Sveučilište u Zagrebu
Fakultet elektrotehnike i računarstva

Prvi ispitni rok iz predmeta **TEORIJA INFORMACIJE**, 21. veljače 2024.

Pravilo bodovanja zadataka

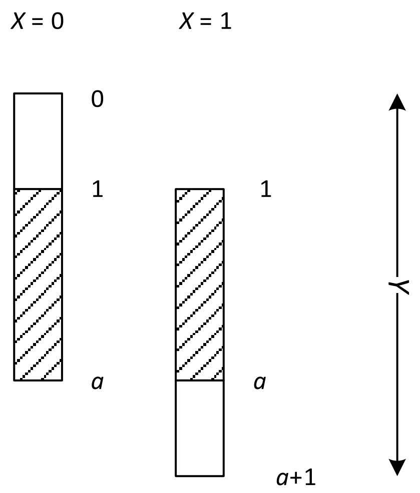
Pismeni ispit sastoji se od 10 zadataka. Svaki točno odgovoreni zadatak donosi 10 bodova, netočno odgovoreni 4 negativna boda, a neodgovoreni 0 bodova.

Zadatak 1. Na ulazu komunikacijskog kanala pojavljuju se dva simbola, $X = \{0, 1\}$, te vrijedi $p(X = 1) = p$ i $p(X = 0) = 1 - p$, $(0 < p < 1)$. Za izlaz kanala, Y, vrijedi $Y= X + Z$, gdje aditivni šum Z ima jednoliku razdiobu na intervalu $[0, a]$, $a > 1$, i neovisan je o X. Odredite $H(Y)$ u jedinici bit/simbol.

a) $\log_2 a$ [bit/simbol];
b) $\frac{1}{a} H(p, 1-p) + \log_2 a$ [bit/simbol];
c) $H(p, 1-p) + a \cdot \log_2 (a+1)$ [bit/simbol];
d) $\log_2 (a+1) - H(p, 1-p)$ [bit/simbol];
e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Odredimo funkciju gustoće vjerojatnosti, $f_Y(y)$, slučajne varijable Y kojom je opisan izlaz komunikacijskog kanala. Sukladno tekstu zadatka granice vrijednosti slučajne varijable Y možemo predočiti grafički.



Nadalje, dobivamo da je:

$$f_Y(y) = \begin{cases} (1-p)\dfrac{1}{a} \text{ za } 0 \le y < 1 \\ (p+1-p)\dfrac{1}{a} \text{ za } 1 \le y < a \\ p\dfrac{1}{a} \text{ za } a \le y \le a+1 \end{cases}$$

Entropiju slučajne varijable Y određujemo iz:

$$H(Y) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)\log_2 f_Y(y)dy$$

$$= -\int_0^1 (1-p)\frac{1}{a}\log_2\frac{1-p}{a}dy - \int_1^a \frac{1}{a}\log_2\frac{1}{a}dy - \int_a^{a+1} p\frac{1}{a}\log_2\frac{p}{a}dy = \cdots$$

$$= \frac{1}{a}H(p, 1-p) + \log_2 a.$$

Zadatak 2. Binarni izvor generira dva simbola iz abecede $X = \{x_1, x_2\}$ s pripadajućim vjerojatnostima pojavljivanja $p(x_1) = 2/3$ i $p(x_2) = 1/3$. Nadalje, pretpostavimo da isti izvor kombinira simbole x_1 i x_2 u združene simbole abecede $Y = \{x_1x_1, x_1x_2, x_2x_1, x_2x_2\}$, $p(x_i,x_j) = p(x_i)\cdot p(x_j)$, $\forall\ i, j \in \{1, 2\}$. Odredite omjer efikasnosti koda ako se Huffmanov kôd primijeni nad proširenom abecedom Y u odnosu na njegovu primjenu na početnu abecedu X.

a) 18/19;

b) 36/35;

c) 36/37;

d) 18/17;

