Sveučilište u Zagrebu
Fakultet elektrotehnike i računarstva

Međuispit iz predmeta **TEORIJA INFORMACIJE**, 30. 11. 2023.

Pravilo bodovanja zadataka

Svaki točno odgovoreni zadatak donosi 5 bodova, netočno odgovoreni 2 negativna boda, a neodgovoreni 0 bodova.

Zadatak 1. Komunikacijskim kanalom prenosi se jako dugačak slijed poruka, pri čemu su poruke generirane iz skupa X koji sadrži četiri simbola, $X = \{x_1,...,x_4\}$. Omjer vjerojatnosti pojavljivanja poruka je $P(x_1)$: $P(x_2)$:$P(x_3)$:$P(x_4)$ = 1 : 2 : 2 : 5. Matrica uvjetnih vjerojatnosti prijelaza u kanalu zadana je kao:

$$[P(y_j|x_i)] = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2 \end{bmatrix}$$

Koliko iznosi entropija šuma u kanalu?

a) 1,761 bit/simbol;
b) 1,671 bit/simbol;
c) 0,239 bit/simbol;
d) 0,329 bit/simbol;
e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Sukladno uvjetima navedenim u zadatku vrijed

$P(x_1) : P(x_2) : P(x_3) : P(x_4) = 1 : 2 : 2 : 5$

Simboli koji se pojavljuju na izlazu iz izvorišta moraju sačinjavati potpuni vjerojatnosni skup.

Iz toga slijedi: $P(x_1) = 0{,}1$, $P(x_2) = P(x_3) = 0{,}2$ i $P(x_4) = 0{,}5$, tj.

$[P(x_i)] = [0{,}1 \;\; 0{,}2 \;\; 0{,}2 \;\; 0{,}5]$

Matrica združenih vjerojatnosti računa se prema poznatom izrazu:

$$[P(x_i, y_j)] = [P(x_i)P(y_j|x_i)] = \begin{bmatrix} 0{,}01 & 0{,}02 & 0{,}02 & 0{,}05 \\ 0{,}02 & 0{,}04 & 0{,}1 & 0{,}04 \\ 0{,}02 & 0{,}1 & 0{,}04 & 0{,}04 \\ 0{,}25 & 0{,}05 & 0{,}1 & 0{,}1 \end{bmatrix}$$

Entropiju šuma izračunamo prema izrazu:

$$H(Y|X) = -\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} P(x_i, y_j)\log_2 P(y_j|x_i) \;\left[\frac{\text{bit}}{\text{simbol}}\right]$$

$$H(Y|X) = 1{,}761\ \frac{\text{bit}}{\text{simbol}}$$

Zadatak 2. Prijenos poruka provodi se abecedom koju čini osam različitih simbola. Svaki je simbol fizikalno prikazan signalom trajanja $\tau = 1$ ms. Vjerojatnosti predaje simbola su: $P(x_i) = 2^{-i}$, $i = 1, 2, \ldots, 7$, $P(x_8) = P(x_7)$. Odredite kapacitet kanala za prijenos poruka bez prisustva smetnji.

a) 2000 bit/s;
b) 3000 bit/s;
c) 1,98 bit/s;
d) 3 bit/s;
e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Zanima nas maksimalna brzina prijenosa informacije od izvora do odredišta koja se može postići – kapacitet kanala. Sadržaj informacije koji se prenese jednak je transinformaciji, tj. $I(X;Y)$. Ako s F označimo frekvenciju pojave signala: $F = 1/\tau$, kapacitet kanala možemo izraziti kao:

$$C = \max_{\{p(x_i)\}} F \cdot I(X;Y) = F \max_{\{p(x_i)\}} \left[H(X) - H(X \mid Y) \right] \text{ bit/s}$$

pri čemu se traži takva razdioba apriornih vjerojatnosti da se postigne maksimalna brzina prijenosa. Za idealni kanal, bez prisustva smetnji, $H(X \mid Y) = 0$, izraz za kapacitet kanala glasi:

$$C = F \max_{\{p(x_i)\}} \left[H(X) \right]$$

Maksimum funkcije $H(X)$ postiže se uz ravnomjernu razdiobu vjerojatnosti:

$$\max_{\{p(x_i)\}} H(X) = \log_2 8 = 3 \text{ bit/simbol}$$

tako da je kapacitet:

$$C = 3000 \text{ bit/s}$$

Zadatak 3. Promatrajte kanal kojeg karakterizira svojstvo da su mu reci matrice kanala, $[P(Y|X)]$, permutacije jedan drugog, a zbroj članova matrice po svakom stupcu međusobno je jednak. Pri tome X predstavlja skup simbola na ulazu, a Y skup simbola na izlazu kanala. Matrica kanala zadana je sljedećim izrazom:

$$\left[P(Y|X) \right] = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/6 & a \\ b & c & d & e \end{bmatrix}, 0 < a, b, c, d, e < 1$$

Odredite kapacitet kanala. **Napomena:** Permutacija brojeva q_1, q_2, q_3, q_4 (brojevi q_i predstavljaju prvi redak matrice kanala) je svaka uređena četvorka oblika (r_1, r_2, r_3, r_4) u kojoj se svaki od brojeva q_1, q_2, q_3, q_4 javlja točno jedanput. Brojevi r_i predstavljaju drugi redak matrice kanala.

a) 2 bit/simbol;

b) ≈0,082 bit/simbol;

c) ≈1,918 bit/simbol;

d) ≈1,585 bit/simbol;

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

S obzirom da zbroj elemenata po retku matrice kanala mora iznositi 1, slijedi da je $a = 1/6$. Pod uvjetom da je drugi redak permutacija prvog retka (dakle, sadrži dvije vjerojatnosti 1/3 i dvije vjerojatnosti 1/6) te uz zadani uvjet da je zbroj elemenata matrice kanala po svakom stupcu međusobno jednak, postoji samo jedno moguće rješenje, a to je:

$$P(Y|X) = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Očito se radi o djelomično simetričnom kanalu (engl. *weakly symmetric channel*) čiji se kapacitet računa prema izrazu:

$$C = \log\left[\operatorname{card}(Y)\right] - H(Y|x)$$

pri čemu je

$$H(Y|x) = \sum_{j=1}^{4} P(y_j|x_i)\log\left(\frac{1}{P(y_j|x_i)}\right), i \in \{1, 2\}$$

Dakle, za proračun kapaciteta kanala dovoljno je izračunati entropiju $H(Y|x)$ za jedan redak matrice kanala. S obzirom da skup Y ima 4 člana, vrijedi log[card (Y)] = 2 te:

$$H(Y|x) = -2\frac{1}{3}\log_2\frac{1}{3} - 2\frac{1}{6}\log_2\frac{1}{6} = \frac{2}{3}\log_2 3 + \frac{1}{3}\log_2 6 = \frac{1}{3} + \log_2 3$$

pa je kapacitet kanala jednak $C = 2 - 1/3 - \log_2(3) = 5/3 - \log_2(3) = 0{,}082$ bit/simbol.

Zadatak 4. Razmatrajte skup simbola x_i, i = 1, .., 5. Razdioba vjerojatnosti zadana je sljedećim izrazima: $P(x_1) = P(x_2) + P(x_3) + P(x_4)$, $P(x_2) = P(x_3) = P(x_4) = P(x_5)$, $\sum_{i=1}^{5} P(x_i) = 1$. Koder izvora kodira slučajan slijed simbola x_i binarnim kodom koristeći tehniku Shannon-Fano. Ta tehnika ne daje uvijek jedinstveni kôd. Drugim riječima, za neku zadanu razdiobu vjerojatnosti može proizvesti više od jednog koda, pri čemu ti kodovi mogu imati različite srednje duljine kodne riječi. Nadalje, pretpostavimo da koder kodira jako dugačak slijed simbola x_i. Odredite koliko će iznositi apsolutni iznos razlike, u prosječnom broju poslanih binarnih simbola, na 700 simbola x_i, ako se koriste najefikasnija i najmanje efikasna inačica koda.

a) 100 bita;

b) 150 bita;

c) 160 bita;

d) 200 bita;

