38. Скалярные и векторные поля. Оперотор набла, градиент, дивиргенция, ротор плоского векторного поля.

Скалярное поле

Пусть $D \in R^3$.

Определение 1

Скалярным полем в области D называется функция от 3-х независимых переменных $f(x,y,z)$ сопоставляющая каждой точке данной области число.

$f(M) = f(x,y,z), \quad M(x,y,z) \in D \;\; f(\overline{r}) = f(x,y,z), \;\; \overline{r} = \overline{r}(M)-$ радиус-вектор точки M.
Пример реальной величины: $\rho(M)-$ плотность тела в точке M.

Векторное поле

Определение 2

Векторным полем в области D называется функция сопоставляющая каждой точке области вектор:
$\overline{F}(M) = P(x,y,z)\overline{i} + Q(x,y,z)\overline{j} + R(x,y,z)\overline{k} \;\; \overline{F} = (P,Q,R)$
Пример реальной величины: $\overline{F}-$ сила, действующая на точку при её расположении в точке $M(x,y,z)$

Оператор набла (оператор Гамильтона)

Оператор набла представляет собой сумму частных производных по координатам.

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial}{\partial z}\overline{k}$$

Градиент функции

$$grad\ f = \nabla \cdot f = \frac{\partial f}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\overline{k}$$

Дивиргенция векторного поля $\overline{F}$

$$div\ \overline{F} = \nabla \cdot \overline{F} = \frac{\partial P}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial Q}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial R}{\partial z}\overline{k}$$

Ротор векторного поля $\overline{F}$

$$rot\ \overline{F} = \nabla \times \overline{F} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} =$$

$$= (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})\overline{i} - (\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z})\overline{j} + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\overline{k}$$