Вопрос 11. Теорема Барроу. Формула Ньютона-Лейбница

Рассмотрим функцию:

$$S(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Теорема Барроу:

Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a;b], то S(x) = f(x)

Доказательство:
$S'(x) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{S(x+\triangle x)-S(x)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\int_a^{x+\triangle x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt}{\triangle x}$ = (по свойству аддитивности) $= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+\triangle x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\int_x^{x+\triangle x} f(t)\,dt}{\triangle x}$ = (по теореме о среднем) $= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(c)\triangle x}{\triangle x}$ (где $c \in [x; x+\triangle x]$) $= \lim_{\triangle x \to 0} f(c) = \lim_{c \to x} f(c) = f(x)$, т. к. f(x) - непрерывная функция.

Следствие:
Функция $S(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ является первообразной для f(x).

Формула Ньютона-Лейбница:

Теорема:
Если f(x) непрерывна на [a;b] и F(x) - первообразная для f(x), то

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Доказательство:
Т. к. $S(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ и F(x) - первообразная для f(x), то $\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C$

При x = a: $\int_a^a f(t)\,dt = 0 = F(a) + C \Rightarrow C = -F(a)$
$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$

При x = b: $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$
Обозначение:
$F(b) - F(a) = F(x)\big|_a^b$