1. Билет №17. Вычисление объемов тел через площади сечений. Объем тела вращения.

1.1. Объём тела сечения:

Теорема: Пусть сечение тела плоскостью $\perp$ оси OX зависит только от координаты пересечения с осью, и $F(x)$ - площадь данного сечения. Если тело ограничено плоскостями $x = a$; $x = b$, то его объём будет равен: $V = \int_a^b F(x)dx$

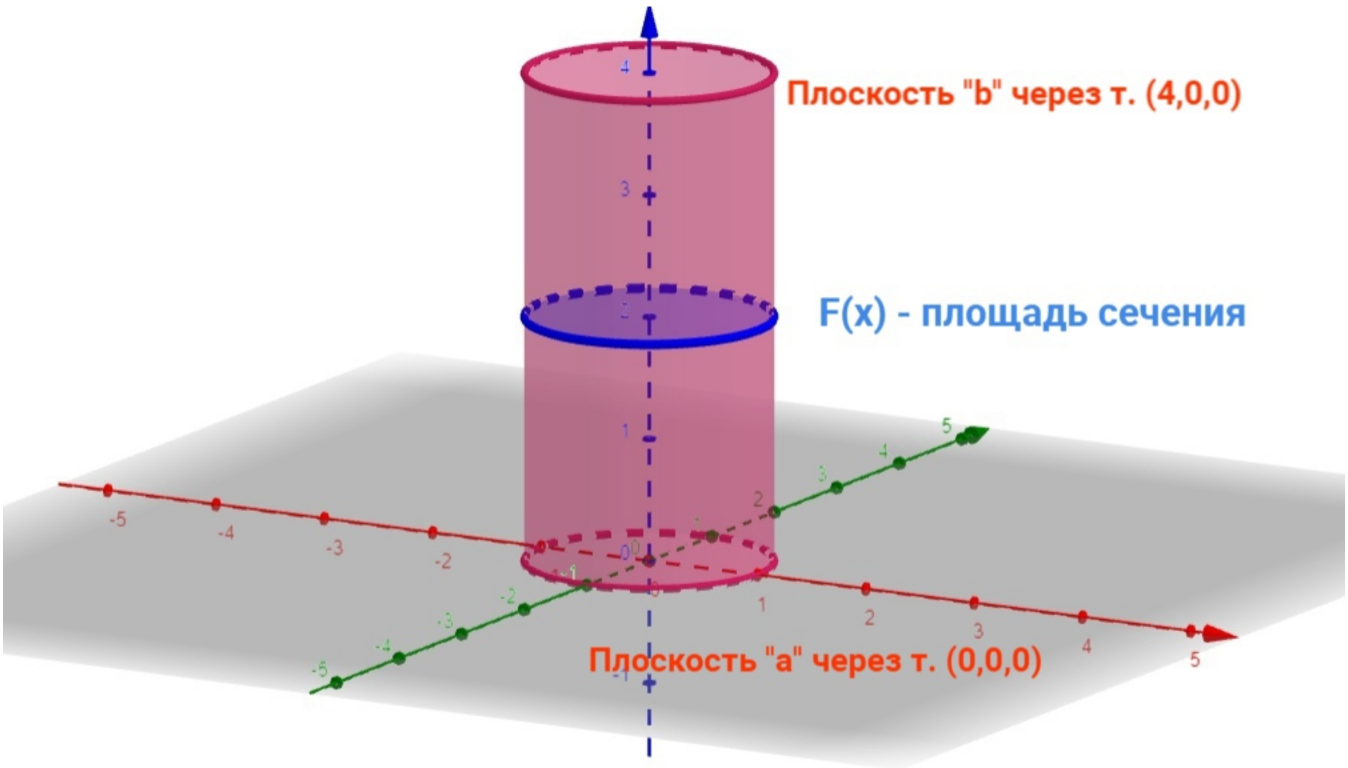

Рисунок 1.1. Площадь сечения

Разобьём отрезок $[a, b]$ на элементарные интервалы Δx_K, тогда объём тела разобьётся в сумму элементарных объёмов V_K. При $\Delta x_K \to 0$ соответственный объём V_K можно приблизительно считать объёмом цилиндра. $V_K \approx V_{\text{цил.}} = S_{\text{осн.}} * h = F_x * \Delta x$

$$V = \sum_{k=1}^{n} V_K \approx \sum_{k=1}^{\infty} F_{ck} * \Delta x_K \quad \text{и} \quad V = \lim_{\Delta x_K \to 0} \sum_{k=1}^{\infty} F_{ck} * \Delta x_K = \int_a^b F(x)dx$$

