Билет 23. Линии уровня. Градиент. Производная по направлению.

1. Линии уровня

Определение

Линией уровня функции $z = f(x, y)$ называется линия $f(x, y) = C$ на плоскости XOY, в каждой точке которой функция сохраняет постоянное значение: $z = C = const$

Проще: Линией уровня функции называется линия(множество точек) на координатной плоскости, в которых функция принимает одинаковые значения

Пример:

$$z = x^2 + y^2$$

Это формула окружности. Для этой функции линиями уровня являются концентрические окружности (общий центр, но разный радиус)

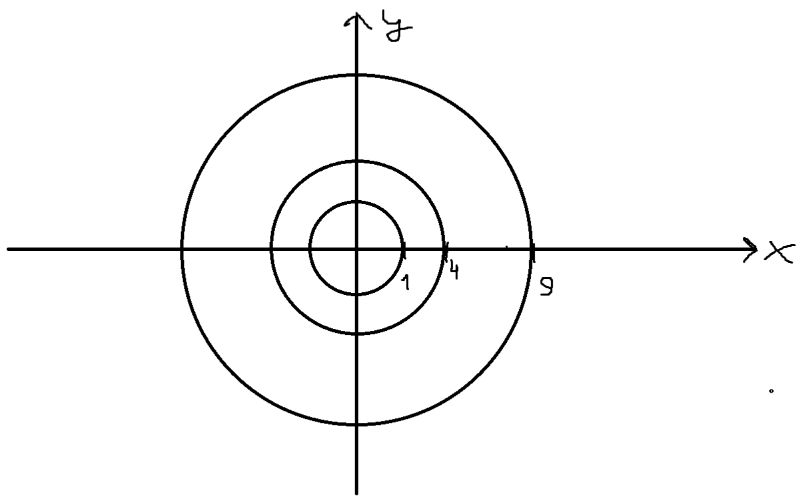
$x^2 + y^2 = C$

При разных C - разные линии уровня

$x^2 + y^2 = 1$

$x^2 + y^2 = 3$

$x^2 + y^2 = 9$



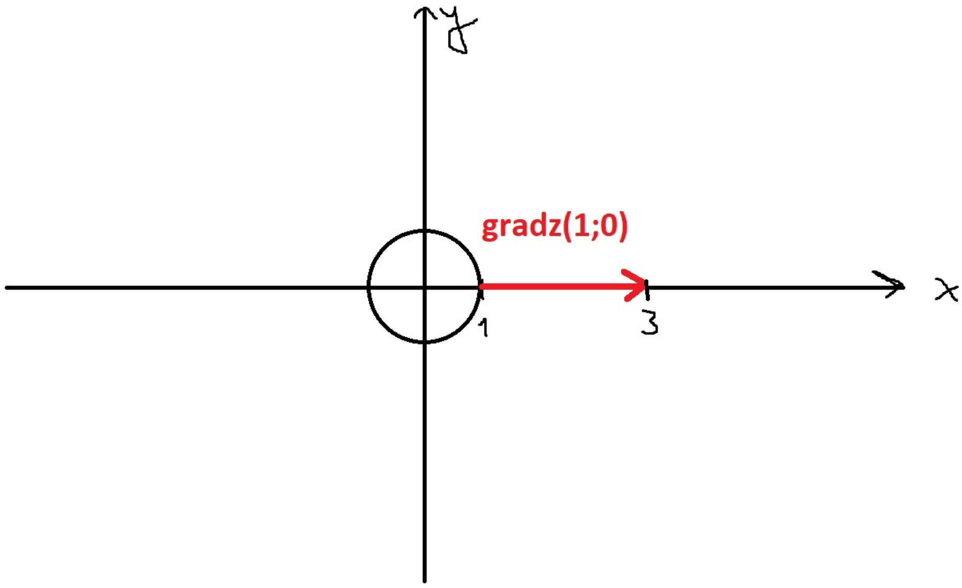
2. Градиент функции

Определение

Градиентом функции называется вектор, указывающий своим направлением направление наискорейшего возрастания функции.

Градиентом функции называется вектор, координаты которого равны частным производным по соответствующим аргументам

$\vec{grad}u = (\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z})$
Пример:
Градиентом функции $z = x^2 + y^2$ при $x_0 = 1, y_0 = 0$ является:
$\vec{grad}z(x_0; y_0) = (\frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y}) = (2x; 2y) = (2; 0)$
Точка $M(x_0; y_0)$ лежит на линии уровня $x^2 + y^2 = 1$
На рисунке это будет выглядеть так:



3. Производная по направлению

Производная по направлению показывает, как быстро значение функции изменяется при движении в данном направлении.
$z = f(x, y)$ - функция, $\vec{l} = (l_x; l_y)$ - вектор направления
Производная по направлению - это предел отношения приращения функции к приращению аргумента, при стремлении приращения аргумента к 0

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cos\beta$$

Где α - угол между вектором и осью OX, а β - угол между вектором и осью OY

$$\cos\alpha = \frac{l_x}{|\vec{l}|}$$

$$\cos\beta = \frac{l_y}{|\vec{l}|}$$