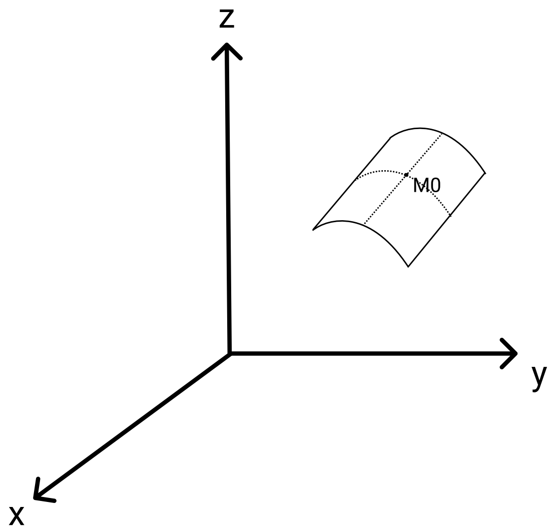
Билет №24. Касательная плоскость к поверхности. Нормаль к плоскости

Пусть поверхность задана неявно: $F(x, y, z) = 0$



Определение: Точка M_0 - не **особая**, если в ней существуют непрерывные частные производные: $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$, причем они не равны нулю одновременно.

Определение: Прямая называется **касательной к поверхности**, если она является касательной к некоторой кривой этой поверхности, проходящей через эту точку.

Теорема: Если точка M_0 поверхности не особая, то все касательные в этой точке лежат в одной плоскости, которую называют **касательной плоскостью** к поверхности.

Определение: Вектор, перпендикулярный к касательной плоскости в данной точке, называют **нормалью к поверхности** в данной точке

Обозначение: $\overrightarrow{n}(M_0)$

Теорема: Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ - не особая точка поверхности. Тогда нормалью к поверхности в данной точке является вектор:

$\overrightarrow{n} = (\frac{\partial F}{\partial x}_{|M_0}, \frac{\partial F}{\partial y}_{|M_0}, \frac{\partial F}{\partial z}_{|M_0})$
Если поверхность задана явно, то: $\overrightarrow{n} = (\frac{\partial z}{\partial x}_{|M_0}, \frac{\partial z}{\partial y}_{|M_0}, 1)$
Уравнение плоскости через $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно $\overrightarrow{n} = (A, B, C)$:
$A * (x - x_0) + B * (y - y_0) + C * (z - z_0) = 0$

Уравнение касательной плоскости:
$\frac{\partial F}{\partial x}_{|M_0} * (x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}_{|M_0} * (y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}_{|M_0} * (z - z_0) = 0$

Уравнение прямой:

$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$, где $\overrightarrow{s} = (m, n, p)$

Уравнение нормали:
$\frac{x-x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}_{|M_0}} = \frac{y-y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}_{|M_0}} = \frac{z-z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}_{|M_0}}$