Билет 16. Вычисление площадей плоских фигур, заданных параметрически.

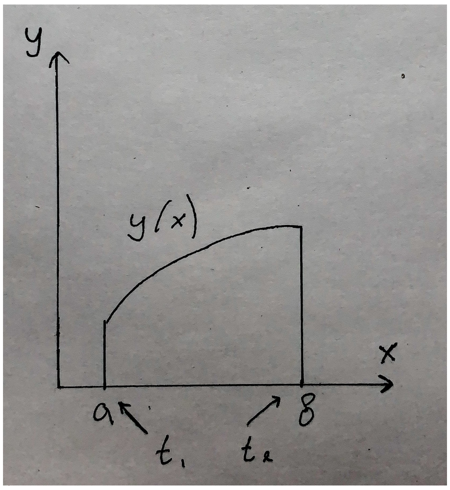
Пусть фигура S ограничена кривой, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t_1 \leq t \leq t_2$$

и прямыми $x = a, x = b$, причем $y(x) \geq 0$ на $[a; b]$. Тогда площадь S находится следующим образом:

$$S = \int\limits_a^b y dx = \int\limits_{t_1}^{t_2} y(t) d(x(t)) = \int\limits_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x'(t) dt$$

Здесь $x(t_1) = a$ и $x(t_2) = b$.



Действительно, так как $y(x) \geq 0$, то

$$S = \int\limits_a^b y dx = \begin{bmatrix} x = x(t) & t(a) = t_1 \\ y(x) = y(t) & t(b) = t_2 \\ dx = dx(t) = x'(t) dt & \end{bmatrix} = \int\limits_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x'(t) dt$$

Следствие 1: если $y(x) \leq 0$ на $[a; b]$, то

$$S = -\int\limits_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x'(t) dt = \int\limits_{t_2}^{t_1} y(t) \cdot x'(t) dt$$

При этом область обходится по часовой стрелке.

Следствие 2: пусть область ограничена петлёй, задаваемой уравнениями

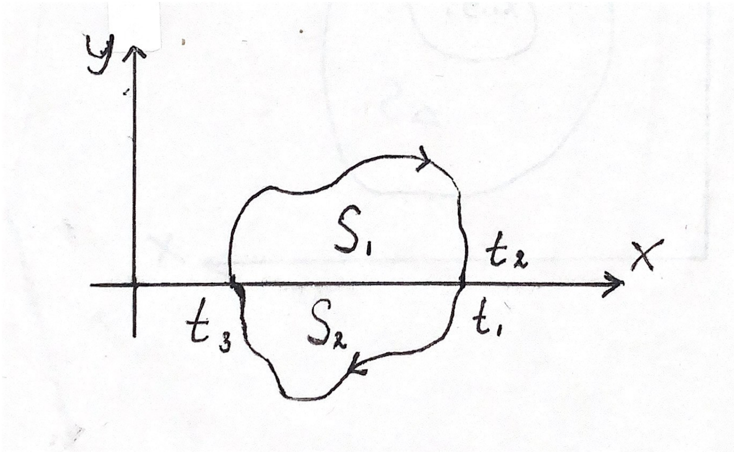
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t_1 \leq t \leq t_2$$

Тогда

$$S = \pm \int\limits_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x'(t) dt$$

Замечание: чтобы получить нужный знак, пределы интегрирования расставляем таким образом, чтобы граница области обходилась по часовой стрелке.

Доказательство (не строгое):



$$S = S_1 + S_2 = \int\limits_{t_3}^{t_2} y(t)x'(t)dt + \int\limits_{t_1}^{t_3} y(t)x'(t)dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt$$