Sveučilište u Zagrebu
Fakultet elektrotehnike i računarstva

Međuispit iz predmeta **TEORIJA INFORMACIJE**, 5. prosinca 2024.

Pravilo bodovanja zadataka

Međuispit se sastoji od 5 zadataka. Svaki točno riješen zadatak donosi 10 bodova. U zagradama {·} su navedeni bodovi za svaki dio zadatka ili cijeli zadatak. Zadaci tipa I. dio i II. dio međusobno su neovisni. **Zadaci bez cjelovitog postupka rješavanja neće se uzimati u razmatranje!**

Zadatak 1. {10 bodova} Na ulazu diskretnog bezmemorijskog komunikacijskog kanala pojavljuju se dva simbola, tj. $X = \{x_1, x_2\}$, dok se na njegovom izlazu pojavljuju tri simbola, tj. $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$. Statističke veze između ulaznog i izlaznog skupa simbola zadane su preko matrice uvjetnih vjerojatnosti prijelaza $\left[p(Y \mid X)\right]$, i to:

$$\left[p(Y \mid X)\right] = \begin{bmatrix} 1-\alpha-\varepsilon & \alpha & \varepsilon \\ \varepsilon & \alpha & 1-\alpha-\varepsilon \end{bmatrix},$$

gdje je $0 \le \alpha, \varepsilon \le 1$ i $\alpha + \varepsilon \le 1$.

i) {7 bodova} Odredite za koju razdiobu vjerojatnosti ulaznog skupa simbola, X, se postiže kapacitet zadanog kanala.

ii) {3 boda} Za dobiveno rješenje pod i) odredite kapacitet zadanog kanal u funkciji α i ε.

Postupak rješavanja:

i) Kapacitet diskretnog komunikacijskog kanala računa se kao:

$$C = \max_{\{p(x_i)\}} I(X;Y) = \max_{\{p(x_i)\}} \left(H(Y) - H(Y \mid X)\right) \left[\frac{\text{bit}}{\text{simbol}}\right].$$

Neka je: $P(X = x_1) = p$ i $P(X = x_2) = 1 - p$.

Matrica združenih vjerojatnosti je:

$$\left[p(X,Y)\right] = \begin{bmatrix} (1-\alpha-\varepsilon)p & \alpha p & \varepsilon p \\ \varepsilon(1-p) & \alpha(1-p) & (1-\alpha-\varepsilon)(1-p) \end{bmatrix},$$

iz koje dobivamo

$$P(Y = y_1) = (1-\alpha-\varepsilon)p + \varepsilon(1-p),$$

$$P(Y = y_2) = \alpha,$$

$$P(Y = y_3) = (1-\alpha-\varepsilon)(1-p) + \varepsilon p.$$

Nadalje:

$$\begin{aligned} H(Y) &= -\left(\left(1-\alpha-\varepsilon\right)p + \varepsilon(1-p)\right)\cdot \log_2\left(\left(1-\alpha-\varepsilon\right)p + \varepsilon(1-p)\right) \\ &-\alpha \cdot \log_2 \alpha - \left(\left(1-\alpha-\varepsilon\right)\left(1-p\right) + \varepsilon p\right)\cdot \log_2\left(\left(1-\alpha-\varepsilon\right)\left(1-p\right) + \varepsilon p\right) \text{ i} \\ H(Y \mid X) &= \ldots = -\left\{(1-\alpha-\varepsilon)\cdot \log_2(1-\alpha-\varepsilon) + \alpha \cdot \log_2 \alpha + \varepsilon \cdot \log_2 \varepsilon\right\}. \end{aligned}$$

Stavljajući $\frac{\partial I(X;Y)}{\partial p}=0$ dobivamo vrijednost za p za koju je transinfromacija maksimalna, tj. dobivamo da je $p=\frac{1}{2}$, odnosno $P(X=x_1)=\frac{1}{2}$ i $P(X=x_2)=\frac{1}{2}$.

ii)

$$
\begin{aligned}
C &= \ldots = (1-\alpha)\{1-\log_2(1-\alpha)\}+(1-\alpha-\varepsilon)\cdot\log_2(1-\alpha-\varepsilon)+\varepsilon\cdot\log_2\varepsilon \\
&= \ldots = (1-\alpha)\left(1-H\left(\frac{\varepsilon}{1-\alpha},\frac{1-\alpha-\varepsilon}{1-\alpha}\right)\right).
\end{aligned}
$$

