

Pravilo bodovanja zadataka

Svaki točno odgovoreni zadatak donosi 10 bodova, netočno odgovoreni 4 negativna boda, a neodgovoreni 0 bodova.

Zadatak 1. Diskretni bezmemorijski izvor generira simbole iz skupa $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Vjerojatnosti pojavljivanja simbola su sljedeće: $P(x_1) = 0,4$, $P(x_2) = 0,3$, $P(x_3) = 0,2$ i $P(x_4) = 0,1$. Izračunajte količinu informacije koja se prenosi u poruci $x_1x_2x_1x_3$.

- a) 6,70 bit/poruka;
- b) 7,386 bit/poruka;
- c) 2,043 bit/poruka;
- d) 3,35 bit/poruka;
- e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

$$I(x_i) = -\log_2 P(x_i) \text{ bit/simbol}$$

$$I(x_1x_2x_1x_3) = -\log_2 (P(x_1) \cdot P(x_2) \cdot P(x_1) \cdot P(x_3))$$

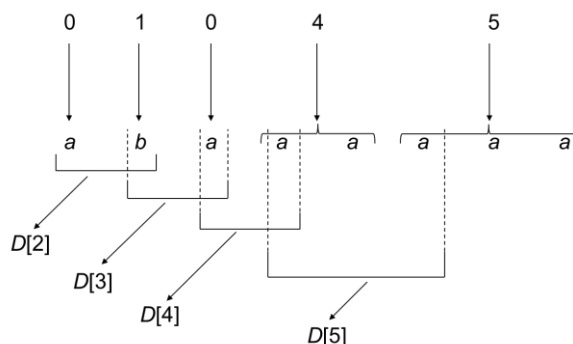
$$I(x_1x_2x_1x_3) = -\log_2 (0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,4 \cdot 0,2)$$

$$I(x_1x_2x_1x_3) = 6,70 \text{ bit/poruka}$$

Zadatak 2. Temeljem polaznog rječnika $D[0] = a$ i $D[1] = b$ dekodirajte primljenu poruku 0 1 0 4 5 koristeći algoritam LZW.

- a) abaaaaa (7 znakova);
- b) abaaaaaaa (9 znakova);
- c) abaaaaaa (8 znakova);
- d) abaaaa (6 znakova);
- e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:



Prošireni rječnik: $D[2] = ab$, $D[3] = ba$, $D[4] = aa$, $D[5] = aaa$. Dekodirana poruka: abaaaaaa.

Zadatak 3. Koder kanala u nekom komunikacijskom sustavu koristi Hammingov kôd zadan matricom provjere pariteta $\text{Ham}(r)$. Odredite koliko najmanje mora iznositi r pa da kodna brzina ovako zadanog linearnog binarnog blok koda bude veća od 0,904.

- a) 5 bita;
- b) 4 bita;
- c) 6 bita;
- d) 7 bita;
- e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Hammingov kôd definiran matricom $\text{Ham}(r)$ koristi r zaštitnih bita koji štite m bita poruke. Kodna brzina $R(K)$ definirana je kao omjer broja bita poruke, m , prema ukupnom broju bita u kodnoj riječi (zbroy broja bita poruke i broja zaštitnih bita), $m + r$. Nadalje, vrijedi relacija:

$m + r \leq 2^r - 1$. Dakle, kodna brzina uz zadani broj zaštitnih bita bit će maksimalna kad vrijedi

$m + r = 2^r - 1$. Sukladno tome, kodna brzina ovog koda $\text{Ham}(r)$ bit će jednaka:

$$R(K) = \frac{2^r - 1 - r}{2^r - 1} = 1 - \frac{r}{2^r - 1}$$

Uzevši u obzir uvjet $R(K) > 0,904$ i ponuđena rješenja dobivamo da je uvjet ispunjen uz $r = 6$ bita.