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Iz zadanih izraza možemo izračunati razdiobu vjerojatnosti nad skupom simbola x_i: $P(x_1) = 3/7$, $P(x_2) = P(x_3) = P(x_4) = P(x_5) = 1/7$. Prilikom kodiranja tehnikom Shannon-Fano potrebno je poredati te simbole po padajućim vjerojatnostima.

x_1	3/7	0			l_1 = 1 bit
x_2	1/7	1	0	0	l_2 = 3 bit
x_3	1/7	1	0	1	l_3 = 3 bit
x_4	1/7	1	1	0	l_4 = 3 bit
x_5	1/7	1	1	1	l_5 = 3 bit

Nazovimo ovaj kôd K_1. Njegova srednja duljina kodne riječi neka je L_1.

$$L_1 = \sum_{i=1}^{5} l_i P(x_i) = \frac{15}{7}\text{bit/simbol}$$

Tehnika Shannon-Fano omogućava i drugačiji način kodiranja.

x_1 3/7 0 0 $l_1 = 2$ bit

x_2 1/7 0 1 $l_2 = 2$ bit

x_3 1/7 1 0 $l_3 = 2$ bit

x_4 1/7 1 1 0 $l_4 = 3$ bit

x_5 1/7 1 1 1 $l_5 = 3$ bit

Nazovimo ovaj kôd K_2. Njegova srednja duljina kodne riječi neka je L_2.

$$L_2 = \sum_{i=1}^{5} l_i P(x_i) = \frac{16}{7} \text{ bit/simbol}$$

Konačno, postoji i treća inačica koda.

x_1 3/7 0 0 $l_1 = 2$ bit

x_2 1/7 0 1 $l_2 = 2$ bit

x_3 1/7 1 0 0 $l_3 = 3$ bit

x_4 1/7 1 0 1 $l_4 = 3$ bit

x_5 1/7 1 1 $l_5 = 2$ bit

Nazovimo ovaj kôd K_3. Njegova srednja duljina kodne riječi neka je L_3.

$$L_3 = \sum_{i=1}^{5} l_i P(x_i) = \frac{16}{7} \text{ bit/simbol}$$

Očito vrijedi $L_2 = L_3 > L_1$. S obzirom da je entropija $H(X)$ jednaka u sva tri slučaja, najefikasniji kôd je onaj s najmanjom srednjom duljinom kodne riječi, tj. kôd K_1, a najmanje efikasni K_2, odnosno K_3. Dakle, slijed duljine 700 simbola x_i bit će prosječno kodiran s 1500 bita ako primijenimo kôd K_1, odnosno s 1600 bita ako primijenimo kôd K_2 ili K_3. **Konačno, razlika iznosi 100 bita.**

Zadatak 5. Neki diskretni bezmemorijski izvor X generira dva simbola, x_1 i x_2, pri čemu je $P(x_1) = 0{,}9$ i $P(x_2) = 0{,}1$. Simboli x_1 i x_2 kodiraju se kodom C tako da je $C(x_1) = 0$, odnosno $C(x_2) = 1$. Pretpostavimo da neki sličan izvor X_2 generira parove simbola x_1 i x_2, pri čemu su vjerojatnosti $P(x_1)$ i $P(x_2)$ iste kao u slučaju izvora X. Neka su parovi simbola kodirani Huffmanovim kodom C_2. Odredite omjer učinkovitost koda C_2 prema kodu C.

a) 2;
b) 0,645;
c) 1,55;
d) 1;
e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Za kod C vrijedi sljedeće:

$$L = \sum_{i=1}^{2} P(x_i) l_i = 0{,}9 + 0{,}1 = 1 \left[\frac{\text{bit}}{\text{simbol}}\right]$$

