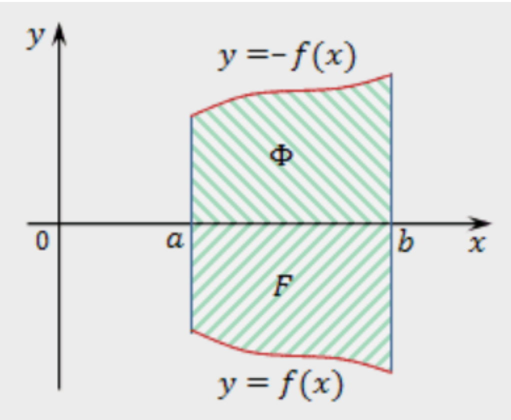
Билет 14. Вычисление площадей плоских фигур в декартовых координатах

а) Если функция $y = f(x)$ неотрицательна на отрезке $[a; b]$ и непрерывна на нем, то соответствующая ей криволинейная трапеция имеет площадь S и выражается формулой

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

б) Аналогично п. а) если $y = f(x)$ отрицательна, то площадь криволинейной трапеции S равна

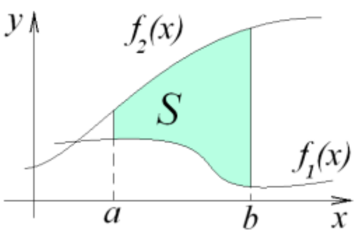
$$S = \int_a^b -f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)$$



Теорема: Пусть фигура ограничена снизу графиком функции $y = f_1(x)$, сверху графиком функции $y = f_2(x)$, а слева и справа прямыми $x = a$, $x = b$, тогда площадь этой фигуры S выражается формулой

$$S = \int_a^b \Big(f_2(x) - f_1(x)\Big)\,dx$$

То есть из верхней границы (функции) вычитаем нижнюю границу (функцию).



Доказательство:

а) Пусть имеется две неотрицательные функции $f(x)$ и $g(x)$ ($f(x)$ расположена выше $g(x)$), $x \in [a; b]$. Площадь S фигуры, заключенной между функциями и прямыми, тогда равна

$$S = S_f - S_g = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b \Big(f(x) - g(x)\Big)\,dx$$

б) Пусть $f(x)$ и $g(x)$ отрицательны и $f(x)$ расположена выше $g(x)$; $x \in [a; b]$. Тогда площадь S фигуры равна

$$S = -(S_f - S_g) = S_g - S_f = -\int_a^b g(x)\,dx - \Big(-\int_a^b f(x)\,dx\Big) = \int_a^b \Big(f(x) - g(x)\Big)\,dx$$

в) Пусть $f(x) \geq 0$, а $g(x) \leq 0$; $x \in [a; b]$. Тогда площадь S фигуры равна

$$S = \int_a^b f(x)\,dx - \Big(-\int_a^b g(x)\Big)\,dx = \int_a^b \Big(f(x) + g(x)\Big)\,dx$$

Общие ситуации: -Разбиваем отрезок $[a; b]$ по точкам пересечения границ функций с осью Ox, тогда площадь разбивается в сумму нескольких площадей, каждая из которых будет в ситуации а), б) и в) и, объединяя все интегралы в один по свойству аддитивности получаем искомую формулу.

Теорема: Пусть площадь ограничена справа графиком функции $x = \varphi_2(y)$, $x = \varphi_1(y)$, снизу $y = c$, сверху $y = d$. Тогда

$$S = \int_c^d \Big(\varphi_2(y) - \varphi_1(y)\Big)\,dy$$