Sveučilište u Zagrebu
Fakultet elektrotehnike i računarstva

Drugi ispitni rok iz predmeta **TEORIJA INFORMACIJE**, 4. srpnja 2024.

Pravilo bodovanja zadataka

Pismeni ispit sastoji se od 10 zadataka. Svaki točno odgovoreni zadatak donosi 10 bodova, netočno odgovoreni 4 negativna boda, a neodgovoreni 0 bodova.

Zadatak 1. Zadana su dva paralelna kanala u kojima djeluje aditivni Gaussov bijeli šum Z_1, odnosno Z_2 s očekivanjem nula. Isto tako, vrijedi $E[Z_1^2] = 0,3$, odnosno $E[Z_2^2] = 0,6$. Na ulazu prvog kanala djeluje signal X_1, dok na ulazu drugog kanala djeluje signal X_2. Neka je $E[X_1] = E[X_2] = 0$ te $E[X_1^2] + E[X_2^2] = 0,1$. Odredite maksimalnu dinamiku u zadanom sustavu kanala (bit/simbol).

a) $D = 0$ [bit/simbol]

b) $D \approx 0,661$ [bit/simbol]

c) $D \approx 0,435$ [bit/simbol]

d) $D \approx 0,2075$ [bit/simbol]

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

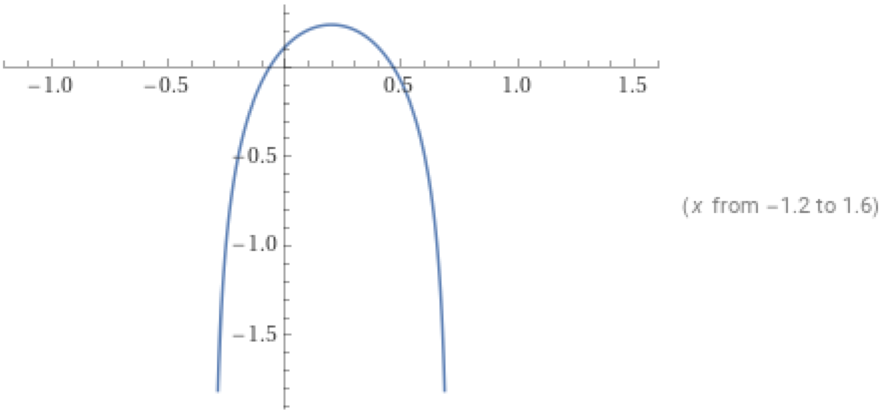
Neka je $P_1 = E[X_1^2]$ i $P_2 = E[X_2^2]$.

Dinamika u sustavu paralelnih kanala jednaka je zbroju dinamika pojedinih kanala, tj.:

$$D = D_1 + D_2 = \frac{1}{2}\log_2\left(1 + \frac{P_1}{\sigma_{Z_1}^2}\right) + \frac{1}{2}\log_2\left(1 + \frac{0,1 - P_1}{\sigma_{Z_2}^2}\right).$$

Lako se uviđa da prethodno navedeni izraz nema rješenja ako se maksimum dinamike traži deriviranjem jer za snage signala X_1 i X_2 mora vrijediti $P_1, P_2 \geq 0$ i $P_1 + P_2 = 0,1$.

Crtajući graf funkcije $D = f(P_1)$ dobivamo:



Funkcija $D = f(P_1)$ je rastuća za sve vrijednosti $P_1 = [0; 0,1]$ te ima maksimum za $P_1 = 0,1$ $\left(D \approx 0,2075 \frac{\text{bit}}{\text{simbol}}\right)$. Iz $P_1 + P_2 = 0,1$ slijedi da je $P_2 = 0$.