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Entropija skupa X određena je poznatim izrazom i označimo je kao $H_1(X)$, srednja duljina kodne riječi iznosi 1 bit/simbol (jer postoje samo dva simbola u abecedi i primjenjuje se Huffmanovo kodiranje). Dakle, efikasnost koda u prvom slučaju određena je kao

$$\varepsilon_1 = \frac{H_1(X)}{L_1} = \frac{H_1(X)}{1}$$

Ako združujemo simbole u novu abecedu Y, entropija se udvostručuje, tj. $H_2(X) = 2H_1(X)$. Nadalje, ako provedemo Huffmanovo kodiranje nad abecedom Y, dobivamo sljedeći kôd:

x_1x_1 0

x_1x_2 10

x_2x_1 111

x_2x_2 110

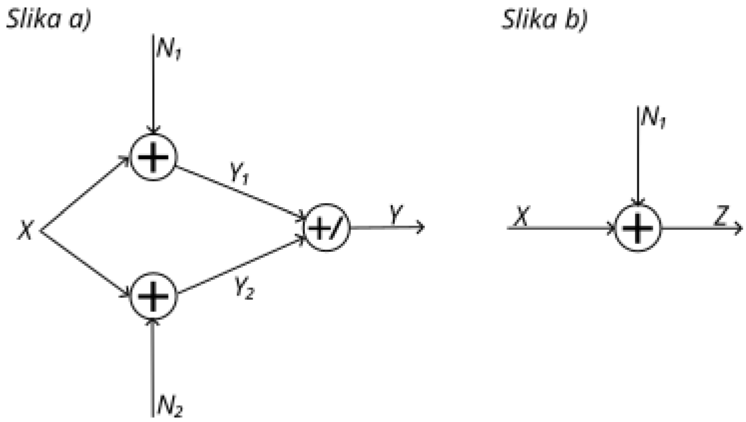
Sam kôd nije bitan, nego prosječna duljina kodne riječi koja iznosi L_2=17/9 bit/simbol. Dakle,

$$\varepsilon_2 = \frac{H_2(X)}{L_2} = \frac{2H_1(X)}{\frac{17}{9}}$$

Konačno

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{\frac{2H_1(X)}{\frac{17}{9}}}{\frac{H_1(X)}{1}} = \frac{18}{17}.$$

Zadatak 3. Zadana su dva neovisna sustava prijenosa (Slika a) i Slika b)):



U sustavima djeluje aditivni bijeli Gaussov šum N_1, odnosno N_2, oba s očekivanjem nula. Isto tako vrijedi i $E[N_1^2] = E[N_2^2] = \sigma^2$. Na ulazu svakog od sustava prijenosa djeluje signal X, neovisan o aditivnom bijelom Gaussovom šumu. Također vrijedi: $Y = (Y_1+Y_2)/2$. Odredite iznos razlike var(Z) – var(Y).

a) $\sigma^2/2$;

b) σ^2;

c) $2\sigma^2$;

d) $-\sigma^2/2$;

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Za sustav sa slike b):

$Z = X + N_1$,

gdje je var(N_1)= σ^2 i $E[N_1] = 0$,

$E[Z] = E[X] + E[N_1] = E[X]$,

$\mathrm{var}(Z) = E[Z^2] – (E[Z])^2 = E((X+N_1)\cdot(X+N_1)) – (E[X])^2 = E[X^2] + 2E[X\cdot N_1]+ E[N_1^2] – (E[X])^2 =$

$= \mathrm{var}(X) + \sigma^2$,

jer uslijed međusobne neovisnosti signala X i šuma N_1 vrijedi $E[X\cdot N_1] = E[X]\cdot E[N_1]= 0$

Za sustav sa slike a):

$Y = (Y_1 + Y_2)/2 = (X + N_1 + X + N_2)/2 = X + N_1/2 + N_2/2$

$E[Y] = E[X] + E[N_1]/2 + E[N_2]/2 = E[X]$

$\mathrm{var}(Y) = E[Y^2] – (E[Y])^2 = \mathrm{E}[(X + N_1/2 + N_2/2) (X + N_1/2 + N_2/2)] – (E[X])^2 = E[X^2]+ E[XN_1] + E[XN_2]+ E[N_1N_2]/2 + E[N_1^2]/4 + E[N_2^2]/4 – (E[X])^2 = E[X^2] – (E[X])^2 + E[N_1^2]/4 + E[N_2^2]/4 = \mathrm{var}(X) + \sigma^2/4 + \sigma^2/4 = \mathrm{var}(X) + \sigma^2/2$.

