Universidad
Rey Juan Carlos

Tema 2: Filtrado en el dominio de la frecuencia

ÍNDICE

Introducción

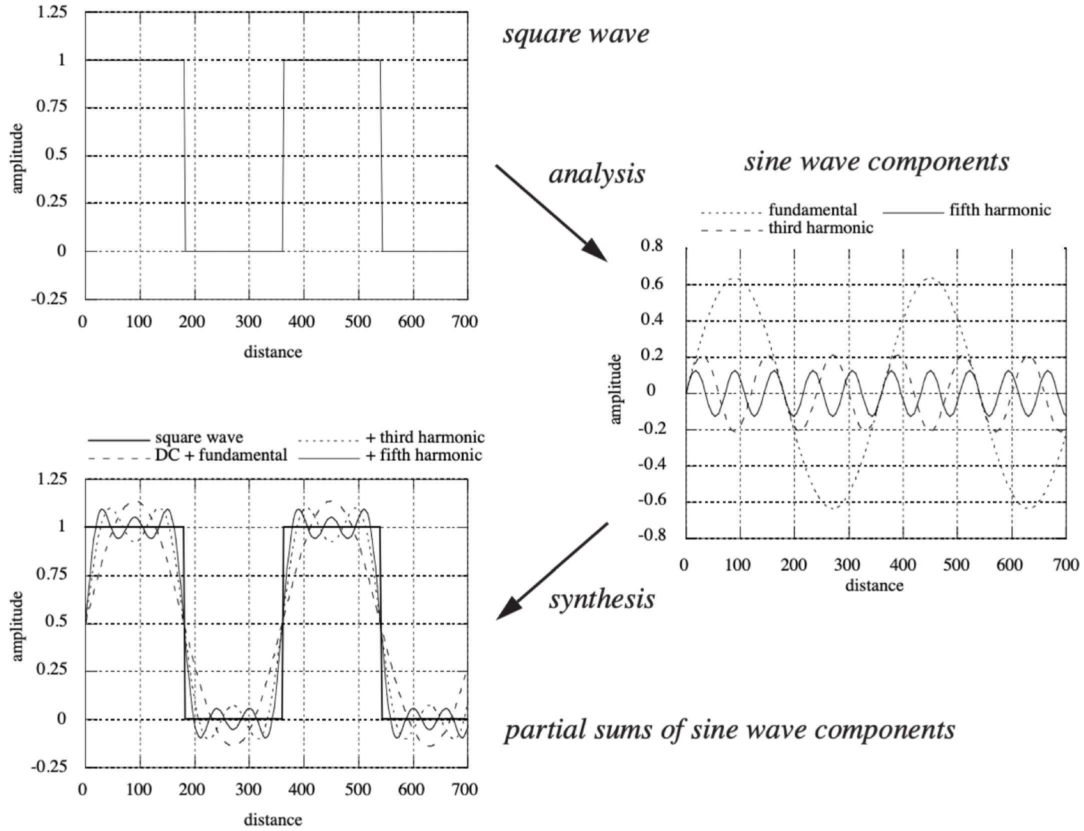
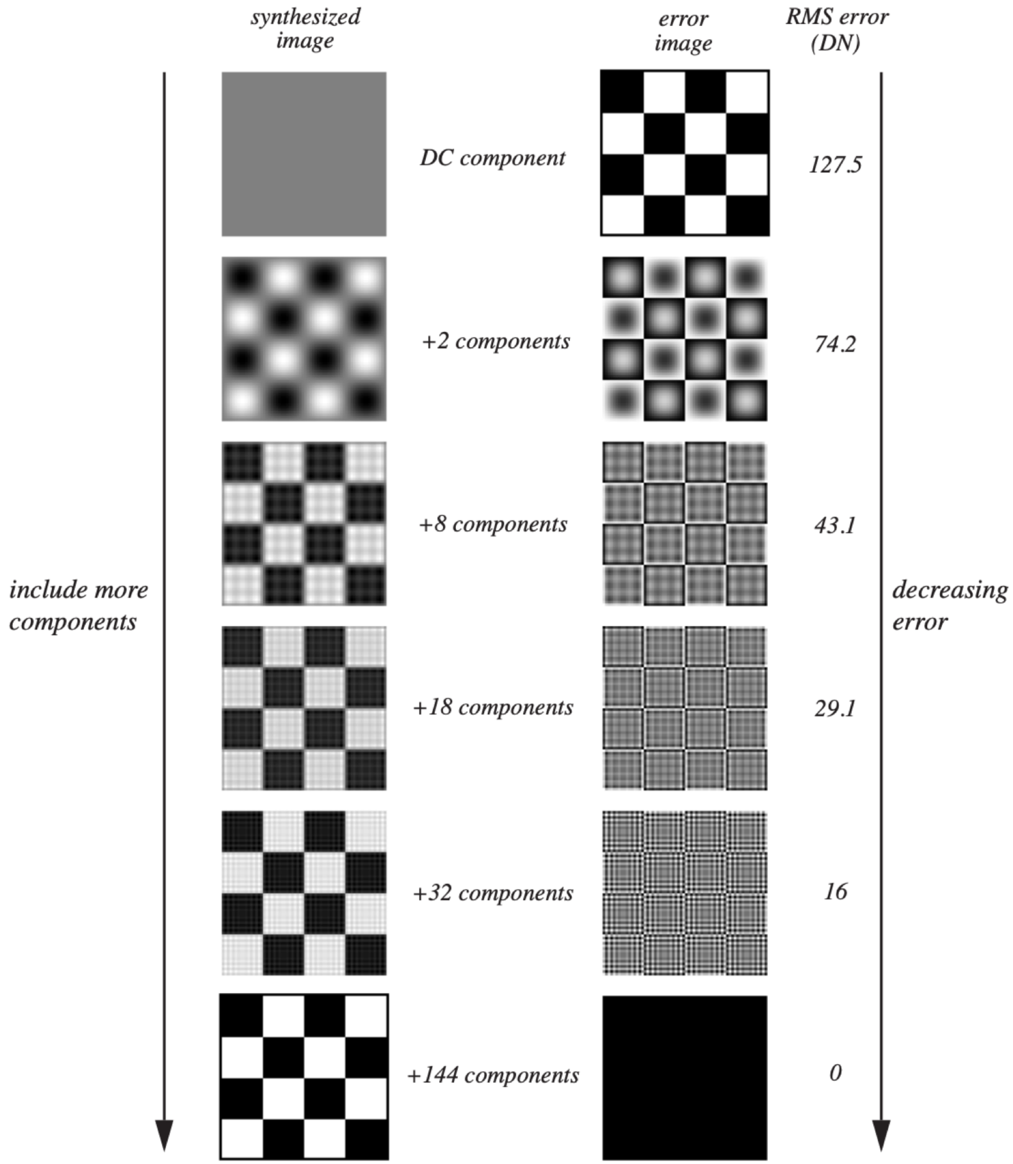


FIGURE 6-15. Fourier analysis of a 1-D continuous square wave into its sine wave components and synthesis of the square wave by superposition of sine waves. Even with only the DC term and three sine waves, the synthesized signal is a fair approximation of the square wave. The residual oscillations near the transitions in the square wave are known as Gibbs phenomenon and disappear completely only when an infinite number of sine waves are included in synthesis (Gaskill, 1978).

Introducción



Transformada de Fourier

- Representa un *cambio del dominio* en el que se representa la imagen $\Rightarrow$

- Dominio de **frecuencias espaciales**. Es decir, indica la forma en la que el nivel de intensidad de una imagen varía en función de las coordenadas espaciales (x,y).

  (x,y) $\Rightarrow$ (u,v) , **u = frecuencia en la dirección x**

  v = frecuencia en la dirección y

Transformada de Fourier

Interpretación:

• Si al movernos en una dirección tenemos **variaciones lentas** de los niveles de intensidad $\Rightarrow$ **bajas frecuencias espaciales** en esa dirección

• Si al movernos en una dirección tenemos **variaciones** espacialmente **rápidas** de los niveles de intensidad (detalles y bordes) $\Rightarrow$ **altas frecuencias espaciales** en esa dirección. Las altas frecuencias son subjetivamente muy importantes.

Transformada Discreta de Fourier

• Como las imágenes digitales son señales discretas utilizamos la Transformada Discreta de Fourier (*Discrete Fourier Transform*) **DFT** $\Rightarrow$ **descompone una imagen como suma de fasores.**

• Transformada inversa (DFT^{-1}): reconstruye la imagen a partir de la descomposición en señales sinusoidales de distinta frecuencia y fase.

• El cálculo de la DFT considera periodicidad en las dimensiones horizontal y vertical

• Caso 1D. Dada una sucesión uni dimensional de N valores equiespaciados de una función f: $\{f(0), \ldots, f(N\text{-}1)\}$, el par de Transformadas Discretas de Fourier asociadas a esta sucesión vienen dadas por:

$$\text{DFT}: \quad F(u) = \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1} f(x)\, exp\left(-2\pi j \frac{ux}{N}\right), \quad u = 0,1,\ldots,\text{N}-1$$

$$exp(-2\pi juk) = cos(2\pi uk) - j sin(2\pi uk)$$

$$\text{DFT inversa}: \quad f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} F(u)\, exp\left(2\pi j \frac{ux}{N}\right), \quad x = 0,1,\ldots,N-1$$

Transformada Discreta de Fourier (II)

La Transformada (Discreta) de Fourier presenta parte Real e Imaginaria, por lo que se puede representar de cualquiera de estas dos formas:

(a) $$F(u) = \Re(u) + j.\Im(u)$$

(b) $$F(u) = |F(u)|.e^{j\varphi(u)}$$

$$|F(u)| = \left[\Re^2(u) + \Im^2(u)\right]^{1/2}$$ Módulo (espectro de Fourier)

$$\varphi(u) = \text{arctang}\left[\frac{\Im(u)}{\Re(u)}\right]$$ Fase

$$P(u) = |F(u)|^2 = \Re^2(u) + \Im^2(u)$$ Espectro de Potencia

Transformada Discreta de Fourier (III)

- Caso 2D

  - M muestras en la dirección *x*
  - N muestras en la dirección *y*

$$\text{DFT :} \quad F(u,v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \exp\left(-2\pi j\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)\right),$$

$$u = 0,1,\ldots,M\text{-}1; \; v = 0,1,\ldots,N\text{-}1$$

$$\text{DFT inversa :} \quad f(x,y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u,v) \exp\left(2\pi j\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)\right)$$

$$x = 0,1,\ldots,M\text{-}1; \quad y = 0,1,\ldots,N\text{-}1$$

¿A qué corresponde la componente u=0, v=0 de la DTF, i.e., $F(0,0)$?

¿A qué tipo de transformación (punto a punto / local / global) pertenece la DFT?

Propiedades

Dos propiedades muy importantes de la DFT son

1. **Periodicidad** $F(u,v) = F(u+M,v) = F(u,v+N) = F(u+M,v+N)$

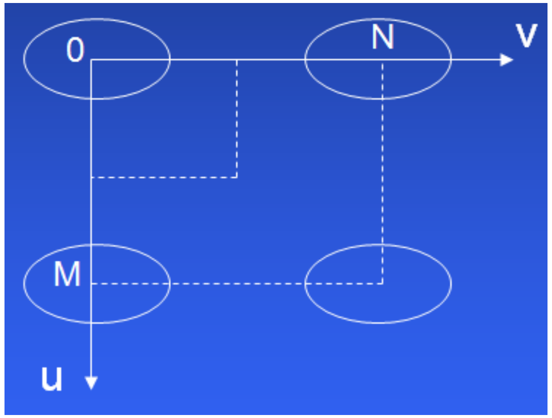
   Para especificar *F(u,v)* en el dominio de la frecuencia, basta con especificar un período de la misma.

