Sveučilište u Zagrebu
Fakultet elektrotehnike i računarstva

Dekanski rok iz predmeta **TEORIJA INFORMACIJE**, 15. rujna 2023.

Pravilo bodovanja zadataka

Svaki točno odgovoreni zadatak donosi 10 bodova, netočno odgovoreni 4 negativna boda, a neodgovoreni 0 bodova.

Zadatak 1. Komunikacijskim kanalom prenosi se jako dugačak slijed poruka, pri čemu su poruke generirane iz skupa X koji sadrži četiri simbola, $X = \{x_1,...,x_4\}$. Omjer vjerojatnosti pojavljivanja poruka je $P(x_1) : P(x_2) : P(x_3) : P(x_4) = 1 : 2 : 2 : 5$. Matrica uvjetnih vjerojatnosti prijelaza u kanalu zadana je kao:

$$\left[P\left(y_j \mid x_i\right)\right] = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,2 & 0,5 \\ 0,1 & 0,2 & 0,5 & 0,2 \\ 0,1 & 0,5 & 0,2 & 0,2 \\ 0,5 & 0,1 & 0,2 & 0,2 \end{bmatrix}$$

Koliko iznosi entropija šuma u kanalu?

a) 1,761 bit/simbol;

b) 1,671 bit/simbol;

c) 0,239 bit/simbol;

d) 0,329 bit/simbol;

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

i) Sukladno uvjetima navedenim u zadatku vrijedi:

$$P\left(x_1\right) : P\left(x_2\right) : P\left(x_3\right) : P\left(x_4\right) = 1 : 2 : 2 : 5$$

Simboli koji se pojavljuju na izlazu iz izvorišta moraju sačinjavati potpuni vjerojatnosni skup.

Iz toga slijedi: $P(x_1) = 0,1$, $P(x_2) = P(x_3) = 0,2$ i $P(x_4) = 0,5$ tj.

$$\left[P\left(x_i\right)\right] = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,2 & 0,5 \end{bmatrix}$$

Matrica združenih vjerojatnosti računa se prema poznatom izrazu:

$$\left[P(x_i, y_j)\right] = \left[P(x_i)P(y_j \mid x_i)\right] = \begin{bmatrix} 0,01 & 0,02 & 0,02 & 0,05 \\ 0,02 & 0,04 & 0,1 & 0,04 \\ 0,02 & 0,1 & 0,04 & 0,04 \\ 0,25 & 0,05 & 0,1 & 0,1 \end{bmatrix}$$

Entropiju šuma izračunamo prema izrazu:

$$H(Y|X) = -\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} P\left(x_i, y_j\right)\log_2 P\left(y_j \mid x_i\right)\left[\frac{\text{bit}}{\text{simbol}}\right]$$

$$H(Y|X) = 1,761\frac{\text{bit}}{\text{simbol}}$$

Zadatak 2. Koristeći algoritam LZ77 kodirana je poruka aaaabbbccd*, uzimajući pri tome da je maksimalna duljina posmičnog prozora 6, a prozora za kodiranje 5 simbola. Odredite treću trojku kodirane poruke. **Napomena:** znak "*" označava kraj slijeda.

a) (1,2,c);

b) (1,1,a);

c) (1,2,a);

d) (1,1,b);

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

<u>*aaaab*</u>bbccd*	(0,0,a)
a<u>*aaabb*</u>bccd*	(1,3,b)
aaaab<u>*bbccd*</u>*	(1,2,c)
aa**aabbbc**<u>*cd**</u>	(1,1,d)
aaaa**bbbccd**<u>*</u>	(0,0,*)

Zadatak 3. Dan je Hammingov kôd *K* s duljinom kodne riječi *n* = 3 bita. Odredite vjerojatnost pogrešnog dekodiranja p_{pd} (pod pretpostavkom da se dekodiranje provodi po načelu najbližeg susjeda), ako je vjerojatnost pogrešnog prijenosa bita u kanalu $p_g = 10^{-4}$.

a) $2 \cdot 10^{-8}$;

b) $3 \cdot 10^{-8}$;

c) $3 \cdot 10^{-6}$;

d) $2 \cdot 10^{-6}$;

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Radi se o Hammingovom kodu koji može ispraviti jednostruku pogrešku, pa do pogrešnog dekodiranja može doći kad se dogodi dvostruka ili trostruka pogreška. Ukupna vjerojatnost pogrešnog dekodiranja p_{pd} jednaka je zbroju vjerojatnosti pojave dvostruke pogreške i vjerojatnosti trostruke pogreške, tj.

