1. Билет № 1. Первообразная функции. Теорема о виде первообразной. Теорема о существовании первообразной (без док-ва). Неопределенный интеграл, его свойства.

Определение Первообразная -- функции $F(x)$ называется первообразной, для функции $f(x)$ на интервале (a, b), если её производная совпадает с изначальной функцией.

$$f(x) = 2 * x$$
$$F(x) = x^2$$

1.1. Лемма:

Если производная от функции равна 0 на интервале (a, b), то $f(x) = c$ $x \in (a, b)$, где $c - const$

1.2. Док-во:

$\rceil$ $x_1, x_2 \in (a, b)$ По теореме Лагранжа $F(x_2) - F(x_1) = F`(c) * (x_2 - x_1)$, $c \in (x_1, x_2)$, т.к. $F`(c) = 0$, то $F(x_2) - F(x_1) = 0 \Rightarrow$ $\mathrm{F}(\mathrm{x}_2) = F(x_1) = c$

1.3. Теорема о виде первообразной:

Если $F(x)$ - первообразная для $f(x)$, то любая другая первообразная для этой функции будет равна $G(x) = F(x) + c$

1.4. Док-во:

$(f(x) - G(x))` = F`(x) - G`(x) = f(x) - g(x) = 0 \Rightarrow$ F(x) - G(x) = c $\Rightarrow$ G(x) = F(x)+c

---

1.5. Теорема о существовании первообразной:

Если $f(x)$ - непрерывная функция на (a, b), то они имеет первообразную $F(x)$ на (a, b) - Это подано **без доказательства**, так что не боимся.

1.6. Неопределённый интеграл:

Неопределённым интегралом от функции $f(x)$ на $[a, b]$ называется множество всех первообразных $F(x)$

Обозначается: $\int f(x)dx$
$\int$ - интеграл; dx - дифференциал переменной x; $f(x)$ - подынтегральная функция; x - переменная интегрирования; "$f(x)dx$" - подынтегральное выражение

1.7. Свойства:

$$1)\ (\int f(x)dx)` = f(x) \ \text{ и } \ d\int f(x)dx = f(x)dx$$

Док-во: $(\int f(x)dx)` = (F(x) + c)` = F`(x) + 0 = f(x); \quad d\int f(x)dx = (\int f(x)dx)` = f(x)dx$

$$2)\ \int f(x)dx = F(x) + c$$

Док-во: $d\int f(x) = \int f`(x)dx = f(x) + c$

$$3)\ \int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$$

$$4)\ \int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Док-во для (3): Продифференцируем правую часть равенства:

$d(\lambda \int f(x)dx) = \lambda d(\int f(x)dx) = \lambda f(x)dx$

Таким образом, дифференциал правой части доказываемой формулы равен подынтегральному выражению левой части, а это и означает справедливость формулы (3).

Док-во для (4): Продифференцируем правую часть равенства:

$d(\int f(x)dx + \int g(x)dx = d\int f(x)dx + d\int g(x)dx = f(x)dx + g(x)dx = (f(x) + g(x))dx$

Мы получили подынтегральное выражение неопределённого интеграла, стоящего в левой части равенства (4), откуда следует справедливость данного утверждения.

1.8. Замечание:

Большинство непрерывных функций не интегрируются в том смысле, что результат интегрирования нельзя выразить через элементарные функции

(такие интегралы называются "не берущиеся")

Пример:
1) $\int e^{-x^2} dx$
2) $\int \frac{sin(x)}{x} dx$