1.2. Объём тела вращения:

Теорема: пусть прямолинейная трапеция образованная графиком функции $y = y(x)$, осью OX, прямыми $x = a$; $x = b$, вращается вокруг оси OX, тогда объём тела вращения будет равен: $V_x = \pi * \int_a^b y^2(x)dx$

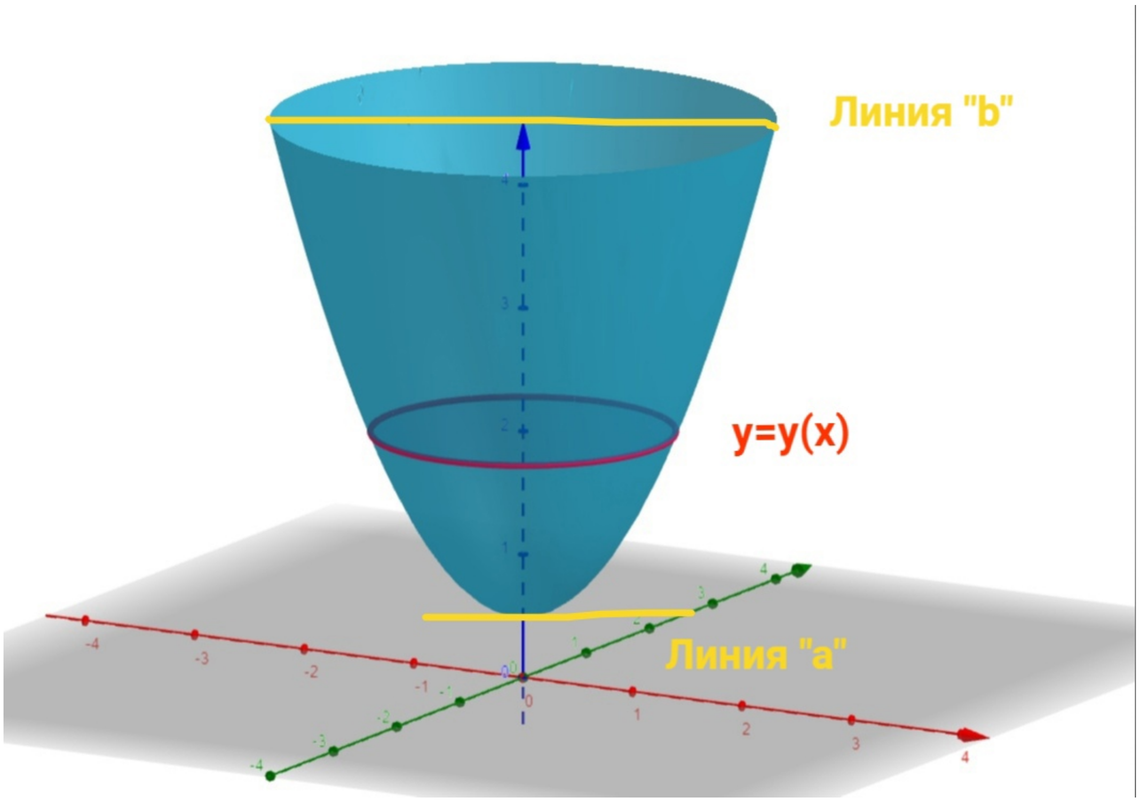

Рисунок 1.2. Объём тела вращения

(Площадь сечения $\perp$ оси OX)

Док-во:
$F(x) = \pi * R^2$, по предыдущей теореме $\Rightarrow \mathrm{V}_x = \int_a^b F(x)dx = \int_a^b \pi * y^2(x)dx = \pi \int_a^b y^2(x)dx$

Замечание: Если тело вращается вокруг оси OY, то его объём вычисляется по формуле: $V_y = \pi \int_a^b x^2(y)dy$