1 Blok kodovi

- **Udaljenost koda:** $d(K) = \min\limits_{x,y \in K}(d(x,y) \mid x \neq y)$
- **Otkrivanje** s **pogrešaka:** $d(K) \geqslant s+1$; vrijedi za princip dekodiranja najbližim susjedom
- **Ispravljanje** t **pogrešaka:** $d(K) \geqslant 2t+1 \Rightarrow \left\lfloor \frac{d(K)-1}{2} \right\rfloor$; vrijedi za princip dekodiranja najbližim susjedom
- **Kugla kodne riječi:** $S(x,r) = \{y \in V(n) \mid d(x,y) \leqslant r\}$
- broj vektora koji su od x udaljeni točno za r je $\binom{n}{r}$
- najveći br. kodnih riječi: $M = 2^n$
- **Hammingova gornja međa:** $M \leqslant \frac{2^n}{\sum_{i=0}^{t}\binom{n}{i}}$
- perfektan kod ako $M = \frac{2^n}{\sum_{i=0}^{t}\binom{n}{i}}$
- dobivanje ekvivalentnih kodova: (1) zamjena dviju pozicija koda, (2) na jednoj ili više istih pozicija u kodnim riječima primjenimo preslikavanja: $0 \mapsto 1$ i $1 \mapsto 0$

2 Paritet - vertikalna i horizontalna provjera

- $x_{i,\,j}$ oznaka za j-ti simbol i-te poruke (ima m poruka duljine k)
- $R_i = x_{i,\,1} \oplus \cdots \oplus x_{i,\,k}$, po retcima tablice
- $C_i = x_{1,\,i} \oplus \cdots \oplus x_{m,\,i}$, po stupcima tablice
- $R = R_1 \oplus \cdots \oplus R_m = C_1 \oplus \cdots \oplus C_k$
- $R = 1 \implies$ dogodila se greška, sjecište retka i stupca

3 Linearno binarni blok kodovi

- ako je za $K \subseteq V(n)$ ispunjeno da $\forall x, y \in K$ vrijedi: $x+y \in K$ te ujedno i $a \cdot x \in K$, gdje $a \in F_2$, zove se **linearni binarni blok kod**; svako se zbrajanje provodi modulo 2 (`xor` $-$ $\oplus$)
- **Težina kodne riječi:** $w(x) =$ br. jedinica u riječi
- **Udaljenost LBBK-a:** $d(K) = w(K) = \min\limits_{x \in K}(w(x) \mid x \neq \mathbf{0}) =$ min. br. stupaca u matrici $\mathbf{H}$ koji zbrajanjem modulo 2 daju 0
- **Oznaka:** [n, k, d], n $-$ duljina riječi, k $-$ dimenzija vekt. prostora, d $-$ udaljenost koda
- **Genarijrajuća matrica** G $-$ retci su vektori baze koda K, dimenzije $G = [\ \cdot\ ]_{k \times n}$; **Standardni oblik gen. matrice:** $G = [I_k \mid A]$
- ekvivalentni LBBK: (1) zbrajanje redaka, (2) zamjena redaka; (3) zamjena stupaca $\rightarrow$ dobije se gen. matrica **novog** koda za razliku od (1) i (2)
- **Kodiranje gen. matricom:** $\mathbf{x} = \mathbf{d} \cdot \mathbf{G}$ $\rightarrow$ matrično množenje; $\mathbf{x}$ je dobivena koda riječ; ako je $\mathbf{G}$ u standardnom obliku, prvih k bitova je sama poruka $\mathbf{d}$, a ostali su zalihosni
- vektor pofreške: $\mathbf{e} = \mathbf{y} \oplus \mathbf{x}$; $\mathbf{y}$ je primljeni, a $\mathbf{x}$ poslani vektor
- **Standardni niz** je tablica $-$ prvi redak načinjen od kodnih riječi koda K, a prvi stupac od jednostrukih vekt. pogreške, ostale ćelije su $\oplus$ vektora pogrešaka i kodnih riječi
- **Dualni kod:** $K^{\perp} = \{y \in V(n) \mid \forall x \in K,\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0\}$, skalarno množenje komponenata vektora; ovo je LBBK
- **Generirajuća matrica dualnog koda, H, tj. matrica provjere pariteta:** neka je $\mathbf{G} = [I_k \mid A]$ gen. matrica koda K, tada je gen. matrica njemu dualnog koda $K^{\perp}$ u oznaci $H = [-A^{\top} \mid I_{n-k}]$; uz činjenice: $-1 \equiv 1 \pmod 2$ i $-1 \equiv 2 \pmod 3$
- provjera ispravnosti poslane kodne riječi $\mathbf{x}$: mora vrijediti $\mathbf{x} \cdot \mathbf{H}^{\top} = \mathbf{0}$ (općenito: $\mathbf{G} \cdot \mathbf{H}^{\top} = \mathbf{0}$)
- **Sindrom** primljene kodne riječi $\mathbf{y}$: $\mathbf{S}(\mathbf{y}) = \mathbf{y} \cdot \mathbf{H}^{\top}$; ako je poslana riječ $\mathbf{x}$, tada vrijedi: $\mathbf{S}(\mathbf{y}) = (\mathbf{x} + \mathbf{e}) \cdot \mathbf{H}^{\top} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{H}^{\top}$; isti je za vektore istog razreda
- **Sindromsko dekodiranje:** (1) izračunati sindrom $\mathbf{S}(\mathbf{y})$ primljene kodne riječi $\mathbf{y}$, (2) odrediti vektor pogreške $\mathbf{e}$, (3) poslana kodna riječ je $\mathbf{x} = \mathbf{y} \oplus \mathbf{e}$