Zadatak 2. (10 bodova) Na ulaz AWGN kanala dolazi signal srednje snage 0,1 mW i na njega djeluje aditivni bijeli Gaussov šum spektralne gustoće snage iznosa 10^{-12} W/Hz za svaki $f \in \mathbf{R}$. Odredite energiju bita u promatranom AWGN kanalu, ako se podaci njime prenose maksimalnom mogućom brzinom pri kojoj je vjerojatnost pogreške u prijenosu moguće učiniti proizvoljno malom. Dodatna pretpostavka je da kanal nema ograničenu širinu prijenosnog pojasa.

a) 0,301 pW

b) 0,693 pW

c) 0,602 pW

d) 1,386 pW

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

U slučaju kad širina prijenosnog pojasa kanala teži u beskonačnost, granična vrijednost omjera E_b/N_0 teži u iznos ln(2):

$$\frac{E_\mathrm{b}}{N_0}=\frac{2^{C/B}-1}{C/B}\rightarrow \lim_{B\to\infty}\frac{2^{C/B}-1}{C/B}=\left|\text{primijeniti L'Hospitalovo pravilo}\right|=\ln\left(2\right)$$

Dakle, poznavajući spektralnu gustoću snage bijelog šuma po svim frekvencijama znamo da je $N_0/2 = 10^{-12}$ W/Hz, što znači da je sam $N_0 = 2\cdot10^{-12}$ W/Hz. Prema tome $E_b = \ln(2)\cdot 2\cdot10^{-12} = 1{,}386$ pW.

Zadatak 3. Zadana je diskretna slučajna varijabla Z koja poprima vrijednosti 0 i 1 s vjerojatnostima $1 - a$, odnosno a. Neka slučajna varijabla X, neovisna o Z, poprima vrijednosti iz skupa $\{1, 2, ..., n\}$ s vjerojatnostima $p(i) = q_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Neka su vjerojatnosti a i q_i odabrane tako da je entropija od $X\cdot Z$ najveća moguća. Odredite koliko iznosi a.

a) $n/(n + 1)$

b) $1/n$

c) $1/(n + 1)$

d) 1/2

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

S obzirom da slučajna varijabla Z poprima vrijednosti 0 i 1, pomnožena sa slučajnom varijablom X koja poprima jednu od vrijednosti iz skupa$\{1, 2, ..., n\}$ daje vrijednosti iz skupa $\{0, 1, ..., n\}$. Sukladno tome, vjerojatnosti koje poprimaju elementarni događaji slučajne varijable Y dani su sljedećim vektorom:

$$\mathbf{p}(\mathbf{Y})=\left[p(0),p(1),\ldots,p(n)\right]=\left[[(1-a)\sum_{i=1}^{n}q_i],aq_1,aq_2,...,aq_n\right]$$

S obzirom da je $\sum_{i=1}^{n} q_i = 1$, vrijedi sljedeće

$$H(Y) = -\left[(1-a)\log_2(1-a) + a\sum_{i=1}^{n} q_i \left[\log_2(a) + \log_2(q_i)\right]\right]$$

$$H(Y) = -\left[(1-a)\log_2(1-a) + a\log_2(a) + a\sum_{i=1}^{n} q_i \log_2(q_i)\right]$$

$$H(Y) = H(Z) + aH(X)$$

$H(X)$ je najveći za $q_i = 1/n$, $\forall$i $\in$ {1, 2, ..., n}, te iznosi $H(X) = \log_2(n)$.

$$H(Y) = -\left[(1-a)\log_2(1-a) + a\log_2(a) + a\cdot n\frac{1}{n}\log_2\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$= -\left[\log_2(1-a) - p\log_2(1-a) + a\log_2(a) + a\log_2\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

Maksimum neke funkcije dobivamo kad njenu prvu derivaciju izjednačimo s nulom:

$$\frac{-1}{(1-a)\ln(2)} - \log_2(1-a) - \frac{-a}{(1-a)\ln(2)} + \log_2(a) + \frac{a}{a\ln(2)} + \log_2\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

$$\frac{-(1-a)}{(1-a)\ln(2)} + \frac{1}{\ln(2)} - \log_2(1-a) + \log_2(a) - \log_2(n) = 0$$

$$\log_2\left[\frac{a}{n(1-a)}\right] = 0 \to \frac{a}{n(1-a)} = 1 \to a = n(1-a)$$

