Билет 32. Замена переменной в двойном интеграле. Якобиан, его геометрический смысл.

Вычислим двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ с помощью подстановки $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$

Определение. Якобианом преобразования φ в $\mathbb{R}^2$, φ : $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ называется определитель

$$\mathrm{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

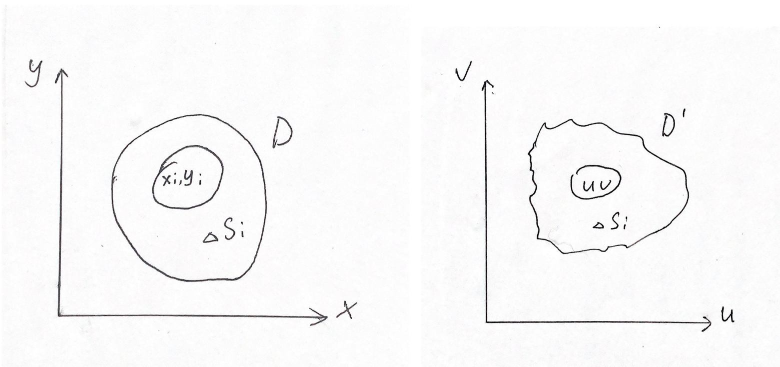
Теорема. Если функции $x = x(u,v), y = y(u,v)$ однозначные, имеют непрерывные частные производные по u и v и якобиан не равен нулю, то это отображение будет взаимно однозначным.

Замечание: то есть можно построить однозначное отображение $\varphi' = \begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$

Пусть D' - обратное отображение. Тогда $\varphi^{-1}(D') = D$.

Теорема. Пусть $D = \varphi^{-1}(D'), J \neq 0 \ \forall (x,y) \in D'$, тогда допустимое значение переменной $x = x(u,v), y = y(u,v) \implies \iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_D f(x(u,v), y(u,v))|J|dudv$

Геометрический смысл якобиана.



$$|J(u_i; v_0)| = \lim_{d \to 0} \frac{\Delta S_i}{\Delta S_i'}$$

То есть модуль якобиана есть предел отношения площадей бесконечно малых площадок ΔS_i и $\Delta S_i'$.