9. Определенный интеграл. Определение. Теорема о существовании (без док-ва). Геометрический смысл определенного интеграла.

Определённый интеграл от $f(x)$ по интервалу $[a;b]$ называется предел (число) интегральных сумм, при условии, что все интервалы стягиваются в точки, этот предел существует и не зависит от разбиения и выбора опорных точек.

В общем виде определённый интеграл записывается так:

$$\int\limits_a^b f(x)dx$$

Что прибавилось по сравнению с неопределенным интегралом? Прибавились пределы интегрирования.

Нижний предел интегрирования стандартно обозначается буквой a.
Верхний предел интегрирования стандартно обозначается буквой b.
Отрезок $[a;b]$ называется отрезком интегрирования.

Как решить определённый интеграл?

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(X)|_a^b = F(b) - F(a)$$

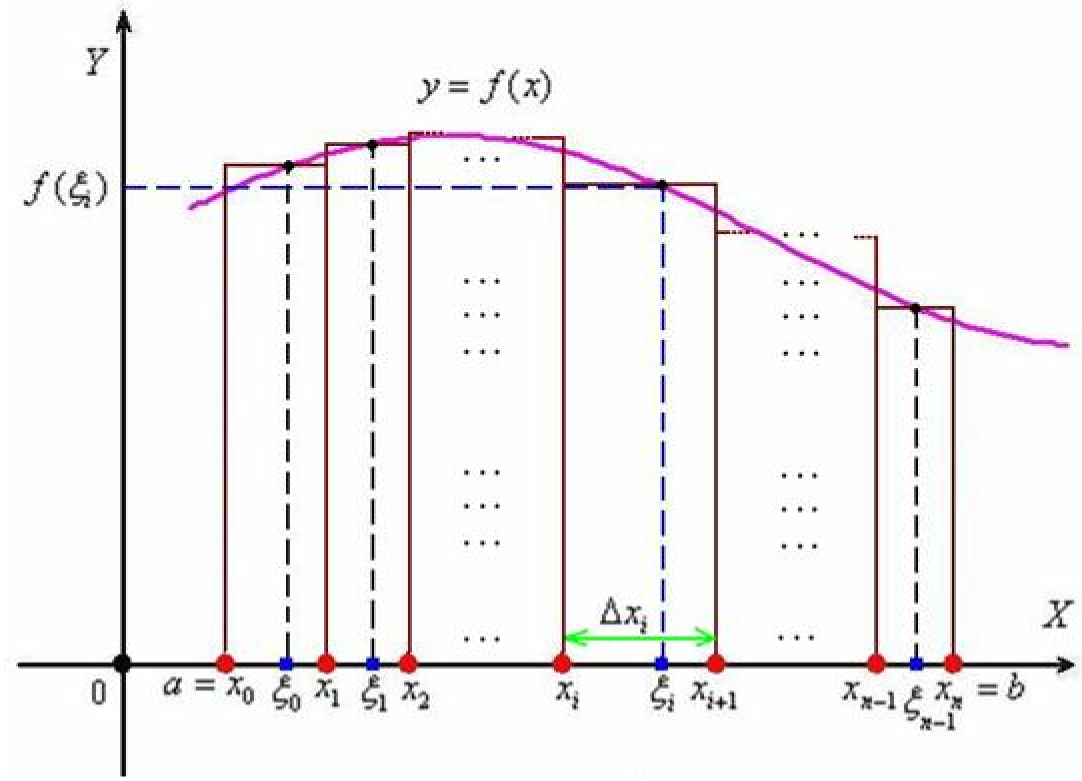
Теорема о существовании

Если $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то определённый интеграл существует.

Геометрический смысл определённого интеграла

Пусть $f(x) >= 0$; непрерывна на $[a;b]$, тогда площадь фигуры (криволинейной трапеции) ограничена графиком функции, осью O_x и прямыми $x = a$, $x = b$ равна:

$$S = \int\limits_a^b f(x)dx$$



Доказательство:

Разобъём отрезок $[a; b]$ на n частей с длинами $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Рассмотрим нижние и верхние интегральные суммы:

$$\underline{\sigma_n} = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

равняется площади вписанной ступенчатой фигуры, так как $f(x_i)\Delta x_i$ - площадь i прямоугольника, поэтому $\underline{\sigma_n} \le S$.

Аналогично

$$\overline{\sigma_n} = \sum_{i=1}^{n} f(C_i)\Delta x_i$$

будет равняться площади описанной ступенчатой фигур и поэтому $\overline{\sigma_n} \ge S$.

Отсюда получаем, что $\underline{\sigma_n} \le S \le \overline{\sigma_n}$. А так как по условию функция непрерывна, то определённый интеграл существует, а значит, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \overline{\sigma_n} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \underline{\sigma_n} = \int\limits_a^b f(x)dx$. Следовательно по теореме о сжатой переменной:

$$S = \int\limits_a^b f(x)dx$$