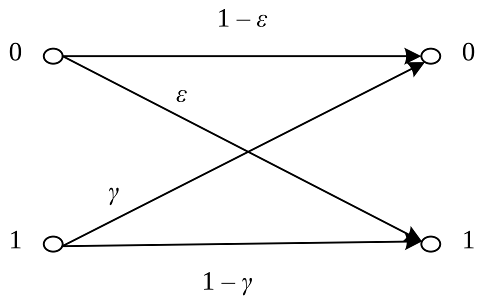
Sveučilište u Zagrebu
Fakultet elektrotehnike i računarstva

Treći ispitni rok iz predmeta **TEORIJA INFORMACIJE**, 29. kolovoza 2024.

Pravilo bodovanja zadataka

Pismeni ispit sastoji se od 5 zadataka. Svaki točno riješen zadatak donosi 20 bodova. U zagradama {·} su navedeni bodovi za svaki dio zadatka ili cijeli zadatak. **Zadaci bez jasnog postupka rješavanja neće se uzimati u razmatranje**.

Zadatak 1. {20 bodova} Zadan je diskretni bezmemorijski komunikacijski kanal:



Također, vrijedi $0 < \varepsilon, \gamma < 1$.

Linearni binarni blok kôd s generirajućom matricom $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ se koristi za zaštitu informacijskih bitova iz kodera informacije koji se prenose zadanim komunikacijskim kanalom. Također, svi bitovi na izlazu kodera informacije su međusobno neovisni. Dekoder kanala koristi sva svojstva koda u cilju detektiranja pogrešaka.

Odredite:

i) {2 boda} kodnu brzinu zadanog koda.
ii) {2 boda}sve kodne riječi koda.
iii) {14 bodova}prosječnu vjerojatnost nedetektiranih pogrešaka (p_{np}) u ovisnosti o ε i γ.
iv) {2 boda}prosječnu vjerojatnost nedetektiranih pogrešaka (p_{np}) za slučaj ε = γ = 0,5.

Postupak rješavanja:

i) i ii) Radi se o paritetnom $[n, k] = [3, 2]$ kodu kodne brzine $R = 2/3$. Zadani kôd ima četiri kodne riječi, i to: 000, 011, 101 i 110.

iii) Neka je **c** poslana kodna riječ, a **c'** primljena kodna riječ za koju nije moguće detektirati postojanje pogreške. Tada je:

$$\begin{aligned} p_{\text{np}}(\text{nedetektirane pogreške}|\mathbf{c} = 000) \\ &= p(\mathbf{c}' = 011|\mathbf{c} = 000) + p(\mathbf{c}' = 110|\mathbf{c} = 000) + p(\mathbf{c}' = 101|\mathbf{c} = 000) \\ &= 3\epsilon^2(1-\varepsilon) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{\text{np}}(\text{nedetektirane pogreške}|\mathbf{c} = 011) \\ &= p(\mathbf{c}' = 000|\mathbf{c} = 011) + p(\mathbf{c}' = 110|\mathbf{c} = 011) + p(\mathbf{c}' = 101|\mathbf{c} = 011) \\ &= (1-\varepsilon)\gamma^2 + 2\varepsilon(1-\gamma)\gamma \end{aligned}$$

$$p_{\mathrm{np}}(\text{nedetektirane pogreške}|\mathbf{c}=101)$$
$$=p(\mathbf{c}'=000|\mathbf{c}=101)+p(\mathbf{c}'=011|\mathbf{c}=101)+p(\mathbf{c}'=110|\mathbf{c}=101)$$
$$=\gamma^2(1-\varepsilon)+2\gamma\varepsilon(1-\gamma)$$

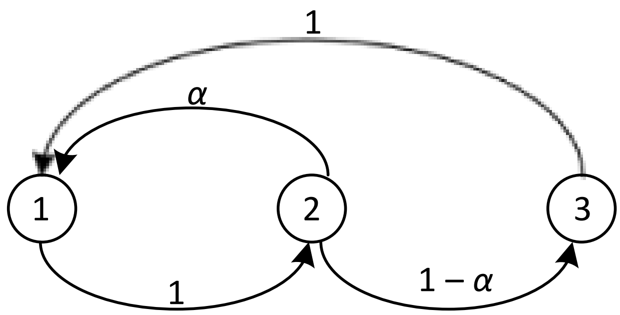
$$p_{\mathrm{np}}(\text{nedetektirane pogreške}|\mathbf{c}=110)$$
$$=p(\mathbf{c}'=000|\mathbf{c}=110)+p(\mathbf{c}'=011|\mathbf{c}=110)+p(\mathbf{c}'=101|\mathbf{c}=110)$$
$$=\gamma^2(1-\varepsilon)+2\gamma\varepsilon(1-\gamma)$$

Konačno, prosječna vjerojatnost nedetektiranih pogrešaka iznosi:

$$p_{\mathrm{np}}=\tfrac{3}{4}\left(\epsilon^2(1-\varepsilon)+\gamma^2(1-\varepsilon)+2\gamma\varepsilon(1-\gamma)\right)=\tfrac{3}{4}\left((\varepsilon^2+\gamma^2)(1-\varepsilon)+2\gamma\varepsilon(1-\gamma)\right).$$

iv) $p_{\mathrm{np}} = 3/8$ za $\varepsilon = \gamma = 0{,}5$.

