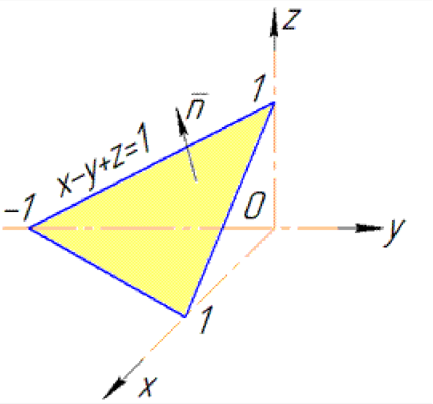
№42 Ориентированные поверхности. Вычисление вектора нормали. Вектор нормали к цилиндрической поверхности и к сфере.

Ориентированные поверхности

Предположим, что все рассматриваемые поверхности двусторонние и кусочногладкие.
Определение: Поверхность называется ориентированной, если учитываем конкретную сторону плоскости, ориентация определяется нормалью, которую строим на соответствующей стороне поверхности. Направление нормали считается положительным, если по оси OZ она образует острый угол, и отрицательным, если тупой угол, так же это можно определить по координате , если $z < 0$, то отрицательное, если $z > 0$, то положительное.(Аналогично для других осей)



Нормаль к поверхности

-вектор, перпендикулярный к касательной плоскости:
1) Поверхность задана неявно $F(x, y, z) = 0$:

$$\overline{n} = (\frac{\partial F}{\partial x}; \frac{\partial F}{\partial y}; \frac{\partial F}{\partial z})$$

2) Поверхность задана в явном виде $z = z(x, y)$:

$$\overline{n} = (-z'_x; -z'_y; 1)$$

3) Поверхность задана параметрически $\begin{cases} x = x(u, \mu) \\ y = y(u, \mu) \\ z = z(u, \mu) \end{cases}$ или $\overline{r}(M) = (x(u, \mu), y(u, \mu), z(u, \mu))$,
обозначим $\overline{r}_u = (x'_u; y'_u; z'_u)$ и $\overline{r}_\mu = (x'_\mu; y'_\mu; z'_\mu)$:

$$\overline{n} = \overline{r}_u \times \overline{r}_\mu$$

Вектор нормали к цилиндрической поверхности и к сфере

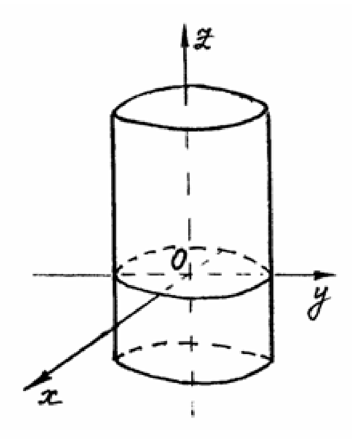
К цилиндрической поверхности:
$x^2 + y^2 = R^2$; $a \le z \le b$

В параметрическом виде $\begin{cases} x = Rcos\mu \\ y = Rsin\mu \\ z = z \end{cases}$, z, μ-параметры, $0 \le \mu \le 2\pi$

$\overline{r} = (Rcos\mu; Rsin\mu; z)$
$\overline{r}_\mu = (-Rsin\mu; Rcos\mu; 0)$
$\overline{r}_z = (0; 0; 1)$

$$\overline{n} = \overline{r}_\mu \times \overline{r}_z = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -Rsin\mu & Rsin\mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \overline{i} * Rcos\mu + \overline{j} * Rsin\mu + 0 * \overline{k} = (Rcos\mu; Rsin\mu; 0)$$

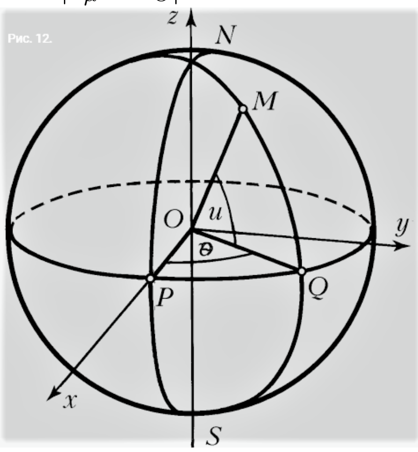
$$|\overline{r}_\mu \times \overline{r}_z| = \sqrt{R^2} = R$$



К сфере:
$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

В параметрической форме: $\begin{cases} x = Rcos\mu * cos\Theta \\ y = Rsin\mu * cos\Theta \\ z = Rsin\Theta \end{cases}$, Θ, μ-параметры, $0 \le \mu \le 2\pi$; $\frac{-\pi}{2} \le \Theta \le \frac{\pi}{2}$

$\overline{n} = |\overline{r}_\mu \times \overline{r}_\Theta| = R^2 * cos\Theta$



Замечание: если важна ориентация поверхности, то знак нормали меняем таким образом, чтобы получить нужное направление.