Konačno rješenje je $a = \frac{n}{n+1}$

Zadatak 4. Robot se nasumično kreće unutar kuće sa četiri sobe (na slici označene brojevima od 1 do 4). Vrata između soba se otvaraju ili u jednom ili u oba smjera (Na slici označeno jednom, odnosno s dvije strelice.). Robot unutar neke sobe može ostati u istoj (osim u sobi 3 koju odmah napušta) ili je napustiti kroz neka od izlaznih vrata. Također, robot u svakoj sobi svaku od mogućih akcija provodi s jednakom vjerojatnošću. Kretanje robota može se opisati Markovljevim lancem prvog reda gdje sobe predstavljaju stanja lanca. Izračunajte stacionarnu vjerojatnost pojave robota u sobi 1.

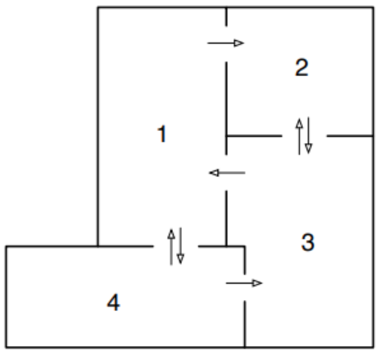
a) 6/25

b) 8/25

c) 4/25

d) 7/25

e) Ništa od navedenog.



Postupak rješavanja:

Uzimajući sobe kao stanja lanca, možemo napisati matricu uvjetnih vjerojatnosti prijelaza:

$$[p(x_j|x_i)] = P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Neka je $p(x = 1) = p_1; p(x = 2) = p_2; p(x = 3) = p_3$ i $p(x = 4) = p_4$, tj. $\pi = [p_1, p_2, p_3, p_4]$.

Budući da je Markovljev lanac ireducibilan i homogen to za isti vrijedi sljedeće (Uvjet stacionarnosti!):

$$\pi \cdot P = \pi.$$

Dobivamo sustav jednadžbi:

$$\frac{1}{3}p_1 + \frac{1}{2}p_3 + \frac{1}{3}p_4 = p_1$$

$$\frac{1}{3}p_1 + \frac{1}{2}p_2 + \frac{1}{2}p_3 = p_2$$

$$\frac{1}{2}p_2 + \frac{1}{3}p_4 = p_3$$

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$$

Rješavajući navedeni sustav jednadžbi dobivamo $\pi = \left[\frac{6}{25}, \frac{2}{5}, \frac{6}{25}, \frac{3}{25}\right]$. Dakle, stacionarna vjerojatnost pojave robota u sobi 1 iznosi 6/25.

Zadatak 5. Uzimajući polazni rječnik *D* gdje je *D*[0] = *a*, *D*[1] = *b*, *D*[2] = *c* i *D*[3] = *d* dekodirajte kodiranu poruku 1 4 5 6 7 koristeći algoritam LZW te odredite vrijednost unutar rječnika za *D*[6].

a) *D*[6] = *bb*

b) *D*[6] = *bbbbb*

c) *D*[6] = *bbb*

d) *D*[6] = *bbbb*

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Zbog sličnosti zadatka sa zadacima iz *Zbirke zadataka – Teorija informacije i kodiranje* dekodiranje se neće raspisivati detaljno.

Ulaz: **1**; Izlaz: -; Rječnik: -

Ulaz: **4**; Izlaz: *b*; Rječnik: *D*[4] = *bb*

Ulaz: **5**; Izlaz: *bb*; Rječnik: *D*[5] = *bbb*

Ulaz: **6**; Izlaz: *bbb*; Rječnik: *D*[6] = *bbbb*

...

Zadatak 6. Uzorkovani signal $x(t)$ dovodi se na ulaz kvantizatora (jednoliko kvantiziranje) u kojem se svaki uzorak kodira s 8 bitova. Neka je funkcija gustoće vjerojatnosti razina signala $x(t)$:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1-x^2) \text{ za } |x| \le 1 \text{ [V]} \\ 0 \text{ inače} \end{cases}$$

Odredite omjer srednje snage signala prema srednjoj snazi kvantizacijskog šuma (SN_qR) na izlazu kvantizatora u jedinici dB (decibel).

a) ≈ 39,2 dB

b) ≈ 27,5 dB

c) ≈ 45,9 dB

d) ≈ 15,8 dB

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Neka je r = 8 bit/uzorak, odnosno neka je L broj kvantizacijskih razina kvantizatora ($L = 2^r$).

