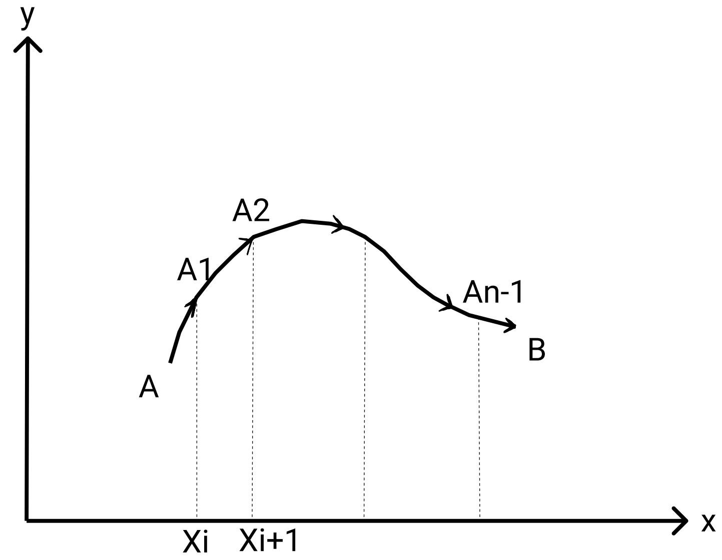
Билет №40. Криволинейные интегралы второго рода. Определение, свойства, вычисление. Физический смысл.

Пусть на орментированной кусочно-гладкой кривой l=AB задано векторное поле $\vec{F} = (P, QR)$



Выполним операции:

1. (a) Разобьем кривую на элементарные части точками $A_0 = A, A_1, A_2...A_n = B$
   (b) На каждой из элементарных дуг выберем по точке $M_i \in l_i$
   (c) Обозначим за $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ - проекция i-той дуги на ось OX (с сохранением ориентации)
   (d) Составляем интегральную сумму: $\delta_x = \Sigma P(M_i) * \Delta x_i$
2. Возьмем предел интегральной суммы при условии, что длины элементарных дуг стремятся к 0 (стягиваются в точку)

   Если этот предел существует и не зависит от разбиения и выбора точек, то он называется интегралом: $\int_A^B P(x, y, z)dx$
3. Аналогично вводим интегралы: $\int_A^B Q(x, y, z)dy$, $\int_A^B R(x, y, z)dz$
4. Берем сумму этих трех интегралов: $\int_A^B P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$

   Эта сумма называется криволинейным интегралом векторного поля $\vec{F}$ по ориентированной кривой l.

Обозначение: $\int_A^B Pdx + Qdy + Rdz$
Свойства:

- Линейность (интеграл суммы есть сумма интегралов. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла)

- Аддитивность (можно разбить область интегрирования на несколько частей. Например, $\int_a^b dx = \int_a^c dx + \int_c^b dx$)

- **Механический(физический) смысл криволинейного интеграла второго рода**:

  Пусть материальная точка перемещается из точки A в точку B по кривой l, и на нее действует сила $\vec{F} = P(x,y,z) * \vec{i} + Q(x,y,z) * \vec{j} + R(x,y,z) * \vec{k}$

  Тогда работа $A = \int_A^B Pdx + Qdy + Rdz$ - работа силы

Вычисление:

Криволинейный интеграл второго рода вычисляем так же, как криволинейный интеграл первого рода - сведением к определенному. Для этого все переменные под знаком интеграла выражают через одну переменную, используя уравнение той линии, вдоль которой производится интегрирование.

Пример: Вычислить криволинейный интеграл второго типа $\int_L x^2dx + x * y^2dy$,

где L - отрезок прямой от точки A (0, 1) до точки B (1, 2).

Уравнение прямой, проходящей через точки A и B, имеет вид $y = x + 1$, поэтому на отрезке AB dy = dx.

Подставляя в подынтегральную функцию вместо y его выражение через $x (y = x + 1)$ и замечая, что при перемещении от A к B x меняется от 0 до 1, получаем:

$\int_L x^2dx + x * y^2dy = \int_0^1 x^2 + x * (x+1)^2dx = \int_0^1 x^3 + 3 * x^2 + xdx = \frac{7}{4}$