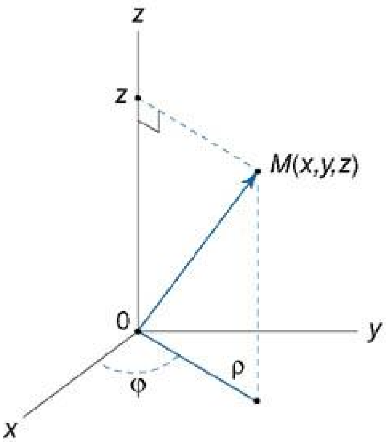
37. Переход к цилиндрическим и сферическим координатам в тройном интеграле.

1. Переход к цилиндрическим координатам.

Когда область интегрирования образована цилиндрической поверхностью, то в таких случаях переход к цилиндрическим координатам упрощает вычисление тройного интеграла.

В цилиндрических координатах положение точки $M(x, y, z)$ в пространстве $Oxyz$ определяется тремя числами - ρ, ϕ, z, где:

ρ - длина радиуса-вектора проекции точки M на плоскость Oxy,
ϕ - угол, образованный этим радиусом-вектором с осью Ox,
z - проекция на ось Oz



Цилиндрические координаты связаны с декартовыми соотношениями:
$x = \rho cos\phi$; $y = \rho sin\phi$; $z = z$

Тогда формула замены переменных при данном преобразовании имеет вид:

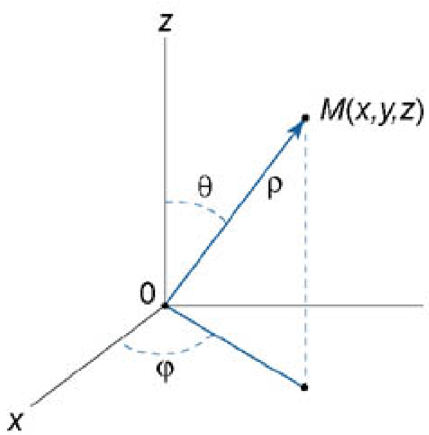
$$\iiint\limits_U f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_{U'} f(\rho cos\phi, \rho sin\phi, z)\rho d\rho d\phi dz$$

2. Переход к сферическим координатам.

Тройной интеграл удобнее вычислять в сферических координатах, когда область интегрирования U представляет собой шар (или некоторую его часть) и/или когда подынтегральное выражение имеет вид $f(x^2 + y^2 + z^2)$.

В сферических координатах положение точки $M(x, y, z)$ в пространстве $Oxyz$ определяется тремя числами - ρ, ϕ, θ, где:

ρ - длина радиуса-вектора точки M
ϕ - угол, образованный проекцией радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$ на плоскость Oxy и осью Ox
θ - угол отклонения радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$ от положительного направления оси Oz



Сферические координаты связаны с декартовыми соотношениями:
$x = \rho cos\phi sin\theta$; $y = \rho sin\phi sin\theta$; $z = \rho cos\theta$

Тогда формула замены переменных при данном преобразовании имеет вид:

$$\iiint\limits_U f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_{U'} f(\rho cos\phi sin\theta, \rho sin\phi sin\theta, \rho cos\theta)\rho^2 sin\theta d\rho d\phi d\theta$$