Sveučilište u Zagrebu
Fakultet elektrotehnike i računarstva

Završni ispit iz predmeta **TEORIJA INFORMACIJE**, 7. veljače 2024.

Pravilo bodovanja zadataka

Završni ispit sastoji se od 10 zadataka. Svaki točno odgovoreni zadatak donosi 5 bodova, netočno odgovoreni 2 negativna boda, a neodgovoreni 0 bodova.

Zadatak 1. Zadan je slučajni signal $X(t) = A + B\cdot t$ gdje su A i B neovisne slučajne varijable s jednolikom razdiobom na intervalu [–1, +1]. Odredite autokorelacijsku funkciju $R_X(t_1, t_2)$ slučajnog signala $X(t)$.

a) $\frac{1}{3}t_1t_2$;

b) 2/3;

c) $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}t_1t_2$;

d) $\frac{1}{3}(t_2-t_1)$;

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

$$R_X(t_1,t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = E[(A+B\cdot t_1)(A+B\cdot t_2)]$$
$$= E[A^2] + E[AB]t_2 + E[AB]t_1 + E[B^2]t_1t_2 = \frac{1}{3}+\frac{1}{3}t_1t_2$$

Slučajne varijable A i B: jednolika razdioba na [–1, +1] → $E[A] = E[B] = 0$, odnosno A i B su neovisne te vrijedi $E[AB] = E[A]E[B] = 0$. Nadalje,

$$E[A^2] = E[B^2] = \int_{-1}^{1} x^2 \frac{1}{2}dx = \cdots = \frac{1}{3}$$

Zadatak 2. Razmatrajte linearan binarni kôd K s generirajućom matricom $\mathbf{G} = [\mathbf{I}_3 \mid \mathbf{A}]$ čija je matrica za provjeru pariteta zadana kao:

$$\mathbf{H} = \left[\mathbf{A}^T \middle| \mathbf{I}_3\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pretpostavite da je primljena kodna riječ 110110. Odredite najvjerojatniju poslanu poruku uz pretpostavku da je u prijenosu moguća jednostruka pogreška na kodnoj riječi.

a) 010;

b) 100;

c) 111;

d) 110;

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

$$S(c') = c' \cdot H^T = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\\1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

Na temelju sindroma zaključujemo da je greška nastala na 2. bitu te je poslana kodna riječ

[1 0 0 1 1 0], a sama poruka 1 0 0.

Zadatak 3. Zadan je ciklični kôd [15, k] s generirajućim polinomom $g(x) = x^4 + x + 1$. Na ulaz kodera dolazi slijed bita 100010010111100… Koder kodira primljene poruke tehnikom nazvanom ciklična provjera zalihosti (isto što i ciklična redundantna zaštita). Odredite prvu kodnu riječ koja se pojavljuje na izlazu kodera.

a) 100010010111010;

b) 100010010111100;

c) 100010010110011;

d) 100010010110000;

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Dakle, s obzirom na to da se radi o kodu [15, k], jasno je da duljina kodne riječi iznosi $n = 15$. Nadalje, s obzirom na stupanj generirajućeg polinoma $r = 4$, proizlazi da je $k = n - r = 11$. Iz zadanog slijeda bita poruka koder će uzeti prvih jedanaest bita i na njih nadodati cikličnu zaštitu. Kodna riječ će imati standardni oblik, originalna poruka i na nju nadodani zaštitni bitovi. Zaštitni dio dobivamo iz izraza:

$$r(x) = x^r \cdot d(x) \bmod [g(x)]$$

Polinom prve poruke na ulazu kodera je $d(x) = x^{10} + x^6 + x^3 + x + 1$, što pomnoženo s x^4 daje polinom $x^{14} + x^{10} + x^7 + x^5 + x^4$. Kad se taj novonastali polinom podijeli s generirajućim polinomom $g(x)$ dobivamo rezultat $x^{10} + x^7 + x^4$ i ostatak nula. To znači da će prva kodna riječ na izlazu kodera biti 100010010110000.

