# Билет 33. Переход к полярным координатам в двойном интеграле. Пример.

## Теория

Переход к полярным координатам подразумевает следующую замену:

$$\begin{cases} x = r * cos(\phi) \\ y = r * sin(\phi) \end{cases}$$

Переход обычно делаем, если:
**а)** $D$ - круг, сектор и т.д.
**б)** Подынтегральное выражение содержит $x^2$

Вычислим якобиан:

$$\text{J} = \begin{vmatrix} x'_\phi & x'_r \\ y'_\phi & y'_r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -r * sin(\phi) & cos(\phi) \\ r * cos(\phi) & sin(\phi) \end{vmatrix} =$$

$$= -2sin^2(\phi) - 2cos^2(\phi) = -r => |J| = r =>$$

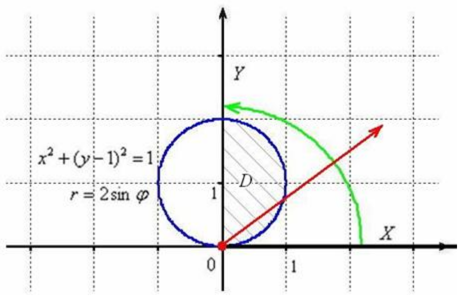
Получаем

$$\iint_D f(x;y)\,dx\,dy = \int_\alpha^\beta d\phi \int f\Big(rcos(\phi); rsin(\phi)\Big) * r\,dr$$

## Пример

**Задача:** Вычислить площадь плоской фигуры, огрниченной линиями
$x^2 + y^2 - 2y = 0$; $x \leq 0$ с помощью двойного интеграла.

**Решение:** Строим чертёж области $D$ в декартовой системе координат.




Перейдём к полярной системе координат, выполнив замену: $\begin{cases} x = r * cos(\phi) \\ y = r * sin(\phi) \end{cases}$

Тогда
$r^2 * cos^2(\phi) + r^2 * sin^2(\phi) - 2r * sin(\phi) = 0$
$r^2 - 2r * sin(\phi) = 0$
$r = 2 * sin(\phi)$

При обходе области $D$ угол меняется от 0 до $\frac{\pi}{2}$, а $r$ меняется от 0 до $2*sin(\phi)$. Следовательно,

$$S = \iint_D dx\,dy = \iint_D r\,dr\,d\phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^{2*sin(\phi)} r\,dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}r^2\Big|_0^{2*sin(\phi)}\right) d\phi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\Big(2*sin(\phi)\Big)^2 d\phi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2(\phi)\,d\phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(1 - cos(2\phi)\Big)\,d\phi =$$

$$= \left(\phi - \frac{1}{2}sin(2\phi)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}sin(\pi) - (0-0) = \frac{\pi}{2}$$

**Ответ:** $\frac{\pi}{2}$ ед$^2$