Konačno, var(Z) – var(Y) = $\sigma^2/2$

Zadatak 4. U nekom kanalu u kontinuiranom vremenu omjer srednje snage signala prema srednjoj snazi šuma iznosi 10^3, dok je širina prijenosnog pojasa zadanog kanala 10 MHz. Odredite koliko puta će se smanjiti prijenosna brzina u tom kanalu u odnosu na kapacitet kanala uslijed korištenja neoptimalnog kodnog sustava koji unosi smanjenje omjera srednje snage signala prema srednjoj snazi šuma u iznosu od 10 dB.

a) ≈3,14 puta;

b) ≈1,50 puta;

c) ≈1,35 puta;

d) ≈1,67 puta;

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Zadan je omjer srednje snage signala prema srednjoj snazi šuma $S/N = 10^3$ te smanjenje omjera srednje snage signala prema srednjoj snazi šuma $\Gamma = 10$ dB, tj. $\Gamma = 10$. Omjer kapaciteta kanala prema prijenosnoj brzini određen je izrazom:

$$\frac{C}{R} = \frac{B \cdot \log_2\left(1 + \frac{S}{N}\right)}{B \cdot \log_2\left(1 + \frac{S}{N\Gamma}\right)} \approx 1{,}50.$$

Zadatak 5. Promatrajte dva informacijska izvora bez memorije. Prvi izvor generira skup simbola $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Svakom simbolu x_i pridijeljena je apriorna vjerojatnost pojavljivanja $P(x_i)$, $i = 1, ..., n$. Drugi izvor generira skup simbola $Y = \{y_1, y_2, ..., y_m\}$, pri čemu vrijedi $m = 3n$. Svakom simbolu y_j, $j = 1, ..., m$, pridružena je apriorna vjerojatnost pojavljivanja sukladno sljedećem pravilu: $P(y_{3i-2}) = P(y_{3i-1}) = P(y_{3i}) = P(x_i)/3$, $\forall\ i = 1, ..., n$. Odredite razliku između entropija ova dva skupa simbola, $H(Y) - H(X)$.

a) 0 [bit/simbol];

b) 1 [bit/simbol];

c) $\log_2(3)$ [bit/simbol];

d) $-\log_2(3)$ [bit/simbol;

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Izvor koji generira skup simbola $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ čije su apriorne vjerojatnosti pojavljivanja $P(x_i)$, $i = 1, ..., n$, ima entropiju određenu izrazom:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} P(x_i) \log_2 P(x_i)$$

Na sličan način, izvor koji generira skup simbola $Y = \{y_1, y_2, ..., y_m\}$, čije su apriorne vjerojatnosti pojavljivanja $P(y_j)$, $j = 1, ..., m$, ima entropiju određenu izrazom:

$$H(Y) = -\sum_{j=1}^{m} P(y_j) \log_2 P(y_j)$$

S obzirom da vrijedi $m = 3n$ i $p(y_{3i-2}) = p(y_{3i-1}) = p(y_{3i}) = p(x_i)/3$, $\forall\ i = 1, ..., n$, tada je:

$$H(Y)=-\sum_{j=1}^{m}P(y_j)\log_2 P(y_j)=-\sum_{j=1}^{3n}\frac{P\left(x_{\lceil j/3\rceil}\right)}{3}\log_2\frac{P\left(x_{\lceil j/3\rceil}\right)}{3}=-\sum_{i=1}^{n}P(x_i)\log_2\frac{P(x_i)}{3} =$$

$$=-\sum_{i=1}^{n}P(x_i)\log_2 P(x_i) +\sum_{i=1}^{n}P(x_i)\log_2 3= H(X)+\log_2(3)\cdot\underbrace{\sum_{i=1}^{n}P(x_i)}_{=1}=H(X)+\log_2(3)$$

Dakle, razlika $H(Y) - H(X)$ iznosi $\log_2(3)$ bit/simbol.

