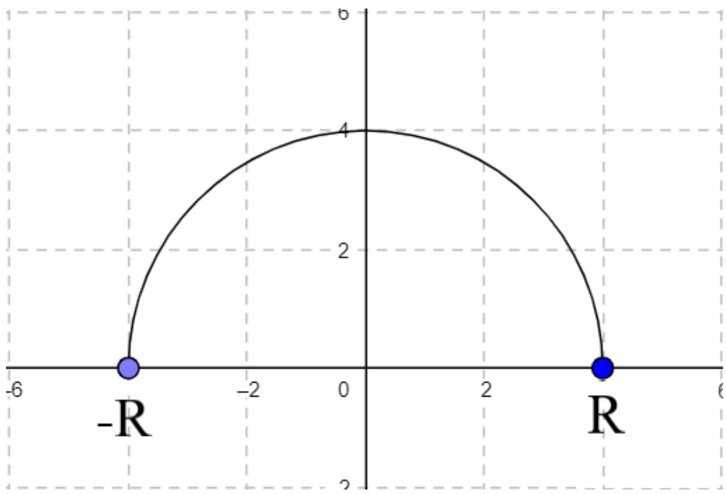
Билет №19. Площадь поверхности тела вращения (без док-ва). Пример.

Теорема.
Пусть криволинейная трапеция, ограниченная $y = y(x) \geq 0$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$ вращается вокруг оси Ox, тогда Площадь поверхности вращения $S_x = 2\pi \int\limits_M^N ydS$, где dS - дифференциал дуги, M, N - начало и конец кривой.//

1. $dS = \sqrt{1 + y_x'^2} dx$ - для декартовых координат
2. $dS = \sqrt{1 + y_t'^2} dt$ - параметрическая форма
3. $dS = \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi$ - для полярных координат

Замечание.
Формула площади вращения всегда меньшее число - нижний предел, а большее число - верхний предел.

Пример. Вычислить S сферы радиуса r.
Сфера получается при вращении полуокружности вокруг оси Ox.
Уравнение окружности в полярных координатах - r=R, $0 \leq \varphi \leq \pi$(верхняя полуокружность)



$$S_x = 2\pi \int\limits_0^\pi ydS, \text{ где } y = r\sin\varphi = R\sin\varphi, \text{ а } dS = \sqrt{r^2 + r_\varphi'^2} d\varphi = \sqrt{R^2 + 0^2} d\varphi$$

$$S_x = 2\pi \int\limits_0^\pi ydS = 2\pi R^2 \int\limits_0^\pi \sin\varphi d\varphi = 2\pi R^2 (-\cos\varphi)\Big|_0^\pi = 4\pi R^2$$