Zadatak 4. Izvor generira poruke nastale ravnomjernim kodiranjem simbola iz skupa od 128 jednako vjerojatnih simbola, $X = \{x_1, \dots, x_{128}\}$. Poruke se prije slanja u kanal kodiraju Hammingovom tehnikom zaštitnog kodiranja. Širina prijenosnog pojasa komunikacijskog kanala iznosi 4 kHz, dok omjer srednje snage signala prema srednjoj snazi šuma iznosi 20 dB. Odredite koliko je poruka moguće prenositi danim komunikacijskim kanalom unutar svake sekunde.

a) 2421 poruka/s;

- b) 794 poruke/s;
- c) 3624 poruke/s;
- d) 3805 poruka/s;
- e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Ako skup od 128 jednako vjerojatnih simbola kodiramo ravnomjernim kodom, tada je svaki simbol opisan jednoznačnom porukom duljine 7 bita. Nadalje, ako tu poruku kodiramo Hammingovim kodom, tada je na svaku poruku potrebno dodati 4 zaštitna bita na pozicije 1, 2, 4 i 8 u kodnoj riječi. Dakle, ukupan broj bita po svakoj kodnoj riječi iznositi će 11. Kanal širine prijenosnog pojasa 4 kHz u kojem omjer srednje snage signala prema srednjoj snazi šuma iznosi 20 dB ima kapacitet

$$C = B \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right) = 4 \cdot 10^3 \log_2 (1 + 100) = 26632,85 \left[\frac{\text{bit}}{\text{s}} \right]$$

Podijelimo li kapacitet kanala s duljinom svake kodne riječi, dobivamo da je svake sekunde promatranim kanalom moguće poslati 2421 kodnu riječ, odnosno poruku.

Zadatak 5. Bezmemorijsko izvorište generira simbole iz skupa simbola $X = \{a, b, c, d\}$. Vjerojatnosti pojavljivanja simbola su $P(a) = 0,5$, $P(b) = 0,3$, $P(c) = 0,1$ i $P(d) = 0,1$. Poruku „aaadab“ (navodnici

nisu dio poruke) kodirajte aritmetičkim kodom te odredite broj bitova potreban za jednoznačno kodiranje zadane poruke (potrebno je ostvariti prefiksni kôd). **Napomena:** Prethodno navedeni redoslijed simbola u skupu X iskoristite za stvaranje kumulativnih podintervala unutar $[0, 1)$, pri čemu je simbol a najbliži nuli. Također, prilikom računanja podintervala nemojte zaokruživati dobivene vrijednosti dobivenih granica jer bi to moglo dovesti do krivog izračuna traženog broja bita.

a) 9 bita;

b) 10 bita;

c) 11 bita;

d) 12 bita;

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Simbol	Frekvencija pojavljivanja	Vjerojatnosti pojavljivanja	Kumulativni podintervali, $[D_s; G_s)$
a	4	0,5	$[0; 0,5)$
b	1	0,3	$[0,5; 0,8)$
c	0	0,1	$[0,8; 0,9)$
d	1	0,1	$[0,9; 1)$

Novi se podintervali D' i G' računaju prema sljedećim formulama:

$$D' = D + (G - D) \cdot D_s$$

$$G' = D + (G - D) \cdot G_s$$

Početna vrijednost donje granice je: $D = 0$

Početna vrijednost gornje granice je: $G = 1$

$$D' = D + (G - D) \cdot D_s = 0 + (1 - 0) \cdot 0 = 0$$

a: $G' = D + (G - D) \cdot G_s = 0 + (1 - 0) \cdot 0,5 = 0,5$

$$D = D' = 0; G = G' = 0,5$$

$$D' = D + (G - D) \cdot D_s = 0 + (0,5 - 0) \cdot 0 = 0$$

a: $G' = D + (G - D) \cdot G_s = 0 + (0,5 - 0) \cdot 0,5 = 0,25$

$$D = D' = 0; G = G' = 0,25$$

$$D' = D + (G - D) \cdot D_s = 0 + (0,25 - 0) \cdot 0 = 0$$

a: $G' = D + (G - D) \cdot G_s = 0 + (0,25 - 0) \cdot 0,5 = 0,125$

$$D = D' = 0; G = G' = 0,125$$

$$D' = D + (G - D) \cdot D_s = 0 + (0,125 - 0) \cdot 0,9 = 0,1125$$

d: $G' = D + (G - D) \cdot G_s = 0 + (0,125 - 0) \cdot 1 = 0,125$

$$D = D' = 0,1125; G = G' = 0,125$$

$$D' = D + (G - D) \cdot D_s = 0,1125 + (0,125 - 0,1125) \cdot 0 = 0,1125$$

$$\text{a: } G' = D + (G - D) \cdot G_s = 0,1125 + (0,125 - 0,1125) \cdot 0,5 = 0,11875$$