Zadatak 6. U nekom komunikacijskom sustavu koder kanala koristi ciklični kôd [7, 4, 3] s generirajućim polinomom $g(x) = x^3 + x + 1$. Koder kanala koristi sljedeću generirajuću matricu:

$$\mathbf{G}=\begin{bmatrix}1&0&1&1&0&0&0\\0&1&0&1&1&0&0\\0&0&1&0&1&1&0\\0&0&0&1&0&1&1\end{bmatrix}$$

Ako je dekoder kanala primio kodnu riječ [0100001], odredite težinu najvjerojatnije poslane poruke, tj. $w(\mathbf{d})$. Pretpostavka: prilikom prijenosa nastupila je ili jednostruka pogreška bita na kodnoj riječi ili pogreške nije bilo.

a) 4;

b) 3;

c) 2;

d) 1;

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Odredimo sindrom za primljenu kodnu riječ $\mathbf{c}' = [0100001]$. Poznavajući n i $g(x)$ lako se određuje polinom za provjeru pariteta, $(h(x) = x^4 + x^2 + x + 1)$, a potom i matrica provjere pariteta cikličnog koda **H** (Knjiga str. 174.). Dobivamo da je **H**, odnosno

$$\mathbf{H}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\\0&1&1\\1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

Sindrom primljene kodne riječi je $s(\mathbf{c}') = \mathbf{c}' \cdot \mathbf{H}^{\mathrm{T}} = [111]$, što ukazuje da u primljenoj kodnoj riječi postoji pogreška i ista se nalazi na 3 bitu (gledano s lijeva!). Dakle, najvjerojatnija poslana kodna riječ je [0110001]. Ako istu zapišemo u polinomskom obliku $(c(x) = x^5 + x^4 + 1)$ i podijelimo s $g(x)$ dobit ćemo najvjerojatniju poslanu poruku, a to je $d(x) = x^2 + x + 1$, odnosno u binarnom obliku **d**=[0111]. Težina dobivene poruke je $w(\mathbf{d})$=3.

Zadatak 7. Zadan je konvolucijski koder s funkcijskim generatorima $h_1^{(1)} = [011]$, $h_1^{(2)} = [101]$ i $h_1^{(3)} = [111]$. Odredite težinu kodne riječi koja se pojavljuje na izlazu kodera konvolucijskog koda ako se na njegovom ulazu pojavljuje poruka **d**=[1100].

a) 8;

b) 7;

c) 6;

d) 5;

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Temeljem zadanih funkcijskih generatora moguće je odrediti generirajuću matricu **G** navedenog konvolucijskog koda, tj.:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 011 & 101 & 111 & 000 & 000 & 000 \\ 000 & 011 & 101 & 111 & 000 & 000 \\ 000 & 000 & 011 & 101 & 111 & 000 \\ 000 & 000 & 000 & 011 & 101 & 111 \end{bmatrix}.$$

Kodnu riječ određujemo kao $\mathbf{c} = \mathbf{d} \cdot \mathbf{G} = [011\ 110\ 010\ 111\ 000\ 000]$. Težina dobivene kodne riječi je $w(\mathbf{c})$=8.

Zadatak 8. Zadana su tri komunikacijska kanala preko tri slučajne varijable, *X*, *Y* i *Z*, i to:

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z, \qquad Y \longrightarrow Z \longrightarrow X, \qquad Z \longrightarrow X \longrightarrow Y$$

Odredite transinformacije $I(X;Z)$ i $I(Y;Z)$ ako je transinformacija $I(X;Y) = 3$ bit/simbol.

a) $I(X;Z) = 3$ bit/simbol, $I(Y;Z) = 3$ [bit/simbol];

b) $I(X;Z) = 6$ bit/simbol, $I(Y;Z) = 3$ [bit/simbol];

c) $I(X;Z) = 3$ bit/simbol, $I(Y;Z) = 0$ [bit/simbol];

d) $I(X;Z) = 3$ bit/simbol, $I(Y;Z) = 1$ [bit/simbol];

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Općenito gledano, za transinformaciju vrijedi: $I(A;B) = I(B;A)$. Gledajući na transinformaciju, kao količinu informacije koja se u sustavu prenosi neizmjenjena, za navedene kanale vrijedi sljedeće:

$$X \to Y \to Z \Rightarrow I(X;Y) \geq I(X;Z) \ \ (1)$$

$$Y \to Z \to X \Rightarrow I(Y;Z) \geq I(Y;X) = I(X;Y) \ \ (2)$$

$$Z \to X \to Y \Rightarrow I(Z;X) \geq I(Z;Y) \ \ (3)$$

Iz (2) i (3) dobivamo

$$I(Z;X) = \boldsymbol{I(X;Z)} \geq I(Z;Y) = I(Y;Z) \geq \boldsymbol{I(X;Y)} \ \ (4)$$