2. **Simetría conjugada**

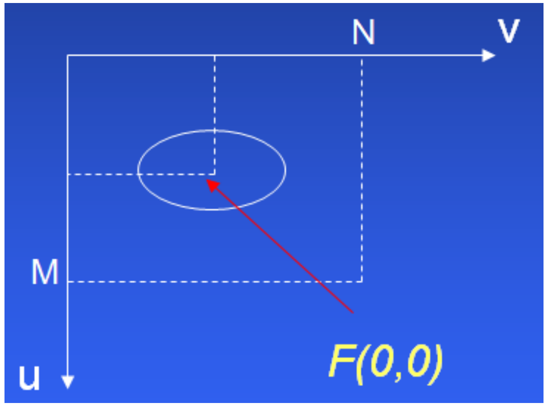
   Si *f(x,y)* es real $\Rightarrow$ $F(u,v) = F^*(-u,-v)$

   $|F(u,v)| = |F(-u,-v)|$

   la DFT es hermítica (módulo simétrico, fase antisimétrica)



Por ser una función periódica (M,N), y por tener simetría conjugada, **la frecuencia (0,0) se suele representar en el centro de la imagen en el dominio transformado.**



Propiedades

Cuando hacemos la DFT de una imagen digital, asumimos implícitamente que la imagen se replica infinitamente en todas las direcciones (periodicidad senos y coseno).

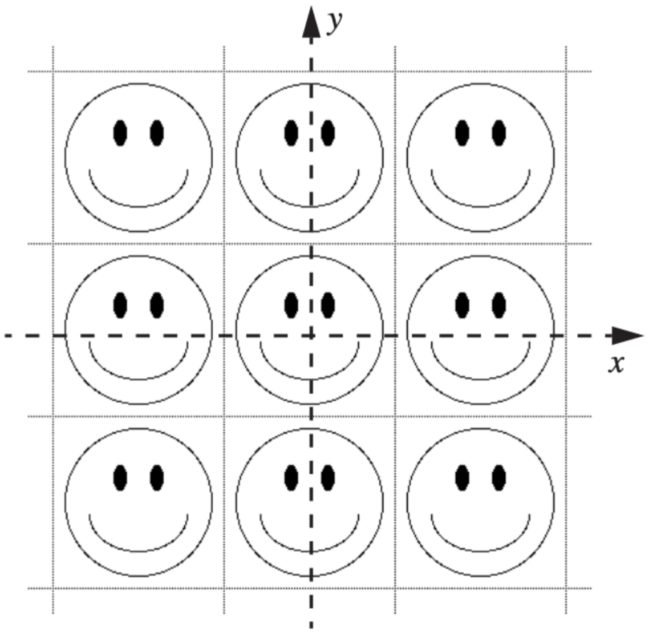
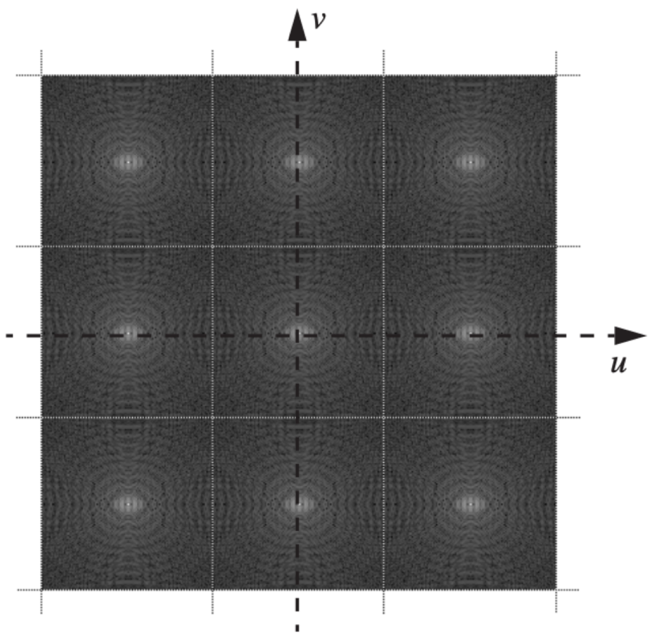


image domain

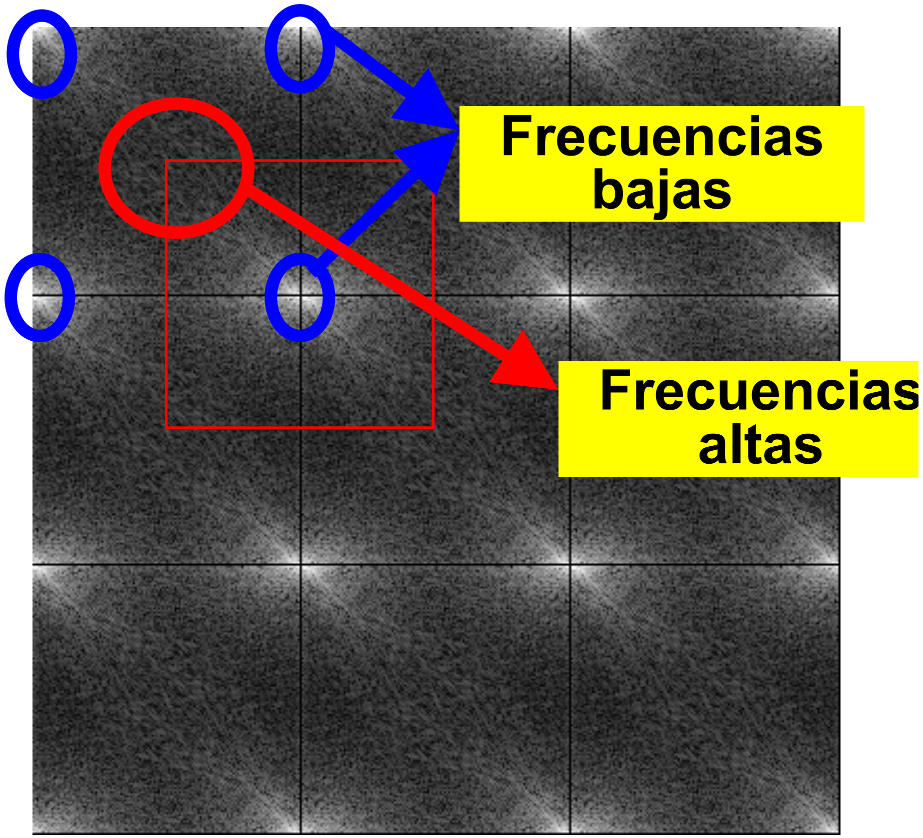


spatial frequency domain

Periodicidad

Periodicidad de la imagen

Periodicidad de la DFT.
Visualización del módulo



Alta luminosidad, implica que el módulo del coeficiente correspondiente es alto, y por tanto que hay mucha "energía" en esa componente.

Representación

El rango dinámico del espectro de Fourier de una imagen es, en general, mucho mayor que el que puede reproducir un monitor o pantalla de visualización, por lo que sólo son visibles las zonas con intensidad más elevada en la imagen.

Para acondicionar el rango dinámico del módulo de los coeficientes de la DFT $\Rightarrow$ **aumentar el contraste de las "zonas oscuras"** con una transformación logarítmica

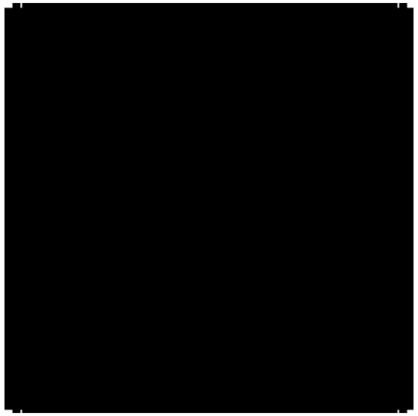
$$K \log\left(1 + \left|F(u,v)\right|\right)$$

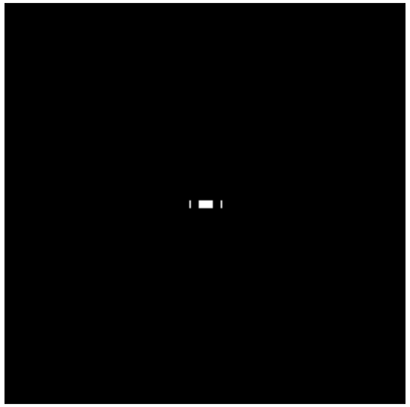
K es una constante de escalado

De esta forma, la función logarítmica realiza una compresión del rango dinámico

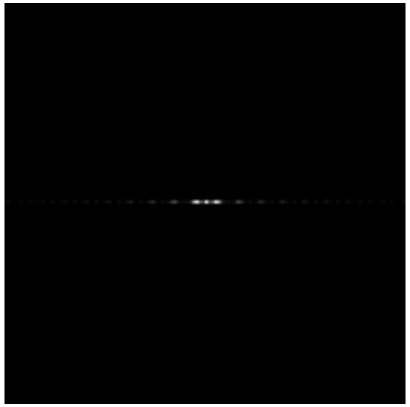
Representación

* Trasladamos el origen de frecuencias del módulo de la DFT al centro de la representación

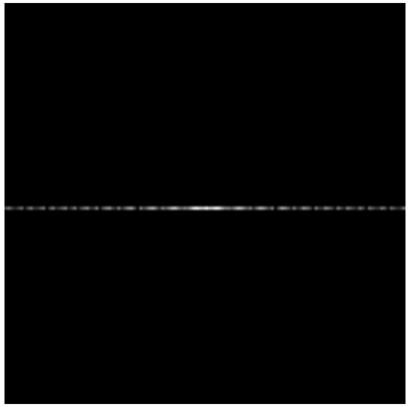




* Visualización logarítmica del módulo



$$K \log\left(1 + \left|F(u,v)\right|\right)$$



Para acondicionar el rango dinámico del módulo de los coeficientes de la DFT $\Rightarrow$ aumentar el contraste de las "zonas oscuras" con una transformación logarítmica

Representación (II)

La DFT de una imagen real está formada por 2 *imágenes*, una correspondiente a la representación del módulo y otra a la de la fase.

