-принимает значение разных знаков, значит } M_0\text{-не является точкой экстремума.} \\ \mathrm{d}^2u(M_0) = 0, \text{ то неясно.} \end{cases}$$

Теорема: Пусть $z = z(x, y)$ имеет непрерывные частные производные 2-ого порядка, M_0-критическая. Обозначим $A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2_{|M_0}}$, $B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y_{|M_0}}$, $C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2_{|M_0}}$.

$$D = B^2 - AC, \text{ тогда } \begin{cases} \mathrm{D} > 0, \mathrm{M}_0\text{-не является точкой экстремума.} \\ \mathrm{D} < 0, \mathrm{M}_0\text{-является точкой экстремума.} \\ 1)\mathrm{A} > 0, \mathrm{M}_0\text{-точка минимума.} \\ 2)\mathrm{A} < 0, \mathrm{M}_0\text{-точка максимума.} \end{cases} \qquad D = 0\text{-неясно.}$$