36. Замена переменной в тройном интеграле. Якобиан, его геометрический смысл

Пусть имеется $\iiint_G f(x,y,z))\,dx\,dy\,dz$. Сделаем **взаимооднозначную замену переменных**:

$$\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$$

Якобиан данного преобразования:

$$\mathrm{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Если $J \neq 0 \forall (u,v,w) \in G'$, а также функции x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w) однозначные и имеют непрерывные частные производные по u, v, w, то это преобразование в области G' будет взаимооднозначным. Если в нашем случае это так, то обратное преобразование переводит G' в G. Тогда формула замены будет выглядеть так:

$$\iiint_G f(x,y,z))\,dV = \iiint_{G'} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))\,|J|\,du\,dv\,dw$$

Геометрический смысл якобиана. При взаимооднозначной замене переменных область G (если говорить о множестве точек трехмерного пространоства) переходит в область G'. Из-за этой замены ΔV_i будет соответсвовать измененный $\Delta V'_i$. Поэтому, чтобы скорректировать эти изменения, вводится такое понятие, как якобиан, который равен:

$$J(x_i, y_i, z_i) = \lim_{di \to 0} \frac{\Delta V_i}{\Delta V'_i},$$

то есть отношению объемов в G и G' при стремлении "диаметра" этих объемов к 0. в данной точке (это определение верно и для двойных интегралов, только вместо объемов там площади).