  Alternativno: nakon računanja sindroma, odrediti na kojoj se poziciji on nalazi u matrici $\mathbf{H}^{\top}$ (gledajući $\downarrow$) te zamijeniti taj bit u primljenoj poruci $\mathbf{y}$ (gledajući $\rightarrow$)
- **Vjerojatnost ispravnog dekodiranja** u BSK s vjerojatnošću krivog prijenosa p_g: $\mathbb{P}(K) = \sum_{i=0}^{n} N_i \cdot p_g^i \cdot (1-p_g)^{n-i}$, $N_i \rightarrow$ br. vektora pogreške s točno i jedinica; ako je kod perfektan: $\mathbb{P}(K) = \sum_{i=0}^{t}\binom{n}{i} \cdot p_g^i \cdot (1-p_g)^{n-i}$
- **Kodna brzina zaštitnog koda:** $R(K) = \frac{k}{n} \leqslant 1$
- iz matrice $\mathbf{G}$ se uvijek može doći do $\mathbf{H}$, ali obratno samo kada nije zadano točno preslikavanje poruka u kodnu riječ
- **Formiranje H iz G**: ako je $\mathbf{G}$: u standardnom obliku, onda samo $\mathbf{H} = [-A^{\top} \mid I]$; inače napraviti iz $\mathbf{G}$ standardni oblik zamjenom stupaca (zapisati redoslijed zamjene sa strane), formirati $\mathbf{H} = [-A^{\top} \mid I]$, provesti istu zamjenu stupaca

4 Hammingovi kodovi

- Neka je $r \in \mathbb{N}$, $r \geqslant 2$ te neka je $\mathbf{H}$ matrica dimenzija $r \times (2^r - 1)$ čiji su stupci r-dimenzionalni vektori različiti od $\mathbf{0}$, tada je $\mathbf{H}$ matrica provjere pariteta Hammingovog koda u oznaci $\mathrm{Ham}(r)$; $t = 1$, $s = 2$; to je LBBK $[2^r - 1,\ 2^r - 1 - r]$; $d(\text{Hammingov kod}) = 3$

$$\mathbf{H} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

- **Kodiranje**, paritetni (kontrolni) bitovi postavljaju se na pozicije 2^i, $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, računaju se zbrajanjem modulo 2 bitova koje kontroliraju, na ostale se stavljaju bitovi poruke; moguće kodirati i pomoću generirajuće matrice, ista formula: $\mathbf{x} = \mathbf{d} \cdot \mathbf{G}$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	$\cdots$
c_0	c_1	d_1	c_2	d_2	d_3	d_4	c_3	d_5	d_6	$\cdots$
×		×		×		×		×		$\cdots$
	×	×			×	×			×	$\cdots$
			×	×	×	×				$\cdots$
							×	×	×	$\cdots$

