4. Итегрирование по частям. Примеры

Задача: Вычислить интеграл, используя формулу интегрирования по частям:

$$\int u\,dv = \text{uv - } \int v\,du,$$

а также вывести эту формулу.

Теорема интегрирования по частям и её доказательство

Пусть функции u(x), v(x), u'(x) и v'(x) непрерывны на [a; b]. Тогда на [a; b]:

$$\int u\,dv = \text{uv - } \int v\,du$$

Доказательство:
Фомула производной произведения:

$$\text{(uv)' = u'v + uv' => uv' = (uv)' - u'v}$$

Проинтегрируем левую и правую части. Получаем:

$$\int uv'\,dx = \int (uv)'\,dx \text{ - } \int u'v\,dx => \int u\,dv = \text{uv - } \int v\,du$$

Когда применяется этот метод? Примеры

Данный метод применяется в двух ситуациях:

1. Когда нужно решить интеграл вида: $\int P_n(x)e^{ax}\,dx$, $\int P_n(x)\cos bx\,dx$, $\int P_n(x)\sin bx\,dx$, $\int P_n(x)a^x\,dx$. В таком случае u - $P_n(x)$, dv - все остальное (повторяем n раз).

   Пример:

   $\int x^2 \sin 2x\,dx = \begin{bmatrix} u = x^2 & du = 2xdx \\ dv = \sin 2xdx & v = -\frac{\cos 2x}{2} \end{bmatrix} = \text{-}x^2 \cdot \frac{\cos 2x}{2} + \int x\cos 2x\,dx =$
   $= \begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \cos 2xdx & v = \frac{\sin 2x}{2} \end{bmatrix} = \text{-}x^2 \cdot \frac{\cos 2x}{2} + \frac{1}{2}(x\sin 2x - \int \sin 2x\,dx) = \frac{x}{2} \cdot \sin 2x - \frac{x^2}{2} \cdot \cos 2x + \frac{\cos 2x}{4} + \text{C}.$

2. $\ln x$, $\arccos x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$ - u. Остальное - dv.

   Пример:

$\int \arcsin x\,dx = \begin{bmatrix} u = \arcsin x & du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = dx & v = x \end{bmatrix} = \text{x} \cdot \arcsin x - \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{bmatrix} xdx = -\frac{d(1-x^2)}{2} \end{bmatrix} = \text{x} \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$