Origen de coordenadas
de la imagen DFT en el centro

DFT

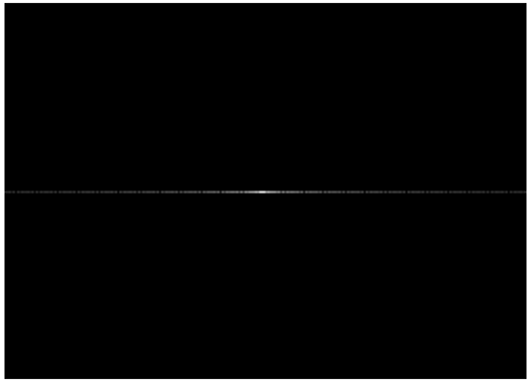
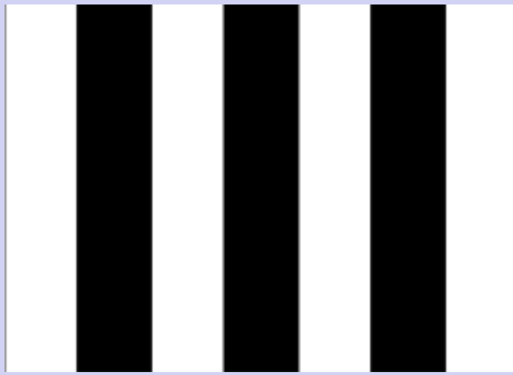
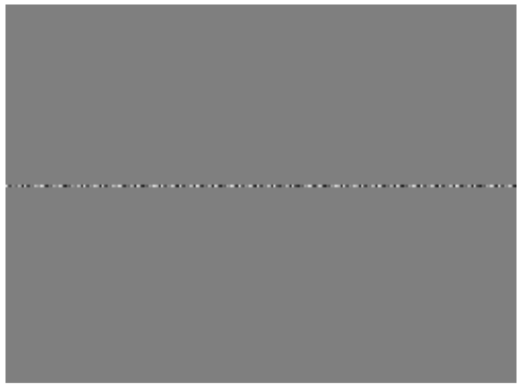


Imagen módulo
(simétrica respecto al origen)

Imagen fase
(antisimétrica respecto al origen)



DFT

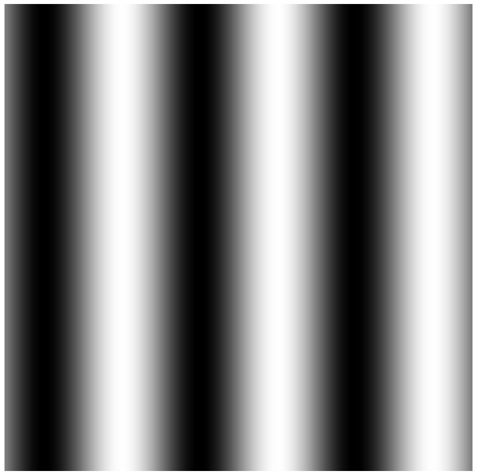


Módulo 0: negro

Fase 0: gris intermedio

Ejemplos de la representación del Módulo (I)

Ejemplo: Variación sinusoidal en intensidad en la dirección horizontal, sin variación en la dirección vertical (izquierda). Magnitud de la DFT (derecha)



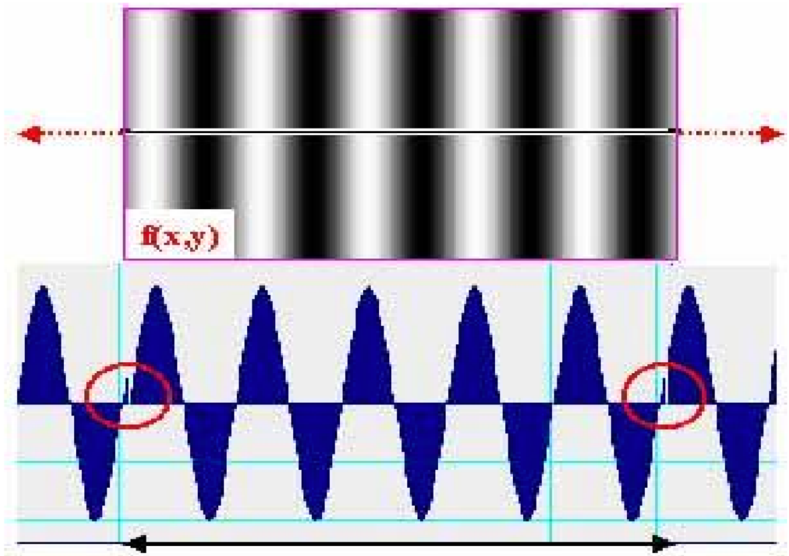
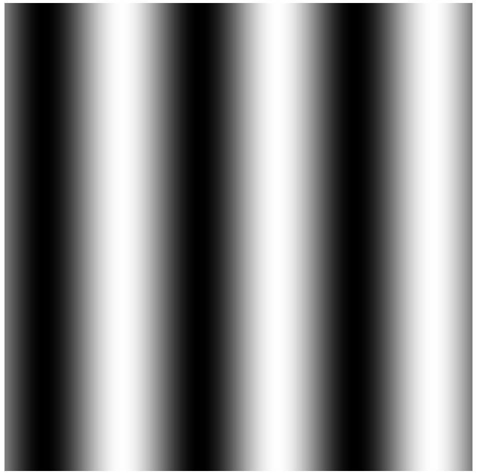


Imagen con nivel medio de intensidad nulo. Es decir, píxeles oscuros codifican niveles de intensidad inferiores a 0.

Sinusoide – negro corresponde a valores negativos de amplitud de la sinusoide

Ejemplos de la representación del Módulo (I)

Ejemplo: Variación sinusoidal en intensidad en la dirección horizontal, sin variación en la dirección vertical (izquierda). Magnitud de la DFT (derecha)



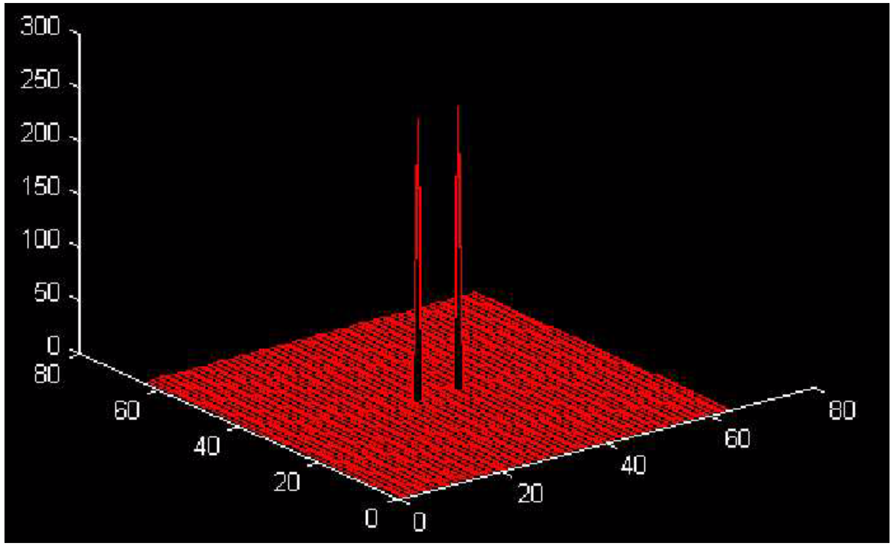
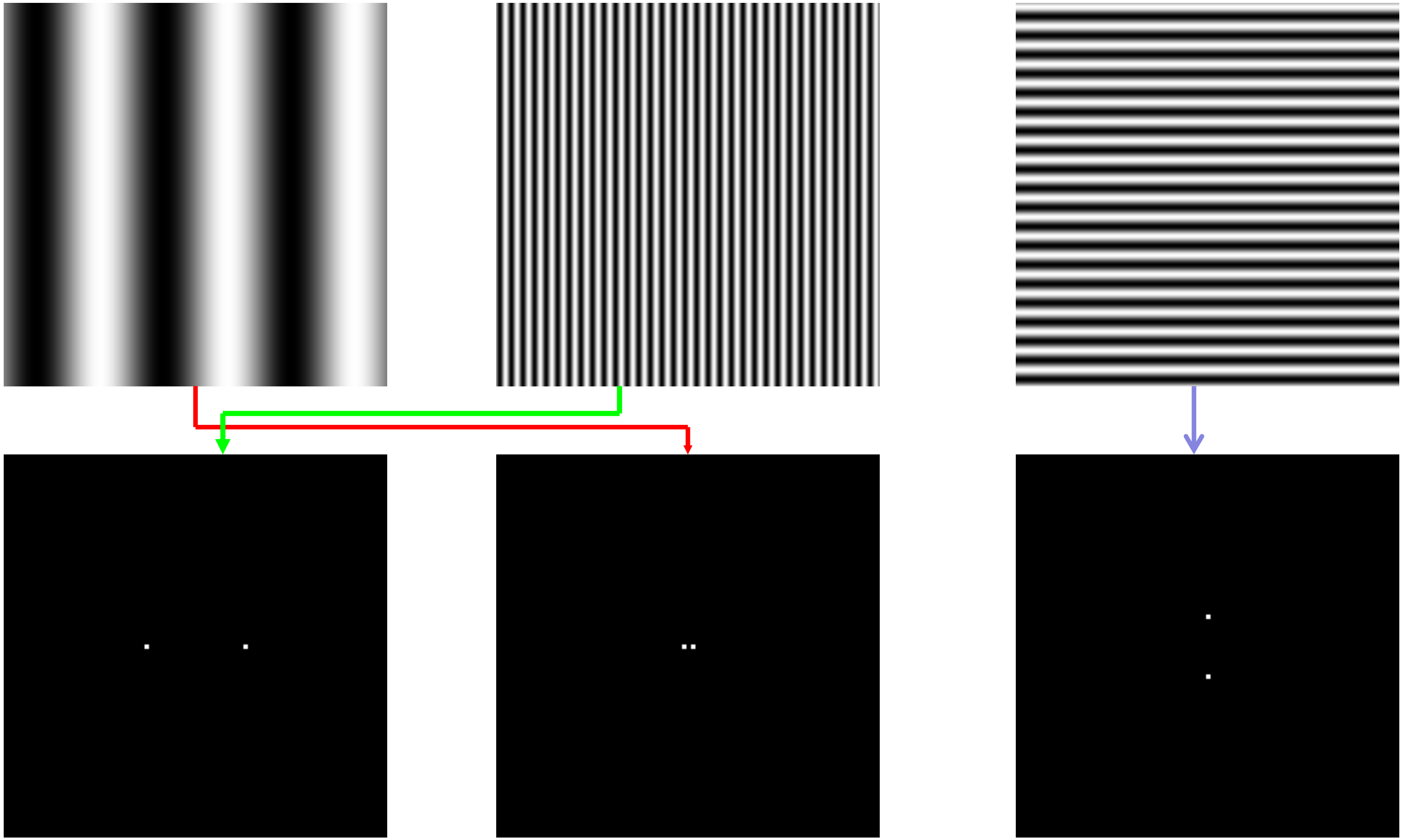


Imagen con nivel medio de intensidad nulo. Es decir, píxeles oscuros codifican niveles de intensidad inferiores a 0.

¿Cuál es el tamaño de la imagen original?

