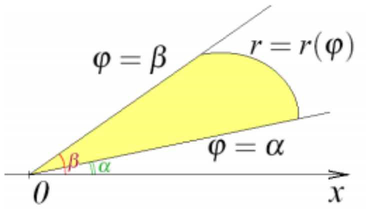
Билет 15. Вычисление площадей плоских фигур в полярных координатах.

Задача: Пусть нам надо вычислить площадь сектора, ограниченного линиями $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ и $r = r(\varphi)$ при $\varphi \in [\alpha; \beta]$ (Здесь r – полярный радиус, т.е. расстояниеот точки кривой до начала координат, а φ - полярный угол, т.е. угол, отсчитываемый против часовой стрелки, между положительным направлением оси Ох и лучом, направленным из начала координат в данную точку)

Теорема: Если в полярной системе координат площадь ограничена кривой $r = r(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, то площадь S равна

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\, d\varphi$$



Доказательство: Разобъем сектор $\alpha\beta$ на элементы сектора $\Delta\varphi_k$. При $\Delta\varphi_k \to 0$ площадь сектора S_k приблизительно равна $\frac{1}{2}r^2\Delta\varphi_k$ (площади сектора). $C_k \in \Delta\varphi_k$ - опорная точка на интервале $\Delta\varphi_k$. Тогда

$$S = \sum_{k=1}^{n} S_k \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} r^2(C_k)\Delta\varphi_k => S = \lim_{\Delta\varphi_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} r^2(C_k)\Delta\varphi_k = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\, d\varphi$$