Zadatak 4. Izvor generira poruke nastale ravnomjernim kodiranjem simbola iz skupa od 128 jednako vjerojatnih simbola, $X = \{x_1, \ldots, x_{128}\}$. Poruke se prije slanja u kanal kodiraju Hammingovom tehnikom zaštitnog kodiranja. Širina prijenosnog pojasa komunikacijskog kanala iznosi 4 kHz, dok omjer srednje snage signala prema srednjoj snazi šuma iznosi 30 dB. Odredite koliko je poruka moguće prenositi zadanim komunikacijskim kanalom unutar svake sekunde.

a) 2421 poruka/s;

b) 1801 poruka/s;

c) 3624 poruke/s;

d) 3805 poruka/s;

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Ako skup od 128 jednako vjerojatnih simbola kodiramo ravnomjernim kodom, tada je svaki simbol opisan jednoznačnom porukom duljine 7 bita. Nadalje, ako tu poruku kodiramo Hammingovim kodom, tada je na svaku poruku potrebno dodati 4 zaštitna bita na pozicije 1, 2, 4 i 8 u kodnoj riječi. Dakle, ukupan broj bita po svakoj kodnoj riječi iznosit će 11. Kanal širine prijenosnog pojasa 4 kHz u kojem omjer srednje snage signala prema srednjoj snazi šuma iznosi 30 dB ima kapacitet

$$C = B \cdot \log_2\left(1 + \frac{S}{N}\right) = 4 \cdot 10^3 \cdot \log_2(1 + 1000) \approx 3624{,}44 \left[\frac{\text{bit}}{\text{s}}\right]$$

Podijelimo li kapacitet kanala s duljinom svake kodne riječi, dobivamo da je svake sekunde promatranim kanalom moguće poslati 3624 kodnu riječ, odnosno poruku.

Zadatak 5. Razmatrajte sistematičan linearan binarni blok kôd [6, 3]. Na ulazu kodera kanala koji koristi takav kôd dolaze poruke u obliku $[d_1\ d_2\ d_3]$, pri čemu su d_1, d_2 i d_3 binarne znamenke. Koder kanala svaku poruku $[d_1\ d_2\ d_3]$ pretvara u kodnu riječ $[c_1\ c_2\ c_3\ c_4\ c_5\ c_6]$ pri čemu vrijedi:

$$c_1 = d_1,\ c_2 = d_2,\ c_3 = d_3,\ c_4 = d_1 \oplus d_3\ ,\ c_5 = d_1 \oplus d_2 \oplus d_3\ ,\ c_6 = d_1 \oplus d_2$$

Pretpostavite da je dekoder kanala koji koristi identičan sistematičan linearan binarni blok kôd [6,3] primio kodnu riječ [011011]. Odredite kodnu riječ koja je najvjerojatnije poslana, tj. kodnu riječ na izlazu kodera kanala.

a) [011011];

b) [100111];

c) [010011];

d) [011101];

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

S obzirom na navedene jednakosti

$$c_1 = d_1,\ c_2 = d_2,\ c_3 = d_3,\ c_4 = d_1 \oplus \mathrm{d}_3\ ,\ c_5 = d_1 \oplus \mathrm{d}_2 \oplus \mathrm{d}_3\ ,\ c_6 = d_1 \oplus \mathrm{d}_2$$

generirajuća matrica u standardnom obliku je

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \left[\mathbf{I}_3 \middle| \mathbf{A}\right]$$

Da matrica **G** doista ima ovakav oblik vidi se iz jednakosti

$$\left[d_1\, d_2\, d_3\right] \cdot \mathbf{G} = \left[c_1\, c_2\, c_3\, c_4\, c_5\, c_6\right]$$

Nadalje, transponirana matrica provjere pariteta $\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$ ima sljedeći oblik:

$$\mathbf{H}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

S obzirom da je primljena kodna riječ c' = [011011], tada za njen sindrom vrijedi:

$$S(\mathbf{c}')=\mathbf{c}'\cdot\mathbf{H}^{\mathrm{T}}=[110]$$

Dobiveni rezultat odgovara trećem retku matrice $\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$ što znači da je pogreška nastala na trećem bitu poslane poruke **c**. Konačno, poslana je poruka **c** = [010011].

