Sveučilište u Zagrebu
Fakultet elektrotehnike i računarstva

Četvrti ispitni rok iz predmeta **TEORIJA INFORMACIJE**, 6. rujna 2024.

Pravilo bodovanja zadataka

Pismeni ispit sastoji se od 5 zadataka. Svaki točno riješen zadatak donosi 20 bodova. U zagradama {·} su navedeni bodovi za svaki dio zadatka ili cijeli zadatak. Zadaci tipa I. dio i II. dio međusobno su neovisni. **Zadaci bez jasnog postupka rješavanja neće se uzimati u razmatranje**.

Zadatak 1. {20 bodova} Na ulazu LTI sustava impulsnog odziva $h(t) = e^{-t}u(t)$ djeluje signal $W(t)$, obilježja stacionarnog slučajnog procesa (bijeli Gaussov šum), čija je spektralna gustoća snage $S_W(f) = \frac{N_0}{2}$ [W/Hz].

Napomena: $u(t) = \begin{cases} 1, t \geq 0 \\ 0, t < 0. \end{cases}$

Odredite:

i) {8 bodova} Spektralnu gustoću snage slučajnog signala na izlazu LTI sustava.
ii) {12 bodova} Srednju snagu slučajnog signala na izlazu LTI sustava.

Postupak rješavanja:

Zadatak je u jednom dijelu sličan sa zadatkom 4.15. iz *Zbirke zadataka – Teorija informacije i kodiranje* te se postupak rješavanja neće detaljno raspisivati.

$H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j2\pi ft}dt = \cdots = \frac{1}{1+j2\pi f} \rightarrow |H(f)|^2 = \frac{1}{1+(2\pi f)^2}$.

i) $S_Y(f) = S_W(f) \cdot |H(f)|^2 = \frac{N_0/2}{1+(2\pi f)^2}$

ii) $E[Y^2(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} S_Y(f)df = \cdots = \frac{N_0}{4}$ [W]

Zadatak 2. {20 bodova} Odredite kapacitet diskretnog komunikacijskog kanala čija je matrica uvjetnih vjerojatnosti prijelaza:

$$\left[p(y_j \mid x_i)\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Postupak rješavanja:

Kapacitet zadanog komunikacijskog kanala *X* – *Y* računa se po formuli:

$C = \text{maks.}_{\{p(x_i)\}} I(X;Y) = \text{maks.}_{\{p(x_i)\}} \big(H(Y) - H(Y|X)\big)$.

Neka je $p(x_1) = p; p(x_2) = q$ i $p(x_3) = 1 - p - q$.

Dobivamo da je

$$[p(x_i, y_j)] = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ \frac{q}{3} & \frac{q}{3} & \frac{q}{3} \\ 0 & 0 & 1-p-q \end{bmatrix}$$

odnosno $[p[Y]] = \left[\frac{3p+q}{3} \; \frac{q}{3} \; \frac{3-3p-2q}{3}\right] \rightarrow H(Y) = \cdots = -\frac{1}{3}[(3p+q)\log_2(3p+q) + q\log_2(q) + (3-3p-2q)\log_2(3-3p-2q) - 3\log_2(3)]$.

Isto tako dobivamo da je $H(\,Y \mid X\,) = \cdots = q\log_2(3)$.

Nadalje,

$I(X;Y) = \cdots = -\frac{1}{3}[(3p+q)\log_2(3p+q) + q\log_2(q) + (3-3p-2q)\log_2(3-3p-2q) - 3\log_2(3)] - \; q\log_2(3)$.