Zadatak 2. {20 bodova} Rad nekog stroja može se opisati Markovljevim lancem prvog reda s tri stanja X={1, 2, 3} te dijagramom stanja i prijelaza koji opisuje kretanje stroja, tj.:



gdje je $0 < \alpha < 1$. Odredite maksimalnu entropiju koju stroj generira svojim kretanjem uzimajući u obzir ovisnost u njegovom kretanju.

Postupak rješavanja:

Uzimajući stanja i prijelaze sa slike, lako, određuje matrica uvjetnih vjerojatnosti prijelaza:

$$\left[p(x_j|x_i)\right]=P=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ \alpha & 0 & 1-\alpha\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Neka je $p(x=1)=p_1; p(x=2)=p_2$ i $p(x=3)=p_3$, tj. $\pi=[p_1,p_2,p_3]$.

Budući da je Markovljev lanac ireducibilan i homogen to za isti vrijedi sljedeće (Uvjet stacionarnosti!):

$$\pi\cdot P=\pi.$$

Rješavajući sustav jednadžbi:

$$\alpha p_2+p_3=p_1$$

$$p_1=p_2$$

$$p_1+p_2+p_3=1$$

dobivamo $\pi=\left[\frac{1}{3-\alpha},\frac{1}{3-\alpha},\frac{1-\alpha}{3-\alpha}\right]$. {5 bodova}

Entropija Markovljevog lanca računa se po formuli:

$$H'(X) = -\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} p(x_i)p(x_j|x_i)\log_2 p(x_j|x_i) = -\frac{1}{3-\alpha}\left(\alpha\log_2\alpha + (1-\alpha)\log_2(1-\alpha)\right).$$

Maksimum entropije dobivamo kad njenu prvu derivaciju izjednačimo s nulom, tj.: $\frac{dH'(X)}{d\alpha} = 0$, što daje:

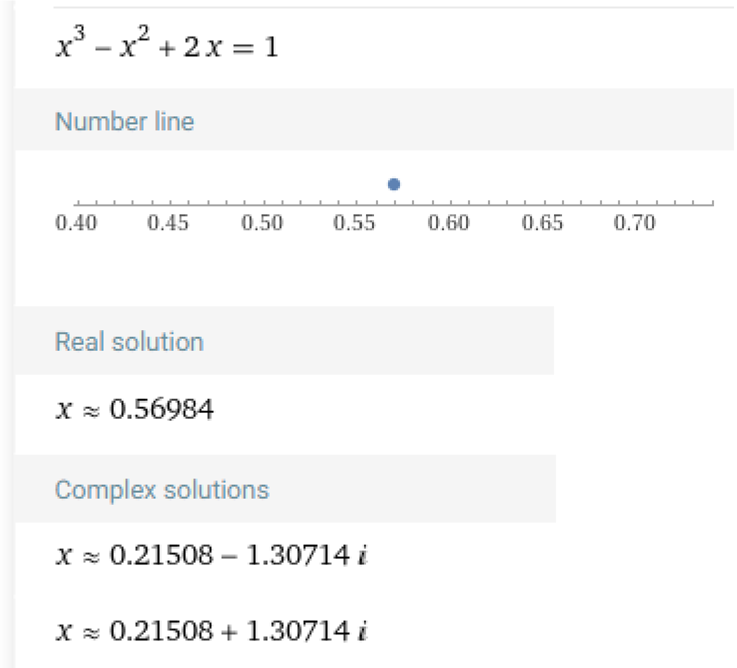
…

$$-3 \cdot \log_2\alpha + 2 \cdot \log_2(1-\alpha) = 0,$$

tj.:

$$\alpha^2 - 2\alpha + 1 = \alpha^3. \text{ \{10 bodova\}}$$

Rješavajući navedenu jednadžbu dobivamo da je $\alpha \approx 0{,}5698$ (Ostala dva rješenja su u kompleksnom obliku!), odnosno maksimalna entropija koju stroj generira svojim kretanjem iznosi $H'(X) \approx 0{,}4057\,\frac{\text{bit}}{\text{stanje}}$. {5 bodova}



Napomena: Prethodno navedena jednadžba mogla se riješiti i iteracijski. Primjer naveden u *Zbirci zadataka – Teorija informacije i kodiranje* (zadatak 4.31.).