Zadatak 6. ~~Razmatrajte slučajnu varijablu *X* kojom je opisan ulaz u kontinuirani komunikacijski kanal bez šuma. Slučajna varijabla *X* opisana je funkcijom gustoće vjerojatnosti $f_X(x)$~~:

$$f_X(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ 1/8, & a\le x<a+b\\ 1/4, & a+b\le x<a+3b\\ 1/8, & a+3b\le x<a+4b\\ 0, & x\le 4b\end{cases},\quad a,b\in R^{+}$$

~~Odredite kapacitet promatranog kanala u jedinici bit/simbol.~~

a) 7/(3⋅ln2) bit/simbol;

b) 7/3 bit/simbol;

c) 7/2 bit/simbol;

d) 7/2⋅ln(2) bit/simbol;

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

////

Zadatak 7. Koder koristi ciklični kôd [7, 4] koji poruku [1 1 0 1] pretvara u kodnu riječ [1 1 1 1 1 1 1]. Na početku neke komunikacije dekoder tog koda na drugoj strani prijenosnog sustava prima sljedeći niz bita: 1 0 0 1 0 1 0 0 1 … (krajnji lijevi bit je prvi koji dolazi na ulaz dekodera). Odredite na kojem je bitu prve kodne riječi u prijenosu nastala pogreška pod pretpostavkom da je na toj kodnoj riječi nastala najviše jedna pogreška.

a) Nije bilo pogreške;

b) Na petom bitu;

c) Na prvom bitu;

d) Na sedmom bitu;

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Ako promatrani kôd [7, 4] poruku **d** = [1 1 0 1] pretvara u kodnu riječ **c** = [1 1 1 1 1 1 1], onda generirajući polinom tog koda možemo odrediti na sljedeći način: $g(x) = c(x) : d(x)$, iz čega proizlazi $g(x) = x^3 + x + 1$. Temeljem poznatog generirajućeg polinoma promatranog cikličnog koda moguće je odrediti njegov polinom za provjeru pariteta, $h(x) = (x^n - 1) : g(x)$. Dakle, $h(x) = x^4 + x^2 + x + 1$. Pomoću poznatog polinoma $h(x)$ moguće je odrediti matricu provjere pariteta, **H**:

$$\mathbf{H}=\begin{bmatrix}1&1&1&0&1&0&0\\0&1&1&1&0&1&0\\0&0&1&1&1&0&1\end{bmatrix}$$

Množenjem prve riječi koja dolazi na ulaz dekodera, $\mathbf{y}$ = [1 0 0 1 0 1 0], s matricom $\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$ dobivamo:

$$\mathbf{y}\cdot\mathbf{H}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&0&0&1&0&1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&1&1&0&1&0&0\\0&1&1&1&0&1&0\\0&0&1&1&1&0&1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&0&1\end{bmatrix}$$

Taj rezultat odgovara petom retku matrice $\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$, što pak znači da je pogreška nastala na petom bitu gledano s lijeva, tj. od početka riječi koju dekoder prima. Naravno, takvo zaključivanje vrijedi samo uz pretpostavku da je u prijenosu kodne riječi nastala najviše jedna pogreška, što je zadatkom i zadano.

Zadatak 8. Zadan je ternarni ponavljajući kôd duljine kodne riječi 4 simbola. Simboli su iz abecede $\{0, 1, 2\}$. Svi simboli su jednako vjerojatni i vjerojatnost ispravnog prijenosa svakog simbola je $1 - p$ $(0 < p < 1)$, dok su svi mogući pogrešni prijenosi jednako vjerojatni. Odredite vjerojatnost jednoznačnog (ispravnog) dekodiranja kodne riječi ako je p = 0,05 te ako se na prijamnoj strani kod dekodiranja koristi pravilo najbližeg susjeda.