Funkcija $f_X(x)$ je parna te je $E[X] = 0$. Snagu signala $x(t)$, na jediničnom otporu, računamo kao:

$$\sigma_X^2 = E[X^2] = \frac{3}{4}\int_{-1}^{1} x^2(1-x^2)dx = \cdots = 0{,}2 \text{ [W]}$$

Nadalje,

$$SN_qR = 10 \cdot \log_{10}\frac{E[X^2]}{E[N_q^2]} = 10 \cdot \log_{10}\frac{\sigma_X^2}{\frac{\Delta^2}{12}} = \cdots \approx 45{,}9 \text{ [dB]}.$$

Signal $x(t)$ promatramo na intervalu $[-m_{maks.}, +m_{maks.}] = [-1, +1]$ V te je korak kvantizacije:

$$\Delta = \frac{2m_{maks.}}{L} = \frac{2}{256} = 2^{-7} \text{[V]}.$$

Zadatak 7. Diskretno bezmemorjsko izvorište X generira simbole iz skupa simbola $\{a, b, c, d, e\}$ sa sljedećim vjerojatnostima:

x	a	b	c	d	e
$p(X = x)$	1/2	$1/8 + 2\varepsilon$	$1/8 + \varepsilon$	$1/8 - \varepsilon$	$1/8 - 2\varepsilon$

gdje je $\varepsilon \in \left(-\frac{1}{16}, \frac{1}{16}\right)$.

Navedeni skup simbola kodira se binarnim Huffmanovim kodom. Odredite u kojem intervalu se mora nalaziti ε tako da duljine kodnih riječi pridruženih simbolima izvorišta X iznose $l_i = \{1,3,3,3,3\}, i = 1,2, \dots, 5$.

a) $\varepsilon \in (-0{,}0625; -0{,}025)$

b) $\varepsilon \in (0{,}03; 0{,}05)$

c) $\varepsilon \in (-0{,}025; 0{,}025)$

d) $\varepsilon \in (0{,}025; 0{,}0625)$

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Sortirajmo simbole u padajućem redoslijedu gledajući na njihove vjerojatnosti pojavljivanja. Od svih mogućnosti kodiranja navedenog skupa simbola samo onaj slučaj u kojem je zbroj vjerojatnosti pojavljivanja dva simbola s najmanjim vjerojatnostima veći od vjerojatnosti pojavljivanja drugog simbola u sortiranom nizu daje tražene duljine kodnih riječi.

Promotrimo prvi slučaj u kojem je $\varepsilon \in [0; 0{,}0625)$. Kako bi proveli kodiranje u kojem će duljine kodnih riječi biti $l_i = \{1,3,3,3,3\}, i = 1,2,\ldots,5$ mora vrijediti sljedeće:

$1/8 - 2\varepsilon + 1/8 - \varepsilon > 1/8 + 2\varepsilon$, što je zadovljeno za $\varepsilon \in [0; 0{,}025)$.

U drugom slučaju je $\varepsilon \in (-0{,}0625; 0]$ što nas upućuje na uvjet: $1/8 + 2\varepsilon + 1/8 + \varepsilon > 1/8 - 2\varepsilon$, što je zadovljeno za $\varepsilon \in (-0{,}025; 0]$.

Dakle, konačni interval za koji je uvjet zadatka zadovoljen je $\varepsilon \in (-0{,}025; 0{,}025)$.