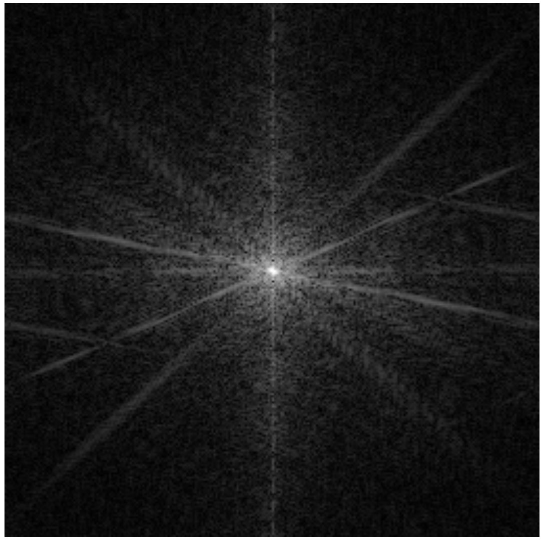
Ejemplos de la representación del Módulo (II)

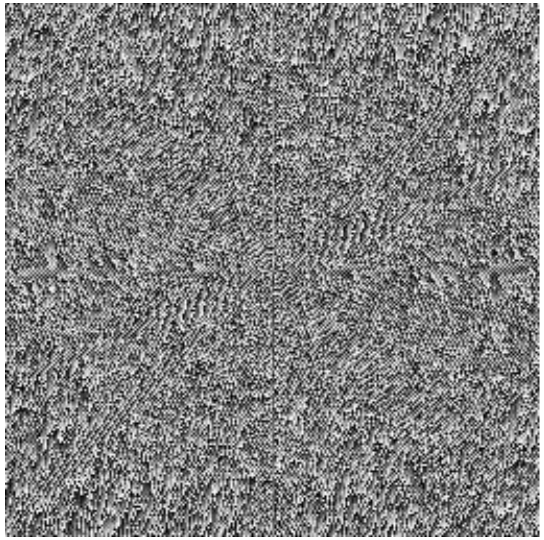
Ejemplo: Sinusoides con distinta frecuencia – negro corresponde a valores negativos de amplitud de la sinusoide. Imagen original (arriba) y magnitud DFT (abajo)



Representación del Módulo y Fase

Ejemplo: Módulo y Fase de la DTF de una imagen con múltiples frecuencias





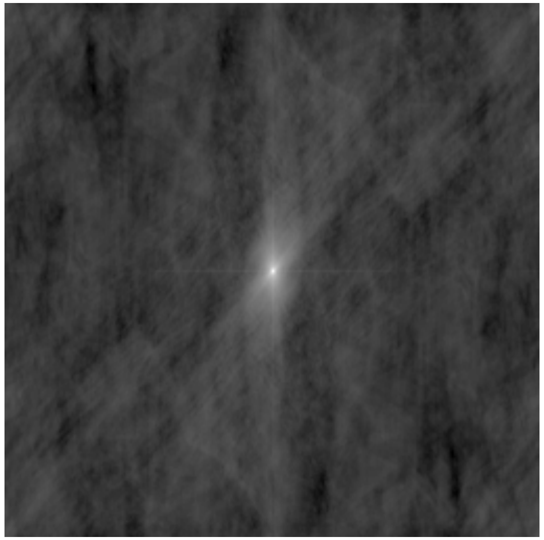
|DFT|

fase

Reconstrucción a partir del Módulo y Fase (I)

Inversa de la DTF: reconstrucción

Original



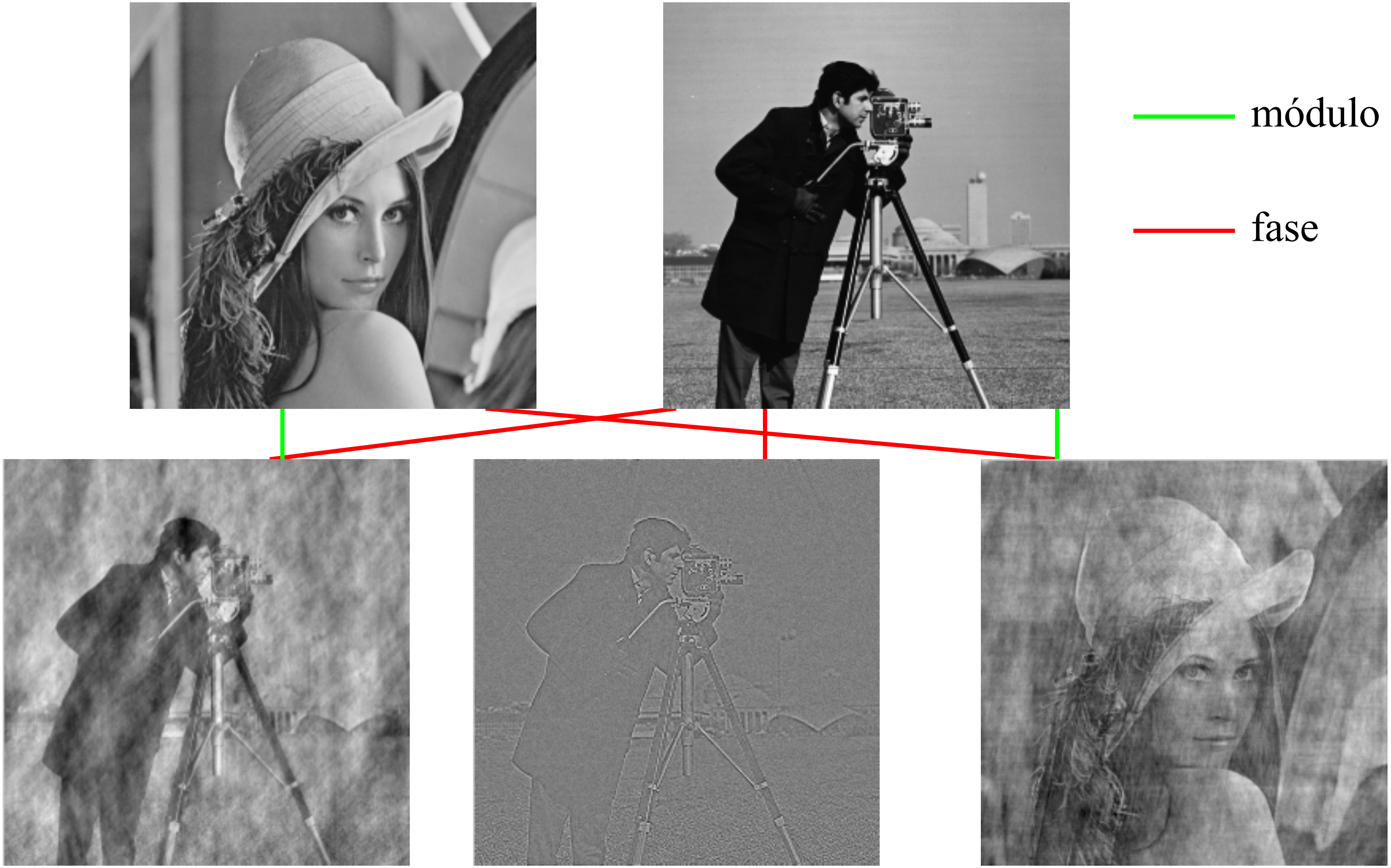
Reconstrucción a partir del módulo de la DFT (ángulo de fase es 0): se pierde la posición de las componentes espectrales

Reconstrucción a partir de la fase de la DFT (|F(u,v)|=1) (actúa como un filtro paso alto, reconstruyendo los contornos)

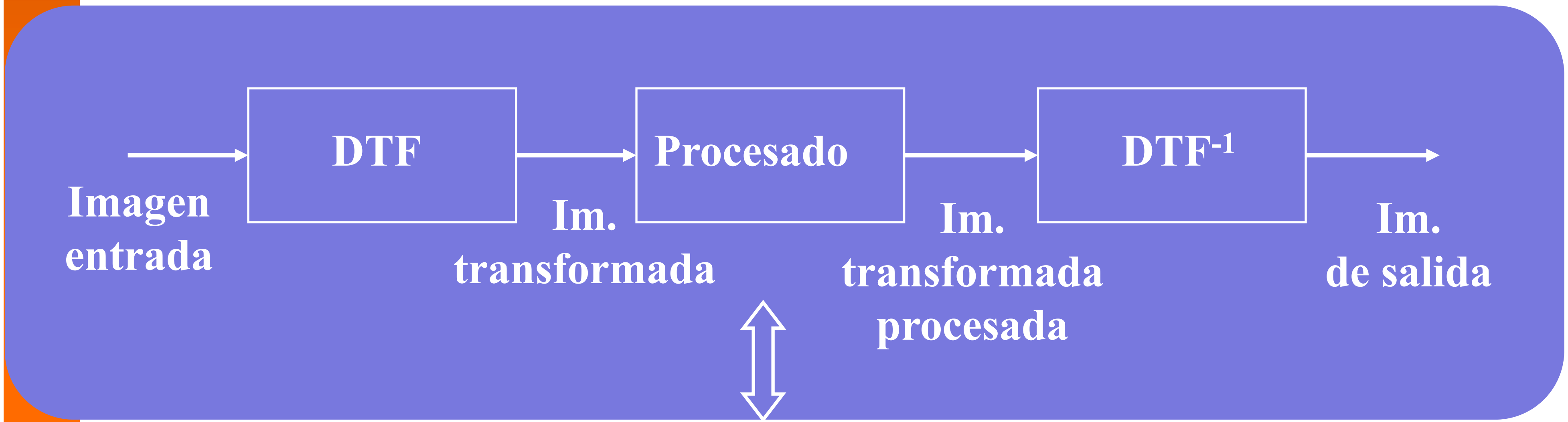
Captura la mayor parte de la inteligibilidad de la señal

Reconstrucción a partir del Módulo y Fase (II)

Ejemplo: Reconstrucción a partir de la DFT



Filtrado en el dominio frecuencial (I)



Propiedad de convolución: $i(x,y) * h(x,y) \leftrightarrow I(u,v).H(u,v)$

Filtrado frecuencial como alternativa a la convolución espacial

H(u,v) Respuesta en frecuencia del filtro

H(u,v) describe la ganancia del filtro como respuesta a diferentes frecuencias de entrada.

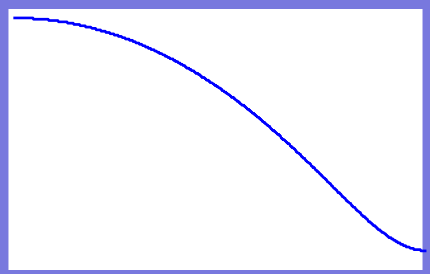
Filtrado en el dominio frecuencial (II)

Ejemplo de filtrado paso bajo

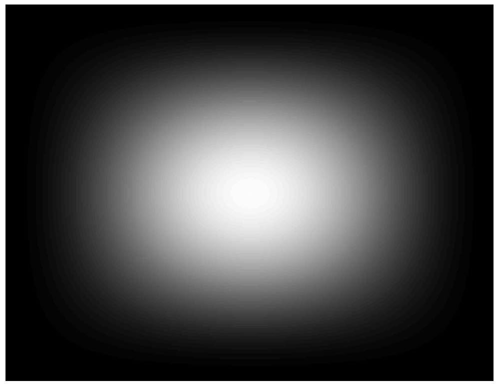
Diagrama de atenuación

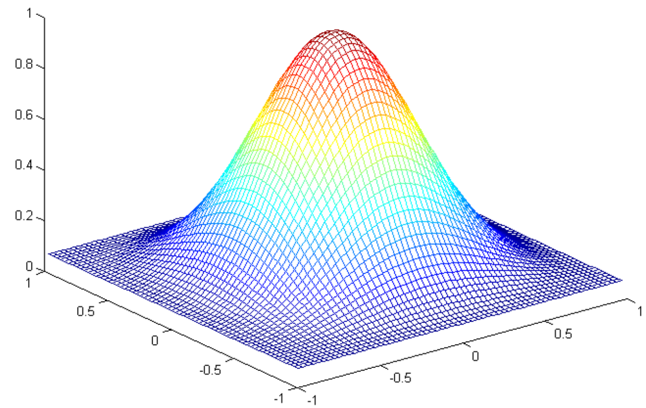
Ganancia del filtro en función de la frecuencia