Zadatak 2. {10 bodova} Slučajna varijabla X poprima vrijednosti iz skupa $\{a_1,a_2,\ldots,a_M\}$; $M\geq 2$, $\sum_{i=1}^{M}P_X(a_i)=1$ i $P_X(a_M)=\alpha.$ Odredite $H(X)$ u ovisnosti o α i $H(Y)$, gdje je Y slučajna varijabla koja poprima vrijednosti iz skupa $\{a_1,a_2,\ldots,a_{M-1}\}$ s vjerojatnostima $P_Y(a_j)=P_X(a_j)/(1-\alpha)$ za $1\leq j\leq M-1.$

Postupak rješavanja:

$$
\begin{aligned}
H(X) &= -\sum_{i=1}^{M}P_X(a_i)\log_2 P_X(a_i) = -\alpha\log_2\alpha-\sum_{i=1}^{M-1}P_X(a_i)\log_2 P_X(a_i) \\
&= -\alpha\log_2\alpha-(1-\alpha)\sum_{i=1}^{M-1}\frac{P_X(a_i)}{1-\alpha}\log_2\left(\frac{P_X(a_i)}{1-\alpha}(1-\alpha)\right) \\
&= -\alpha\log_2\alpha-(1-\alpha)\sum_{i=1}^{M-1}P_Y(a_i)\log_2\left(P_Y(a_i)(1-\alpha)\right) \\
&= -\alpha\log_2\alpha-(1-\alpha)\sum_{i=1}^{M-1}P_Y(a_i)\log_2 P_Y(a_i)-(1-\alpha)\log_2(1-\alpha)\sum_{i=1}^{M-1}P_Y(a_i) \\
&= -\alpha\log_2\alpha-(1-\alpha)\log_2(1-\alpha)+(1-\alpha)H(Y).
\end{aligned}
$$

Vrijedi: $\sum_{i=1}^{M-1}P_Y(a_i)=\sum_{i=1}^{M-1}\frac{P_X(a_i)}{1-\alpha}=\frac{1}{1-\alpha}\sum_{i=1}^{M-1}P_X(a_i)=\frac{1}{1-\alpha}(1-\alpha)=1$ jer je $\sum_{i=1}^{M-1}P_X(a_i)=1-\alpha.$

Zadatak 3. {**I. dio**, 6 bodova} Slučajna varijabla X poprima vrijednosti iz skupa $\{1,2,3,4\}$ s vjerojatnostima $P(x_i)=1/4$ za $i=1,2,3,4.$ Neka je

$$
Y=\begin{cases}0 \text{ za } X=1 \text{ i } X=3\\ 1,\ \text{inače}\end{cases} \text{ i } Z=\begin{cases}0 \text{ za } X=2 \text{ i } X=4\\ 1,\ \text{inače}\end{cases}.
$$

Odredite $I(Y;Z)$.

Postupak rješavanja:

Vrijedi $I(Y;Z)=H(Y)-H(Y\,|\,Z)$.

Iz matrica uvjetnih vjerojatnosti prijelaza (dobivenih iz uvjeta zadatka)

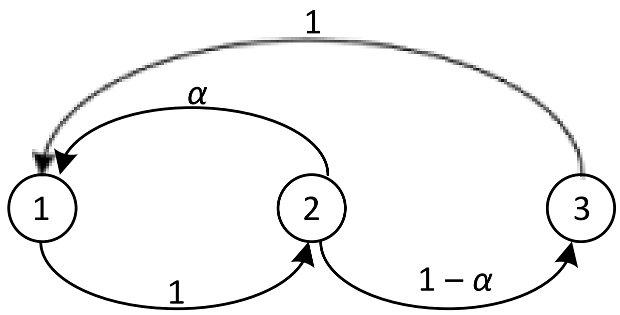
$$P[Y \mid X] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ i } P[Z \mid X] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

te vjerojatnostima pojavljivanja skupa simbola *X* dobivamo da je
$P[Y] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ i $P[Z] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, odnosno $H(Y) = 1 \ \frac{\text{bit}}{\text{simbol}}$.

