13. Несобственные интегралы. Абсолютная и условная сходимость. Интегралы в смысле главного значения

Определение

Интеграл называется **несобственным**, если нарушены условия существования определенного интеграла: интервал интегрирования бесконечен или функция терпит бесконечный разрыв на интервале.

Несобственные интегралы первого рода

Интеграл называется несобственным **первого рода**, если интервал интегрирования бесконечен, а функция непрерывна на интервале.

a) $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx = \lim\limits_{B\to\infty} \int\limits_{a}^{B} f(x)dx$

b) $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{A\to-\infty} \int\limits_{A}^{b} f(x)dx$

c) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim\limits_{A\to-\infty} \int\limits_{A}^{0} f(x)dx + \lim\limits_{B\to\infty} \int\limits_{0}^{B} f(x)dx = \lim\limits_{A\to-\infty B\to\infty} \int\limits_{A}^{B} f(x)dx$

При вычислении считаем, что A и B не зависят друг от друга, считаем оба предела по отдельности.

Несобственные интегралы второго рода

Интеграл называется несобственным **второго рода**, если интервал интегрирования конечен, а функция терпит бесконечный разрыв на интервале.

$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$

a) Разрыв в точке b:

$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{\epsilon\to 0} \int\limits_{a}^{b-\epsilon} f(x)dx$

b) Разрыв в точке a:

$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{\epsilon\to 0} \int\limits_{a+\epsilon}^{b} f(x)dx$

c) Разрыв в точке $c \in (a;b)$:

$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \int\limits_{a}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{\epsilon_1\to 0} \int\limits_{a}^{c-\epsilon_1} f(x)dx + \lim\limits_{\epsilon_2\to 0} \int\limits_{c+\epsilon_2}^{b} f(x)dx$

Несобственные интегралы третьего рода

Интеграл называется несобственным **третьего рода**, если интервал интегрирования бесконечен, а функция терпит бесконечный разрыв на интервале.
Используя свойство аддитивности, разбить на несколько интегралов, каждый из которых будет рассмотренного типа

Абсолютная и условная сходимость

Если все пределы существуют и конечны, то говорят, что несобственный интеграл **сходится**, если нет, то **расходится**.
Геометрический смысл сходимости в том, что если интеграл сходится, то площадь под графиком конечна, если не сходится, то бесконечна.

Интегралы в смысле главного значения

Говорят, что несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ в главном значении, если он равен $\lim\limits_{A\to\infty} \int\limits_{-A}^{A} f(x)dx$