Rješavajući sustav jednadžbi

$$\frac{\partial I(X;Y)}{\partial p} = 0$$

$$\frac{\partial I(X;Y)}{\partial q} = 0$$

dobivamo

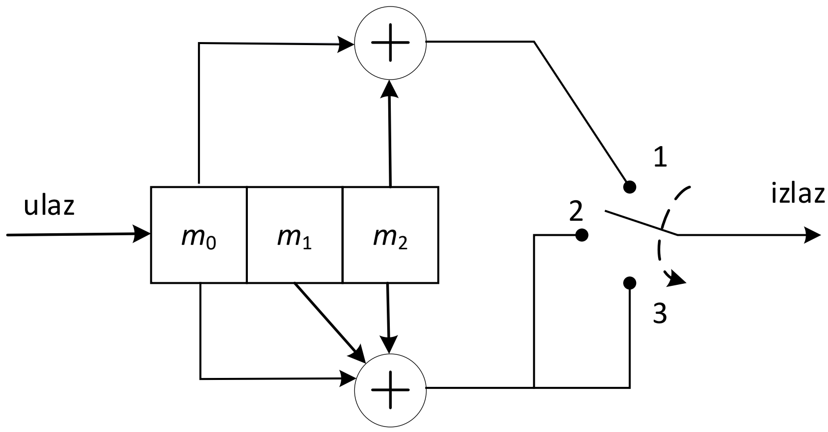
$$p = \frac{26}{55} \text{ i } q = \frac{3}{55}, \text{odnosno } 1 - p - q = \frac{26}{55}.$$

Konačno

$$C \approx 1{,}0265 \, \frac{\text{bit}}{\text{simbol}}.$$

Zadatak 3. {20 bodova} Za konvolucijski koder, s jednim ulazom i tri izlaza, sa slike (Slika 1.):

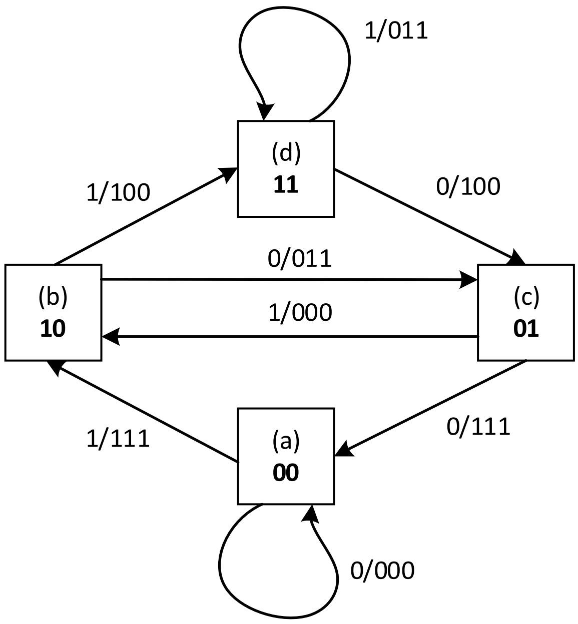
i) {4 boda}Skicirajte dijagram stanja navodeći ulazne i izlazne bitove na granama dijagrama.
ii) {10 bodova} Odredite prijenosnu funkciju $T(D)$.
iii) {3 boda} Na osnovu ii) odredite koliko ima putova u dijagramu stanja težine deset, tj. putova koji počinju u stanju 00 i završavaju u stanju 00 nakon određenog broja prijelaza.
iv) {3 boda} Odredite kodnu riječ koja se pojavljuje na izlazu kodera ako s na njegovom ulazu pojavljuje poruka **d**=[1001].



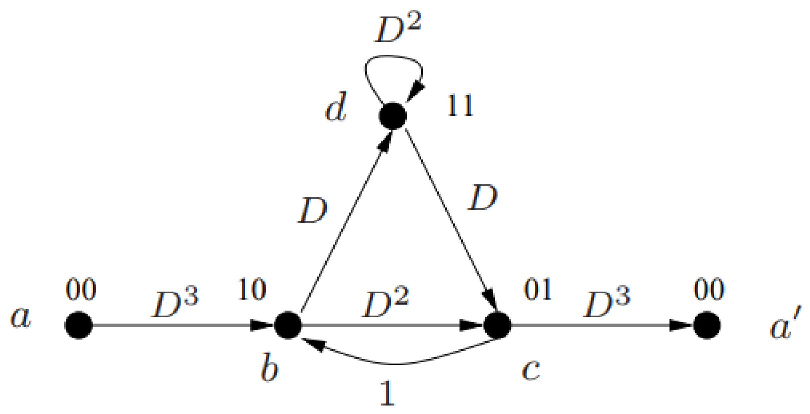
Slika 1. Za zadatak 3.