Napomena: Ponavljajući kôd: Preslikava poruku duljine jedan simbol (k = 1) u kodnu riječ duljine n simbola i pri tome su svi simboli kodne riječi identični (jednaki) simbolu poruke.

a) ≈0,98120;
b) ≈0,94311;
c) ≈0,98600;
d) ≈0,99275;
e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Zadani kôd ima tri kodne riječi K = {0000, 1111, 2222}, minimalnu udaljenost d = 4 i mogućnost ispravljanja jednostrukih $\left(t = \left\lfloor\frac{4-1}{2}\right\rfloor = 1\right)$ i nekih dvostrukih pogrešaka.

Na primjer:

Primljene kodne riječi koje će se jednoznačno dekodirati pravilom najbližeg susjeda kao 1111 su:

1111;

0111, 2111, 1011, 1211, 1101, 1121, 1110, 1112;

0211, 2011, 0121, 2101, 0112, 2110, 1021, 1201, 1012, 1210, 1102, 1120.

Nadalje, vjerojatnost ispravnog dekodiranja kodne riječi je:

$$p_{ispr.} = (1-p)^4 + 8\left(\frac{p}{2}\right)(1-p)^3 + 12\left(\frac{p}{2}\right)^2(1-p)^2 = \cdots = (1-p)^2(1+2p).$$

Za p = 0,05 dobivamo da je $p_{ispr.} = 0{,}99275$.

Zadatak 9. Signal $x(t)$ se na ulazu nekog senzora uzorkuje s frekvencijom uzorkovanja $f_u = 1$ kHz. Na izlazu sklopa za kodiranje uzoraka pojavljuje se signal prijenosne brzine 6000 bit/s uz omjer srednje snage signala prema srednjoj snazi kvantizacijskog šuma (S/N_{Q}) od 30 dB. Međutim, navedeni omjer S/N_{Q} nije zadovoljavajući i zahtijeva se vrijednost od najmanje 40 dB. Odredite minimalnu prijenosnu brzinu na izlazu sklopa za kodiranje uzoraka pri kojoj će biti zadovoljen traženi zahtjev.
Napomena: Kvantizator provodi jednoliko kvantiziranje!

a) 7000 bit/s;

b) 8000 bit/s;
c) 9000 bit/s;
d) 10000 bit/s;
e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Iz f_u=1 kHz i R = 6000 bit/s slijedi da se svaki uzorak signala $x(t)$ kodira sa 6 bitova, tj. r = 6 bit/uzorak.

Također, iz formule (Knjiga str. 99.)

$$10 \cdot \log(S/N_Q) = 10 \cdot \log\left(\frac{3S}{m_{max}^2} 2^{2r}\right) = 30$$

dobivamo da je

$$\frac{3S}{m_{max}^2} = \frac{1000}{2^{2r}}.$$

Uvrštavajući prethodni izraz u (traženi uvjet zadatka):