Iz (1) i (4) slijedi da je: $\underline{I(X;Z) = I(X;Y) = 3 \text{ bit/simbol.}}$ Nadalje, iz (3), $I(Z;Y) = \boldsymbol{I(Y;Z)} \leq I(Z;X) = I(X;Z) = \boldsymbol{I(X;Y)} = 3 \text{ bit/simbol}$, što uz (2) daje $\underline{I(Y;Z) = I(X;Y) = 3 \text{ bit/simbol.}}$

Zadatak 9. Promatrajmo diskretni komunikacijski kanal $Y = X \cdot Z$, gdje su *X* i *Z* nezavisne slučajne varijable. Slučajna varijabla *Z* poprima vrijednosti 0 i 1 s vjerojatnostima *p*(*Z* = 0) = 1– *p* i *p*(*Z* = 1) = *p*, (0 < *p* < 1). Isto tako, slučajna varijabla *X* poprima vrijednosti 1, 2, …, *n* s vjerojatnostima $\mathbf{q}$ =

$[q_1\ q_2\ \ldots\ q_n]$. Odredite p i $\mathbf{q}$ za koje se postiže maksimalna entropija $H(Y)$ te potom odredite koliko ista iznosi u jedinici bit/simbol.

a) $H(Y) = p\log_2(n)$ [bit/simbol];

b) $H(Y) = p\log_2(n+1)$ [bit/simbol];

c) $H(Y) = \log_2(n)$ [bit/simbol];

d) $H(Y) = \log_2(n+1)$ [bit/simbol];

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Iz uvjeta zadatka određujemo funkciju raspodjele vjerojatnosti, $P_Y(y)$, slučajne varijable Y, tj.:

$$P_Y(y) = \begin{cases} 1-p \text{ za } y=0 \\ pq_i \text{ za } y = 1, 2, \ldots n \\ 0 \text{ inače.} \end{cases}$$

Nadalje, dobivamo

$$\begin{aligned} H(Y) = -(1-p)\log_2(1-p) \\ &- \sum_{i=1}^{n} pq_i \log_2(pq_i) \\ &= -(1-p)\log_2(1-p) \\ &- p\sum_{i=1}^{n} q_i(\log_2 p + \log_2 q_i) \\ &= -(1-p)\log_2(1-p) - p\log_2(p)\sum_{i=1}^{n} q_i - p\sum_{i=1}^{n} q_i \log_2 q_i = H(Z) + pH(X). \end{aligned}$$

Odredimo maksimum vrijednosti prethodnog izraza $H(Y)$. Za bilo koji p, želimo naći $\mathbf{q}$ koji maksimizira $H(X)$. Lako pronalazimo da je $\mathbf{q} = \left[\frac{1}{n}\ \frac{1}{n} \ldots \frac{1}{n}\right]$, odnosno $H(X) = \log_2 n$ bit/simbol. Za ovako odabrano $\mathbf{q}$ dobivamo da je

$$H(Y) = H(Z) + p\log_2 n = H(p, 1-p) + p\log_2 n.$$

Maksimalna entropija $H(Y)$ dobiva se deriviranjem prethodnog izraza, tj. rješavanjem jednadžbe:

$$\frac{dH(Y)}{dp} = 0,$$

što daje:

$$p = \frac{n}{n+1}.$$

Maksimalna entropija $H(Y)$ iznosi: $H(Y) = \log_2(n+1)$ bit/simbol.

Zadatak 10. Promatrajmo komunikacijski kanal $Y = X + Z$, gdje su X i Z neovisne slučajne varijable i gdje X poprima vrijednosti iz skupa simbola {-2, -1, 0, 1, 2}, dok je Z aditivni šum s jednolikom razdiobom na intervalu [–1, +1]. Odredite kapacitet zadanog kanala X – Y u jedinici bit/simbol.

a) $\log_2(3)$ [bit/simbol];

b) 1 [bit/simbol];

c) 0,5 [bit/simbol];
d) $\log_2(3) - 1$ [bit/simbol];
e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Kapacitet zadanog komunikacijskog kanala *X* – *Y* računa se po formuli:

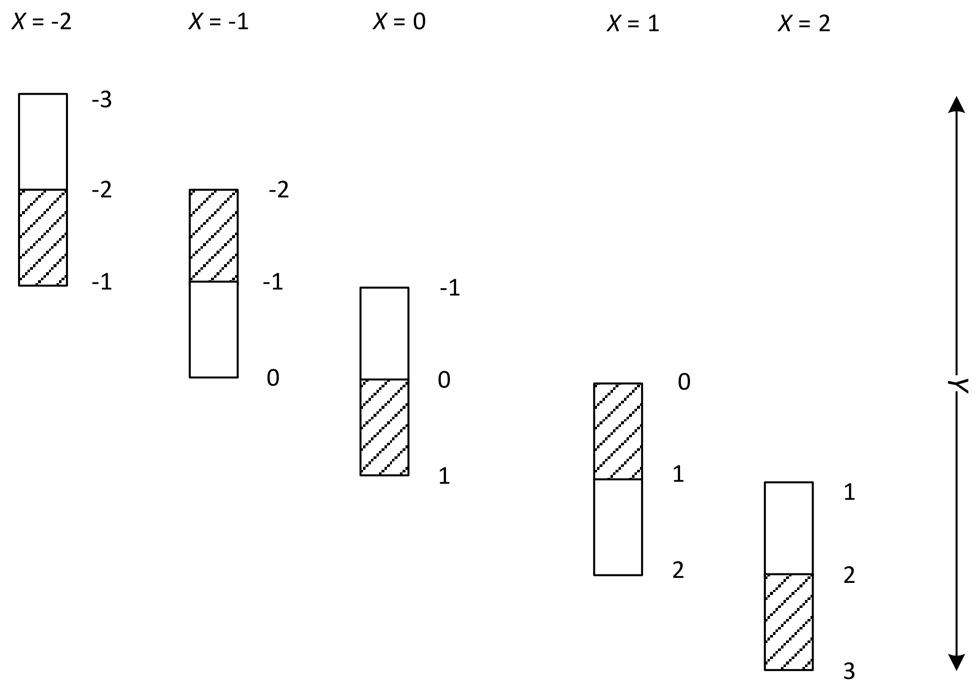
$$C = \text{maks.}_{\{p(x_i)\}} I(X;Y) = \text{maks.}_{\{p(x_i)\}} \big(H(Y) - H(Y|X)\big),$$

gdje je $H(Y|X)$ entropija šuma i u našem slučaju $H(Y|X) = H(Z) = \log_2 2 \ \frac{\text{bit}}{\text{simbol}}$ budući da se Z ravna prema jednolikoj razdiobi (Knjiga str. 106.).

Izlaz komunikacijskog kanala, *Y*, je zbroj diskretne i kontinuirane slučajne varijable. Neka su vjerojatnosti pojavljivanja simbola *X* sljedeće: p_{-2}, p_{-1}, p_0, p_1 i p_2, tada je funkcija gustoće vjerojatnosti, $f_Y(y)$, slučajne varijable *Y*:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{p_{-2}}{2} \text{ za} -3 \le y < -2 \\ \frac{p_{-2} + p_{-1}}{2} \text{ za} -2 \le y < -1 \\ \frac{p_{-1} + p_0}{2} \text{ za} -1 \le y < 0 \\ \frac{p_0 + p_1}{2} \text{ za } 0 \le y < 1 \\ \frac{p_1 + p_2}{2} \text{ za } 1 \le y < 2 \\ \frac{p_2}{2} \text{ za } 2 \le y \le 3 \end{cases}$$

Također, granice vrijednosti slučajne varijable *Y* možemo predočiti grafički, tj.:



Uzimajući da su vrijednosti za Y od -3 do +3, maksimalna entropija se postiže kad je $f_Y(y)$ jednolika razdioba (Knjiga str. 106.) na navedenom intervalu, što je zadovoljeno za $p_{-2} = \frac{1}{3}, p_{-1} = 0, p_0 = \frac{1}{3}, p_1 = 0$ i $p_2 = \frac{1}{3}$.

Tada je $H(Y) = \log_2 6 \ \frac{\text{bit}}{\text{simbol}}$, odnosno kapacitet zadanog kanala je:

$$C = \text{maks.}_{\{p(x_i)\}}\, I(X;Y) = \text{maks.}_{\{p(x_i)\}} \big(H(Y) - H(Y|X)\big) = \log_2 6 - \log_2 2 = \log_2 3 \ \frac{\text{bit}}{\text{simbol}}.$$