$$D = D' = 0,1125; G = G' = 0,11875$$

$$D' = D + (G - D) \cdot D_s = 0,1125 + (0,11875 - 0,1125) \cdot 0,5 = 0,115625$$

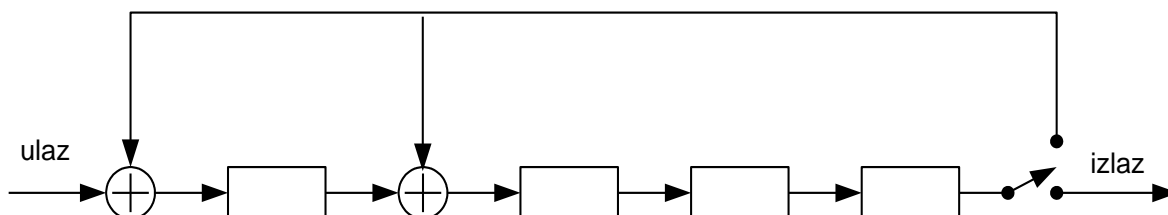
$$\text{b: } G' = D + (G - D) \cdot G_s = 0,1125 + (0,11875 - 0,1125) \cdot 0,8 = 0,1175$$

$$D = D' = 0,115625; G = G' = 0,1175$$

Broj bitova potrebnih za jednoznačno kodiranje poruke prefiksним aritmetičkim kodom moguće je izračunati pomoću konačnih vrijednosti granica podintervala, G i D :

$$N = \left\lceil \log_2 \left(\frac{1}{G - D} \right) \right\rceil + 1 = \left\lceil \log_2 \left(\frac{1}{0,1175 - 0,115625} \right) \right\rceil + 1 = \lceil 9,0588 \rceil + 1 = 10 + 1 = 11 \text{ bit}$$

Zadatak 6. Na slici je dan koder za ciklični kôd $[15, k]$. Kodirajte slijed 10001001010 koristeći metodu ciklične provjere zalihosti.



a) 100010010100011;

b) 100010010100111;

c) 100010010100010;

d) 100010010101010;

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Iz slike koderu lako možemo očitati generirajući polinom:

$$g(x) = x^4 + x + 1$$

i isto tako (budući da je stupanj polinoma jednak četiri) da se radi o cikličnom kodu $[15, 11]$.

Kôd je $[15, 11]$ dakle prvi kodirani slijed dobit će se iz prvih 11 bitova ulaznog slijeda, tj. iz "10001001010".

Jedno od temeljnih svojstava cikličnih kodova je da zaštitne bitove neke kodne riječi možemo dobiti koristeći metodu ciklične redundantne zaštite, tj. vrijedi

$$r(x) = x^{n-k} \cdot d(x) \bmod g(x)$$

U našem slučaju to bi bilo:

$$\frac{x^{n-k} \times d(x)}{g(x)} = \frac{x^4 (x^{10} + x^6 + x^3 + x)}{g(x)} = x^{10} + x^7 + x^4 + 1 \quad \text{uz ostatak } x + 1$$

Vidimo da ostatak pri dijeljenju iznosi $x+1$, odnosno $[0011]$ iz čega slijedi da je tražena kodna riječ:

$$\mathbf{c} = [100010010100011]$$

Zadatak 7. Generirajuća matrica koda K zadana je izrazom:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Koder promatranog komunikacijskog sustava koristi dualni kôd koda K . Ako dekodeer na drugom kraju komunikacijskog sustava primi riječ $[1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1]$, odredite na kojem bitu je nastala (eventualna) pogreška u prijenosu. Dodatna pretpostavka je da na bilo kojoj kodnoj riječi tijekom njenog prijenosa kanalom ne može nastati više od jedne pogreške bita, tj. težina vektora pogreške ne može biti veća od 1: $w(\mathbf{e}) \leq 1$.

