Билет 30. Определение двойного интеграла. Теорема о его существовании, свойства. Геометрический смысл двойного интеграла.

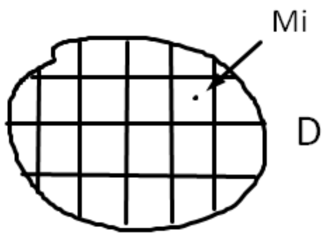
1. Двойные интегралы

Определение: Пусть $D \in R^2$ (D - замкнутая ограниченная область n-мерного пространства). Диаметром d области D называется наибольшее расстояние между двумя её точками

Пусть непрерывная функция $F(x, y)$ замкнута и огрнаичена в области D. Проделаем следующие опреации:

1) Разобъем область D на непересекающиеся области ΔS_i; обозначим d_i диаметром этой области, а ΔS_i - её площадь.

2) В каждой из этой области произвольным образом выберем точку $M_i(x; y)$



3) Составим интегральную сумму по i $\sum f(x_i; y_i)\Delta S_i$

4) Возьмем предел этих интегральных сумм при условии, что диаметр всех областей стремится к нулю

$$\sigma_n = \lim_{d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_i)\Delta S_i$$

Определение: двойным интегралом от $f(x_i; y_i)$ по области D называется предел интегральных сумм при условии, что он не зависит от разбиения на области и выбора точек.

Обозначение:

$$\iint_D f(x; y)\, dS; \iint_D f(x; y)\, dx\, dy$$

Теорема о существовании двойного интеграла (без док-ва): Если D - замкнутая ограниченная область, и $F(x; y)$ непрерывна на D, то двойной интеграл существует.

2. Свойства двойного интеграла:

Свойства:

1) $\iint_D dx\, dy = S_D$ - площадь области интегрирования. Действительно,

$$\iint_D dx\, dy = \lim_{d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} 1 * \Delta S_i = S_D$$

2)

$$\iint_D \lambda f(x;y)\,dx\,dy = \lambda \iint_D f(x;y)\,dx\,dy$$

3) Линейность:

$$\iint_D (f(x;y)+g(x;y))\,dx\,dy = \iint_D f(x;y)\,dx\,dy + \iint_D g(x;y)\,dx\,dy$$

4) Свойство аддитивности: пусть область D разделена на области D_1 и D_2, то есть $D = D_1 + D_2$, $D = D_1 \cup D_2$ и $D_1 \cap D_2 = \oslash$. Тогда

$$\iint_D f(x;y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} f(x;y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} f(x;y)\,dx\,dy$$

5) Пусть $f(x;y) \leq g(x;y)\ \forall Oxy \in D$, тогда

$$\iint_D f(x;y)\,dx\,dy \leq \iint_D g(x;y)\,dx\,dy$$

6) (Следствие) Пусть m и M - наименьшее и наибольшее значение $f(x;y)$ в области D. Тогда можно дать оценку двойному интегралу:

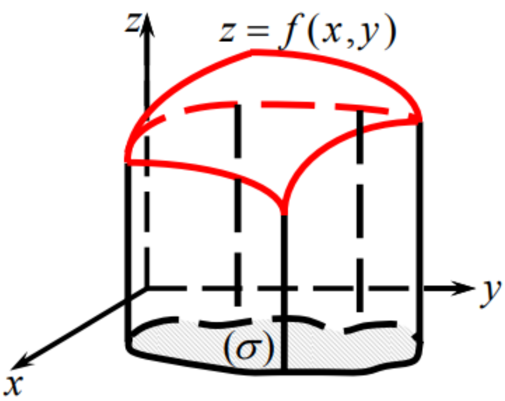
$$mS_D \leq \iint_D f(x;y)\,dx\,dy \leq MS_D$$

7) Из п.5 с помощью теоремы Коши можно получить теорему о среднем:
Существует точка $(x_0;y_0)$, такая, что

$$\iint_D f(x;y)\,dx\,dy = f(x_0;y_0) * S_D$$

3. Геометрический смысл двойного интеграла

Пусть имеется цилиндрическое тело, ограниченное снизу плоскостью Oxy, а сверху поверхностью $z = f(x;y)$. D - проекция тела на плокскость Oxy.



При разбиении области D на элементы ΔS_i тело разобъется на соответсвующие цилиндрические тела объемом V_i. При $d_i \to 0$ можно считать, что объем соответствующего тела приблизительно равен объему цилиндра, площадь основания которого равна ΔS_i, а высота $z_i = f(x_i;y_i)$. Отсюда: $V_i \approx f(x_i;y_i)\Delta S_i$ и

$$V = \lim_{d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} V_i = \lim_{d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i;y_i)\Delta S_i = \iint_D f(x_i;y_i)\,dx\,dy$$

То есть двойной инетграл - это **объем тела**.
Если плоское тело D и его объем описывается функцией $\rho(x;y)$, тогда **масса** m этого тела равна $\iint_D \rho(x_i;y_i)\,dx\,dy$