Zadatak 3. {20 bodova} Na ulazu diskretnog bezmemorijskog komunikacijskog kanala pojavljuju se dva simbola, tj. $X = \{x_1, x_2\}$, s vjerojatnostima $0 < p(x_1), p(x_2) < 1$, dok se na njegovom izlazu pojavljuju tri simbola, tj. $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$. Statističke veze između ulaznog i izlaznog skupa simbola zadane su preko matrice združenih vjerojatnosti:

$$[p(x_i, y_j)] = \begin{bmatrix} p_\alpha & p_\beta & p_\gamma \\ p_\gamma & p_\beta & p_\alpha \end{bmatrix},$$

gdje je $0 \leq p_\alpha, p_\beta, p_\gamma \leq 0{,}5$.

Odredite:

i) {2 boda} entropiju ulaznog skupa simbola.
ii) {3 boda} uvjetnu entropiju $H(X|Y)$ u ovisnosti o p_α, p_β i p_γ.
iii) {10 bodova} maksimalnu i minimalnu vrijednost za $H(X|Y)$.
iv) {5 bodova} transinformaciju, $I(X;Y)$, za slučaj kada je $p_\alpha = p_\gamma$.

Postupak rješavanja:

i) Iz matrice združenih vjerojatnosti dobivamo da je $p(x_1) = p(x_2) = p_\alpha + p_\beta + p_\gamma = \frac{1}{2}$, odnosno $H(X) = 1\,\frac{\text{bit}}{\text{simbol}}$.

ii) $H(X|Y) = p(Y = y_1)H(X|Y = y_1) + p(Y = y_2)H(X|Y = y_2) + p(Y = y_3)H(X|Y = y_3) = \cdots = 2(p_\alpha + p_\gamma)H\left(\frac{p_\alpha}{p_\alpha+p_\gamma}, \frac{p_\gamma}{p_\alpha+p_\gamma}\right) + 2p_\beta = 2p_\alpha \log_2\left(1 + \frac{p_\gamma}{p_\alpha}\right) + 2p_\gamma \log_2\left(1 + \frac{p_\alpha}{p_\gamma}\right) + 2p_\beta$.

iii) Iz ii) → Minimalna vrijednost koju $H(X|Y)$ postiže iznosi 0 bit/simbol i to za $p_\beta = 0$ i $\left(p_\alpha = \frac{1}{2},\ p_\gamma = 0\right)$ ili $\left(p_\alpha = 0,\ p_\gamma = \frac{1}{2}\right)$.

Maksimum uvjetne entropije $H(X|Y)$ dobit ćemo deriviranjem izraza pod ii) po p_α i p_γ, što daje:

$$\frac{\partial H(X|Y)}{\partial p_\alpha} = 2\log_2(p_\alpha + p_\gamma) - 2\log_2(p_\alpha) = 0$$

i

$$\frac{\partial H(X|Y)}{\partial p_\gamma} = 2\log_2(p_\alpha + p_\gamma) - 2\log_2(p_\gamma) = 0.$$

Rješavanjem prethodnog sustava jednadžbi dobivamo

$$p_\alpha = p_\gamma, \text{ tj. neka je } p_\alpha = p_\gamma = \hat{p}.$$

odnosno $p_\beta = \frac{1}{2} - 2\hat{p}$. Maksimum uvjetne entropije $H(X|Y)$ iznosi 1 bit/simbol.

iv) Iz iii) → $H(X|Y)$ = 1 bit/simbol kada je $p_\alpha = p_\gamma$. Nadalje, $I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = 0\,\frac{\text{bit}}{\text{simbol}}$.

Zadatak 4. (I. dio, {10 bodova}) Odredite je li signal $x(t) = te^{-|t|}$ [V], $t \in \mathbb{R}$, signal snage, signal energije ili ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty} 2\int_0^{T/2} t^2 e^{-2t} dt =$ |Primjeniti metodu integracije $uv - vdu, u = t^2, \ldots$ | $= \cdots = 0{,}5$ [Ws].

Signal $x(t)$ je signal energije.

(II. dio, {10 bodova}) Odredite je li sustav definiran kao $y(t) = \mathrm{A} \cdot x(t) + \mathrm{B}$ linearan? **Napomena:** A i B su konstante, dok je $x(t)$ ulaz sustava, a $y(t)$ njegov izlaz!

