1. Билет 44. Поверхностные интегралы второго рода. Определение. Физический смысл.

Поверхностный интеграл 2-го рода Пусть имеется ориентировочная кусочно-гладкая поверхность r и на ней задано векторное поле $\overline{F} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$

1. Разобьем поверхность на n частей, $\lambda_i -, i - n; \delta G_i$ проекция i - n частей на плоскость xy взятая со знаком '+' если нормаль имеет плоскость направление по оси Oz и со знаком '-', если на оборот
2. В каждой из частей выберем по произволной точке M_i
3. Составляем интегральную сумму $\sum_i R(M_i)\delta G_i$
4. Берем предел интегр. сумм при условии что диматр всей части $\lambda_i \to 0$
5. $\lim\limits_{\lambda_i \to 0} \sum_i R(M_i)\delta G_i$

Если этот предел существует, не завитсит от зазбиения и выбора точек, то обозначаем его $\iint_r$ R(x,y,z)dxdy

Аналогичным образом $\iint_r$ P(x,y,z)dxdz и $\iint_r$ Q(x,y,z)dxdz

Определение:Сумма 3-х полученных интегралов называется поверхностным интегралом 2-го рода векторного поля $\overline{F} - r\overline{n}$

$$\iint_r P(x,y,z)dxdz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy$$

Физический смысл: другое название этого интеграла - поток векторного поля $\overline{F}$ через поверхность r в направлении нормали $\overline{n}$

Вычесления:

1. В явном виде каждая составляющая инт-ла считается отдельно. Если пов-ть задана в явном виде: z = z(x,y)

   $$\iint_r \text{R(x,y,z)dxdy} = \iint_D \text{R(x,y,z(x,y))dxdy}$$

   Где D - проекция на плоскость xoy $\iint_r P(x,y,z)dxdz \iint_r Q(x,y,z)dxdz$

2. Сведение к поверх. инт-лу 1-го рода

   $$\iint_r P(x,y,z)dxdz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy = \iint_r (Pcos(\alpha) + Qcos(\beta) + Rcos(\gamma))dS$$

   Где $cos(\alpha), cos(\beta), cos(\gamma)$ - направляющие косинусы нормали

   $$(\frac{\overline{r_u} * \overline{r_v}}{|\overline{r_u} * \overline{r_v}|}) = cos(\alpha), cos(\beta), cos(\gamma)$$

3. Пусть пов-ть однозначно проектируется на плоскости uv и $\overline{n} = \overline{r_u} * \overline{r_v} = (A, B, C)$, тогда

   $$\iint_r P(x,y,z)dxdz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy = \iint_D (AD + DQ + CR)dxdv$$

   В частности, если z = z(x,y) и пов-ть однозначно проектируется на ось xy, то $\iint_r P(x,y,z)dxdz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy = \iint_D (-z'xP(x,y,z))(-z'yQ(x,y,z(x,y))) + (R(x,y,z(x,y)))dxdy$