Zadatak 8. Zadana je stohastička matrica slabo simetričnog kanala:

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & d \end{bmatrix}.$$

Odredite koliko iznosi kapacitet kanala zadanog sljedećom matricom kanala:

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & c & d \end{bmatrix}.$$

a) 1,585 bit/simbol

b) 0,667 bit/simbol

c) 1 bit/simbol

d) 2 bit/simbol

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Iz uvjeta da je matrica $\mathbf{K}_1$ stohastička matrica slabo simetričnog kanala slijedi:

$a = b + c = d$

$a + b = 1$

$c + d = 1$

Dakle, $a = 1 - a + 1 - d$, $2a + d = 2$, $3a = 2$ i konačno $a = d = 2/3$, a $b = c = 1/3$.

Sad je moguće proračunati kapacitet kanala zadanog matricom $\mathbf{K}_2$.

$$C = \max_{\{p(x_i)\}} I(X;Y) = \max_{\{p(x_i)\}} \left[H(Y) - H(Y \mid X) \right]$$

$$\left[P(y_1), P(y_2), \ldots, P(y_m) \right] = \left[P(x_1), P(x_2), \ldots, P(x_n) \right] \cdot \mathbf{K}_2$$

Neka je $P(x_1) = p_1$, $P(x_2) = p_2$ i $P(x_3) = p_3$. Tada vrijedi:

$$P(y_1)=\frac{2}{3}p_1+\frac{1}{3}p_2$$
$$P(y_2)=\frac{1}{3}p_1+\frac{1}{3}p_2+\frac{1}{3}p_3=\frac{1}{3}.$$
$$P(y_3)=\frac{1}{3}p_2+\frac{2}{3}p_3$$

$$H(Y)=-\sum_{i=1}^{3}P(y_i)\log P(y_i)=$$
$$=\log_2(3)-\frac{1}{3}(2p_1+p_2)\log_2(2p_1+p_2)-\frac{1}{3}(p_2+2p_3)\log_2(p_2+2p_3)$$

$$H(Y|X)=-\sum_{i=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}P(x_i,y_j)\log_2 P(y_j\mid x_i)=$$
$$=\log_2 3-\frac{2}{3}(p_1+p_3)$$

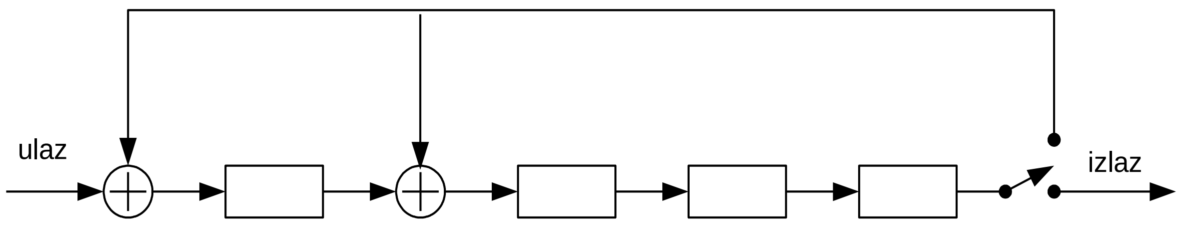
Sada je moguće provesti sljedeće razmatranje. Prvo pretpostavimo da će kapacitet kanala, C, biti maksimalan kad je $H(Y|X)$ minimalan. U tom slučaju vrijedi: $p_1 + p_3 = 1$ i $p_2 = 0$, te je sukladno tome

$$H(Y\mid X)=\log_2 3-\frac{2}{3}\text{bit/simbol}$$

No sada treba pokazati da uz takvu razdiobu vjerojatnosti $P(x_i)$ entropija izlaza, $H(Y)$, može postići svoju maksimalnu vrijednost, tj. $\log_2 3$ bit/simbol (to je ujedno vrijednost koju bi $H(Y)$ poprimio kad bi svi izlazi y_j bili jednako vjerojatni. Dakle, za $p_1 + p_3 = 1$ i $p_2 = 0$, te uz dodatnu pretpostavku da je $p_1 = p_2 = 0{,}5$, $H(Y)$ poprima vrijednost u iznosu $\log_2 3$ bit/simbol, čime je opravdan ovakav način optimizacije kapaciteta kanala. U konačnici, kapacitet kanala iznosi

$$C=\log_2 3+\frac{2}{3}-\log_2 3=\frac{2}{3}\frac{\text{bit}}{\text{simbol}}$$

Zadatak 9. Na slici je dan koder za ciklični kôd [15, *k*]. Kodirajte slijed 10001001010 koristeći metodu ciklične provjere zalihosti.



a) 100010010100011   b) 100010010100111   c) 100010010100010

d) 100010010101010   e) Ništa od navedenog

Postupak rješavanja:

Iz slike kodera lako možemo očitati generirajući polinom:

$g(x) = x^4 + x + 1$

i isto tako (budući da je stupanj polinoma jednak četiri) da se radi o cikličnom kodu [15,11].