$$10 \cdot \log\left(\frac{3S}{m_{max}^2} 2^{2\bar{r}}\right) \geq 40$$

dobivamo

$$10 \cdot \log\left(1000 \cdot 2^{2(\bar{r}-r)}\right) \geq 40$$

iz čega slijedi

$$2^{2(\bar{r}-r)} \geq 10,$$

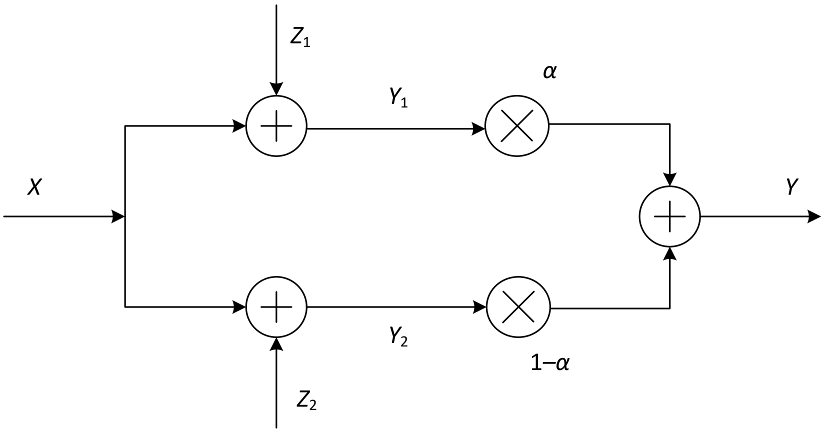
odnosno dobivamo da je najmanji potrebni broj bitova za kodiranje svakog uzorka signala $x(t)$ za koji je zadovoljen uvjet $S/N_Q \geq 40$ dB jednak 8, tj. $\bar{r} = 8\,\frac{\text{bit}}{\text{uzorak}}$.

Uz $\bar{r} = 8\,\frac{\text{bit}}{\text{uzorak}}$ i f_u=1 kHz dobivamo da je minimalna prijenosna brzina na izlazu sklopa za kodiranje uzoraka jednaka 8000 bit/s.

Zadatak 10. Na slici je zadan komunikacijski kanal s aditivnim Gaussovim bijelim šumom (Z_1 i Z_2) u kojem se poslani signal X, sa srednjom snagom $E[X^2] = P$ i $E[X] = 0$, neovisan o Z_1 i Z_2, prima na dva prijamnika, tj.:

$$Y_1 = X + Z_1,$$
$$Y_2 = X + Z_2.$$

Također, Z_1 i Z_2 su međusobno neovisni i vrijedi ($E[Z_i^2] = N_i$ i $E[Z_i] = 0$ za i = 1, 2) i $N_1 < N_2$. Krajnji signal iz dva prijamnika dobije se kao: $Y = \alpha Y_1 + (1-\alpha) Y_2$, $(0 < \alpha < 1)$.



Odredite za koje α se postiže maksimalna dinamika zadanog kanala $X - Y$?

a) $\alpha = \frac{N_1}{N_2}$;

b) $\alpha = 1 - \frac{N_1}{N_2}$;

c) $\alpha = \frac{N_2}{N_1+N_2}$;

d) $\alpha = \frac{N_1}{N_1+N_2}$;

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Dinamika kanala $X - Y$ računa se po formuli:

$$D = \frac{1}{2}\log_2\left(1 + \frac{S}{N}\right),$$

gdje je S snaga signala na prijamnoj strani, a N snaga šuma.

Odredimo snagu signala, Y, na prijamnoj strani.

$$E[Y^2] = E[(\alpha Y_1 + (1-\alpha)Y_2)^2] = E\left[\left(\alpha(X + Z_1) + (1-\alpha)(X + Z_2)\right)^2\right] = \cdots = \alpha^2 E[X^2] + \alpha^2 E[Z_1^2] + 2\alpha(1-\alpha)E[X^2] + (1-\alpha)^2 E[X^2] + (1-\alpha)^2 E[Z_2^2] = P + \alpha^2 N_1 + (1-\alpha)^2 N_2.$$

Iz prethodnog izraza dobivamo da je $S = P$ i $N = \alpha^2 N_1 + (1-\alpha)^2 N_2$.
Dakle, dinamika zadanog kanala je:

$$D = \frac{1}{2}\log_2\left(1 + \frac{P}{\alpha^2 N_1 + (1-\alpha)^2 N_2}\right).$$

Maksimalna dinamika dobiva se deriviranjem prethodnog izraza, tj. rješavanjem jednadžbe:

$$\frac{dD}{d\alpha} = 0,$$

što daje:

$$\alpha = \frac{N_2}{N_1 + N_2}.$$

Maksimalna dinamika iznosi:

$$D = \frac{1}{2}\log_2\left(1 + \frac{P}{N_1} + \frac{P}{N_2}\right).$$