$$p_{pd} = p_2 + p_3 = \binom{3}{2} p_g^{\,2}(1 - p_g) + \binom{3}{3} p_g^{\,3}$$

$$p_{pd} = 3 \cdot 10^{-8}$$

Zadatak 4. Izvor generira crno-bijelu TV-sliku koja se sastoji od $2 \cdot 10^5$ elemenata (piksela). Svaki od njih može poprimiti jednu od 10 razina svjetline, pri čemu su sve te razine međusobno jednako vjerojatne. Pretpostavite da izvor TV-signala generira 25 okvira (svaki okvir se sastoji od jedne ranije opisane slike) te da omjer srednje snage signala prema srednjoj snazi šuma iznosi 30 dB. Odredite koliko najmanje mora iznositi širina prijenosnog pojasa AWGN kanala kroz kojeg je moguće prenijeti takvu sliku uz proizvoljno malu vjerojatnost pogreške.

a) 1,6664 MHz;

b) 16,6096 MHz;

c) 3,3526 MHz;

d) 0,1341 MHz;

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Entropija svakog elementa (piksela) od kojeg se sastoji slika iznosi

$$H(X) = \sum_{i=1}^{10} P(x_i) \log_2 P(x_i)$$

S obzirom da vrijedi $P(x_i) = 1/10$ za svaki $i = 1, \ldots, 10$, $H(X) = \log_2 10$ bit/element = 3,32193 bit/element. Dakle, informacijska brzina takvog izvora iznosi $R = H(X) \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 25$ = 16,60964 Mbit/s. Za kapacitet kanala mora vrijediti $C \geq R$. Kapacitet AWGN kanala računamo izrazom

$$C = B \log_2 \left(1 + \frac{S}{N}\right) \left[\frac{\text{bit}}{\text{s}}\right]$$

Iz toga možemo odrediti uvjet kojeg mora zadovoljavati širina prijenosnog pojasa kanala:

$$B \geq \frac{R}{\log_2 \left(1 + \frac{S}{N}\right)} \; [\text{Hz}]$$

Omjer S/N je zadan kao 30 dB, što znači da je $S/N = 1000$. Nakon uvrštenja u gornji izraz dobivamo $B \geq 1{,}6664$ MHz.

Zadatak 5. Zadan je diskretni bezmemorijski izvor koji generira simbole x_i, $i = 1, 2, ..., n$. Svi simboli su jednako vjerojatni i maksimalna entropija izvorišnog skupa simbola iznosi $H(X)$ = 3,4594 bit/simbol. Odredite za koliko se promijeni efikasnost koda prilikom kodiranja skupa simbola ternarnim Huffmanovim kodom u odnosu na kodiranje istog skupa simbola binarnim Huffmanovim kodom.

a) Smanji se za 0,9755;

b) Smanji se za 0,0151;

c) Poveća se za 0,9604;

d) Poveća se za 0,0151;

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

i) Potrebno je odrediti broj izvorišnih simbola n. Kako su svi simboli jednako vjerojatni možemo zapisati:

$$P(x_1) = P(x_2) = \cdots = P(x_n) = \frac{1}{n}$$

Iz prethodne jednakosti i poznate entropije na ulazu računamo broj simbola:

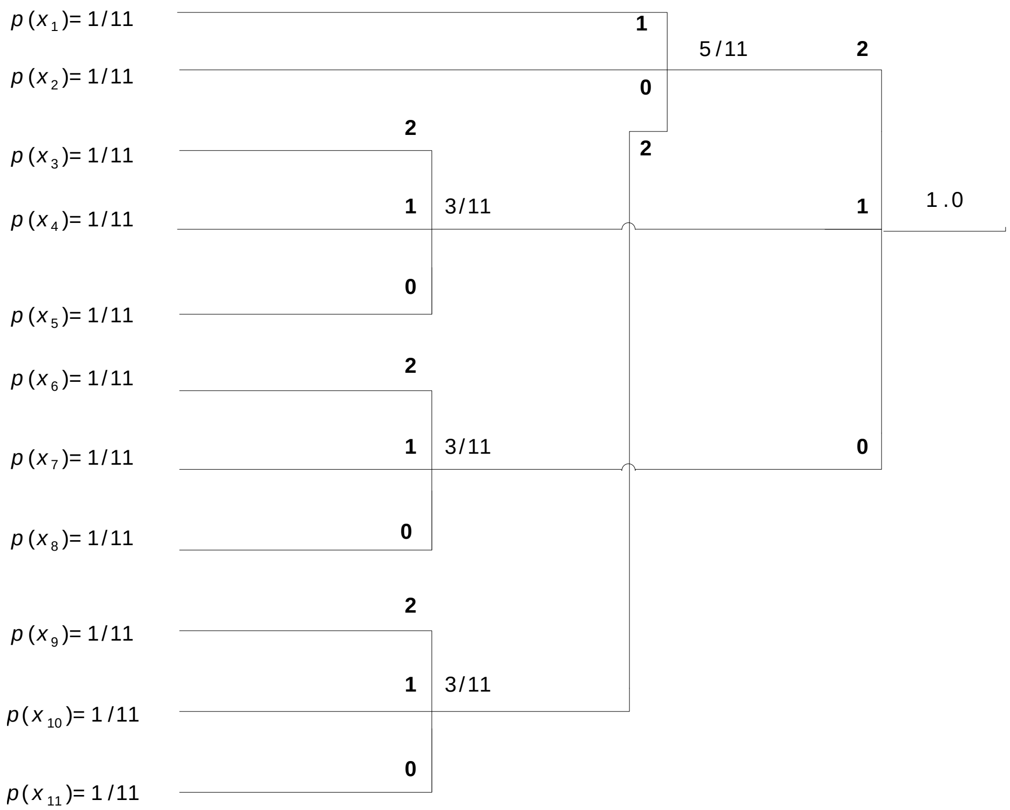
$$H(X) = 3{,}4594 \;\; \text{bit/simbol}$$

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} P(x_i)\log_2 P(x_i) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\log_2 \frac{1}{n} = -n \cdot \frac{1}{n}\log_2 \frac{1}{n} = \log_2 n$$

$$n = 2^{H(X)} = 2^{3,4594} = 11$$

Iz toga jasno slijedi :

$$P(x_1) = P(x_2) = \cdots = P(x_{11}) = \frac{1}{11}$$



U tablici su prikazani simboli sa pripadajućim kodnim riječima i njihovim duljinama za ternarno kodiranje

simbol (x_i)	vjerojatnost pojavljivanja $P(x_i)$	kodna riječ $C(x_i)$	duljina kodne riječi $l(x_i)$
x_1	1/11	21	2
x_2	1/11	20	2
x_3	1/11	12	2
x_4	1/11	11	2
x_5	1/11	10	2
x_6	1/11	02	2
x_7	1/11	01	2
x_8	1/11	00	2
x_9	1/11	222	3
x_{10}	1/11	221	3
x_{11}	1/11	220	3

Efikasnost koda računa se prema izrazu:

$$\varepsilon_{(3)} = \frac{H_{(3)}(X)}{L_{(3)}(X)}$$

Proračunajmo potrebne veličine:

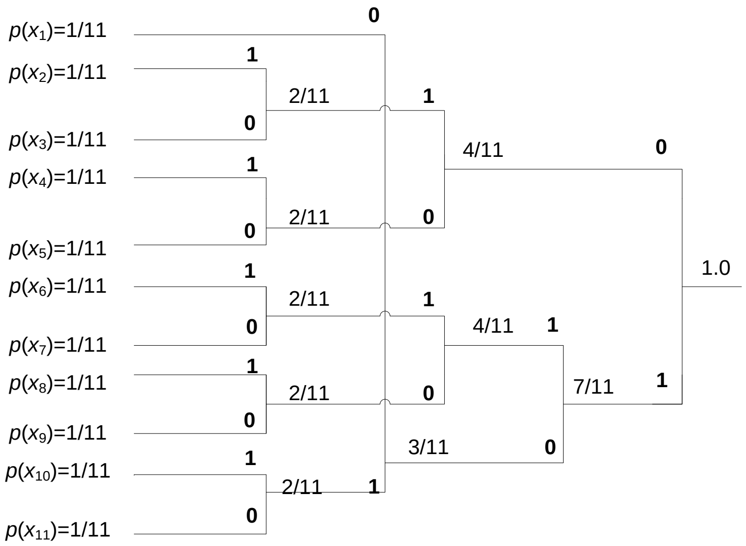
$$H_{(3)}(X) = -\sum_{i=1}^{11} P(x_i)\log_3 P(x_i) = -\log_3 \frac{1}{11} = 2{,}183\ \frac{\text{tern. simbola}}{\text{simbol}}$$

$$L_{(3)}(X) = \sum_{i=1}^{11} P(x_i) l_i = 2{,}273\ \frac{\text{tern. simbola}}{\text{simbol}}$$