a) Na 1. bitu;

b) Na 3. bitu;

c) Na 6. bitu;

d) Nije bilo pogreške;

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja

Promatrani prijenosni sustav koristi K^\perp kao zaštitni kôd. Sve riječi tog koda moguće je konstruirati poznavanjem matrice \mathbf{H} , matrice provjere pariteta koda K . Jer ako matrica \mathbf{G} daje sve kodne riječi koda K , tada njegova matrica provjere pariteta \mathbf{H} daje sve kodne riječi koda K^\perp . Ako je \mathbf{G} u standardnom obliku, tada je \mathbf{H} moguće dobiti jednostavnim pretvorbom: $\mathbf{G} = [\mathbf{I}_k | \mathbf{A}] \rightarrow \mathbf{H} = [\mathbf{A}^T | \mathbf{I}_{n-k}]$. Dakle

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sada je moguće ispisati sve kodne riječi koda K^\perp :

$$K^\perp = \begin{Bmatrix} 000000 \\ 110100 \\ 011010 \\ 101001 \\ 101110 \\ 011101 \\ 110011 \\ 000111 \end{Bmatrix}.$$

Od svih njih najmanju udaljenost prema primljenoj kodnoj riječi 110101 ima kodna riječ 110100 i prema tome zaključujemo da je pogreška nastala na šestom bitu. No do tog se rezultata moglo doći i na kraći način. Ako je matrica \mathbf{G} generirajuća matrica koda K , tada je ona ujedno i matrica provjere pariteta koda K^\perp . Stoga da bi neka kodna riječ \mathbf{c} bila dio koda K^\perp mora vrijediti: $\mathbf{c} \cdot \mathbf{G}^T = \mathbf{0}$. Provjera pariteta primljene kodne riječi pokazuje sljedeće:

$$[1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [1 \ 0 \ 1],$$

što pokazuje na šesti redak matrice \mathbf{G}^T , a to znači da je dekodirer otkrio pogrešku na šestom bitu primljene kodne riječi.

Zadatak 8. Razmatrajte izvor koji generira četiri simbola iz skupa $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ s odgovarajućim vjerojatnostima pojavljivanja za koje vrijedi:

$$1 > P(x_1) = p_1 > P(x_2) = p_2 > P(x_3) = p_3 > P(x_4) = p_4 > 0 \text{ i } \sum_{i=1}^4 p_i = 1.$$

Svi su simboli potpuno neovisni jedni o drugima. Nadalje, izvor je spojen s koderom informacije koji navedene simbole kodira binarnim simbolima sukladno algoritmu Shannon-Fano, a rezultat toga je prefiksni kôd. Kodne riječi na izlazu koder informacije, $C(x_i)$, ovise o razdiobi vjerojatnosti simbola $x_i \in X$. Neka su zadane vjerojatnosti $p_3 = 0,19$ i $p_4 = 0,15$. Odredite granice unutar kojih se smije nalaziti p_1 pa da kodna riječ $C(x_1)$ može imati duljinu jedan bit.

- a) $[0,5, 0,66]$;
- b) $[0,5, 1]$;
- c) $[0,34, 0,47]$;
- d) $[0,34, 0,47]$;**
- e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

a) Način kodiranja algoritmom Shannon-Fano ovisi o razdiobi vjerojatnosti $p(x_i)$. Pri tome je važno kako se simboli x_i , ovisno o $p(x_i)$, grupiraju. Bit je algoritma da prilikom podjele simbola u dvije grupe razlika zbroja vjerojatnosti simbola u jednoj i drugoj grupi bude minimalna. U slučaju zadanih simbola x_i i adekvatne razdiobe vjerojatnosti $p(x_i)$, konačan rezultat kodiranja algoritmom Shannon-Fano može biti:

- 1) $C(x_1) = 00, C(x_2) = 01, C(x_3) = 10, C(x_4) = 11$, ili
- 2) $C(x_1) = 0, C(x_2) = 10, C(x_3) = 110, C(x_4) = 111$.

