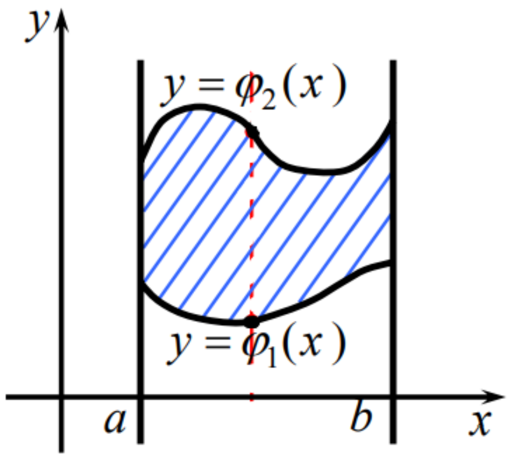
Билет 31. Сведение двойного интеграла к повторному. Пример.

1. Теория

Задача: Пусть есть область D, ограниченная сверху графиком функции $\phi_2(x)$, снизу графиком функции $\phi_1(x)$; слева и справа прямыми $x = a$ и $x = b$. Требуется найти его площадь. Площадь S равна

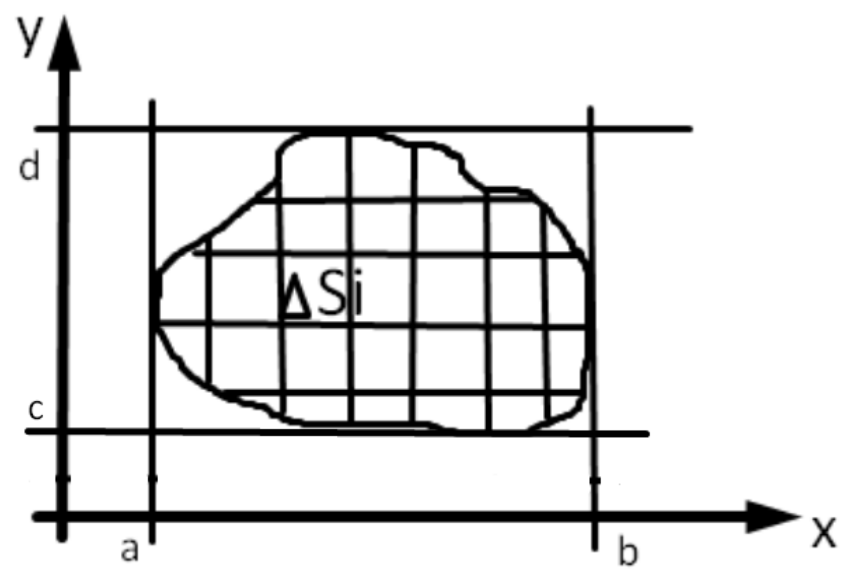
$$S = \iint_D f(x;y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x;y)\,dy \right) dx$$



Обозначение:

$$\int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x;y)\,dy \right) dx = \int_a^b dx \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x;y)\,dy$$

Доказательство: Пусть в области D $a \le x \le b$; $c \le y \le d$. Разобъем отрезок $[a;b]$ и $[c;d]$ точками x_i и y_i и проведем через эти точки прямые, параллельные осям координат. В качестве опорных точек возьмем $f(x_i;y_j)$.



$$\iint_D f(x;y)\,dx\,dy = \lim_{d_i\to 0}\sum f(x_i;y_j)\Delta S_{ij} = \lim_{\Delta x,\Delta y\to 0}\sum_i\Big(\sum_j f(x_i;y_j)*\Delta S_{ij}\Big) =$$

$$= \lim_{\Delta x,\Delta y\to 0}\sum_i\Big(\sum_j f(x;y)\Big) = \lim_{\Delta x,\Delta y\to 0}\sum_i\Big(\sum_j f(x;y)*\Delta x_i*\Delta y\Big) =$$

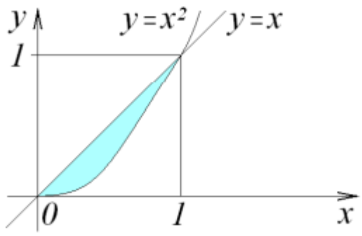
$$= \lim_{\Delta x,\Delta y\to 0}\sum \Delta x_i*\Big(\sum_j f(x_i;y_j)*\Delta y_j\Big) = \lim_{\Delta x\to\phi}\sum_i \Delta x\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x;y)\,dy =$$

$$= \int_a^b\Big(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x;y)\,dy\Big)dx$$

2. Пример

Вычислить интеграл:

$$\iint_D (x+y)\,dx\,dy;D: y=x^2; y=x$$



$$\begin{cases} x^2=y\\ x=y\end{cases}\quad\begin{cases} x=0\\ y=0\end{cases}\quad\begin{cases} x=1\\ y=1\end{cases}$$

$$\iint_D (x+y)\,dx\,dy = \int_0^1 dx\int_{x^2}^{x}(x+y)\,dy = \int_0^1 (xy+\frac{y^2}{2})\Big|_{x^2}^{x}\,dx =$$

$$= \int_0^1\Big(xx - xx^2 + \frac{1}{2}(x^2-x^4)\Big)\,dx = \int_0^1 (x^2 - x^3 + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x^4)\,dx =$$

$$= \int_0^1 (1.5x^2 - x^3 - 0.5x^4)\,dx = \Big(\frac{1}{2}x^3 - \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{10}\Big)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{10} = 0.15$$