Naposljetku:

$$\varepsilon_{(3)} = \frac{H_{(3)}(X)}{L_{(3)}(X)} = \frac{2{,}183}{2{,}273} = 0{,}9604$$

Potrebno je ponovno provesti postupak Huffmanovog kodiranja – ovaj put binarno, kako je prikazano na slici. U tablici su prikazane nove kodne riječi s pripadajućim duljinama.



simbol (x_i)	vjerojatnost pojavljivanja $P(x_i)$	kodna riječ $C(x_i)$	duljina kodne riječi $l(x_i)$
x_1	1/11	100	3
x_2	1/11	011	3
x_3	1/11	010	3
x_4	1/11	001	3
x_5	1/11	000	3
x_6	1/11	1111	4
x_7	1/11	1110	4
x_8	1/11	1101	4
x_9	1/11	1100	4
x_{10}	1/11	1011	4

x_{11}	1/11	1010	4

Efikasnost koda računamo prema izrazu:

$$\varepsilon = \frac{H(X)}{L(X)}$$

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{11} P(x_i)\log_2 P(x_i) = -\log_2 \frac{1}{11} = 3{,}459\ \frac{\text{bit}}{\text{simbol}}$$

$$L(X) = \sum_{i=1}^{11} P(x_i) l_i = 3{,}546\ \frac{\text{bit}}{\text{simbol}}$$

$$\varepsilon = \frac{H(X)}{L(X)} = \frac{3{,}459}{3{,}546} = 0{,}9755$$

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon - \varepsilon_{(3)} = 0{,}9755 - 0{,}9604 = 0{,}0151$$

S obzirom na to da vrijedi $\Delta\varepsilon > 0$, binarno je kodiranje efikasnije od ternarnog.

Zadatak 6. Zadan je linearni binarni blok kôd *K* [7, 3] s matricom provjere pariteta **H**:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & \_ & \_ & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \_ & \_ & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \_ & \_ & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \_ & \_ & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dekodirajte primljenu kodnu riječ **c**' = [0 1 1 0 0 1 1]. Napomena: matrica **G** koda *K* je u standardnom obliku.

a) 0 1 1 0 1 1 1;

b) 0 1 1 0 1 0 1;

c) 1 1 1 0 1 1 1;

d) 0 1 1 0 0 1 1;

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Ovo je zadatak 3.23., neriješeni zadatak iz zbirke.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$a+e=0$$
$$b+f=0$$
$$c+g+1=0$$
$$d+h+1=0$$

$$\mathbf{G}=[\mathbf{I}\,|\,\mathbf{A}]=\begin{bmatrix}1&0&0&1&0&1&1\\0&1&0&a&b&c&d\\0&0&1&e&f&g&h\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&1&0&1&1\\0&1&0&a&b&c&d\\0&0&1&a&b&c+1&d+1\end{bmatrix}$$

Distanca koda $d(K)$ = 4 znači da sve kodne riječi koda K, osim riječi sastavljene od svih nula, moraju imati težinu veću od ili jednaku 4: $w(\mathbf{x}) \geq 4$. Dakle, i bazni vektori koda K, $\mathbf{b}_i$, i = 1, 2, 3, sadržani u matrici $\mathbf{G}$, moraju imati težinu veću od ili jednaku 4:

za prvi redak to vrijedi, $w(\mathbf{b}_1) = 4$,

nadalje, mora vrijediti i $w(\mathbf{b}_2) = w([0\ 1\ 0\ a\ b\ c\ d]) \geq 4$ i

$w(\mathbf{b}_3) = w([0\ 1\ 0\ a\ b\ c{+}1\ d{+}1]) \geq 4$

Kako bi vrijedilo $w(\mathbf{b}_2) \geq 4$, u obzir dolaze sljedeće kombinacije:

$a\ b\ c\ d$ = 1 1 1 1, $w(\mathbf{b}_2) = 5$

$a\ b\ c\ d$ = 1 1 1 0, $w(\mathbf{b}_2) = 4$

$a\ b\ c\ d$ = 1 1 0 1, $w(\mathbf{b}_2) = 4$

$a\ b\ c\ d$ = 1 0 1 1, $w(\mathbf{b}_2) = 4$

$a\ b\ c\ d$ = 0 1 1 1, $w(\mathbf{b}_2) = 4$

Tada za $\mathbf{b}_3$ vrijedi:

$a\ b\ c{+}1\ d{+}1$ = 1 1 0 0, $w(\mathbf{b}_3) = 3$

$a\ b\ c{+}1\ d{+}1$ = 1 1 0 1, $w(\mathbf{b}_3) = 4$

$a\ b\ c{+}1\ d{+}1$ = 1 1 1 0, $w(\mathbf{b}_3) = 4$

$a\ b\ c{+}1\ d{+}1$ = 1 0 0 0, $w(\mathbf{b}_3) = 2$

$a\ b\ c{+}1\ d{+}1$ = 0 1 0 0, $w(\mathbf{b}_3) = 2$.

Dakle, zbog težina kodnih riječi, u obzir dolaze samo kombinacije 2 i 3.

$$\mathbf{H}_1=\begin{bmatrix}1&1&1&1&0&0&0\\0&1&1&0&1&0&0\\1&1&0&0&0&1&0\\1&0&1&0&0&0&1\end{bmatrix},\qquad \mathbf{H}_2=\begin{bmatrix}1&1&1&1&0&0&0\\0&1&1&0&1&0&0\\1&0&1&0&0&1&0\\1&1&0&0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

Sada je potrebno provjeriti sindrome za primljenu kodnu riječ.

$$S_1(\mathbf{c}') = \mathbf{c}' \cdot \mathbf{H}_1^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$S_2(\mathbf{c}') = \mathbf{c}' \cdot \mathbf{H}_2^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Oba sindroma pokazuju da pogreške nema pa je poslana kodna riječ jednaka primljenoj, [0 1 1 0 0 1 1].

Zadatak 7. Razmatrajte linearni binarni blok kôd K s oznakom [6, 2, 2]. Od svih mogućih linearnih binarnih blok kodova s tom oznakom odaberite jedan od onih koji imaju najmanji zbroj težina svih njegovih kodnih riječi te odredite vrijednost tog zbroja.

a) 5;

b) 8;

c) 6;

d) 7;

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja

Da bi kôd K oznake $[n, k, d(K)] = [6, 2, 2]$ bio linearan binarni blok kôd on mora imati kodne riječi duljine 6 bita, mora sadržavati riječ sastavljenu od 6 nula (kodna riječ $\mathbf{0}$ = [0 0 0 0 0 0]) te ukupno ima $2^2 = 4$ kodne riječi. Udaljenost linearnog binarnog blok koda jednaka je najmanjoj težini od svih njegovih kodnih riječi različitih od $\mathbf{0}$. U ovom slučaju ta minimalna težina mora iznositi 2, što znači da takva kodna riječ smije imati najviše 2 jedinice. Nazovimo ju $\mathbf{c}_1$, S obzirom da tražimo da zbroj svih težina kodnih riječi koda K bude minimalna, sljedeća kodna riječ, $\mathbf{c}_2$, mora također imati najmanje dvije jedinice. Ako se jedna od tih jedinica preklapa s nekom jedinicom iz $\mathbf{c}_1$, tada će riječ $\mathbf{c}_3$, nastala kao $\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2$, imati 2 jedinice, a ako preklapanja nema, $\mathbf{c}_4 = \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2$ će imati 4 jedinice. Dakle, kodne riječi $\mathbf{0}$, $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$ i $\mathbf{c}_3$ tvore linearni binarni blok kod oznake [6, 2, 2], a zbroj svih težina kodnih riječi iznosi 6.

Zadatak 8. Zadan je diskretni binarni kanal. Na izvoru informacije pojavljuju se simboli x_1 i x_2, a na odredištu simboli y_1 i y_2. Matrica šuma u kanalu koji povezuje izvor i odredište, $[P(Y|X)]$, zadana je kao

$$P\left[Y \mid X\right] = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}.$$

Odredite za koliko se kapacitet takvog kanala razlikuje od maksimalnog mogućeg kapaciteta binarnog simetričnog kanala (traži se apsolutna vrijednost razlike).

a) 0 bit/simbol;

b) 1 bit/simbol;

c) 0,08 bit/simbol;

d) 0,92 bit/simbol;

e) Ništa od navedenog.