Dakle, samo u drugom ishodu kodiranja moguće je ostvariti da $C(x_1)$ ima duljinu jednog bita. Da bi se simboli x_i dijelili u grupe na način koji odgovara binarnom kodu kreiranom u ishodu 2, mora vrijediti:

$$|p_1 - (p_2 + p_3 + p_4)| \leq |(p_1 + p_2) - (p_3 + p_4)|, \text{ tj. s obzirom da je } p_3 + p_4 = 0,19 + 0,15 = 0,34$$

$$|p_1 - p_2 - 0,34| \leq |p_1 + p_2 - 0,34|$$

Desna strana nejednakosti uvijek vrijedi zbog uvjeta $1 > p(x_1) > p(x_2) > p(x_3) > p(x_4) > 0$. Lijeva strana nejednakosti će polučiti sljedeći rezultat:

- za $p_1 \geq p_2 + p_3 + p_4$ vrijedi: $p_1 - p_2 - p_3 - p_4 \leq p_1 + p_2 - p_3 - p_4$, što daje: $2p_2 \geq 0$, a to uvijek vrijedi;

Međutim, iz uvjeta $p_1 \geq p_2 + p_3 + p_4$, tj. $p_1 \geq p_2 + 0,34$, te uz $p_2 = 1 - p_1 - (p_3 + p_4) = 0,66 - p_1$ mora vrijediti: $2p_1 \geq 1$, tj. **$p_1 \geq 0,5$** ; istovremeno, zbog uvjeta $p_2 > p_3$, tj. $p_2 > 0,19$, te zbog jednakosti $p_1 + p_2 = 1 - (p_3 + p_4)$, slijedi $p_1 < 0,66 - 0,19$, tj. **$p_1 < 0,47$** . S obzirom da je ova dva uvjeta za p_1 nemoguće istovremeno zadovoljiti, $p_1 \geq p_2 + p_3 + p_4$ nije opcija koja pogoduje rješenju.

- za $p_1 \leq p_2 + p_3 + p_4$ vrijedi: $-p_1 + p_2 + p_3 + p_4 \leq p_1 + p_2 - p_3 - p_4$, tj.

$$-p_1 + p_2 + 0,34 \leq p_1 + p_2 - 0,34,$$

i konačno: **$p_1 \geq 0,34$**

Kao što je već ranije rečeno, zbog jednakosti $p_1 + p_2 = 1 - (p_3 + p_4)$, slijedi $p_1 < 0,66 - 0,19$, tj. **$p_1 < 0,47$** . Ova dva uvjeta za je moguće istovremeno zadovoljiti pa je konačno rješenje: $p_1 \in [0,34, 0,47)$.

Zadatak 9. Neka kontinuirana slučajna varijabla X ima funkciju gustoće vjerojatnosti $f_X(x)$ zadanu sljedećim izrazom:

$$f_X(x) = \begin{cases} bx^2 & 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{za ostale } x \end{cases}$$

Odredite uvjet kojeg mora zadovoljavati a pa da entropija slučajne varijable X poprimi vrijednost manju ili jednaku 0 nat/simbol. Napomena: prilikom rješavanja zadatka svi postupci integracije moraju u cijelosti biti izvedeni na papiru, numerička integracija korištenjem kalkulatora neće biti priznavana.

a) $a \leq 2e^{-3/2}$;

b) $a \leq 3e^{-2/3}$;

c) $a \leq 2e^{-2/3}$;

d) $a \leq 3e^{-3/2}$;

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Prvo je potrebno odrediti vrijednost varijable b iz izraza za $f_X(x)$. Nju je moguće odrediti korištenjem osnovnog svojstva funkcije gustoće vjerojatnosti (udžbenik, 2. izdanje, stranica 108):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1 \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} bx^2 dx = b \frac{x^3}{3} \Big|_0^a = \frac{ba^3}{3} = 1 \rightarrow b = \frac{3}{a^3}$$

Nadalje, entropija slučajne varijable X koja će dati njenu vrijednost u jedinici nat/simbol određena je izrazom:

$$H(X) = - \int_{-\infty}^{\infty} f_X(X) \ln f_X(X) dx \quad [\text{nat/simbol}]$$

