Билет 45. Формула Остроградского-Гаусса

Определение

Поток векторного поля через кусочно-гладкую замкнутую поверхность в направлении внешней нормали равен тройному интегралу по области, ограниченной данной поверхностью, от дивергенции векторного поля:

$\iint\limits_{\sigma} \vec{F}\vec{n_0}dS = \iiint\limits_{V} div\vec{F}dxdydz$

или

$\iint\limits_{\sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iiint\limits_{V} (\frac{\delta P}{\delta x} + \frac{\delta Q}{\delta y} + \frac{\delta R}{\delta z})dxdydz$

Следствие (смысл дивергенции в точке)

Пусть $M_0 \in V$

Возьмем σ_0, такую что $M_0 \in V_0$ и пусть диаметр d области V_0 стремится к 0. Тогда

$div\vec{F}(M_0) = \lim\limits_{d(M_0)\to 0} \frac{\iint\limits_{\sigma} \vec{F}\vec{n_0}dS}{V_0}$

Пример

$\iint\limits_{\sigma} xdydz + ydxdz + zdxdy$

σ: x=0; y=0; z=0; $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + z = 1$

$div\vec{F} = \frac{\delta P}{\delta x} + \frac{\delta Q}{\delta y} + \frac{\delta R}{\delta z} = \frac{\delta x}{\delta x} + \frac{\delta y}{\delta y} + \frac{\delta z}{\delta z} = 1 + 1 + 1 = 3$

$\iint\limits_{\sigma} xdydz + ydxdz + zdxdy = \iiint\limits_{V} div\vec{F}dxdydz = \iiint\limits_{V} 3dxdydz = 3\iiint\limits_{V} dxdydz = 3V_\sigma = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 = 3$