Билет №3. Подведение под знак дифференциала. Пример. Замена переменной, пример.

Подведение под знак дифференциала.

Пусть требуется найти неопределенный интеграл $\int f(x)dx$.
Предположим, что существуют дифференцируемые функции $u = \varphi(x)$ и $v = g(u)$ такие, что

$$f(x)dx = g(\varphi(x))d\varphi(x) = g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = g(u)du$$

Тогда

$$\int f(x)dx = \int g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int g(u)du$$

Указанное преобразование подынтегрального выражения называют **подведением под знак дифференциала**.

Пример: Найти интеграл $\int \sin^2 x \cos x dx$

$\int \sin^2 x \cos x dx = \int \sin^2 x d(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3} + C$

Замена переменной.

Теорема.
Пусть функция $x = \varphi(t)$ определена и дифференцируема на некотором промежутке T и пусть X - множество значений этой функции, на котором определена функция $f(x)$. Тогда, если на множестве X функция $f(x)$ имеет первообразную, то на множестве T справедлива формула.

$$\int f(x)dx\bigg|_{x=\varphi(t)} = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Пример: Вычислить интеграл $\int \frac{x^3}{(x-1)^2}$

Решение: Положим $x - 1 = t$, тогда x=t+1. Отсюда $dx = dt$

$$\int \frac{x^3}{(x-1)^2}dx = \int \frac{(t+1)^3}{t^2}dt = \int (t + 3 + \frac{3}{t} + \frac{1}{t^2})dt = \frac{1}{2}t^2 + 3t + 3\ln t - \frac{1}{t} + C$$