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{2} P(x_i) \log_2[P(x_i)] = -0{,}9 \log_2(0{,}9) - 0{,}1 \log_2(0{,}1) = 0{,}469 \left[\frac{\text{bit}}{\text{simbol}}\right]$$

$$\varepsilon = \frac{H(X)}{L} = \frac{0{,}469}{1} = 0{,}469 = 46{,}9\%$$

Za kod C_2 vrijedi:

simbol a_i	$P(a_i)$	kôd
$a_1=x_1\,x_1$	0,81	1
$a_2=x_1\,x_2$	0,09	00
$a_3=x_2\,x_1$	0,09	011
$a_4=x_2\,x_2$	0,01	010

$$L_2 = \sum_{i=1}^{4} P(a_i) l_i = 0{,}81 + 0{,}09 * 2 + \ 0{,}09 * 3 + 0{,}01 * 3 = 1{,}29 \left[\frac{\text{bit}}{\text{simbol}}\right]$$

$$H(X_2) = \ -\sum_{i=1}^{4} P(a_i) \log_2[P(a_i)] = -0{,}81 \log_2(0{,}81) - 2 * 0{,}09 \log_2(0{,}09) - 0{,}01 \log_2(0{,}01)$$

$$H(X_2) = 0{,}938 \left[\frac{\text{bit}}{\text{simbol}}\right]$$

$$\varepsilon_2 = \frac{H(X_2)}{L_2} = \frac{0{,}938}{1{,}29} = 0{,}727 = 72{,}7\%$$

Dakle, $\varepsilon_2/\varepsilon = 1{,}55$.

Zadatak 6. Na ulaz kodera informacije dolazi poruka sastavljena od dvanaest simbola *a* i oznake kraja poruke (simbol *), *aaaaaaaaaaaa**. Koliko mora iznositi duljina prozora za kodiranje pa da izlaz iz kodera informacije koji koristi kôd LZ77 bude određen sljedećim trojkama: (0, 0, *a*), (1, 10, *a*), (0, 0, *)?

a) 11 simbola;

b) 13 simbola;

c) 12 simbola;

d) 10 simbola;

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Nakon prvog koraka kodiranja, koji generira trojku (0, 0, *a*), u posmičnom prozoru sadržan je simbola *a*, a prozor za kodiranje obuhvaća naredne simbole u nizu. Kako bi druga trojka bila (1, 10, *a*), a treća (0, 0, *) prozor za kodiranje mora obuhvaćati 11 simbola *a* (deset kako označava drugi element trojke i jedan kojeg označava treći element trojke). To je ujedno i duljina prozora za kodiranje, tj. 11 simbola.

Zadatak 7. Rad nekog stroja može se opisati Markovljevim lancem prvog reda s tri stanja X={1, 2, 3} i matricom uvjetnih vjerojatnosti prijelaza:

$$\left[p(x_j|x_i)\right] = P = \begin{bmatrix} 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}5 \\ 0{,}25 & 0 & 0{,}75 \\ 0 & 0{,}75 & 0{,}25 \end{bmatrix}.$$

Neka je polazno stanje stroja 2. Odredite očekivani broj “posjeta” stroja trećem stanju u prvih 2300 koraka, tj. $E_2(3{,}2300)$.

a) 1100;

b) 900;

c) 300;

d) 766;

e) Ništa od navedenog.
Postupak rješavanja:

Neka je $p(x=1)=p_1; p(x=2)=p_2$ i $p(x=3)=p_3$, tj. $\pi=[p_1,p_2,p_3]$.

Budući da je Markovljev lanac ireducibilan i homogen to za isti vrijedi sljedeće (Uvjet stacionarnosti!):

$$\pi \cdot P = \pi.$$

Dobivamo sustav jednadžbi:

$$0{,}25p_1 + 0{,}25p_2 = p_1$$

$$0{,}25p_1 + 0{,}75p_3 = p_2$$

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

Rješavajući navedeni sustav jednadžbi dobivamo $\pi = \left[\frac{3}{23}, \frac{9}{23}, \frac{11}{23}\right]$. Očekivani broj „posjeta“ stroja trećem stanju računamo kao:

$$E_2(3{,}2300) = 2300 \cdot p_3 = 1100.$$

Zadatak 8. Diskretno bezmemorijsko izvorište, *X*, generira simbole iz skupa simbola {1, 2}, gdje simbol 1 ima trajanje jednu, a simbol 2 dvije vremenske jedinice. Vjerojatnosti pojavljivanja simbola 1 i 2 su p_1, odnosno p_2 $(0 \le p_1, p_2 \le 1; p_1 + p_2 = 1)$. Odredite vrijednost za p_1 za koju je entropija izvorišta po jedinici vremena maksimalna, $H(X)/\mathbf{E}[t_x]$, gdje je t_x trajanje simbola *x*. **Napomena:** $\mathbf{E}[t_x]$ je prosječno trajanje simbola!