- **Formiranje** generirajuće matrice $\mathbf{G}$ iz $\mathbf{H}$ za Hammingov kod: (1) iz $\mathbf{H}$ maknuti stupce na pozicijama potencija broja 2, (2) transponirati dobivenu matricu, (3) stupce dobivene matrice staviti na pozicije potencije broja 2 u $\mathbf{G}$, (4) ostale stupce u $\mathbf{G}$ redom napuniti stupcima jedinične matrice
- **Sindromsko dekodiranje** isto kao i za LBBK, ako $\mathbf{H}$ ima stupce slijednih brojeva u binarnom zapisu (1, 2, ..., $2^r - 1$), tada je sindrom pozicija u primljenoj kodnoj riječi čiji bit treba invertirati

5 Ciklični kodovi

- **Uvjeti za cikličan kod:**
  (1) $\forall a(x),\, b(x) \in K \implies a(x)+b(x) \in K$;
  (2) $\forall a(x) \in K$ i $\forall r(x) \in R_n \implies r(x){\cdot}a(x) \bmod (x^n - 1) \in K$
- za kod duljine n vrijedi: $x^n - 1 = g(x) \cdot h(x)$ gdje je $g(x)$ generirajući polinom stupnja r, a $h(x)$ je polinom za provjeru pariteta stupnja $k = n - r$
- generirajući polinom $g(x)$ uvijek mora biti stupnja r (najmanji stupanj cikličkog koda) i mora imati član $x^0 = 1$
- Faktorizacija polinoma:

n	aritmetika	faktorizacija mod 2
1	$x^1 - 1$	$x+1$
2	$x^2 - 1$	$(x+1)^2$
3	$x^3 - 1$	$(x+1)(x^2+x+1)$
5	$x^5 - 1$	$(x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$
7	$x^7 - 1$	$(x+1)(x^3+x+1)(x^3+x^2+1)$
9	$x^9 - 1$	$(x+1)(x^2+x+1)(x^6+x^3+1)$
11	$x^{11} - 1$	$(x+1)(x^{10}+x^9+\cdots+x+1)$
13	$x^{13} - 1$	$(x+1)(x^{12}+x^{11}+\cdots+x+1)$
15	$x^{15} - 1$	$(x+1)(x^2+x+1)(x^4+x+1)(x^4+x^3+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$
17	$x^{17} - 1$	$(x+1)(x^8+x^5+x^4+x^3+1)(x^8+x^7+x^6+x^4+x^2+x+1)$
19	$x^{19} - 1$	$(x+1)(x^{18}+x^{17}+\cdots+x+1)$

- **Konstrukcija generijajuće matrice G:** u zadnji redak **G** staviti koeficijente od $g(x)$; svaki se gornji redak dobije roacijom ulijevo za jedan; kako bi se dobila standardna gen. matrica, pribrajaju se prethodni retci kako bi nastala jedinična podmatrica

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \vdots \\ x^2 g(x) \\ x g(x) \\ g(x) \end{bmatrix}$$

