1. Билет 46 формула Стокса, пример.

Теорема: Пусть γ - замкнутый контур. δ - Поверхность (кусочно гладкая), т.ч. γ является её границей, ориентация γ, δ согласованы таким образом, чтобы при взгляде с конца нормали δ контур обходился в положительном направлении (против часовой стрелки), тогда циркуляция векторного поля по контуру γ = потоку его ротора через поверхность δ:

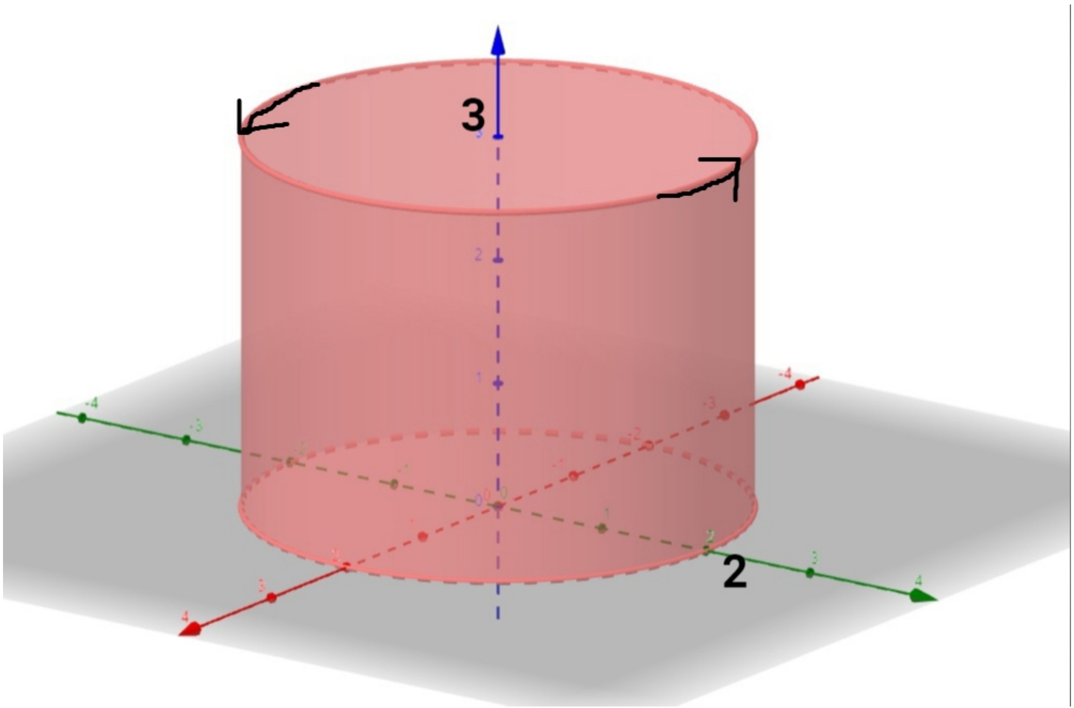

Рисунок 1.1. Продам гараж

$$\oint_\gamma \overline{F}d\overline{r} = \iint rot\overline{F}\overline{n_0}dS \text{ или } \oint Pdx+Qdy+Rdz = \iint_\delta \begin{vmatrix} dydz & dxdz & dxdy \\ \frac{\delta}{\delta x} & \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$rot\overline{F} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\delta}{\delta x} & \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

1.1. Пример:

Найти циркуляцию векторного поля по контуру γ

$$\overline{F} = y\overline{i} + x^2\overline{j} - z\overline{k}$$

$\gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 3 \end{cases}$

Решим по Стоксу: $rot\overline{F} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\delta}{\delta x} & \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} =$

$$= \overline{i}(\frac{-\delta z}{\delta y} - \frac{\delta x^2}{\delta z}) - \overline{j}(\frac{-\delta z}{\delta x} - \frac{\delta y}{\delta z}) + \overline{k}(\frac{\delta x^2}{\delta x} - \frac{\delta y}{\delta y}) = (2x-1)\overline{k}$$

Возьмём в качестве поверхности δ область плоскости $z = 3$, ограниченную контуром (круг), тогда $\overline{n_0} = \overline{k}$.

Применим формулу Стокса:

$$\oint \overline{F} d\overline{n} = \iint\limits_{\delta} rot\overline{F}\overline{n_0} dS = \iint\limits_{\delta} (2x-1)\overline{k} * \overline{k} dS = \iint\limits_{\delta} (2x-1) dxdy =$$

Перейдём к полярным координатам: $\gamma : \begin{cases} x = 2\cos\phi \\ y = 2\sin\phi \\ z = 3 \end{cases}$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^2 (2\cos\phi - 1) r dr = \int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^2 (2r^2\cos\phi - r) dr =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\phi * (2\tfrac{r^3}{3}\cos\phi - \tfrac{r^2}{2})|_0^2 d\phi = \int\limits_0^{2\pi} (\tfrac{16}{3}\cos\phi - r) d\phi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} (\tfrac{16}{3}\cos 0 - r) d\phi = -4\pi$$