Postupak rješavanja:

$$y(t) = \mathrm{A} \cdot x(t) + \mathrm{B}$$

Neka je $y_1(t)$ izlaz sustava ako je na ulazu $x_1(t)$, tj.:

$$y_1(t) = \mathrm{A} \cdot x_1(t) + \mathrm{B},$$

isto vrijedi i za $x_2(t)$, tj.:

$$y_2(t) = \mathrm{A} \cdot x_2(t) + \mathrm{B}.$$

Neka je $x_3(t) = a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t)$ i neka je izlaz sustava definiran kao $y_3(t) = \mathrm{A} \cdot x_3(t) + \mathrm{B} = \mathrm{A} \cdot [a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t)] + \mathrm{B} = a \cdot \mathrm{A} \cdot x_1(t) + b \cdot \mathrm{A} \cdot x_2(t) + \mathrm{B} \neq a \cdot y_1(t) + b \cdot y_2(t)$.

Dakle, zadani sustav nije linearan!

Zadatak 5. (I. dio, {7 bodova}) Odredite koji su od navedena tri koda, K_1={1, 100000, 00}, K_2={01, 1001, 1011, 111, 1110} i K_3={1, 011, 01110, 1110, 10011}, jednoznačno dekodabilni.

Postupak rješavanja:

Kôd je jednoznačno dekodabilan ako:

i) **zadovoljava Kraftovu nejednakost**, tj. duljine kodnih riječi koda moraju zadovoljavati Kraftovu nejednakost što predstavlja nužan i dovoljan uvjet postojanja koda;
ii) ii) **je svako njegovo proširenje nesingularno**.

Vidimo da svaki od zadanih kodova zadovoljava Kraftovu nejednakost. Ostaje utvrditi je li proširenje svakog koda nesingularno, što provodimo koristeći Sardinas-Pattersonov test (*Zbirka zadataka – Teorija informacije i kodiranje*, Poglavlje 2., Popis najvažnijih izraza i pojmova).

Koristeći Sardinas-Pattersonov test pokazuje se da je kôd K_1 jedino jednoznačno dekodabilan.

K_1: S_0 = {1, 100000, 00}; S_1 = {00000}; S_2 = {000}; S_3 = {0}; S_4 = {0}; S_5 = {0}; ...

K_2: S_0 = {01, 1001, 1011, 111, 1110}; S_1 = {0}; S_2 = {1}; S_3 = {001, 011, 11, 110}; S_4 = {1, 10}; S_5 = {001, 011, 11, 110, **01**};

Na primjer: 11101111001 može se dekodirati kao 111-01-1110-01 i 1110-111-1001.

K_3: S_0 = {1, 011, 01110, 1110, 10011}; S_1 = {110, 0011, 10}; S_2 = {10, 0, **011**};

Na primjer: 011101110011 može se dekodirati kao 01110-1110-011 i 011-1-011-10011.

(II. dio, {13 bodova}) Promatrajmo sljedeći način dobivanja kodnih riječi binarnog koda za slučajnu varijablu X koja poprima vrijednosti iz skupa simbola{x_1, x_2, ..., x_m} s vjerojatnostima $p(x_1)$, $p(x_2)$, ..., $p(x_m)$. Također, vrijedi $p(x_1) \geq p(x_2) \geq ... \geq p(x_m)$. Neka je

$$Q_i = \sum_{k=1}^{i-1} p(x_k) \text{ za } i > 1;\ Q_1 = 0.$$

Kodne riječi pridružene simbolima x_i dobivaju se tako što se dobiveni Q_i **pretvori u binarni broj** te se uzme samo vrijednost desno od zareza i ista po potrebi proširi nulama, s desne strane, na ukupnu duljinu l_i bitova gdje je $l_i = \lceil -\log_2 p(x_i) \rceil$.

Odredite kodne riječi za skup simbola {x_1, x_2, ..., x_8} čije su vjerojatnosti pojavljivanja {1/4, 1/4, 1/8, 1/8, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16}, slijedno gledano.

Postupak rješavanja:

Simbol x_1: $Q_1 = 0$; binarno: 0,**<u>0</u>**; $l_1 = \left\lceil -\log_2 \frac{1}{4} \right\rceil = 2$; kodna riječ pridružena simbolu x_1 ima duljinu dva bita i ista je $C(x_1)$=00.

Simbol x_2: $Q_2 = 1/4$; binarno: 0,**<u>01</u>**; $l_2 = \left\lceil -\log_2 \frac{1}{4} \right\rceil = 2$; kodna riječ pridružena simbolu x_2 ima duljinu dva bita i ista je $C(x_2)$=01.

Simbol x_3: $Q_3 = 1/2$; binarno: 0,**<u>1</u>**; $l_3 = \left\lceil -\log_2 \frac{1}{8} \right\rceil = 3$; kodna riječ pridružena simbolu x_3 ima duljinu tri bita i ista je $C(x_3)$=100.

...

$C(x_4)$=101; $C(x_5)$=1100; $C(x_6)$=1101; $C(x_7)$=1110 i $C(x_8)$=1111.