Filtro 2D en frecuencia



Módulo de la respuesta al impulso de un FPB unidimensional





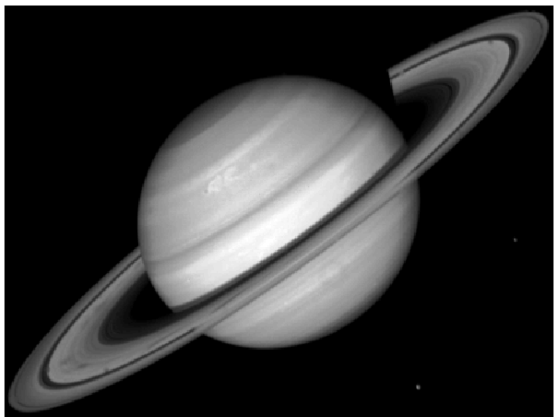
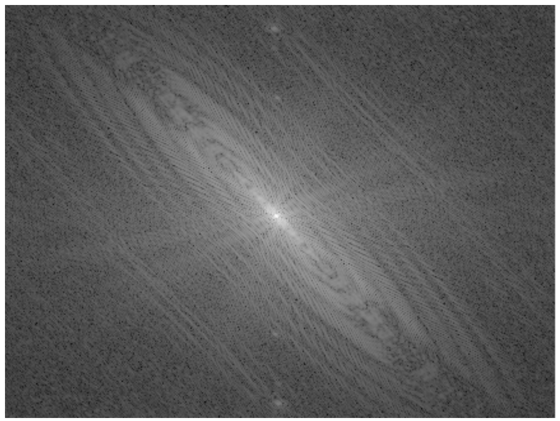


Imagen I a filtrar



| DFT (I a filtrar) |

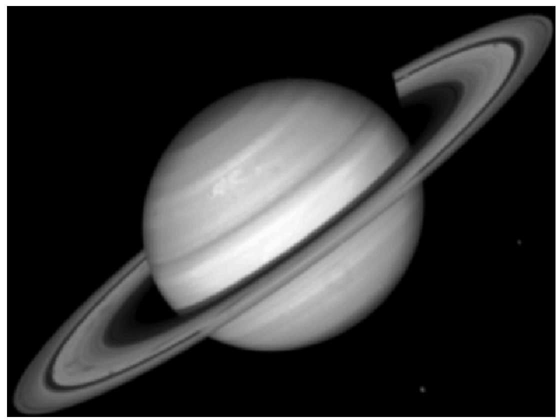
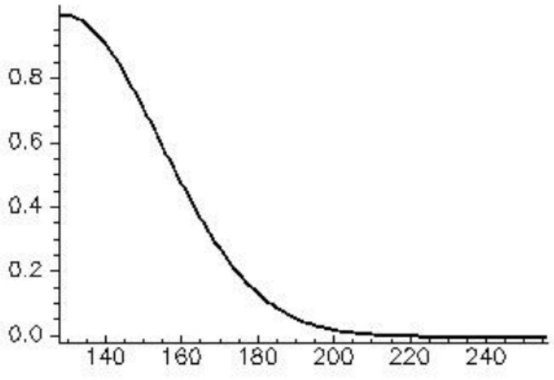
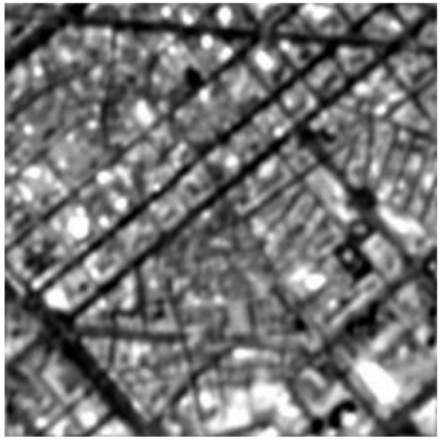
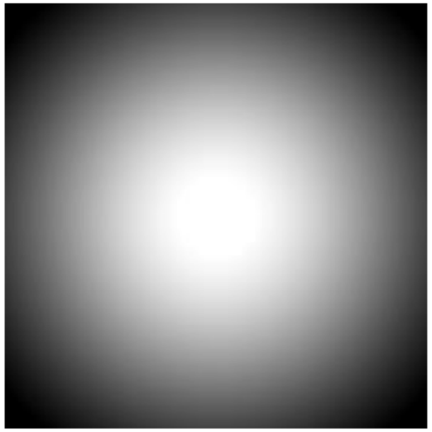
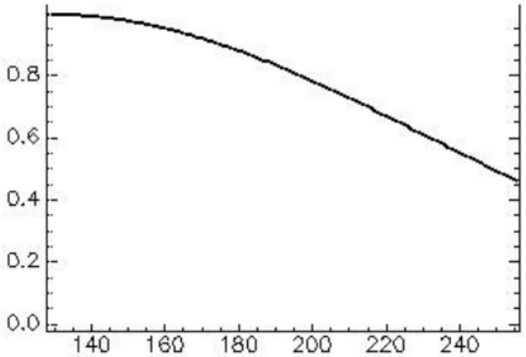
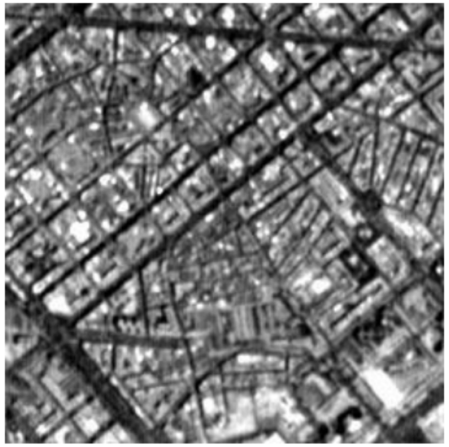


Imagen filtrada

Filtrado en el dominio frecuencial (II)

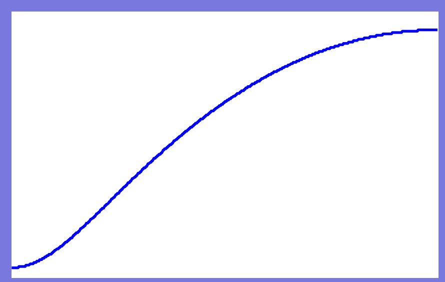


Filtrado en el dominio frecuencial (III)

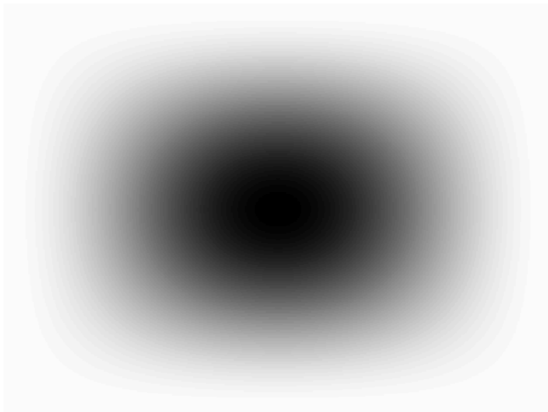
Ejemplo de filtrado paso alto

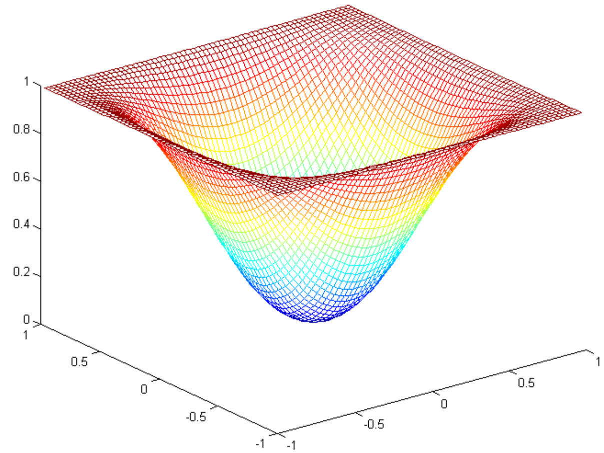
Diagrama de atenuación

Filtro 2D en frecuencia



Módulo de la respuesta al impulso de un FPA unidimensional





(se puede añadir una constante a la función de transferencia del filtro para preservar las componentes de baja frec.)

produce una reducción en el contraste de la imagen

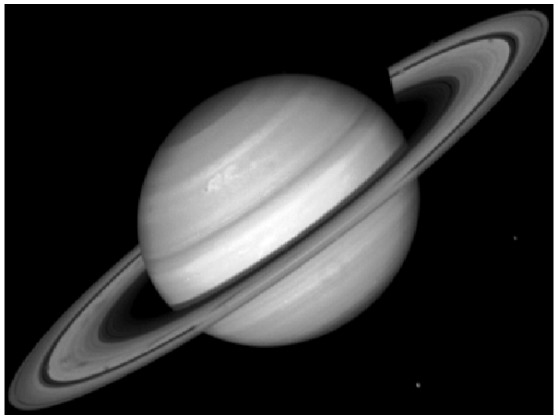
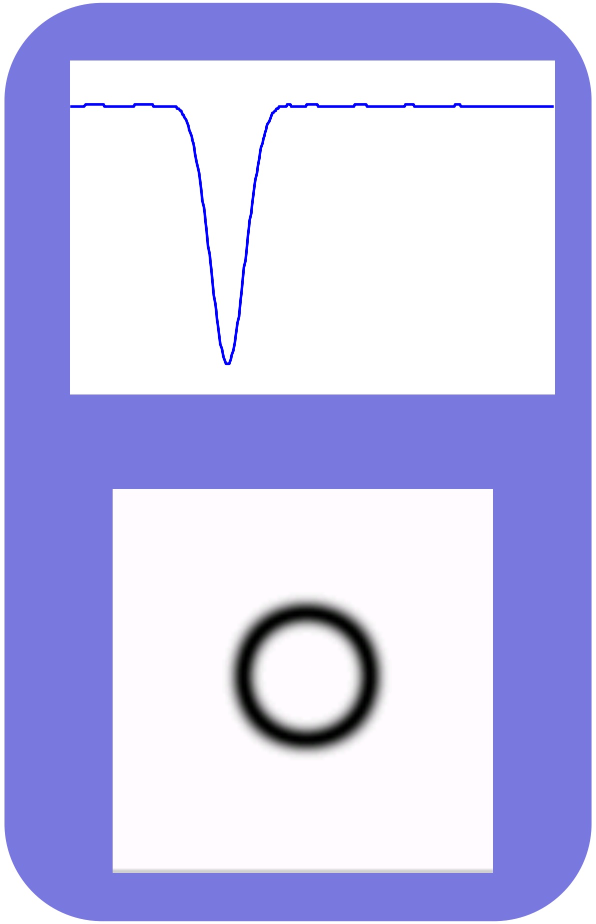