- **Kodiranje**, može se koristiti formula $\mathbf{x} = \mathbf{d} \cdot \mathbf{G}$, ali bitovi poruke izmješani su sa zalihosnima; bolji postupak: nakon bitova poruke dodaju se redundantni bitovi (CRC) koji se iščitaju iz polinoma $\boxed{r(x) = d(x) \cdot x^r\, \mathbf{mod}[g(x)]}$ $\rightarrow$ oblik: $\boxed{\text{PORUKA}|\text{CRC}}$
- **Dekodiranje**, pomoću polinoma **sindroma** $S(y(x))$; definira se: $S(y(x)) := x^r \cdot y(x) \bmod [g(x)] = x^r \cdot e(x)\, \mathbf{mod}[g(x)] \boxed{= S(e(x))}$ gdje je $y(x)$ polinom primljene kodne riječi, r, stupanj od $g(x)$, dok je $e(x)$ polinom pogreške; dobiva se na isti način kao i polinom zalihosnih bitova $r(x)$; **postupak: (1)** izračunati sindrome za **sve** polinome pogreške, **(2)** izračunati sindrom posalne poruke $y(x)$, **(3)** ispraviti bit na mjestu ukazanom prema polinomu pogreške uparenom sindromu koji se poklapa sa sindromom iz (2)

6 Konvolucijsko kodiranje

- (n,k,L) $\rightarrow n$ - izlaz kodera; k - ulaz kodera; L - granična duljina kodera (računa se $L = m+1$, gdje je m br. memorijskih stanja posmačnog registra)
- **Funkcijski generator** $h_i^{(j)}$ ulaza i te j-tog izlaza kodera vektor je duljine m (po mem. stanjima posmačnog reg.), bitovi i-tog posmačnog reg. koji su preko `xor` spojeni na j izlaz kodera su u $h_i^{(j)}$ postavljeni u 1, ostali u 0
- **Generirajuća matrica G** ima n stupaca; prvi redak izgleda ovako: $[\mathbf{G_1}\ \ \mathbf{G_2}\ \cdots\ \mathbf{G_m}\ \ 0\ \cdots\ 0]$, nula ima po potrebi da se nadopune stupci, svaki sljedeći redak isti je kao prethodni, ali zarotiran udesno za 1, postupak se ponavlja sve dok $\mathbf{G_m}$ ne dođe do kraja matrice, $\mathbf{G}_l$ je podmatrica dimenzija $k \times n$, a sastoji se od vekotr-redaka oblika $\begin{bmatrix} h_{i,l}^{(1)} & h_{i,l}^{(2)} & \cdots & h_{i,l}^{(n)} \end{bmatrix}, i \in \{1, 2, ..., k\}$, tj. $\mathbf{G}_l$ ima redaka koliko je ulaza u koder te su u i-tom retku nanizani l-ti bitovi prema rastućim izlazima funkcijskih generatora h_i; **kodiranje:** množi se poruka s **G**
- **Prijenosna funkcija** $T(D) = \frac{X'_a}{X_a}$ gdje je X'_a funkcija izlaza, a X_a funkcija ulaza, na dijagramu stanja se dodaju D^i gdje je i težina kodne riječi koja se dobije na prijelazu; potrebno napisati funkcije svih pojedinih stanja te algebarski izraziti X_a i X'_a preko D; razviti u red $\rightarrow$: potencija predstavlja duljinu puta, a koeficijent koliko je takvih puteva

7 Signali u kontinuiranom vremenu

- srednja energija signala: $\int_{-\infty}^{\infty} R i^2(t) \mathrm{d}t$ [Ws] $(R = 1\Omega)$
- srednja snaga signala: $\lim_{T\to\infty} \left(\int_{-T/2}^{T/2} \frac{u^2(t)}{RT} \mathrm{d}t \right)$ [W]