Postupak rješavanja:

i) Dijagram stanja s ulaznim/izlaznim bitovima:



ii) Dijagram stanja s težinama prijelaza izraženim preko potencije varijable *D* je:



Iz dijagrama dobivamo sljedeće jednadžbe:

$$b = D^3 a + c, \quad c = D^2 b + Dd, \quad d = Db + D^2 d, \quad a' = D^3 c$$

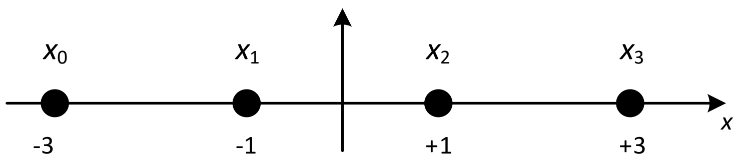
i prijenosnu funkciju:

$$T(D) = \frac{a'}{a} = \frac{2D^8 - D^{10}}{1 - 3D^2 + D^4} = 2D^8 + 5D^{10} + 13D^{12} + 34D^{14} + \cdots$$

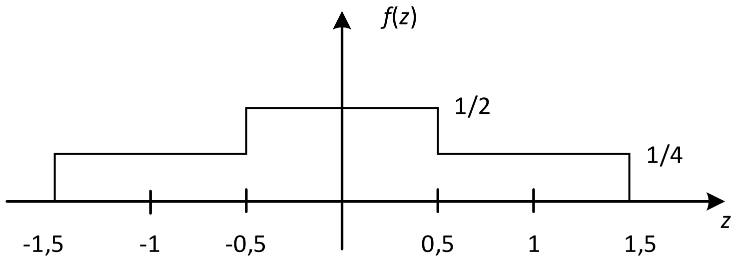
iii) Iz prijenosne funkcije očitavamo da postoji 5 različitih putova težine 10.

iv) **c**=[111 011 111 111 011 111]; Kao točan rezultat priznat će se i odgovor **c**=[111 011 111 111]. Kodiranje se moglo provesti koristeći dijagram stanja i prijelaza iz i) ili se mogla napisati generirajuća matrica **G,** koristeći funkcijske generatore $h_1^{(1)} = [101]; h_1^{(2)} = h_1^{(3)} = [111]$, te preko iste provesti kodiranje.

Zadatak 4. {**I. dio**, 12 bodova} U prijenosu informacije koristi se prijenosni sustav s četiri razine amplitude (–3, –1, +1, +3) kojima su pridruženi simboli x_0, ..., x_3, (Slika 2.). U prijenosu se pojavljuje šum Z, koji se zbraja na odaslani signal X, tj. signal na prijamnoj strani je $Y = X + Z$. Funkcija gustoće vjerojatnosti razine šuma je predočena na slici 3. Na prijamnoj strani odluka o primljenom simbolu provodi se na način da se gleda vrijednost primljenog signala, i to: ako je $y \leq -2$ tada je najvjerojatnije poslan simbol x_0; ako je $-2 < y \leq 0$ tada je najvjerojatnije poslan simbol x_1; ako je $0 < y \leq 2$ tada je najvjerojatnije poslan simbol x_2 i ako je $y > 2$ tada je najvjerojatnije poslan simbol x_3. Također, na predajnoj strani svi simboli pojavljuju se s jednakom vjerojatnošću. Odredite uvjetnu entropiju $H(Y|X)$.



