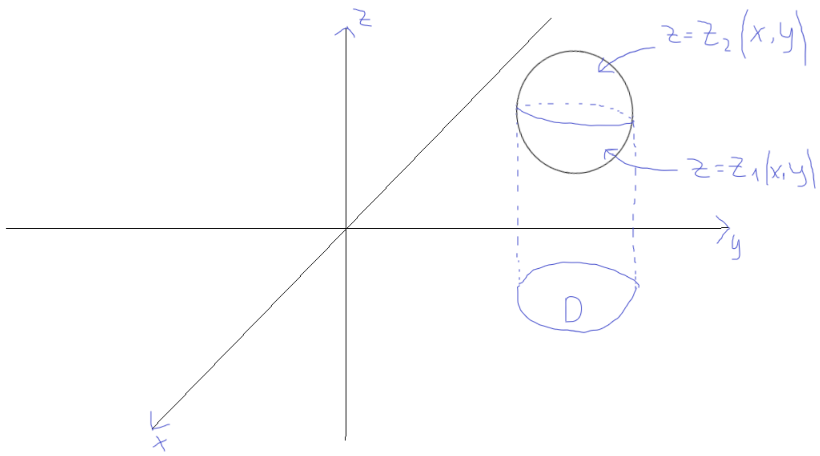
Билет №35. Вычисление тройного интеграла, пример.

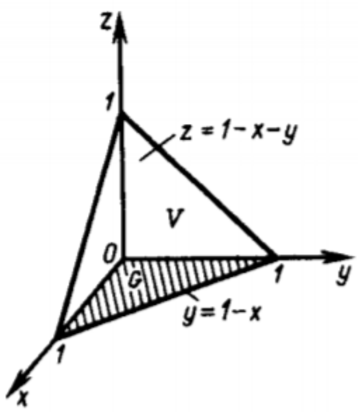
Вычисление данным способом возможно только при выпуклых фигурах относительно оси Oz.



Теорема. Пусть область G ограничена снизу поверхностью $z = z_1(x, y)$, сверху поверхностью $z = z_2(x, y)$, а с боковых сторон цилиндрической поверхностью, и пусть область D - проекция области G на плоскость Oxy. Тогда:

$$\iiint\limits_{G} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_{D} dx\, dy \int\limits_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz$$

Док-во он не писал, сказал такое же, как и в двойном интеграле.
Пример:
Решить интеграл $\iiint\limits_{G} xyzdxdydz$, где $G : x + y + z = 1; x = 0; y = 0; z = 0$



Решение:

$\iiint\limits_G xyzdxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_0^{1-x-y} xyzdz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} xyzdz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} xy(\frac{z^2}{2})\Big|_0^{1-x-y} = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} xy(1-x-y)^2 = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 xdx \int\limits_0^{1-x} (y + x^2y + y^3 - 2xy - 2y^2 + 2xy^2)dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 x(\frac{y^2}{2} + x^2\frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4} + -xy^2 - 2\frac{y^3}{3} + 2x\frac{y^3}{3})\Big|_0^{1-x} = ... = \frac{1}{360}$