7.1 Periodični signali

- $x(t) \Longleftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta(f - kf_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_o t}$
- $c_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t}$ (c_0 je istosmjerna komponenta)
- Diracova delta funkcija, svojstva: (1) $\delta(t) \neq 0, t = 0$; (2) $\delta(t) = 0, t \neq 0$; (3) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\mathrm{d}t = 1$; (4) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) x(t) \mathrm{d}t = x(t_0)$
- srednja snaga: $P = |c_0|^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$
- snaga istosmjerne komponente: $P_0 = |c_0|^2$
- **trigonometrijske funkcije**
  - sinsusni signal: $x(f) = -j\frac{A}{2}[\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$
  - kosinusni signal: $x(f) = \frac{A}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$
  - srednja snaga: $P = \frac{A^2}{2}$
- **periodičan slijed pravokutnih impulsa**
  - amplituda A, trajanje τ, period ponavljanja T_0
  - $c_k = \frac{A \cdot \tau}{T_0} \cdot \frac{\sin\left(\frac{k\pi\tau}{T_0}\right)}{\frac{k\pi\tau}{T_0}}$ $\rightarrow$ komponente spektra na $kf_0, k \in \mathbb{Z}$
  - srednja snaga: $A^2 \cdot \frac{\tau}{T_0}$

7.2 Neperiodični signali

- srednja energija: $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \mathrm{d}t$
- spektar: $x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t}\mathrm{d}t$; vremenska domena: $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(f) e^{-j2\pi f t}\mathrm{d}f$
- **VRSTE SIGNALA: (1) signali energije** - konačna energija, $P = 0$; **(2) signali snage** - konačna srednja snaga $(P > 0)$ i $E = \infty$; **(3) signali niti snage, niti energije** - $P = E = \infty$
- **pravokutni impuls**
  - τ je trajanje impulsa, A je amplituda
  - $x(f) = A\tau \cdot \frac{\sin\left(\frac{2\pi f \tau}{2}\right)}{\frac{2\pi f \tau}{2}}$ $\rightarrow$ max vrijednost za $f = 0$ Hz
  - srednja snaga: $P = 0$, ukupna energija: $E = A^2\tau$

7.3 Slučajni signali

- srednja vrijednost: $\mu_X(t) = \mathbb{E}\big[X(t)\big] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) \mathrm{d}x$
- autokorelacijska funkcija: $R_X(t_1, t_2) = \mathbb{E}\big[X(t_1)X(t_2)\big]$
- autokovarijanca: $C_X(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) - \mathbb{E}\big[X(t_1)\big] \cdot \mathbb{E}\big[X(t_2)\big]$
- $X(t)$ **stacionaran u širem smislu** - očekivanje mu je konst. u vremenu, a autokorelacija ovisi samo o razlici $\tau := |t_1 - t_2|$
- spektralna gustoća snage: $S_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-j2\pi f \tau} \mathrm{d}\tau$ [W/Hz]
- autokorelacijska funkcija: $R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) e^{j2\pi f t} \mathrm{d}f$
- srednja snaga: $P = \mathbb{E}\big[X^2(t)\big] = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f)\mathrm{d}f = R_X(\tau = 0)$

- **bijeli Gaussov šum** W - vrijednosti u različitim trenutcima moraju biti nekorelirane ($C_X(t_i, t_j) = 0, \forall i \neq j$); ako su nezavisne, tada je **strogo** bijeli šum; vrijedi: $R_W(\tau) = \sigma^2\delta(\tau)$, tj. $S_W(f) = \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j2\pi ft}\mathrm{d}\tau = \boldsymbol{\sigma^2}$
- **LTI kanali**
  - linearna kombinacija ulaznih signala $\alpha_i x_i(t)$ jednaka je linearnoj kombinaciji izlaznih signala $\alpha_i y_i(t)$; vremenski nepromjenjiv ako vrijedi: $x(t) \to y(t) \implies x(t-t_0) \to y(t-t_0)$
  - prijenosna funkcija sustava: $H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j2\pi ft}\mathrm{d}t$
  - amplitudni i fazni odziv: $|H(-f)| = |H(f)|$ i $\theta(-f) = -\theta(f)$
  - srednja vrijednost izlaza: $\mu_Y = \mu_X \cdot H(0)$
  - spektralna gustoća snage izlaza: $S_Y(f) = S_X(f) \cdot |H(f)|^2$
  - spektar izlaza: $|Y(f)| = |X(f)| \cdot |H(f)|$
  - nisko propusni kanal: $h(t) = 2f_g \cdot \frac{\sin(2\pi f_g(t-\tau))}{2\pi f_g(t-\tau)}$
  - **širina prijenosnog pojasa kanala B** za nisko propusni: $B = f_g$; za pojasno propusni: $B = f_g - f_d$