Imagen I a filtrar

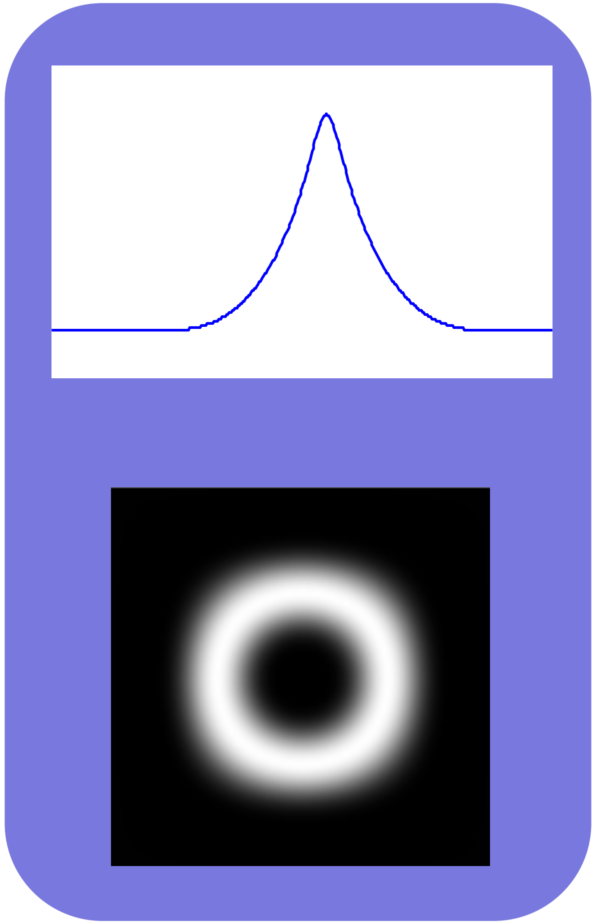
Imagen I filtrada

Filtrado en el dominio frecuencial (IV)

Diseño de filtros



Filtro elimina banda



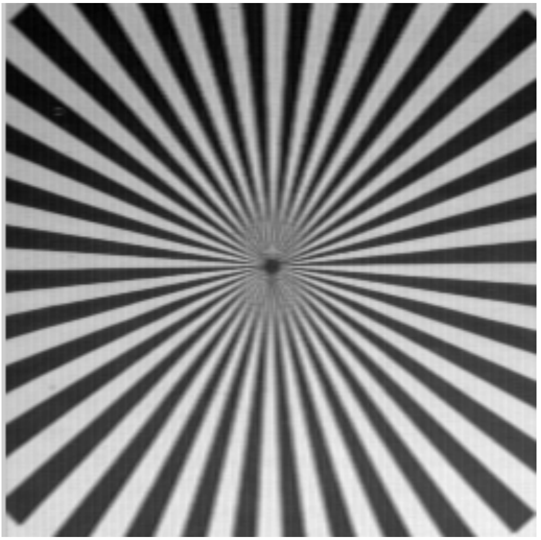
Filtro paso banda

Diagrama de atenuación

Filtro 2D en el dominio frecuencial

Ejemplo: Eliminación de interferencia periódica

Imagen original



Interferencia

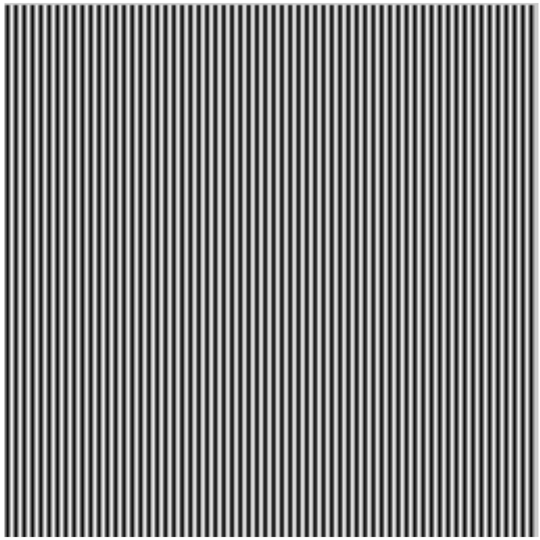
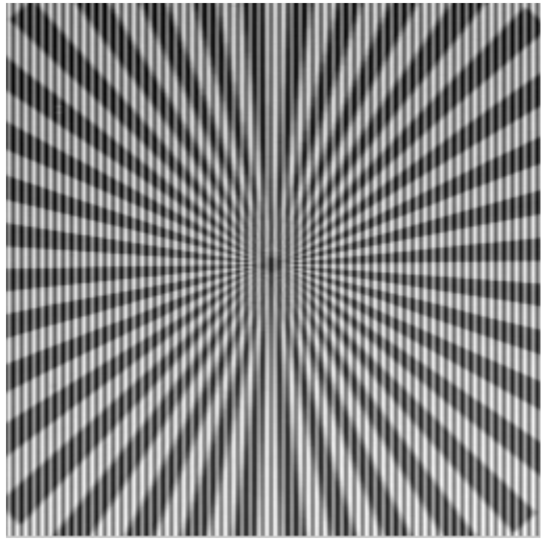
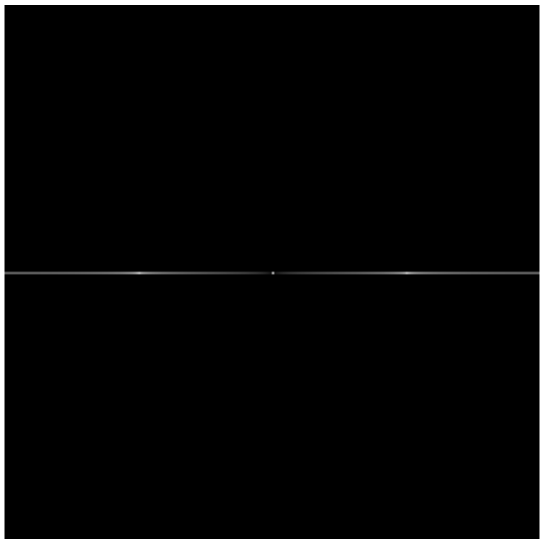


Imagen con interferencia





|DFT| imagen con interferencia

Filtro a aplicar

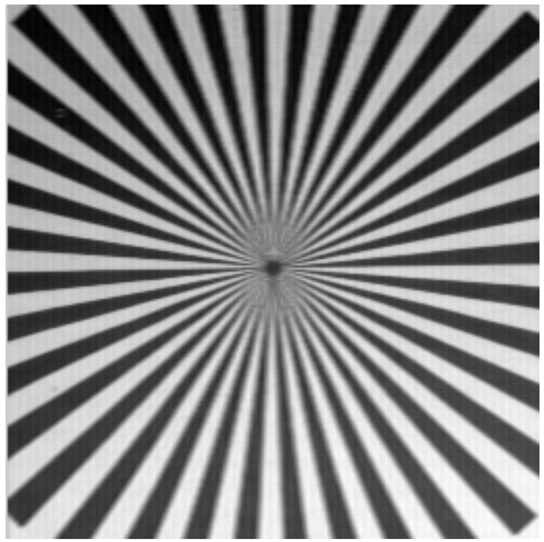


Imagen filtrada

Propiedades de la DFT (I)

1. Separabilidad:

[permite reducir el número de operaciones aplicando sucesivamente dos transformaciones unidimensionales: una horizontal y otra vertical]

$$F(u,v) = \frac{1}{M}\sum_{x=0}^{M-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\exp\left(-2\pi j\frac{vy}{N}\right)\right]\exp\left(-2\pi j\frac{ux}{M}\right)$$

2. Traslación:

[un desplazamiento no afecta a la magnitud de la DFT, aunque sí a la fase]

$$f(x,y)\exp\left(2\pi j\left(\frac{u_0 x}{M}+\frac{v_0 y}{N}\right)\right) \Longleftrightarrow F(u-u_0, v-v_0)$$

$$f(x-x_0, y-y_0) \Longleftrightarrow F(u,v)\exp\left(-2\pi j\left(\frac{ux_0}{M}+\frac{vy_0}{N}\right)\right)$$

Propiedades de la DFT (III)

3. Rotación:

[la rotación de la imagen un ángulo hace que su espectro rote el mismo ángulo] $\Longleftrightarrow$

f(x,y) gira un ángulo θ_0 *F(u,v)* gira un ángulo θ_0

Propiedades de la DFT (III)

4. Cambio de escala:

4.a. cambio de escala en amplitud => el factor de escala se mantiene en la transformada

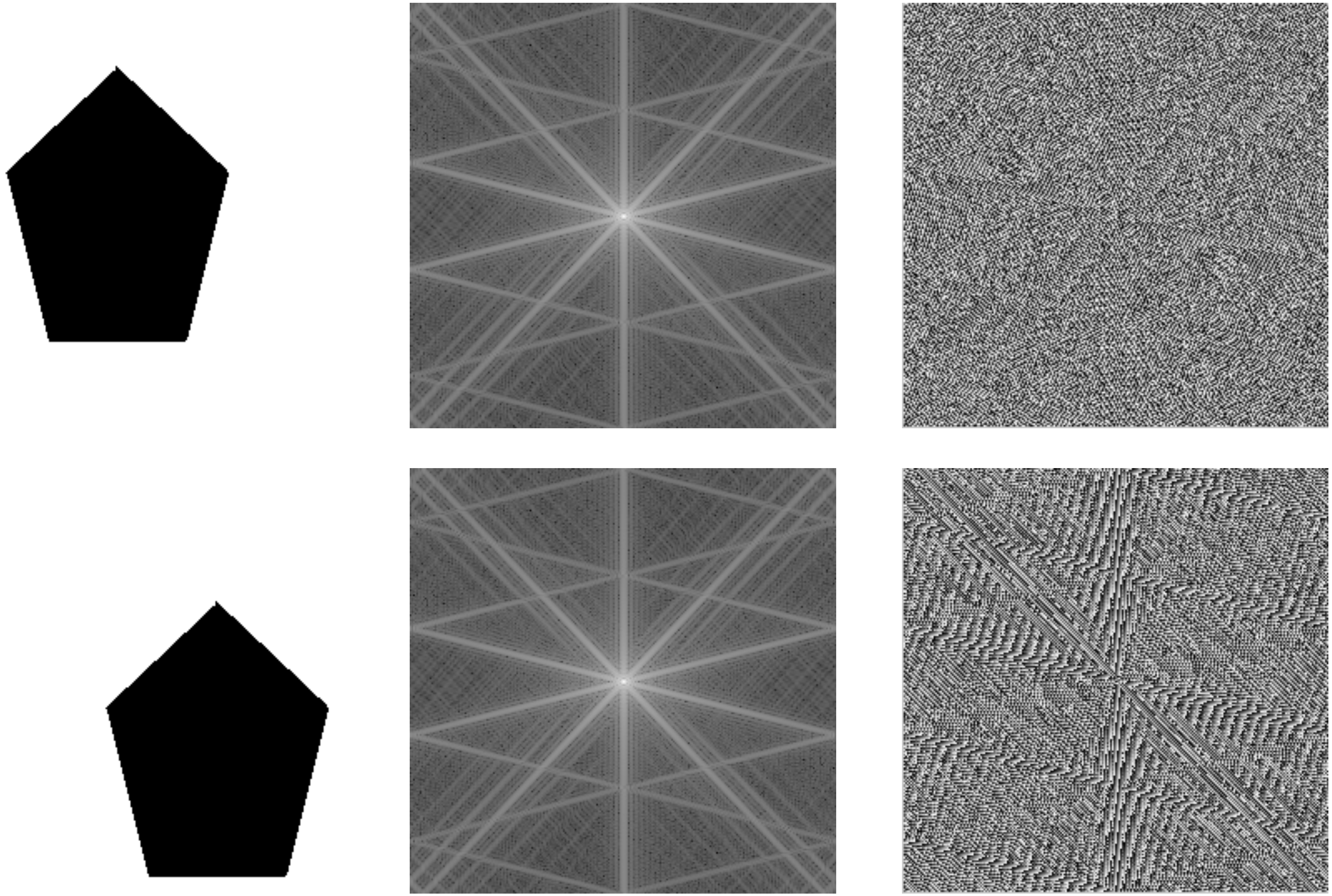
$$a.f(x,y) \Longleftrightarrow a.F(u,v)$$

