Билет 7. Интегрирование иррациональных выражений. Тригонометрические подстановки.

Определение Рациональной функцией R(u,v) от аргументов u,v... называется выражение в котором над аргументами выполняются операции "+" "-" "*" "/"

Выражение называется иррациональным если оно содержит корни

Как избавиться от корней:

1. Если интеграл вида: $\int(R(x,(\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{p}{q}},...,(\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{px}{qx}})dx$ - приводим к интегралу от рациональной дроби при помощи замены: $t=\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, где m - общий знаменатель

2. Если под $\int$ есть x и $\sqrt{ax+b}$ или он приводится к такому виду, тогда делаем замену $ax+b=t^n$

Пример:

$$\int\frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx$$

В таком случае делаем замену:

$3x+1=t^3$

$3x=t^3-1$

$x=\frac{t^3-1}{3}$

$t=\sqrt[3]{3x+1}$

В итоге получаем:

$\int\frac{\frac{t^3-1}{3}+1}{t}d\frac{t^3-1}{3}=\frac{1}{3}\int\frac{(t^3+2)3t^2}{3t}dt=\frac{1}{3}\int(t^3+2)tdt=\frac{1}{3}\int t^4+2tdt=\frac{t^5}{15}+\frac{t^2}{3}+C=\frac{\sqrt[3]{(3x+1)^5}}{15}+\frac{\sqrt[3]{(3x+1)^2}}{3}+C$

3. Если под $\int$ есть квадратичная функция под корнем ax^2+bx+c и $x-a$, тогда делаем замену $x-a=\frac{1}{t}$

Пример:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{2ax-x^2}}$$

В таком случае делаем замену:

$x=\frac{1}{t}$

$t=\frac{1}{x}$

В итоге получаем:

$\int \frac{d\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{2a}{t}-\frac{1}{t^2}}} = -\int \frac{t\frac{1}{t^2}dt}{\sqrt{\frac{2at-1}{t}}} = -\int \frac{\frac{1}{t}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{2at-1}} = -\frac{1}{2a}\int \frac{d(2at-1)}{\sqrt{2at-1}} = -\frac{1}{2a}\frac{\sqrt{2at-1}}{\frac{1}{2}} + C = -\frac{\sqrt{2at-1}}{a} + C = -\frac{\sqrt{\frac{2a}{x}-1}}{a} + C$

4. Тригонометрические подстановки. Если под $\int$ есть x и $\sqrt{a^2-x^2}$, тогда делаем замену $x = a\sin t$. Если под $\int$ есть x и $\sqrt{x^2-a^2}$, тогда делаем замену $x = \frac{a}{\cos t}$. Если под $\int$ есть x и $\sqrt{a^2+x^2}$, тогда делаем замену $x = a\tan t$

Пример:

$$\int x^2\sqrt{4-x^2}dx$$

В таком случае делаем замену:
$x = 2\sin t$
$t = \arcsin\frac{x}{2}$
В итоге получаем:
$\int 4\sin^2 t\sqrt{4-4\sin^2 t}d2\sin t = \int 8\sin^2 t\sqrt{1-\sin^2 t}d2\sin t = \int 8\sin^t\sqrt{\cos^2 t}d2\sin t = \int 8\sin^2 t\cos td2\sin t = \int 16\sin^t\cos^2 tdt = \int \sin^2 tdt = \int 2-2\cos 4tdt = \int 2dt - \frac{2}{4}\int \cos 4td4t = 2t - \frac{1}{2}\sin 4t$
$\sin(4\arcsin\frac{x}{2}) = 4\frac{x}{2}\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}(1-2\frac{x^2}{4})$
$\sin 4a = 2\sin 2a\cos 2a = 4\sin a\cos a(1-2\sin^2 a)$
$2t - \frac{1}{2}\sin 4t = 2\arcsin\frac{x}{2} - \frac{x\sqrt{4-x^2}(1-\frac{x^2}{2}}{2} + C$

Пример с тангенсом:

$$\int \frac{dx}{(\sqrt{4+x^2})^3}$$

Сделаем замену:
$x = 2\tan t$
$t = \arctan\frac{x}{2}$
В итоге получаем:
$\int \frac{d2\tan t}{(\sqrt{4+4\tan^2 t})^3} = 2\int \frac{dt}{\cos^2 t(2\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}})^3} = 2\int \frac{dt}{8\cos^2 t\frac{1}{\cos^3 t}} = 2\int \frac{dt}{\frac{8}{\cos t}} = \frac{2}{8}\int \cos tdt = \frac{1}{4}\sin t = \frac{1}{4}\frac{x}{\sqrt{x^2+4}} + C$