a) ≈ 0,61803;

b) ≈ 0,51424;

c) ≈ 0,71848;

d) ≈ 0,41212;

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Neka je $H(p)$ entropija izvorišta *X*, tj.

$$H(p) = H(p_1) = -p_1 log p_1 - (1-p_1)\log(1-p_1)$$

i neka je prosječno trajanje simbola

$$T(p) = T(p_1) = 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 = p_1 + 2(1-p_1) = 2 - p_1.$$

Nadalje, entropija izvorišta po jedinici vremena je:

$$f(p_1) = \frac{H(p)}{T(p)} = \frac{H(p_1)}{T(p_1)} = \frac{-p_1 log p_1 - (1-p_1)\log(1-p_1)}{2-p_1}$$

Budući da je $f(0) = f(1) = 0$, maksimum $f(p_1)$ nalazi se za neku vrijednost $p_1$za koju vrijedi $0 < p_1 < 1$ i $\frac{\partial f(p_1)}{\partial p_1} = 0$.

Dobivamo da je (uzimajući prirodni logaritam):

$$\frac{\partial f(p_1)}{\partial p_1} = \cdots = ln\,(1-p_1) - 2 \cdot ln(p_1) = 0$$

Nadalje, $\frac{\partial f(p_1)}{\partial p_1} = 0$ ako je $1 - p_1 = p_1^2$, odnosno ako je $p_{1/1} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right) \approx 0{,}61803$ i $p_{1/2} = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{5}-1\right) \approx -1{,}61803 < 0$.

Dakle, vrijednost p_1 za koju je entropija izvorišta po jedinici vremena maksimalna iznosi 0,61803.

Zadatak 9. Diskretno bezmemorijsko izvorište, *X*, generira beskonačan niz simbola iz skupa $\{a, b\}$ s vjerojatnostima pojavljivanja $p(a) = p$ i $p(b) = 1 - p$, $(0 < p < 1)$. Neka je nad takvim skupom simbola provedeno kodiranje kako je to predočeno u sljedećoj tablici:

kôd A		kôd B	
Simboli	kodne riječi	Simboli	kodne riječi
aa	1	*aa*	0001
ab	01	*ab*	001
b	00	*ba*	01
		bb	1

Odredite za koju vrijednost *p* je srednja duljina kodne riječi (izražena u [bit/simbol]) koda A jednaka srednjoj duljini kodne riječi koda B.

a) ≈ 0,6861;

b) ≈ 0,3027;

c) ≈ 0,4718;

d) ≈ 0,2133;

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Kôd A pridružuje razlićite duljine kodnih riječi različitim duljinama izvorišnih simbola. Neka s_k predstavlja izvorišne simbole (jedan ili više njih grupiranih) kojima su pridjeljene različite kodne riječi. Općenito, srednju duljinu kodne riječi po simbolu (bit/simbol) možemo dobiti tako što podijelimo srednju duljinu kodne riječi po izvorišnim simbolima s_k sa srednjim brojem simbola po s_k, tj.

$$L = \frac{\sum_{\forall s_k} p(s_k) \cdot l(s_k)}{\sum_{\forall s_k} p(s_k) \cdot n(s_k)}$$

Za kôd A:

$$L_A = \frac{\sum_{\forall s_k} p(s_k)\cdot l(s_k)}{\sum_{\forall s_k} p(s_k)\cdot n(s_k)} = \frac{p(aa)\cdot l(aa) + p(ab)\cdot l(ab) + p(b)\cdot l(b)}{p(aa)\cdot n(aa) + p(ab)\cdot n(ab) + p(b)\cdot n(b)} = \frac{p^2\cdot 1 + p(1-p)\cdot 2 + (1-p)\cdot 2}{p^2\cdot 2 + p(1-p)\cdot 2 + (1-p)\cdot 1} =$$

$$= \cdots = \frac{2-p^2}{1+p}\ \frac{\text{bit}}{\text{simbol}}$$

Po istoj analogiji za kôd B dobivamo:

$$L_B = \frac{\sum_{\forall s_k} p(s_k)\cdot l(s_k)}{\sum_{\forall s_k} p(s_k)\cdot n(s_k)} = \cdots = \frac{1+3p}{2}\ \frac{\text{bit}}{\text{simbol}}$$