4.b. cambio de escala en las variables: un cambio de escala en los objetos del plano imagen se traduce en un escalado inverso en el dominio frecuencial

$$f(ax,by) \Longleftrightarrow \frac{1}{|ab|}F(\frac{u}{a},\frac{v}{b})$$

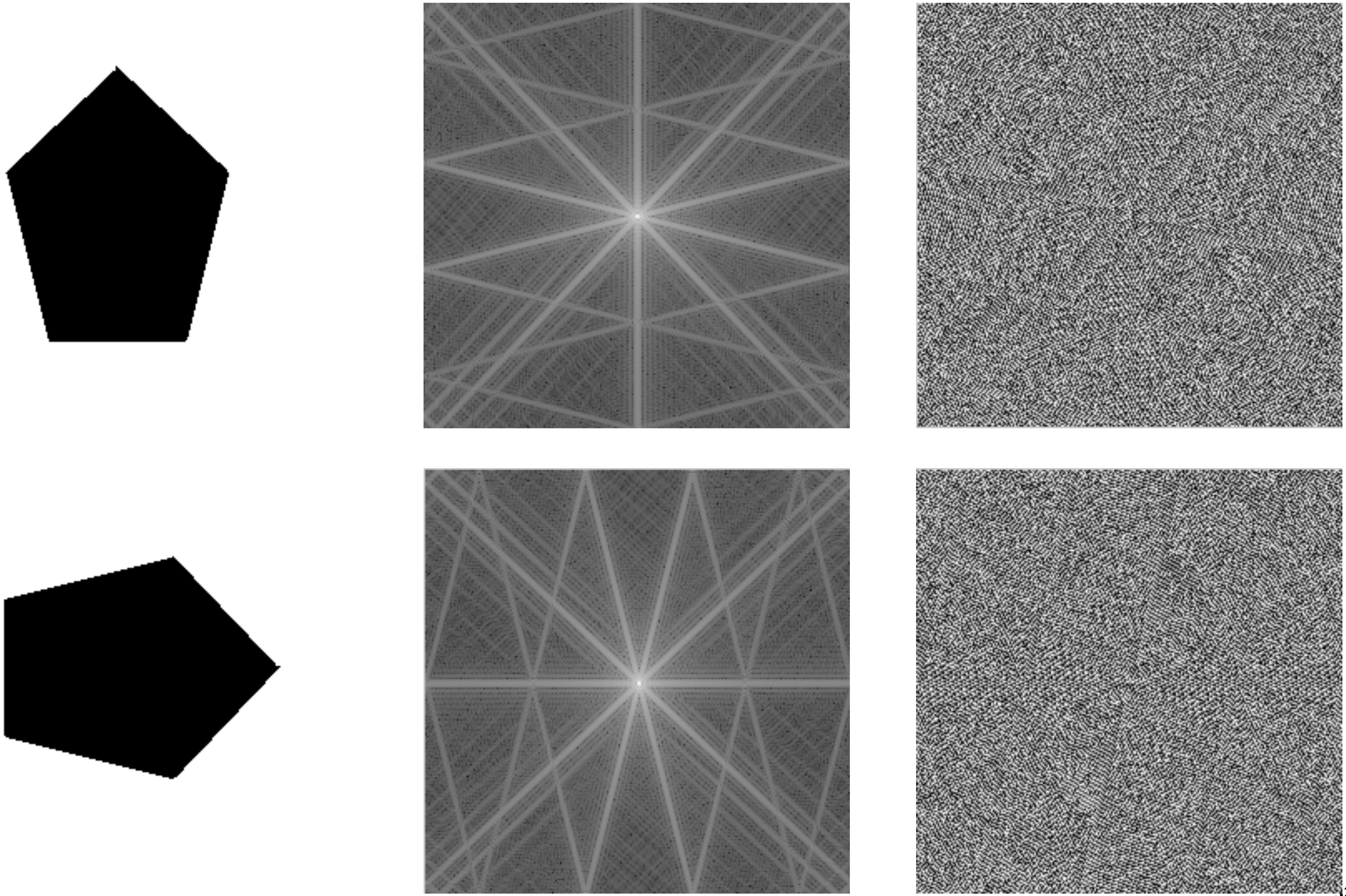
Propiedades de la DFT (II)

Ejemplo: **propiedad traslacional**



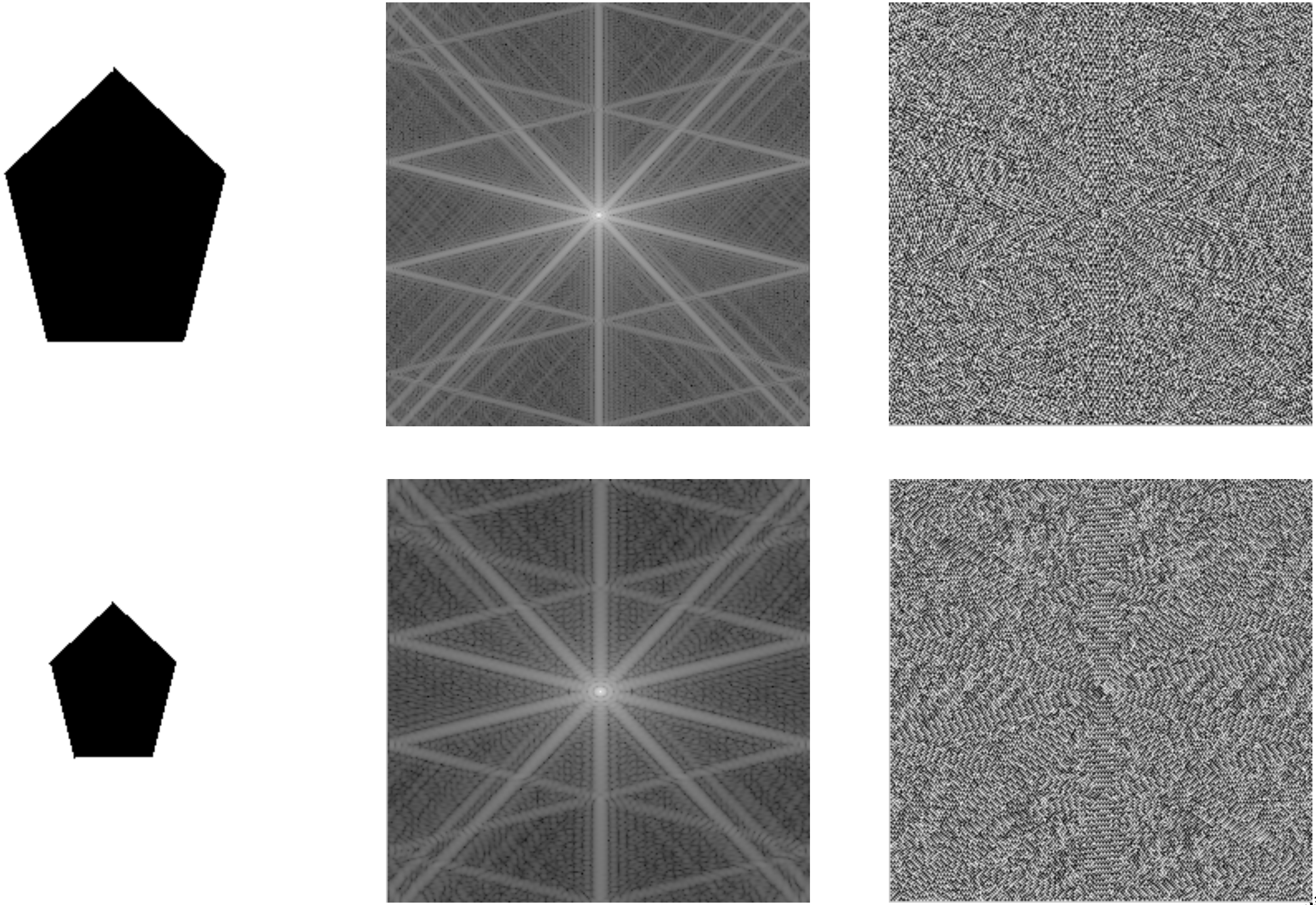
Propiedades de la DFT (IV)

Ejemplo**: propiedad rotacional**



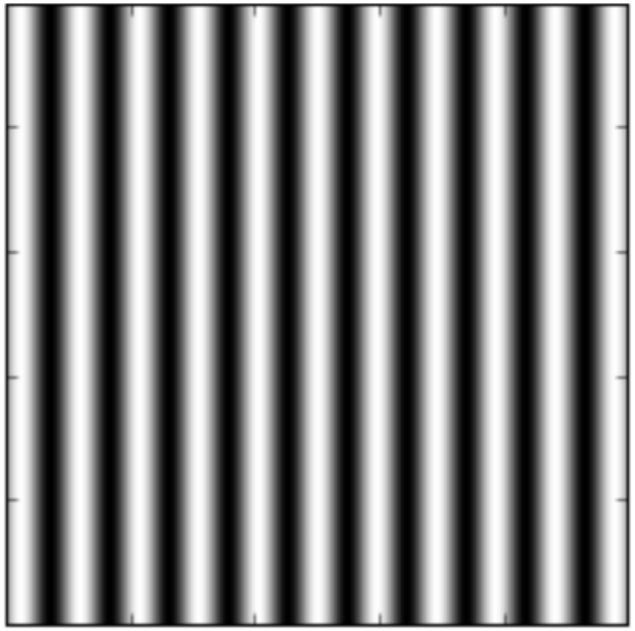
Propiedades de la DFT (V)