Nadalje, $H(Y \mid Z) = P(Z=0)H(Y \mid Z=0) + P(Z=1)H(Y \mid Z=1)$. Uočavamo da je uvijek $Y \neq Z$, što znači da poznavajući *Z* možemo u potpunosti odrediti *Y*, tj. $H(Y \mid Z) = 0$, odnosno dobivamo

$$I(Y;Z) = H(Y) - H(Y \mid Z) = 1 - 0 = 1 \ \frac{\text{bit}}{\text{simbol}}.$$

{**II. dio**, 4 boda} Rad nekog stroja može se opisati Markovljevim lancem prvog reda s tri stanja $X = \{1, 2, 3\}$ te dijagramom stanja i prijelaza koji opisuje kretanje stroja (Slika 1.), tj.:



Slika 1. Dijagram stanja i prijelaza rada stroja

gdje je $0 < \alpha < 1$. Odredite maksimalnu entropiju koju stroj generira svojim kretanjem uzimajući u obzir ovisnost u njegovom kretanju.

Postupak rješavanja:

Uzimajući stanja i prijelaze sa slike, lako se određuje matrica uvjetnih vjerojatnosti prijelaza:

$$\left[p(x_j \mid x_i) \right] = \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1-\alpha \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Neka je $P(x=1) = p_1; P(x=2) = p_2$ i $P(x=3) = p_3$, tj. $\boldsymbol{\pi} = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix}$.

Budući da je Markovljev lanac ireducibilan i homogen to za isti vrijedi sljedeće (Uvjet stacionarnosti!):

$$\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{P} = \boldsymbol{\pi}$$

Rješavajući sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned}
&\alpha p_2 + p_3 = p_1 \\
&p_1 = p_2 \\
&p_1 + p_2 + p_3 = 1
\end{aligned}$$

dobivamo $\boldsymbol{\pi} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3-\alpha} & \frac{1}{3-\alpha} & \frac{1-\alpha}{3-\alpha} \end{bmatrix}$. {2 boda}

Entropija Markovljevog lanca, uzimajući u obzir ovisnost između stanja, računa se po formuli:

$$H'(X) = -\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} p(x_i)\, p(x_j \mid x_i) \log_2 p(x_j \mid x_i) = \ldots = -\frac{1}{3-\alpha}\left(\alpha \log_2 \alpha + (1-\alpha)\log_2 (1-\alpha)\right).$$

Maksimum entropije dobivamo kad njenu prvu derivaciju izjednačimo s nulom, tj.:
$\frac{dH'(X)}{d\alpha} = 0$, što daje:

…

$$-3 \cdot \log_2 \alpha + 2 \cdot \log_2 (1-\alpha) = 0,$$

tj.:

$$\alpha^2 - 2\alpha + 1 = \alpha^3.$$

Rješavajući navedenu jednadžbu dobivamo da je $\alpha \approx 0,5698$ (Ostala dva rješenja su u kompleksnom obliku!), odnosno maksimalna entropija koju stroj generira svojim kretanjem iznosi $H'(X) \approx 0,4057$ bit/stanje. {2 boda}

Zadatak 4. {10 bodova} Promatrani skup *X* sadrži *N* simbola x_i. Za vjerojatnosti pojavljivanja tih simbola vrijedi:

$$1 > P(x_1) > P(x_2) > \ldots > P(x_{N-1}) \geq P(x_N) > 0, \sum_{i=1}^{N} P(x_i) = 1.$$

Simbole x_i kodiramo Huffmanovim kodom. Svaki simbol pri tome kodiramo s l_i bita. Odredite zbroj $\sum_{i=1}^{N} l_i$, ako za srednju duljinu kodne riječi, *L*, vrijedi: *L* = *H*(*X*).

Postupak rješavanja:

Ako vrijedi *L* = *H*(*X*), tada mora vrijediti:

$$\sum_{i=1}^{N} l_i P(x_i) = -\sum_{i=1}^{N} P(x_i) \log_2 P(x_i)$$

iz čega slijedi da mora vrijediti: $l_i = -\log_2 P(x_i)$. S obzirom da su duljine kodnih riječi cjelobrojne, slijedi da vjerojatnosti $P(x_i)$ moraju biti oblika $2^{-k}, k \in \mathbb{N}$. Nadalje, s obzirom da općenito vrijedi

$$\sum_{i=1}^{M} 2^{-i} = 1 - 2^{-M}$$

te uzevši u obzir početni uvjet o međusobnim odnosima između vjerojatnosti $P(x_i)$, slijedi da vjerojatnosti simbola x_i moraju zadovoljavati sljedeće:

$$P(x_i) = \begin{cases} 2^{-i}, & i = 1, \ldots, N-1 \\ 2^{-N+1}, & i = N \end{cases}.$$