Slika 2. Prijenosni sustav sa četiri razine amplitude



Slika 3. Funkcija gustoće vjerojatnosti razine šuma

Postupak rješavanja:

Koristeći funkciju gustoće vjerojatnosti razine šuma mogu se odrediti uvjetne vjerojatnosti $p(y_j|x_i)$, dobivamo:

$$\left[p(y_j \mid x_i)\right] = \begin{bmatrix} 7/8 & 1/8 & 0 & 0 \\ 1/8 & 6/8 & 1/8 & 0 \\ 0 & 1/8 & 6/8 & 1/8 \\ 0 & 0 & 1/8 & 7/8 \end{bmatrix}.$$

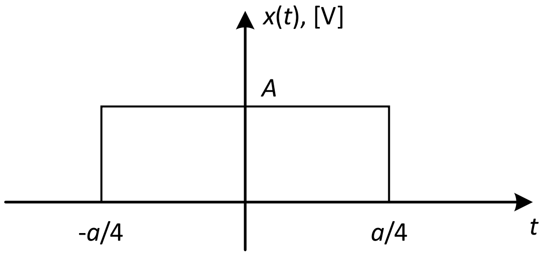
Također, $p(x_0)= p(x_1)= p(x_2)= p(x_3)=1/4$.

$H(Y|X) \approx 0{,}8024$ bit/simbol

{**II. dio**, 8 bodova} Odredite energiju signala $x(t) = A\left[u\left(t+\frac{a}{4}\right) - u\left(t-\frac{a}{4}\right)\right]$ [V], $a > 0$.

Napomena: $u(t) = \begin{cases} 1, t \geq 0 \\ 0, t < 0. \end{cases}$

Postupak rješavanja:



$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-a/4}^{a/4\infty} A^2 dt = \cdots = 0{,}5aA^2 \text{ [Ws]}.$$

Zadatak 5. {**I. dio**, 12 bodova} Neka su $l_1, l_2, \ldots, l_n$, $n \in \mathbb{N}$ i $n > 100$, duljine kodnih riječi binarnog Huffmanovog koda pridružene simbolima $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ s vjerojatnostima pojavljivanja $p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_n$. Odredite duljine kodnih riječi, $\overline{l_1}, \overline{l_2}, \ldots, \overline{l_{(n+1)}}$, novog Huffmanovog binarnog koda čije su vjerojatnosti pojavljivanja $p_1, p_2, \ldots, p_{(n-1)}, \alpha p_n, (1-\alpha)p_n$, gdje je $0 < \alpha < 1$. Također, odredite razliku $\bar{L} - L$, gdje su $\bar{L}$ i L srednja duljina kodne riječi novog Huffmanovog koda, odnosno prvotnog.

Postupak rješavanja:

Kodirajući novi skup simbola uočavamo da združivanjem dva simbola s najmanjim vjrojatnostima pojavljivanja, αp_ni $(1-\alpha)p_n$, dobivamo za kodirati polazni skup simbola jer je $\alpha p_n + (1-\alpha)p_n = p_n$. Dakle, duljine kodnih riječi prvih n – 1 simbola novog Huffmanovog koda jednake su duljinama prvih n – 1 simbola prvotnog koda, dok su duljine kodnih riječi zadnja dva simbola novog koda jednake $l_n + 1$.

Nadalje, $\bar{L} - L = p_1 l_1 + \cdots + p_{(n-1)} l_{(n-1)} + \alpha p_n (l_n + 1) + (1-\alpha) p_n (l_n + 1) - \left(p_1 l_1 + \cdots + p_{(n-1)} l_{(n-1)} + p_n l_n\right) = \cdots = p_n \left[\frac{\text{bit}}{\text{simbol}}\right]$.

