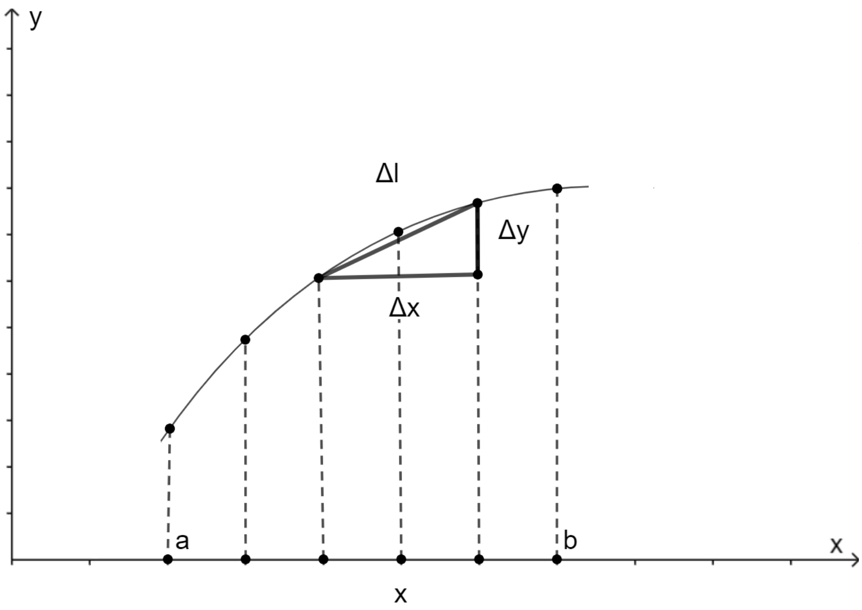
Билет 18. Вычисление длины кривой (кривая задана: явно, параметрически, в полярных координатах)

1. Кривая задана в явном виде:

$$y = y(x), a \leqslant x \leqslant b$$
$$L = \int_a^b \sqrt{1 + {y'_x}^2} dx$$

Доказательство:

Разобъем отрезок $[a; b]$ на Δx_k интервалы.



График

По теореме Лагранжа: $\Delta y_k = y'(c_k) \cdot \Delta x_k$, где $c_k \in \Delta x_k$. Длина кривой - предел длины вписанных ломанных, тогда:

$$\Delta l_k = \sqrt{\Delta x_k^2 + (y'(c_k) \cdot \Delta x_k)^2} = x_k^2 \sqrt{1 + (y'(c_k)^2}$$
$$L = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{1 + (y'(c_k)^2} \Delta x_k = \int_a^b \sqrt{1 + {y'_x}^2} dx$$

2. Кривая задана параметрически:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

$$t_1 \leqslant t \leqslant t_2$$
$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{{x'_t}^2 + {y'_t}^2} dt$$

3. Кривая задана в полярных координатах:

$$\begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi \\ y = r(\varphi)\sin\varphi \end{cases}$$

Тогда:

$$r = r(\varphi), \varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2$$
$$L = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2(\varphi) + {r'_\varphi}^2} d\varphi$$

4. Кривая задана параметрически в пространстве:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

$$t_1 \leqslant t \leqslant t_2$$
$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2} dt$$