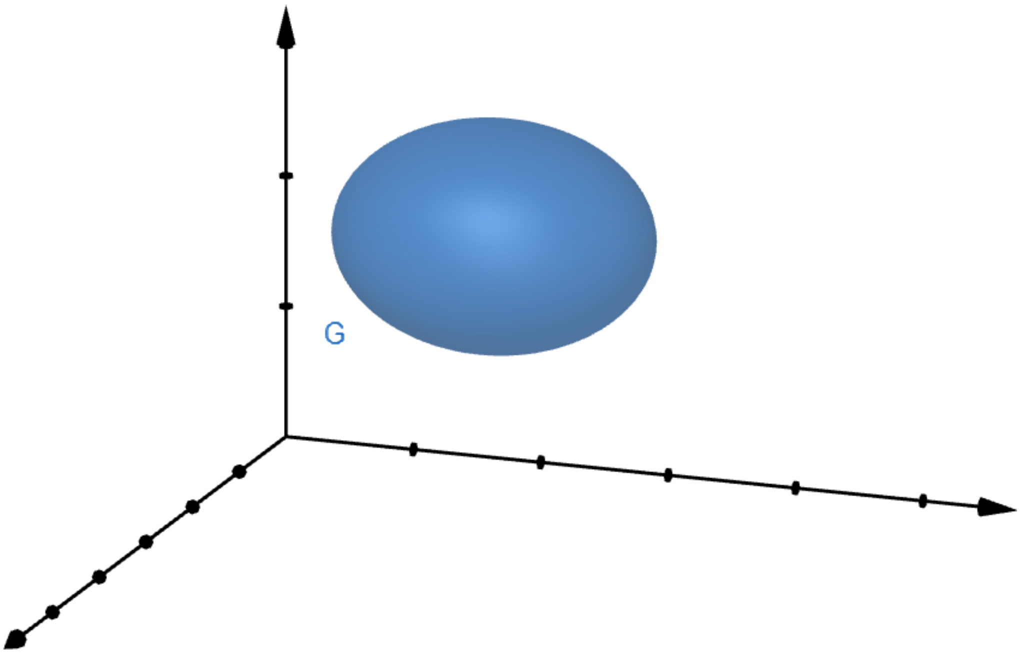
Билет 34. Определение тройного интеграла, его свойства.

Пусть в ограниченной замкнутой области G задана непрерывная функция $f(x, y, z)$.



График

Проделаем следующие операции:

1. Разобьем тело на непересекающиеся области объемов ΔV_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, λ_i - диаметр области i.
2. В каждой из областей выберем по опорной точке $M_i(x_i, y_i, z_i) \in \Delta V_i$.
3. Составим интегральную сумму: $\sigma = \sum\limits_{i=1}^{N} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i$.
4. Возьмем предел интегральной суммы при условии, что диаметр всех областей стремится к 0.

Если данный предел не зависит от разбиения и выбора опорных точек, то его называют **тройным интегралом** от $f(x, y, z)$ по области G. Обозначается:

$$\iiint\limits_G f(x, y, z) dxdydz; \iiint\limits_G f(x, y, z) dV$$

Теорема: если область ограничена и замкнута, и функция непрерывна в этой области, то тройной интеграл существует.
Свойства:

1. $\iiint\limits_G 0\, dxdydz = 0$

2. $\iiint\limits_G dxdydz = V_G$ - объем области интегрирования.

3. $\iiint\limits_G \lambda\, dxdydz = \lambda \iiint\limits_G dxdydz$.

4. $\iiint\limits_G (f(x,y,z) + g(x,y,z))dxdydz = \iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz + \iiint\limits_G g(x,y,z)dxdydz$.

5. Если $f(x,y,z) \leqslant g(x,y,z)\ \forall\ (x,y,z) \in G$, то $\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz \leqslant \iiint\limits_G g(x,y,z)dxdydz$.

6. Если m и M - наименьшее и наибольшее в G, то $mV_G \leqslant \iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz \leqslant MV_G$.

7. Аддитивность: если область G разбиваем на $G_1 \cap G_2 = \oslash$, то $\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{G_1} f(x,y,z)dxdydz + \iiint\limits_{G_2} f(x,y,z)dxdydz$.