6. Интегрирование рациональных дробей. Теорема о представлении неправильной дроби. Простейшие правильные дроби. Алгоритм разложения правильной дроби на простейшие.

1. Простейшие элементрные дроби.

Простейшими элементарными дробями называют:

1.

$$\frac{A}{x-a}$$

2.

$$\frac{A}{(x-a)^m},\ m > 1,$$

3.

$$\frac{Ax+B}{x^2+px+q},\quad \frac{p^2}{u} - q < 0,$$
$$..$$

4.

$$\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k},\quad \frac{p^2}{u} - q < 0,$$
$$..$$

2. Алгоритм интегрирования рациональных дробей.

При интегрировании рациональных дробей надо использовать следующий алгоритм действий Пусть нам дана рациональная функция

$$\frac{P(x)}{Q(x)},\quad P(x)\ \ Q(x)\ \ -$$

1. Если дробь неправильная.

Если степень P(x) больше степени Q(x), то дробь надо преобразовать в правильную выделив целое выражение. Просто делим в столбик числитель на знаменатель. У нас получится целое число, которое потом будет на изи интегрироваться и чуть более простая дробь.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = F(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},\quad \frac{R(x)}{Q(x)}\ \ -$$

2. Разложить знаменатель.

Q(x) раскладываем на произведение одночленов и/или несократимых квадратных выражений.

3. Разложение дроби через метод неопределённых коэффицентов.

Метод неопределённых коэффициентов представляет собой последовательность действий для разложения числителя дроби и знаменателя на сумму простых дробей. При использовании метода неопределённых коэффициентов исходная дробь может быть представлена в следующем виде

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-a_1)} + \frac{A_2}{(x-a_2)} + \ldots + \frac{A_3x+B_1}{(x^2+p_1x+q_1^2)^{n_1}} + \frac{A_4x+B_2}{(x^2+p_2x+q_2^2)^{n_2}} \ldots$$

После получения выражения надо привести всё к общему знаменателю и составить систему уравнений для каждой степени `x'.

4. Интегрируе полученные простые дроби по одной.

5. Пример 1 интегрирования рациональной дроби.

$$\int \frac{(x^2-19x+6)}{(x-1)(x^2+5x+6)}\,dx \;= \int \frac{(x^2-19x+6)}{(x-1)(x+2)(x+3)}\,dx$$

Подынтегральная функция может быть разложена в следующем виде:

$$\frac{(x^2-19x+6)}{(x-1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}$$

После приведения к общему знаменателю мы получим следующее равенство:

$$\frac{A(x+2)(x+3)+B(x-1)(x+3)+C(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)(x+3)} = \frac{x^2-19x+6}{(x-1)(x+2)(x+3)}$$

Отбросив числители получим:

$$A(x+2)(x+3)+B(x-1)(x+3)+C(x-1)(x+2) = x^2-19x+6$$

Раскрываем скобки в левой части:

$$A(x^2+5x+6)+B(x^2+2x-3)+C(x^2+x-2) = x^2-19x+6$$

$$Ax^2+5Ax+6A+Bx^2+2Bx-3B+Cx^2+Cx-2C = x^2-19x+6$$

Отдельно берём коэффициенты при $x^2,\ x\quad x^0$.
При x^2 у A коэффициент равен 1, у B равен 1 и у C он равен 1. При x^2 коэффициент равен 1. Получим уравнение:

$$A+B+C=1$$

При x^1 у A коэффициент равен 5, у B коэффициент равен 2, а у C коэффициент равен 1. При x^1 коэффициент равен -19. Получим уравнение:

$$5A+2B+C=-19$$

При x^0 у A коэффициент равен 6, у B коэффициент равен -3, у C коэффициент равен -2. При x^0 коэффициент равен 6. Получим следующее уравнение:

$$6A-3B-2C=6$$

Из полученных уравнений составляем систему:

$$\begin{cases} A+B+C=1 \\ 5A+2B+C=-19 \\ 6A-3B-2C=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=1-A-B \\ 5A+2B+1-A-B=-19 \\ 6A-3B-2(1-A-B)=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=1-A-B \\ 4A+B=-20 \\ 8A-B=8 \end{cases} \Rightarrow$$

$$12A=-12 \Rightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=-16 \\ C=18 \end{cases}$$

Полученные коэффициенты подставляем в разложение:

$$\frac{(x^2-19x+6)}{(x-1)(x+2)(x+3)} = \frac{-1}{x-1} + \frac{-16}{x+2} + \frac{18}{x+3}$$

Данное разложение можно проверить приведя правую часть к общему знаменателю.
Проинтегрируем полученные дроби:

$$\int (-\frac{1}{x-1} - \frac{16}{x+2} + \frac{18}{x+3})dx = -\int \frac{dx}{x-1} - 16\int \frac{dx}{x+2} + 18\int \frac{dx}{x+3}$$

Используя навыки интегрирования простых дробей и таблицу интегралов вычислим интегралы. Полученный ответ:

$$= -\ln|x-1| - 16\ln|x+2| + 18\ln|x+3| + C, \quad = const$$

6. Пример 2 интегрироваания рациональной дроби.

Найти неопределённый интеграл:

$$\int \frac{(x^2-6x+8)dx}{x^3+8} = \int \frac{(x^2-6x+8)dx}{(x+2)(x^2-2x+4)}$$

Применим метод неопределённых коэффициентов:

$$\frac{x^2-6x-8}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{X^2-2x+4}$$

Приведём дробь к общему знаменателю:

$$\frac{A(x^2-2x+4)+B(x^2+2x)+C(x+2)}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \frac{x^2-6x+8}{(x+2)(x^2-2x+4)}$$

$$A(x^2-2x+4)+B(x^2+2x)+C(x+2) = x^2-6x+8$$

Полученная система уравнений будет иметь вид:

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -2A+2B+C=-6 \\ 4A+2C=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=1-A \\ -4A+C=-8 \\ 4A+2C=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=-1 \\ C=0 \end{cases}$$

Подставим полученное разложение вместо подынтегральной функции и проинтегрируем:

$$\int (\frac{2}{x+2} - \frac{x}{x^2-2x+4})dx = 2\int \frac{dx}{x+2} + \int \frac{-\frac{1}{2}d(x^2-2x+4)-dx}{(x^2-2x+4)} =$$

$$= 2\ln|x+2| - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2-2x+4)}{(x^2-2x+4)} - \int \frac{dx}{x^2-2x+1+3} =$$

$$2\ln|x+2| - \frac{1}{2}\ln(x^2-2x+4) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{x-1}{\sqrt{3}}) + C, \quad C = const$$