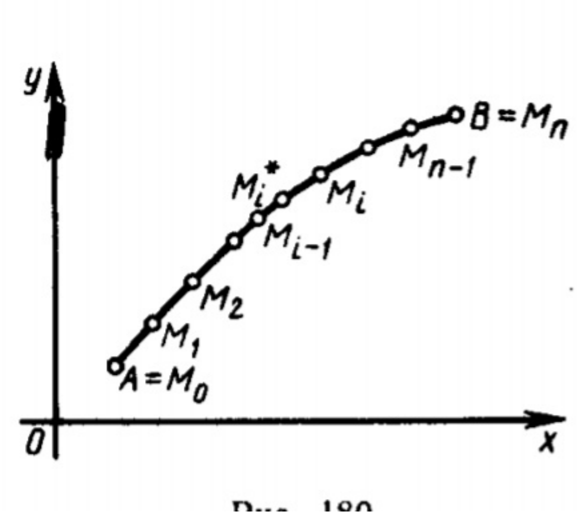
Билет 39.Криволинейные интегралы 1 рода.

1. Определение

Рассмотрим на плоскости OXY некоторую кривую AB, гладкую или кусочно-гладкую, и предположим, что функция $z = f(x, y)$ определена и ограничена кривой AB. Разобьем кривую AB произвольно на n частей точками A $= M_0, M_1, M_2, ..., M_{i-1}, M_i, ..., M_{n-1} =$ B и выберем на каждой из частичных дуг M_{i-1}, M_i произвольную точку M_i^* и составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i^*)\Delta l_i$$

Где Δl_i - длина дуги $M_{i-1} - M_i$



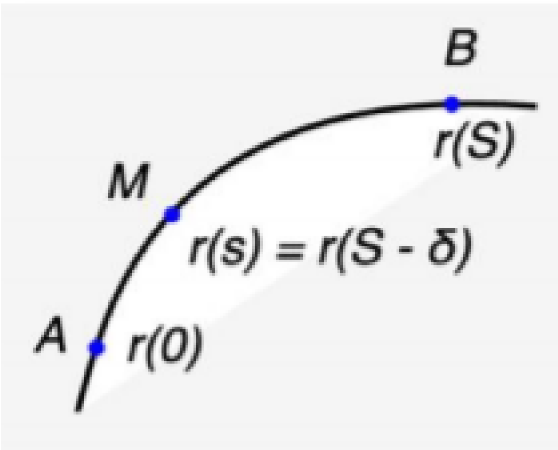
Определение
Если интегральная сумма $\sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i^*)\Delta l_i$ при стремлении Δl_i к нулю имеет предел, то этот предел называется криволинейным интегралом первого рода от ф-и $f(x, y)$ по кривой AB
Обозначение
$I = \int\limits_{AB} f(M)dl = \int\limits_{AB} f(x, y)dl$
f(x,y) - интегрируемая функция вдоль кривой AB, кривая AB - контур интегрирования, A - начальная, B - конечная точки интегрирования.

2. Свойства

2.1. Криволинейный интеграл первого рода не зависит от ориентации кривой

$$\int\limits_{\Gamma} f(x, y, z) ds = \int\limits_{\Gamma-} f(x, y, z) ds$$

Доказательство:



Пусть точка А — начало кривой Г, точка В — конец кривой Г, а S — ее длина. Пусть точка М = r(s) принадлежит кривой АВ, а s — длина дуги АВ. Пусть б — длина дуги ВМ, тогда б = S - s. Представлением кривой ВА является функция r = r(s-б), 0<=б<=S. Совершив замену в интеграле s = S-б, учитывая что ds = -dб, получаем:

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y, z)\, ds = \int\limits_{0}^{S} f(x(s), y(s), z(s))\, ds =$$
$$= -\int\limits_{S}^{0} f(x(S—\delta), y(S—\delta), z(S—\delta))\, d\delta =$$
$$= \int\limits_{0}^{S} f(x(S—\delta), y(S—\delta), z(S—\delta))\, d\delta = \int\limits_{\overset{\frown}{BA}} f(x, y, z)\, d\delta.$$

2.2. Интеграл от 1 равен длине кривой

. $\int\limits_{L} dl = L$. Здесь L - длина дуги L.

2.3. Линейность

а } свойство суперпозиции $\int\limits_L (f(x, y, z) + g(x, y, z))dl = \int\limits_L f(x, y, z)dl + \int\limits_L g(x, y, z)dl$

б } свойство однородности $\int\limits_L \lambda f(x, y, z)dl = \lambda \int\limits_L f(x, y, z)dl.$

Запишем интегральные суммы для интегралов в левых частях равенств. Так как в интегральной сумме число слагаемых конечно, перейдем к интегральным суммам для правых частей равенств. Затем перейдем к пределу, по теореме о предельном переходе в равенстве получим желаемый результат.

2.4. Аддитивность

Если $L = L_1 \cup L_2$, то $\int\limits_L f(x, y, z)dl = \int\limits_{L_1} f(x, y, z)dl + \int\limits_{L_3} f(x, y, z)dl$

Выберем разбиение области L так, чтобы ни один из элементов разбиения не содержал одновременно как элементы L1, так и элементы L2. Это можно сделать по теореме существования замечание к теореме . Далее проводится доказательство через интегральные суммы, как в линейности Теорема существования - Если функция f (x , y , z) непрерывна на кусочно-гладкой кривой L, то она интегрируема по этой кривой.

2.5. Монотонность

4 } . Если на дуге L выполнено неравенство $f(x, y, z) \geqslant g(x, y, z)$, то

$$\int\limits_L f(x, y, z)dl \geqslant \int\limits_L g(x, y, z)dl$$

По условию f >= g следовательно f – g >= 0, тогда интеграл f – g >= 0, по свойству интеграл. От положительной функции,

а по свойству линейности $\int\limits_L f(x, y, z)dl \geqslant \int\limits_L g(x, y, z)dl$

2.6. Внесение модуля под знак интеграла

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx; \quad a < b.$$

Применяя свойство монотонности к неравенствам -|f(x)| <= f(x) <= |f(x)|, получаем

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Отсюда следует что

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

3. Вычисление

Для вычисления криволинейного интеграла 1 рода необходимо привести его к определенному интегралу. Для этого выражаем всё через одну переменную Дифференциал дуги $= \sqrt{(x')^2 + (y')^2}dx$ Пример:
$\int\limits_l \frac{dl}{x-y}$, l-дуга с уравнением $y = \frac{1}{2}x - 2, x \in [0; 4]$

Записываем границы икса как верхний и нижний предел, высчитываем дифференциал дуги и подставляем вместо y уравнение с иксом
$\int\limits_0^4 \frac{\sqrt{1+\frac{1}{4}}}{\frac{1}{2}x+2}dx = \int\limits_0^4 \frac{\sqrt{5}}{x+4}dx = \sqrt{5}\ln x+4\Big|_0^4 = \sqrt{5}\ln 2$

4. Геометрический смысл

Если $f(x, y) = 1$, то $\int_L dl = l$ - длина дуги L

5. Физический смысл

Если $f(x, y)$ - линейная плотность материальной дуги L, то
$\int_L f(x, y)dl = M$ - масса дуги L