41. Циркуляция векторного поля. Формула Грина.

Циркуляция векторного поля

Циркуляцией векторного поля по данному замкнутому контуру $\mathbf{\Gamma}$ называется криволинейный интеграл второго рода, взятый по $\mathbf{\Gamma}$.

$$C = \oint\limits_{\Gamma} \mathbf{F} d\mathbf{l} = \oint\limits_{\Gamma} (F_x dx + F_y dy + F_z dz),$$

где $\mathbf{F} = F_x, F_y, F_z$ - векторное поле, определенной в некоторой области $\mathbf{D}$, содержащей в себе контур $\mathbf{\Gamma}$, $d\mathbf{l} = dx, dy, dz$ - бесконечно малое приращение радиус-вектора $\mathbf{l}$ вдоль контура. Окружность на символе интеграла обозначает интегрирование по замкнутому кругу.

Формула Грина

Формула Грина устанавливает связь между криволинейными и двойными интегралами.

Пусть на плоскости Oxy задана область D, ограниченная кривой, пересекающейся с прямыми, параллельными координатным осям не более чем в двух точках, т.е. область D – правильная.

Если функции P(x;y) и Q(x;y) непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в области D, то имеет место формула $\int_D \int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \oint_L \; Pdx + Qdy$, где L- граница области D и интегрирование вдоль кривой L производится в положительном направлении (при движении вдоль кривой, область D остается слева).

Доказательство: Пусть y= $\varphi_1(x)$ – уравнение дуги AnB, а y= $\varphi_2(x)$ – уравнение дуги AmB (рис.240). Найдем сначала $\int_D \int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy$. По правилу вычисления двойного интеграла, имеем:

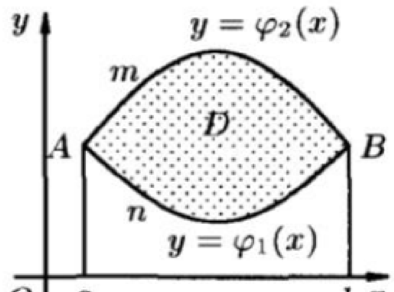

Рис. 240

$$\int_D \int \frac{\partial P}{\partial y} dx\, dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_a^b dx * P(x;y)\Big|_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} = \int_a^b P(x;\varphi_2(x))dx - \int_a^b P(x;\varphi_1(x))dx$$

$$\int_D \int \frac{\partial P}{\partial y} dx\, dy = \int_{AmB} P(x;y)dx - \int_{AnB} P(x;y)dx = -\int_{BmA} P(x;y)dx - \int_{AnB} P(x;y)dx = -\oint_L \; Pdx \; \boxed{1}$$

Аналогично доказывается $\int_D \int \frac{\partial Q}{\partial x} dx\, dy = -\oint_L \; Qdy \; \boxed{2}$. Если из $\boxed{2}$ вычесть $\boxed{1}$, то получим формулу Грина.

Замечание: формула Грина справедлива и для произвольной области, которую можно разбить на конечное число правильных областей.

Векторная форма (через ротор или вихрь):

$$\iint\limits_R (\operatorname{rot} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}\, dx dy = \oint\limits_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$