7.4 Uzorkovanje i kvantizacija signala

- **Teorem uzorkovanja** (vremenska domena) - pojasno ograničen signal koji nema komponenete na frekvencijama $> B$ je potpuno i jednoznačno opisan vrijednostima signala u diskretnim trenutcima $T_n = \frac{n}{2B}$ [odnosi se na predajnik] te ga je moguće potpuno rekonstruirati potpuno rekonstruirati iz uzoraka ako su oni međusobno razmaknuti $1/2B$ sekundi, tj. $f_U \geqslant 2B$ [odnosi se na prijemnik]
- uzorkovani signal: $x_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_U)\delta(t - nT_U)$; T_U; $x_\delta(f) = f_U \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(f - nf_U) \to$ jednoliko uzorkovanje signala daje periodičan spektar, period spektra je frekvencija uzorkovanja
- **rekonstrukcija** - propustiti kroz NPF čija je granična frekvencija max frekvencija u spektru uzorka; ako f_g pada na komponentu, tada i ona ulazi u spektar
- **poduzorkovanje** - kada $f_U < 2B$, nije moguća rekonstrukcija
- $r-$broj bitova za kodiranje, $L-$broj kvantizacijskih stepenica ($L = 2^r$), $[-m_{\max}, m_{\max}]-$ interval amplitude ulaznog signala, $\Delta-$korak kvantizacije ($\Delta = 2 \cdot m_{\max}/L$), srednja snaga kvantizacijskog šuma $N_q = \Delta^2/12$; omjer sinusnog signala i kvantizacijiskog šuma: $S/N_q = 3/2 \cdot L^2$
- **srednja kvadratna pogreška kod kvantizacije:** $\overline{N_q}^2 = \sum_{u_{q_i}} \int_{u_{q_i}-\frac{\Delta}{2}}^{u_{q_i}+\frac{\Delta}{2}} (u - u_{q_i})^2 p(u)\mathrm{d}u$; $u_{q_i}-$sredina i-te kvantizacijske razine, $p(u)-$funkcija gustoće vjerojatnosti razine signala $u(t)$
- **prijenosna brzina informacije:** $R_b = f_U \cdot r$; f_U-frekvencija uzorkovanja, $r-$broj bitova po uzorku

7.5 Kapacitet kanala u kontinuiranom vremenu

- **entropija:** $H(x) = -\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\log_2(f_X(x))\mathrm{d}x$
- ako je $X \sim \mathscr{U}(a, b) \implies H_{\max}(X) = \ln(b - a)$ [nat/simb]
- ako je $X \sim \mathscr{E}\left(\frac{1}{a}\right) \implies H_{\max}(X) = 1 + \ln(a)$ [nat/simb]
- ako je $X \sim \mathscr{N}(a, \sigma^2) \implies H_{\max}(X) = \ln(\sigma\sqrt{2\pi e})$ [nat/simb]
- **ekvivokacija:** $H(X|Y) = -\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\log_2\left(\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$
- **entrpoija šuma:** $H(Y|X) = -\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\log_2\left(\frac{f(x,y)}{f_X(x)}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$
- **združena:** $H(X, Y) = -\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\log_2(f(x, y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$
- **transinformacija:** $I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X) = H(X) + H(Y) - H(X, Y)$; X, Y nezavisne, $I(X;Y) = 0$