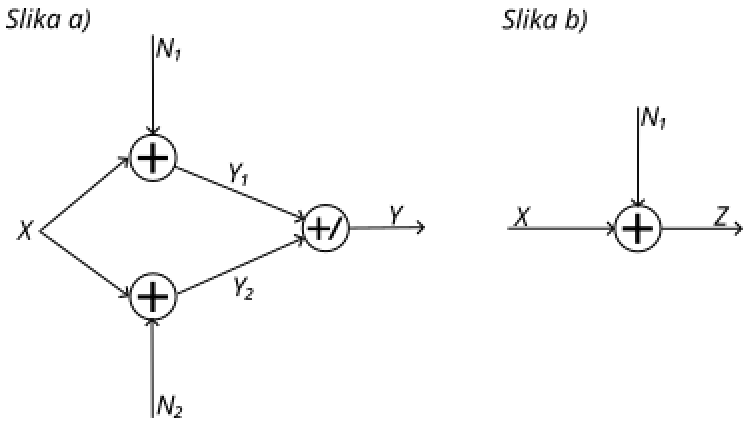
Postupak rješavanja:

U zadanom kanalu vjerojatnost pogrešnog prijenosa simbola je p_g = 1/3. Kapacitet binarnog simetričnog kanala dan je izrazom:

$$C = 1 + p_g \log_2\left(p_g\right) + \left(1 - p_g\right)\log_2\left(1 - p_g\right)\left[\text{bit/simbol}\right]$$

Ako u izraz uvrstimo p_g = 1/3, dobit ćemo C = 0,08 bit/simbol. Maksimalan mogući kapacitet binarnog simetričnog kanala, C_{max}, iznosi 1 bit/simbol. Sukladno tome, apsolutna vrijednost razlike između C_{max} i C iznosi 0,92 bit/simbol.

Zadatak 9. Zadana su dva neovisna sustava prijenosa (Slika a) i Slika b)):



U sustavima djeluje aditivni bijeli Gaussov šum N_1, odnosno N_2, oba s očekivanjem nula. Isto tako vrijedi i $E[N_1^2] = E[N_2^2] = \sigma^2$. Na ulazu svakog od sustava prijenosa djeluje signal X, neovisan o aditivnom bijelom Gaussovom šumu. Također vrijedi: $Y = (Y_1+Y_2)/2$. Odredite iznos razlike var(Z) – var(Y).

a) $\sigma^2/2$;

b) σ^2;

c) $2\sigma^2$;

d) $-\sigma^2/2$;

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Za sustav sa slike b):

$Z = X + N_1$,

gdje je $\mathrm{var}(N_1) = \sigma^2$ i $E[N_1] = 0$,

$E[Z] = E[X] + E[N_1] = E[X]$,

$\mathrm{var}(Z) = E[Z^2] - (E[Z])^2 = E((X+N_1)\cdot(X+N_1)) - (E[X])^2 = E[X^2] + 2E[X\cdot N_1] + E[N_1^2] - (E[X])^2 =$

$= \mathrm{var}(X) + \sigma^2$,

jer uslijed međusobne neovisnosti signala X i šuma N_1 vrijedi $E[X\cdot N_1] = E[X]\cdot E[N_1] = 0$

Za sustav sa slike a):

$Y = (Y_1 + Y_2)/2 = (X + N_1 + X + N_2)/2 = X + N_1/2 + N_2/2$

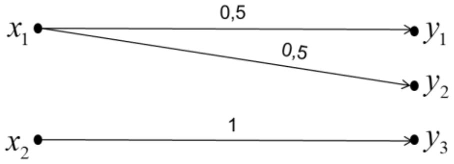
$E[Y] = E[X] + E[N_1]/2 + E[N_2]/2 = E[X]$

$\mathrm{var}(Y) = E[Y^2] - (E[Y])^2 = \mathrm{E}[(X + N_1/2 + N_2/2)\ (X + N_1/2 + N_2/2)] - (E[X])^2 = E[X^2] + E[XN_1] + E[XN_2] + E[N_1N_2]/2 + E[N_1^2]/4 + E[N_2^2]/4 - (E[X])^2 = E[X^2] - (E[X])^2 + E[N_1^2]/4 + E[N_2^2]/4 = \mathrm{var}(X) + \sigma^2/4 + \sigma^2/4 = \mathrm{var}(X) + \sigma^2/2$.

