№10 Свойства определенного интеграла. Теорема о среднем.

Свойства определенного инетеграла

1)Длина интервала интегрирования:

$$\int_a^b dx = b - a$$

2)Интеграл 0:

$$\int_a^b 0dx = 0$$

3)Интеграл с одинаковыми пределами интегрирования:

$$\int_a^a dx = 0$$

4)Смена знака при перестановке пределов интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

5)Вынос постоянного множителя(y):

$$\int_a^b y * f(x)dx = y * \int_a^b f(x)dx$$

6)Интеграл суммы двух функций равен сумме интегралов этих функций с теми же пределами интегрирования:

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

7)Аддитивность. Пусть c принадлежит $[a; b]$, тогда:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

8)Если m-наименьшее значение $f(x)$, а M-наибольшее значение $f(x)$ на $[a; b]$, то:

$$m * (b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M * (b - a)$$

из этого следует, что $m \leq f(x) \leq M$, а значит:

$$\int_a^b mdx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b Mdx$$

Теорема о среднем

Пусть $f(x)$-непрерывна на $[a; b]$, тогда существует такая точка c, принадлежащая $[a; b]$, что:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c) * (b - a)$$

Доказательство:
Так как $f(x)$ непрерывна по условию, то она имеет наименьшее(m) и наибольшее(M) значения на данном отрезке.

$$m * (b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M * (b - a)$$

Поделим неравенство на $(b - a)$ и получим:

$$m \leq \frac{1}{(b - a)} * \int_a^b f(x)dx \leq M$$

По теореме Больцано-Коши существует такая точка c, принадлежащая $[a; b]$, что:

$$\frac{1}{(b - a)} * \int_a^b f(x)dx = f(c)$$

Домножаем обе части на $(b - a)$ и получаем:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c) * (b - a)$$

Что и требовалось доказать.