7.5.1 Gaussov aditivni šum

- $X-$sluč. var. ulaznog signala $\mathbb{E}(X) = 0$ i $\mathbb{D}(X) = \sigma_X^2$, $Y-$sluč. var. izlaznog signala, $Z-$sluč. var. šuma ($Z \sim \mathscr{N}(0, \sigma_Z^2)$); X, Z nezavisne
- zbog nezavisnosti $f(y|x) = f(x + z|x) = f_Z(z)$ i $H(Y|X) = H(Z) \rightsquigarrow$ max je gore određen, $H_{\max}(Z) = \ln(\sigma\sqrt{2\pi e})$
- $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X + Z) = 0$
- $\mathbb{D}(Y) = \mathbb{E}\big[(X + Z)^2\big] - \mathbb{E}^2\big[X + Z\big] = \cdots = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$
- funkcija gustoće za koju je $H(Y)$ maksimalno je Gaussova, tj. $Y \sim \mathscr{N}(0, \sigma_X^2 + \sigma_Z^2) \rightsquigarrow H_{\max}(Y) = \frac{1}{2}\ln(2\pi e(\sigma_X^2 + \sigma_Z^2))$
- **kapacitet:** $C = \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{S}{N}\right)$ [nat/simb] gdje je $S := \sigma_X^2$ srednja snaga signala na ulazu, a $N := \sigma_Z^2$ srednja snaga šuma; za bitove: $C = \frac{1}{2}\log_2\left(1 + \frac{S}{N}\right)$ [bit/simb]

7.5.2 Kapacitet pojasno ograničenog kanala (AWGN)

- uzorkovati kontinuirane signale u n-dimenzionalne diskretne vektore $\mathbf{X} = [X_1, ..., X_n]$ i $\mathbf{Y} = [Y_1, ..., Y_n]$, pretpostaviomo da su i disperzije svake komponente jednake $\sigma_{X,k}^2 = \sigma_X^2$ i $\sigma_{Y,k}^2 = \sigma_Y^2$ za $k = 1, ..., n$
- $I_{\max}(\mathbf{X};\mathbf{Y}) = \sum_{k=1}^{n}\log_2(\sigma_{Y,k}\sqrt{2\pi e}) - \sum_{k=1}^{n}\log_2(\sigma_{Z,k}\sqrt{2\pi e})$ $I_{\max}(\mathbf{X};\mathbf{Y}) = \frac{n}{2}\log_2\left(1 + \frac{S}{N}\right)$ [bit/simb], S je srednja snaga signala, a N srednja snaga šuma
- zbog pojasne ograničenosti $f_U \geqslant 2B \implies n = 2B$
- **kapacitet:** $C = B\log_2\left(1 + \frac{S}{N}\right) = 2BD$ [bit/s]
- **dinamika:** $D = \frac{1}{2}\log_2\left(1 + \frac{S}{N}\right)$ [bit/uzorak]
- ako je spektralna gustoća snage šuma $S_N(f) = \frac{N_0}{2}$, tada je **srednja snaga šuma** $N = N_0 B$
- u stvarnom svijetu neoptimalni sustav smanji omjer srednje snage signala i srednje snage šuma - $\Gamma = \frac{2^{2C}-1}{2^{2R}-1} = \frac{S}{N(2^{2R}-1)}$, tada je brzina prijenosa: $R_b = B\log_2\left(1 + \frac{S}{\Gamma N}|H(f)|^2\right)$ [bit/s]
- srednja snaga signala $S = E_b \cdot R$, gdje je E_b srednja energija po svakom bitu, a R brzina prijenosa koja je u idealnom slučaju $R = C$
- **učinkovitost prijenosnog pojasa** je objer brzine i širine pojasa $\frac{C}{B}$
- gornja granična vrijednost kapaciteta je $\frac{S}{N_0}\log_2(e)$

8 Random matematičke fromule

- $\sin(A) + \sin(B) = 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$
- $\sin(A) - \sin(B) = 2\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)$
- $\cos(A) + \cos(B) = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$
- $\cos(A) - \cos(B) = -2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$
- $\sin(A)\cos(B) = \frac{1}{2}[\sin(A + B) + \sin(A - B)]$
- $\cos(A)\cos(B) = \frac{1}{2}[\cos(A + B) + \cos(A - B)]$
- $\sin(A)\sin(B) = \frac{1}{2}[\cos(A - B) - \cos(A + B)]$
- $\int x\ln(x)\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4}$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[a^x] = a^x\ln(a)$