Za takav skup vjerojatnosti $P(x_i)$ zadovoljen je i uvjet da njihov zbroj mora iznositi 1. Sukladno tome, vrijedi:

$$l_i = \begin{cases} i, & i = 1, \ldots, N-1 \\ N-1, & i = N \end{cases}$$

i u konačnici

$$\sum_{i=1}^{N} l_i = \sum_{i=1}^{N-1} i + (N-1) = \frac{(N-1)\cdot N}{2} + (N-1) = \frac{(N-1)\cdot(N+2)}{2} \text{ bit.}$$

Zadatak 5. {10 bodova} Zadan je skup simbola x_i, i = 1, .., 5. Razdioba vjerojatnosti pojavljivanja simbola zadana je sljedećim izrazima: $P(x_1) = P(x_2) + P(x_3) + P(x_4)$, $P(x_2) = P(x_3) = P(x_4) = P(x_5)$, $\sum_{i=1}^{5} P(x_i) = 1$. Koder izvora kodira slučajan slijed simbola x_i binarnim kodom koristeći tehniku Shannon-Fano. Ta tehnika ne daje uvijek jedinstven kôd. Drugim riječima, za neku zadanu razdiobu vjerojatnosti pojavljivanja simbola može generirati više od jednog koda, pri čemu ti kodovi mogu imati različite srednje duljine kodne riječi. Nadalje, pretpostavimo da koder izvora kodira jako dugačak slijed simbola x_i. Odredite koliko će iznositi apsolutni iznos razlike, u prosječnom broju poslanih binarnih simbola, na 700 simbola x_i, ako se koriste najefikasnija i najmanje efikasna inačica koda.

Postupak rješavanja:

Iz zadanih izraza možemo izračunati razdiobu vjerojatnosti nad skupom simbola x_i: $P(x_1)$ = 3/7, $P(x_2)$ = $P(x_3)$ = $P(x_4)$ = $P(x_5)$ = 1/7. Prilikom kodiranja tehnikom Shannon-Fano potrebno je poredati te simbole po padajućim vjerojatnostima.

x_1 3/7 0 l_1 = 1 bit

x_2 1/7 1 0 0 l_2 = 3 bit

x_3 1/7 1 0 1 l_3 = 3 bit

x_4 1/7 1 1 0 l_4 = 3 bit

x_5 1/7 1 1 1 l_5 = 3 bit

Nazovimo ovaj kôd K_1. Njegova srednja duljina kodne riječi neka je L_1.

$$L_1 = \sum_{i=1}^{5} l_i P(x_i) = \frac{15}{7} \text{ bit/simbol}$$

Tehnika Shannon-Fano omogućava i drugačiji način kodiranja.

x_1 3/7 0 0 l_1 = 2 bit

x_2	1/7	0 1	$l_2 = 2$ bit
x_3	1/7	1 0	$l_3 = 2$ bit
x_4	1/7	1 1 0	$l_4 = 3$ bit
x_5	1/7	1 1 1	$l_5 = 3$ bit

Nazovimo ovaj kôd K_2. Njegova srednja duljina kodne riječi neka je L_2.

$$L_2 = \sum_{i=1}^{5} l_i P\left(x_i\right) = \frac{16}{7} \text{ bit/simbol}$$

Konačno, postoji i treća inačica koda.

x_1	3/7	0 0	$l_1 = 2$ bit
x_2	1/7	0 1	$l_2 = 2$ bit
x_3	1/7	1 0 0	$l_3 = 3$ bit
x_4	1/7	1 0 1	$l_4 = 3$ bit
x_5	1/7	1 1	$l_5 = 2$ bit

Nazovimo ovaj kôd K_3. Njegova srednja duljina kodne riječi neka je L_3.

$$L_3 = \sum_{i=1}^{5} l_i P\left(x_i\right) = \frac{16}{7} \text{ bit/simbol}$$

Očito vrijedi $L_2 = L_3 > L_1$. S obzirom da je entropija $H(X)$ jednaka u sva tri slučaja, najefikasniji kôd je onaj s najmanjom srednjom duljinom kodne riječi, tj. kôd K_1, a najmanje efikasni K_2, odnosno K_3. Dakle, slijed duljine 700 simbola x_i bit će prosječno kodiran s 1500 bita ako primijenimo kôd K_1, odnosno s 1600 bita ako primijenimo kôd K_2 ili K_3. Konačno, razlika iznosi 100 bita.