Iz uvjeta zadatka, $L_A = L_B$, dobivamo:

$$\frac{2-p^2}{1+p} = \frac{1+3p}{2}$$

odnosno

$$5p^2 + 4p - 3 = 0.$$

Rješenja navedene jednadžbe su:

$$p_1 = \frac{1}{5}\left(-\sqrt{19}-2\right) \approx -1{,}2718$$

$$p_2 = \frac{1}{5}\left(\sqrt{19}-2\right) \approx 0{,}4718$$

Također, p mora biti pozitivno i u granicama između 0 i 1, te je p_2 vrijednost za koju je uvjet zadatka zadovoljen.

Zadatak 10. Promatrajmo diskretni komunikacijski kanal $Y = X \cdot Z$, gdje su X i Z nezavisne binarne slučajne varijable koje poprimaju vrijednosti iz skupa simbola $\{0,\ 1\}$ i gdje je $p(Z=1) = \alpha$, $(0 < \alpha < 1)$. Odredite kapacitet zadanog komunikacijskog kanala u kojem X predstavlja njegov ulaz, a Y izlaz.

a) $\log_2\left(2^{\frac{H(\alpha,1-\alpha)}{\alpha}} + 1\right) - \frac{H(\alpha,1-\alpha)}{\alpha}$ [bit/simbol];

b) $\log_2\left(2^{\frac{H(\alpha,1-\alpha)}{\alpha}} + 1\right) - \frac{1}{\alpha} - H(\alpha, 1-\alpha)$ [bit/simbol];

c) $\log_2\left(2^{\frac{H(\alpha,1-\alpha)}{\alpha}} + 1\right) + \frac{H(\alpha,1-\alpha)}{\alpha}$ [bit/simbol];

d) $-\log_2\left(2^{\frac{H(\alpha,1-\alpha)}{\alpha}} + 1\right) - \frac{H(\alpha,1-\alpha)}{\alpha}$ [bit/simbol];

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Kapacitet diskretnog komunikacijskog kanala računa se kao:

$$C = \underset{\{p(x_i)\}}{maks.} I(X;Y) = \underset{\{p(x_i)\}}{maks.} (H(Y) - H(Y|X)) \left[\frac{\text{bit}}{\text{simbol}}\right].$$

Zadano je $p(Z = 1) = \alpha$, odnosno slijedi da je $p(Z = 0) = 1 - \alpha$.

Neka je:

$p(X = 1) = p$ i $p(X = 0) = 1 - p$

tada je

$$p(Y = 1) = p(Z = 1) \cdot p(X = 1) = \alpha p$$

$$p(Y = 0) = 1 - \alpha p$$

Matrica združenih vjerojatnosti je:

$$[p(X,Y)] = \begin{bmatrix} 1 - p & 0 \\ p(1 - \alpha) & \alpha p \end{bmatrix}$$

odnosno matrica uvjetnih vjerojatnosti prijelaza kanala:

$$[p(Y|X)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (1 - \alpha) & \alpha \end{bmatrix}.$$

Dobivamo da je:

$$H(Y) = -\alpha p \cdot \log_2(\alpha p) - (1 - \alpha p) \cdot \log_2(1 - \alpha p)$$

$$H(Y|X) = -p(1 - \alpha) \cdot \log_2(1 - \alpha) - \alpha p \cdot \log_2(\alpha) = pH(\alpha, 1 - \alpha)$$

Stavljajući $\frac{\partial I(X;Y)}{\partial p} = 0$ dobivamo vrijednost za p za koju je transinfromacija maksimalna, tj.

$$\bar{p} = \frac{1}{\alpha\left(2^{H(\alpha,1-\alpha)/\alpha} + 1\right)}.$$

Konačno, kapacitet zadanog komunikacijskog kanala je:

$$C = \log_2\left(2^{H(\alpha,1-\alpha)/\alpha} + 1\right) - \frac{H(\alpha,1-\alpha)}{\alpha}.$$