Konačno,

$\mathrm{var}(Z) - \mathrm{var}(Y) = \sigma^2/2$

Zadatak 10. Odredite kapacitet kanala zadanog donjom slikom. Napomena: prilikom određivanja ekstrema funkcije nije dovoljno samo odrediti točku ekstrema, nego je za pronađeni ekstrem nužno dokazati da li se radi o maksimumu ili minimumu funkcije na promatranom intervalu.



a) 1 bit/simbol;

b) 0,5 bit/simbol;

c) 2 bit/simbol;

d) 1,585 bit/simbol;

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

$$P(Y\,|\,X) = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P(X,Y) = \begin{bmatrix} P(x_1)/2 & P(x_1)/2 & 0 \\ 0 & 0 & P(x_2) \end{bmatrix}$$

$$P(Y) = \begin{bmatrix} P(x_1)/2 & P(x_1)/2 & P(x_2) \end{bmatrix}$$

$$P(x_1)+P(x_2)=1$$
$$P(x_2)=1-P(x_1)$$

$$H(Y)=-\sum_{i=1}^{3}P(y_i)\log_2 P(y_i)=$$
$$=-\left[\frac{P(x_1)}{2}\log_2(\frac{P(x_1)}{2})+\frac{P(x_1)}{2}\log_2(\frac{P(x_1)}{2})+(1-P(x_1))\log_2(1-P(x_1))\right]$$

$$H(Y\mid X)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}P(x_i,y_j)\log_2 P(y_j\mid x_i)=$$
$$=-\left[\frac{P(x_1)}{2}\log_2\frac{1}{2}+\frac{P(x_1)}{2}\log_2\frac{1}{2}+(1-P(x_1))\log_2 1\right]$$

$$I(X;Y)=H(Y)-H(Y\mid X)$$

$$I(X;Y)=-P(x_1)\log_2(\frac{P(x_1)}{2})-(1-P(x_1))\log_2(1-P(x_1))+P(x_1)\log_2(\frac{1}{2})$$

$$C=\max_{\{P(x_1)\}}\left[I(X;Y)\right]$$

Dakle, mora vrijediti:

$$\frac{dI(X;Y)}{dP(x_1)}=0$$

$$-\log_2(P(x_1))-\frac{P(x_1)}{P(x_1)\times\ln 2}+\log_2(1-P(x_1))+\frac{1-P(x_1)}{(1-P(x_1))\times\ln 2}=0$$

$$\log_2\left(1-P\left(x_1\right)\right)-\log_2\left(P\left(x_1\right)\right)=0$$
$$P\left(x_1\right)=P\left(x_2\right)=\frac{1}{2}$$

Da bi dokazali da se za $P(x_1)$ = 1/2 radi o maksimumu transinformacije, potrebno je provesti drugu derivaciju transinformacije po $P(x_1)$ i pokazati da je ona manja od 0:

$$\frac{d^2I\left(X;Y\right)}{d\left[P\left(x_1\right)\right]^2}=\frac{d\left[\log_2\frac{1-P\left(x_1\right)}{P\left(x_1\right)}\right]}{dP\left(x_1\right)}=\frac{1}{\ln 2}\frac{P\left(x_1\right)}{1-P\left(x_1\right)}\frac{-P\left(x_1\right)-\left[1-P\left(x_1\right)\right]}{\left[P\left(x_1\right)\right]^2}=\frac{1}{\ln 2}\frac{-1}{\left[1-P\left(x_1\right)\right]P\left(x_1\right)}$$

Za $P(x_1)$ = 1/2 druga derivacija transinformacije po $P(x_1)$ postaje jednaka:

$$\frac{d^2I\left(X;Y\right)}{d\left[P\left(x_1\right)\right]^2}=\frac{1}{\ln 2}\frac{-1}{\left[1-P\left(x_1\right)\right]P\left(x_1\right)}=\frac{1}{\ln 2}\frac{-1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{-4}{\ln 2}<0,$$

čime je dokazano da se za $P(x_1)$ = 1/2 radi o maksimumu transinformacije. Konačno, kapacitet kanala iznosi:

$$C=-\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{1}{2}\right)=1\text{bit/simbol}$$