25. Полный дифференциал функции, дифференциалы высшего порядка. Формула Тэйлора для функции нескольких переменных.

Определение дифференциала:

Если функция $z = f(M)$ дифференциируема в точке М, то её полное приращение в этой точке может быть представлено в в виде

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y,$$

где $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ и $\beta(\Delta x, \Delta y)$ - бесконечно малые функции при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Определение. Дифференциалом dz дифференциируемой в точке M функции $z = f(M)$ называется линейная относительно приращений Δx и Δy (аргументов) часть полного приращения этой функции в точке M, т.е.

$$dz = A\Delta x + B\Delta y$$

Полный дифференциал равен сумме попарных произведений частных производных на дифференциалы соответствующих переменных.

$$dz = \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy$$

Разность между полным приращением и дифференциалом функции в точке M

$$\Delta z - dz = \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y$$

есть бесконечно малая при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ более высокого порядка, чем $p = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ - расстояние между точками $M(x, y)$ и $M_1(x + \Delta x; y + \Delta y)$

Дифференциалы высших порядков

Дифференциал от дифференциала данной функции – дифференциал второго порядка

В случае одной переменной: $f = f(x)$

$\Delta f = f(x_0)*\Delta x+$ o (Δx);

$f(x_0)*\Delta x = df(x_0)$ – дифференциал

$d^n f = d(d^{n-1}f) = (d^{n-1}f)'*\Delta x = f^{n-1}*x*\Delta x^{n-1} = f^n*x*\Delta x^n$

В случае двух переменных:

$f = f(x, y); P_0 = (x_0, y_0)$

$\Delta f = f'_x(P_0)\Delta x + f'_y(P_0)\Delta y +$ o $(|(\Delta x, \Delta y)|) df(P_0) = \text{grad}\, f(P_0)*\Delta P = f'_x(P_0)\Delta x + f'_y(P_0)\Delta y$ - дифференциал 1-го порядка

$d^2 f = d(df) = (df)'_x\Delta x + (df)'_y\Delta y = (f'_x\Delta x + f'_y\Delta y)'_x\Delta x + (f'_x\Delta x + f'_y\Delta y)'_y\Delta y =$

$= f''_{xx}\Delta x^2 + 2f''_{xy}\Delta x\Delta y + f''_{yy}\Delta y^2$ - дифференциал 2-го порядка.

$d^n f = d(d^{n-1}f)$ - дифференциал n-го порядка.

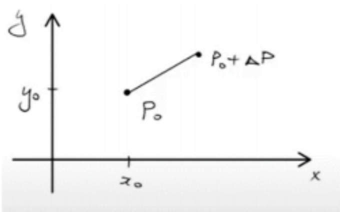
Формула Тейлора для функции двух переменных

мне влом переписывать, тут чисто формулы, поэтому вот вам скрин доказательства

Пусть $P_0 = (x_0, y_0)$, функция f непрерывно дифференцируема (n+1) раз в некоторой окрестности точки P_0, тогда

$$f(P_0+\Delta P) = f(P_0) + df(P_0) + \frac{d^2 f(P_0)}{2} + \cdots + \frac{d^n f(P_0)}{n!} + \frac{d^{n+1}(P_0+\theta\Delta P)}{(n+1)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{d^k f(P_0)}{k!} + \frac{d^{k+1}(P_0+\theta\Delta P)}{(k+1)!}$$

__Доказательство__



$$\varphi(t) = f(P_0 + t*\Delta P) = f(x_0 + t*\Delta x, y_0 + t*\Delta y)$$

Для ф формула Тейлора в нуле:

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + \cdots \frac{\varphi^{(n)}(0)t}{n!} + \frac{\varphi^{(n+1)}(\theta t)t^{n+1}}{(n+1)!}, \theta \in (0,1)$$

$$\varphi(t) = f(P_0 + t*\Delta P);$$

$$\varphi'(t) = f'_x(P_0 + t*\Delta P)*\Delta x + f'_y(P_0 + t*\Delta P)*\Delta y = df(P_0 + t*\Delta P)$$

Тогда давайте проверим, будет ли также для k-той производной:

$$\varphi^{(k)}(t) = d^k f(P_0 + t*\Delta P)$$

Докажем с помощью метода мат. индукции, что $\varphi^{(k+1)}(t) = \left(\varphi^{(k)}\right)'(t) = \left(d^k f(P_0 + t*\Delta P)\right)' *(t) =$ $(d^k f(P_0 + t*\Delta P))'_x * \Delta x + (d^k f(P_0 + t*\Delta P))'_y * \Delta y = d\left(d^k f\right)(P_0 + t*\Delta P) = d^{k+1} f(P_0 + t*\Delta P)$

Следовательно,

$$\varphi(t) = f(P_0) + df(P_0)t + \cdots + \frac{d^n f(P_0)t^n}{n!} + \frac{d^{n+1} f(P_0 + \theta t)t^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$f(P_0 + \Delta P) = \varphi(1) = \sum_{k=0}^{n} d^k f \frac{P_0}{k!} + \frac{d^{n+1} f(P_0 + \theta\Delta P)}{(n+1)!}$$