Вопрос 43. Поверхностные интегралы первого рода. Определение, свойства, вычисление. Геометрический и физический смысл.

Пусть имеется кусочно-гладкая поверхность τ и на ней задано скалярное поле f(x,y,z)
1) Разобьём поверхность на n частей. $\triangle S_i$ - площадь этой части; λ_i - диаметр этой части.
2) В каждой из частей выберем по точке M_i
3) Составим интегральную сумму

$$\sum_i f(M_i) * \triangle S_i$$

4) Берём предел интегральных сумм при условии $\lambda_i \to 0$
Предел этих интегральных сумм называется **поверхностным интегралом первого рода** при условии, что предел не зависит от разбиения и выбора точек.
Обозначение:

$$\iint_\tau f(x,y,z)\,dS$$

Свойства:

1)**Геометрический смысл** - $\iint_\tau dS = S_\tau$ - площадь поверхности интегрирования.
2) Линейность
3) Аддитивность
4) **Физический смысл** - если $f(x,y,z)$ - плотность, то $\iint_\tau f(x,y,z)\,dS$ - масса поверхности.

Вычисление поверхности интеграла

1) В явном виде $z = z(x,y)$
$\iint_\tau f(x,y,z)\,dS = \iint_D f(x,y,z(x,y)) * \sqrt{1 + {z'_x}^2 + z'^2_y}\,dxdy$

2) Поверхность задана параметрически $\overrightarrow{r}(M) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$
$\iint_\tau f(x,y,z)\,dS = \iint_D f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) * |\overrightarrow{r_u} \times \overrightarrow{r_v}|\,dudv$, где D - проекция точки на плоскость uv.