{**II. dio**, 8 bodova} Diskretno bezmemorijsko izvorište, *X*, generira beskonačan niz simbola iz skupa $\{a, b\}$ s vjerojatnostima pojavljivanja $p(a) = p$ i $p(b) = 1 - p$, $(0 < p < 1)$. Neka je nad takvim skupom simbola provedeno kodiranje kako je to predočeno u sljedećoj tablici:

kôd A		kôd B	
Simboli	kodne riječi	Simboli	kodne riječi
aa	1	*aa*	0001
ab	01	*ab*	001
b	00	*ba*	01
		bb	1

Odredite:

i) {4 boda} srednju duljinu kodne riječi (bit/simbol) za svaki od navedenih kodova.

ii) {4 boda} za koje vrijednosti *p* je kôd A efikasniji od koda B?

Postupak rješavanja:

i) Kôd A pridružuje <u>različite</u> duljine kodnih riječi različitim duljinama izvorišnih simbola. Neka s_k predstavlja izvorišne simbole (jedan ili više njih grupiranih) kojima su pridjeljene različite kodne riječi. Općenito, srednju duljinu kodne riječi po simbolu (bit/simbol) možemo dobiti tako što podijelimo srednju duljinu kodne riječi po izvorišnim simbolima s_k sa srednjim brojem simbola po s_k, tj.

$$L = \frac{\sum_{\forall s_k} p(s_k)\cdot l(s_k)}{\sum_{\forall s_k} p(s_k)\cdot n(s_k)}$$

Za kôd A:

$$L_A = \frac{\sum_{\forall s_k} p(s_k)\cdot l(s_k)}{\sum_{\forall s_k} p(s_k)\cdot n(s_k)} = \frac{p(aa)\cdot l(aa) + p(ab)\cdot l(ab) + p(b)\cdot l(b)}{p(aa)\cdot n(aa) + p(ab)\cdot n(ab) + p(b)\cdot n(b)} = \frac{p^2\cdot 1 + p(1-p)\cdot 2 + (1-p)\cdot 2}{p^2\cdot 2 + p(1-p)\cdot 2 + (1-p)\cdot 1} =$$
$$= \cdots = \frac{2-p^2}{1+p}\ \frac{\text{bit}}{\text{simbol}}$$

Po istoj analogiji za kôd B dobivamo:

$$L_B = \frac{\sum_{\forall s_k} p(s_k)\cdot l(s_k)}{\sum_{\forall s_k} p(s_k)\cdot n(s_k)} = \cdots = \frac{1+3p}{2}\ \frac{\text{bit}}{\text{simbol}}$$

ii) Iz uvjeta zadatka ($\varepsilon_A > \varepsilon_B$) dobivamo $L_A < L_B$, tj. $\frac{2-p^2}{1+p} < \frac{1+3p}{2}$

odnosno

$$p^2 + \frac{4}{5}p - \frac{3}{5} > 0$$

Rješavanjem navedene nejednadžbe dobivamo:

$$p_{1/2} = -\frac{2}{5} \mp \frac{1}{2}\sqrt{\frac{16}{25} + \frac{12}{5}} = -\frac{2}{5} \mp \sqrt{\frac{19}{25}} = -\frac{2}{5} \mp \frac{\sqrt{19}}{5} = \frac{1}{5}\left(\mp\sqrt{19} - 2\right)$$

tj. nul-točke funkcije su:

$$p_1 = \frac{1}{5}\left(-\sqrt{19} - 2\right) \approx -1{,}2718$$
$$p_2 = \frac{1}{5}\left(\sqrt{19} - 2\right) \approx 0{,}4718$$

Također, p mora biti pozitivno i u granicama između 0 i 1. Važno je uočiti da parabola $p^2 + \frac{4}{5}p - \frac{3}{5} > 0$ ima vrijednosti manje od nule za $0 \le p \le p_2$. **Dakle, kôd A je efikasniji od koda B ako je** $\frac{1}{5}\left(\sqrt{19} - 2\right) < p \le 1$**.**