Билет №8. Интегрирование тригонометрических выражений

Пусть имеются интегралы вида $\int R(sin(x), cos(x))dx$

Эти интегралы приводятся к интегралам от рациональных дробей при помощи универсальной тригонометрической подстановки:

$t = tg(\frac{x}{2})$

$x = 2 * arctg(t)$

$dx = \frac{2}{1+t^2}$

$sin(x) = \frac{2*t}{1+t^2}$

$cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

Замечание:

$sin(x) = \frac{2*tg(\frac{x}{2})}{1+tg^2(\frac{x}{2})}$

$cos(x) = \frac{1-tg^2(\frac{x}{2})}{1+tg^2(\frac{x}{2})}$

Эта подстановка часто приводит к длинным вычислениям, так что в ряде ситуаций лучше использовать другие методы:

I
- $R(-sin(x), cos(x)) = -R(sin(x), cos(x))$ - синус нечетной степени
  Делаем подстановку: $t = cos(x)$
- $R(sin(x), -cos(x)) = -R(sin(x), cos(x))$ - косинус нечетной степени
  Делаем подстановку: $t = sin(x)$

II $R(-sin(x), -cos(x)) = R(sin(x), cos(x))$ - и синус, и косинус в нечетной степени

Например: $sin(x) * cos^3(x)$

Замена: $t = tg(x)$

$dx = \frac{dt}{1+t^2}$

$cos^2(x) = \frac{1}{1+t^2}$

$sin^2(x) = \frac{t^2}{1+t^2}$

III Если синус и косинус в четной степени, то можно воспользоваться формулами понижения степени:

$cos^2(x) = \frac{1+cos(2x)}{2}$

$sin^2(x) = \frac{1-cos(2x)}{2}$

IV Для интегралов вида: $\int sin(\alpha x)*cos(\beta y)dx$; $\int cos(\alpha x)*cos(\beta y)dx$; $\int sin(\alpha x)*sin(\beta y)dx$
Используем формулы произведения синусов/косинусов/синуса на косинус:

$sin(\alpha) * cos(\beta) = \frac{1}{2} * (sin(\alpha + \beta) + sin(\alpha - \beta)$

$cos(\alpha) * cos(\beta) = \frac{1}{2} * (cos(\alpha + \beta) - cos(\alpha - \beta)$

$sin(\alpha) * sin(\beta) = \frac{1}{2} * (cos(\alpha - \beta) + cos(\alpha + \beta)$