21. Частные производные. Их смысл. Частные производные высшего порядка. Теорема о смешанных производных (без док-ва)

1. Частная производная

Пусть $z = f(x, y)$ - функция от двух переменных.

Частной производной функции $z = f(x, y)$ **по переменной x** называется величина:

$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle_x f(x,y)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x+\triangle x,y)-f(x,y)}{\triangle y}$

Частной производной функции $z = f(x, y)$ **по переменной y** называется величина:

$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\triangle y \to 0} \frac{f(x,y+\triangle y)-f(x,y)}{\triangle y}$

2. Смысл частной производной

Частная производная по переменной x показывает скоростью изменения функции по оси ox. Она будет равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к сечению поверхности в данной точке, параллельно оси ox и перпендикулярно плоскости x0y.

Частная производная по переменной y показывает скорость изменения функции по оси oy.

3. Частные производные высшего порядка

Частной производной высшего порядка от функции $z = f(x, y)$ называют выражения вида:

- $\frac{\partial^n z}{\partial x^n}$ - частная производная n-ого порядка по переменной x
- $\frac{\partial^n z}{\partial y^n}$ - частная производная n-ого порядка по переменной y

Для того, чтобы вычислить частную производную n-ого порядка, необходимо взять производную по производной порядка n-1:

- $\frac{\partial^n z}{\partial x^n} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}})$ - частная производная n-ого порядка по переменной x
- $\frac{\partial^n z}{\partial y^n} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial^{n-1} z}{\partial y^{n-1}})$ - частная производная n-ого порядка по переменной y

4. Теорема о смешанных производных

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой области D, а все комбинации частных производных n-ого порядка этой функции непрерывны в области D, то при таких условиях - смешанные производные этой функции будут равны между собой независимо от порядка (очередности) дифференцирования.