Kôd je [15,11] dakle prvi kodirani slijed dobit će se iz prvih 11 bitova ulaznog slijeda, tj. iz "10001001010".

Jedno od temeljnih svojstava cikličnih kodova je da zaštitne bitove neke kodne riječi možemo dobiti koristeći metodu ciklične redundantne zaštite, tj. vrijedi

$$r(x) = x^{n-k} \cdot d(x) \bmod g(x)$$

U našem slučaju to bi bilo:

$$\frac{x^{n\text{-}k} \times d(x)}{g(x)} = \frac{x^4\left(x^{10} + x^6 + x^3 + x\right)}{g(x)} = x^{10} + x^7 + x^4 + 1 \quad \text{uz ostatak} \quad x + 1$$

Vidimo da ostatak pri dijeljenju iznosi x+1, odnosno [0011] iz čega slijedi da je tražena kodna riječ:

c = [100010010100011]

Zadatak 10. Neki binarni blok kôd K ima oznaku (5, M, $d(K)$), pri čemu je $d(K) > 1$. Nadalje, pretpostavimo da je kôd K perfektan te označimo s N_1 broj različitih kodova K_i, $i = 1, \ldots, N_1$, koji zadovoljavaju navedena svojstva. Nakon toga razmatrajmo kôd C s oznakom [5, k, $d(C)$], $k = \log_2 M$, $d(C) = d(K)$, koji ima sva svojstva koda K i k tome je i cikličan kôd. Neka je N_2 broj različitih kodova C_j, $j = 1, \ldots, N_2$, koji zadovoljavaju zadana svojstva. Odredite omjer N_1/N_2.

a) 8

b) 32

c) 64

d) 16

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Iz oznake koda i uvjeta perfektnosti možemo odrediti broj M:

$$M = \frac{2^5}{\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \cdots + \binom{5}{t}}, \quad d(K) = 2t + 1.$$

S obzirom da je zadano da je $d(K) > 1$ treba ispitati za koje vrijednosti $d(K)$ kôd postaje perfektan. Općenito vrijedi $d(K) \geq 2t + 1$, a za perfektan kôd mora vrijediti $d(K) = 2t + 1$. Dakle, za $d(K) = 2$ kôd nije perfektan ($t = 0$, $M < 32$), za $d(K) = 3$ ($t = 1$) kôd nije perfektan jer $M = 4 < 2^5/6$ (vidjeti tablicu 4.1. na 135. stranici udžbenika „Uvod u teoriju informacije i kodiranje“), za $d(K) = 4$ ($t = 1$) kôd nije perfektan, i konačno da $d(K) = 5$ ($t = 2$), kôd je perfektan, $M = 2^5/16 = 2$ (to potvrđuje tablica 4.1. na 135. stranici udžbenika „Uvod u teoriju informacije i kodiranje“). Dakle, kôd K može imati samo dvije kodne riječi. Takvih kodova ima ukupno 32: uzmemo bilo koju kodnu riječ, npr. 10110, tada je druga kodna riječ u kodu neminovno 01001. Iz toga slijedi $N_1 = 32$. No ako dodamo i uvjet cikličnosti, što za sobom povlači i linearnost koda, tada se broj kodova C svodi na 2:

$$C_1 = \begin{cases} 00000 \\ 11111 \end{cases}, \quad C_2 = \begin{cases} 11111 \\ 00000 \end{cases}.$$

Dakle, $N_2 = 2$, a omjer $N_1/N_2 = 16$.