Dakle,

$$H(X) = - \int_0^a bx^2 \ln(bx^2) dx = -2b \int_0^a x^2 \ln(\sqrt{b}x) dx$$

Ovaj je integral moguće riješiti parcijalnom integracijom:

$$\begin{aligned} \int x^2 \ln(cx) dx &= \frac{x^3}{3} \ln(cx) - \int \frac{x^3}{3} c \frac{1}{cx} dx = \frac{x^3}{3} \ln(cx) - \frac{x^3}{9} \\ H(X) &= -2b \left[\frac{x^3}{3} \ln(\sqrt{b}x) - \frac{x^3}{9} \right]_0^a = -2b \frac{a^3}{3} \left[\ln(\sqrt{b}a) - \frac{1}{3} \right] = \\ &= -2 \frac{3}{a^3} \frac{a^3}{3} \left[\ln\left(\sqrt{\frac{3}{a^3}}a\right) - \frac{1}{3} \right] = -2 \left(\ln \sqrt{\frac{3}{a}} - \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{3} + \ln \frac{a}{3} \end{aligned}$$

Uvjet $H(X)$ je veći od nula ispunjen je za:

$$\frac{2}{3} + \ln \frac{a}{3} \leq 0 \rightarrow a \leq 3e^{-2/3}$$

Zadatak 10. Na ulazu diskretnog binarnog komunikacijskog kanala pojavljuju se dva simbola $X = \{x_1, x_2\}$ s pripadajućim vjerojatnostima pojavljivanja $p(x_1)$, odnosno $p(x_2)$. Odredite kapacitet danog kanala. Matrica uvjetnih vjerojatnosti prijelaza u kanalu zadana je kao

$$\left[P(y_j | x_i) \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$$

- a) 1 bit/simbol;
- b) 0,6438 bit/simbol;
- c) 0,3219 bit/simbol;**
- d) 0,1609 bit/simbol;
- e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

$$P(x_1) = q$$

$$P(x_2) = 1 - q$$

$$\left[P(x_i, y_j) \right] = \left[P(x_i) P(y_j | x_i) \right] = \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0,5(1-q) & 0,5(1-q) \end{bmatrix}$$

Zbrajanjem po stupcima matrice združenih vjerojatnosti dobivamo vjerojatnosti pojave simbola na izlazu kanala:

$$P(y_1) = 0,5(1+q)$$

$$P(y_2) = 0,5(1-q)$$

Zatim određujemo entropiju na izlazu kanala izrazom:

$$H(Y) = - \sum_{j=1}^2 P(y_j) \log_2 P(y_j)$$

$$H(Y) = - \frac{(1+q)}{2} \log_2(1+q) - \frac{(1-q)}{2} \log_2(1-q) + 1$$

Entropiju šuma računamo izrazom:

$$H(Y|X) = -\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 P(x_i, y_j) \log_2 (P(y_j | x_i))$$

$$H(Y|X) = -[q \log_2 1 + 0,5 (1-q) \log_2 (0,5) + 0,5(1-q) \log_2 (1-q)]$$

$$H(Y|X) = 1-q$$

Transinformaciju računamo izrazom:

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X)$$

$$I(X;Y) = -\frac{1}{2 \ln 2} ((1+q) \ln(1+q) + (1-q) \ln(1-q)) + q$$

Kako bismo odredili vjerojatnost pojavljivanja ulaznog skupa simbola, moramo derivirati jednadžbu transinformacije i dobiveni izraz izjednačiti s nulom:

$$0 = -\frac{1}{2 \ln 2} (\ln(1+q) - \ln(1-q)) + 1$$

$$0 = -\ln(1+q) + \ln(1-q) + \ln(4)$$

$$0 = \ln\left(\frac{4(1-q)}{1+q}\right)$$

$$q = 0,6$$

Kapacitet zadanog kanala računamo izrazom

$$C = \max_{\{p(x_i)\}} I(X;Y) = \max_{\{p(x_i)\}} (H(Y) - H(Y|X))$$

$$C = 0,3219 \frac{\text{bit}}{\text{simbol}}$$