Ejemplo: **cambio de escala (zoom)**

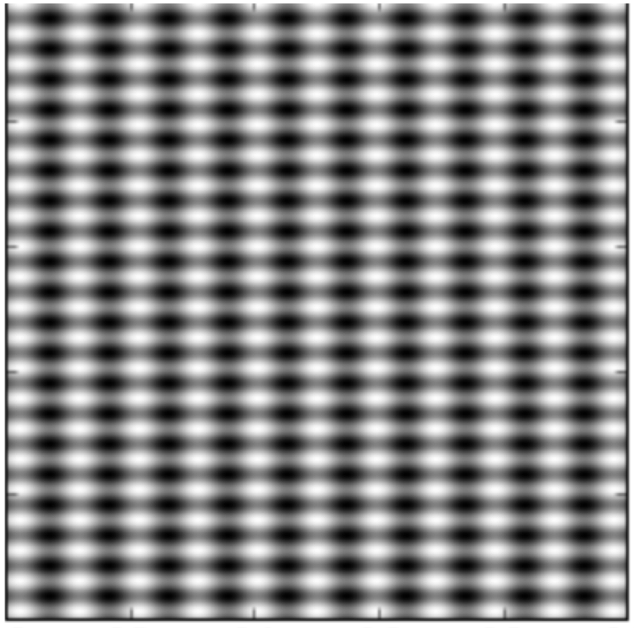


Ejercicio 1

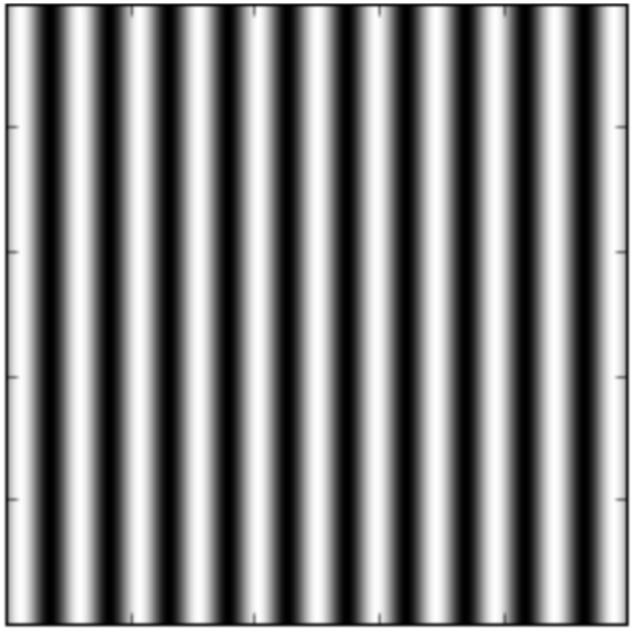
Ejercicio 1

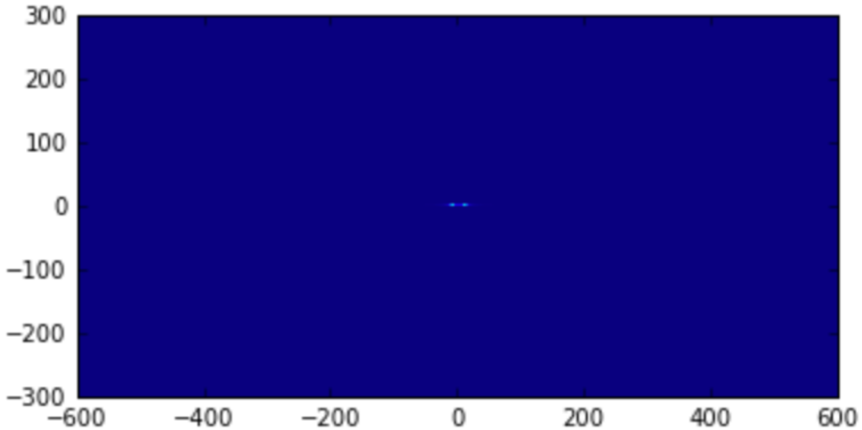


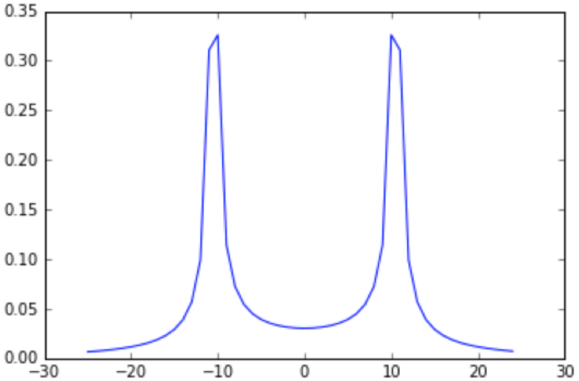
Ejercicio 2

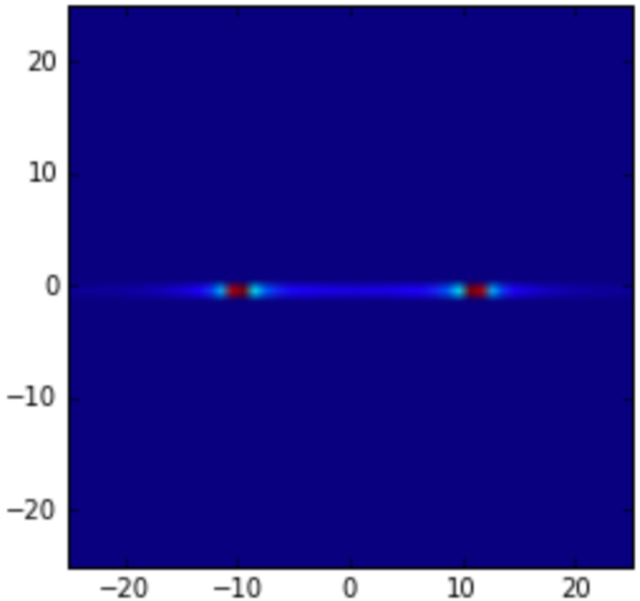


Ejercicio 1

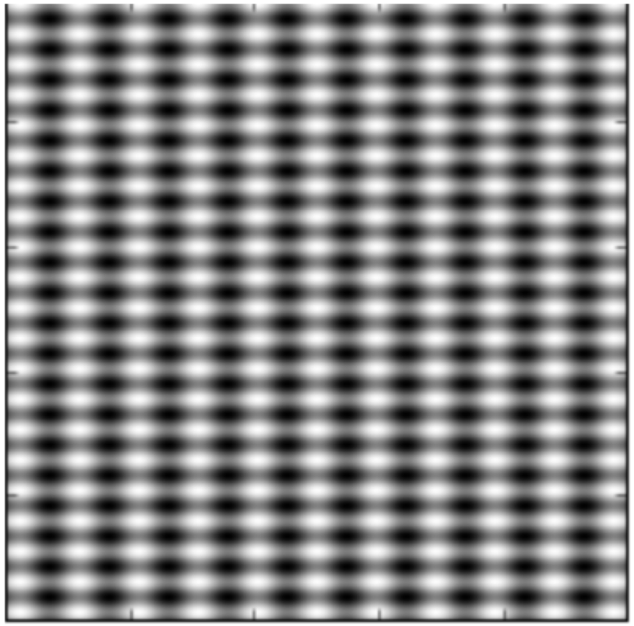



300
200
100
0
−100
−200
−300
−600
−400
−200
0
200
400
600


0.35
0.30
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
−30
−20
−10
0
10
20
30

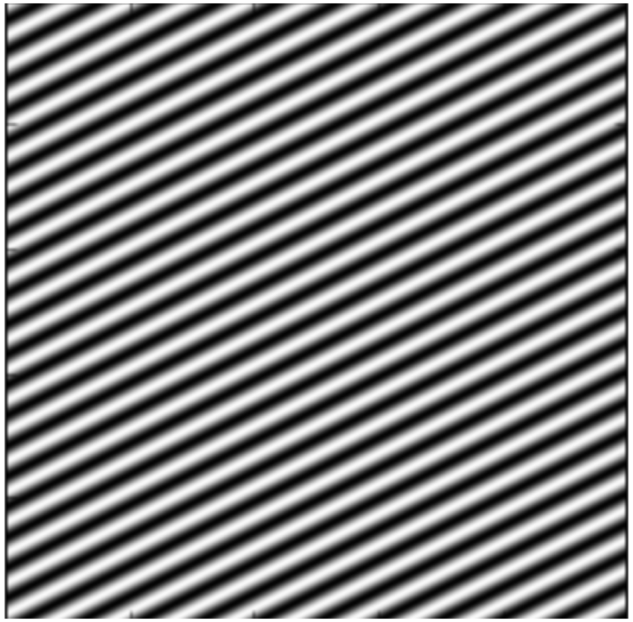

20
10
0
−10
−20
−20
−10
0
10
20

Ejercicio 2

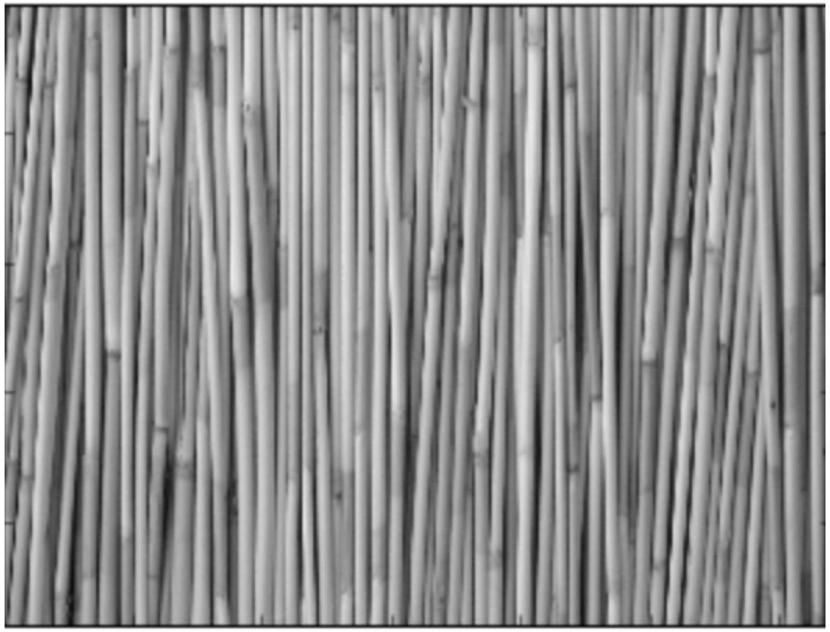


Ejercicio 3

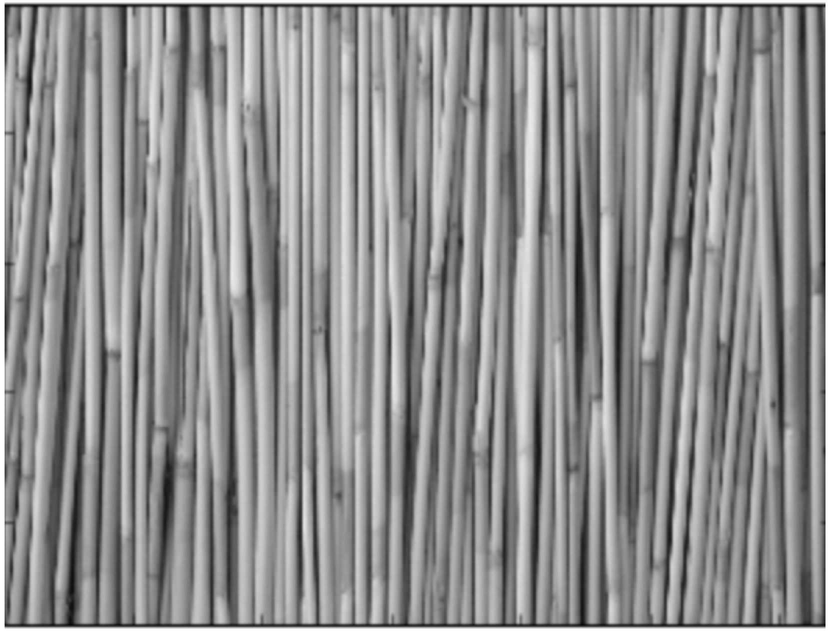
Ejercicio 3



Ejercicio 4

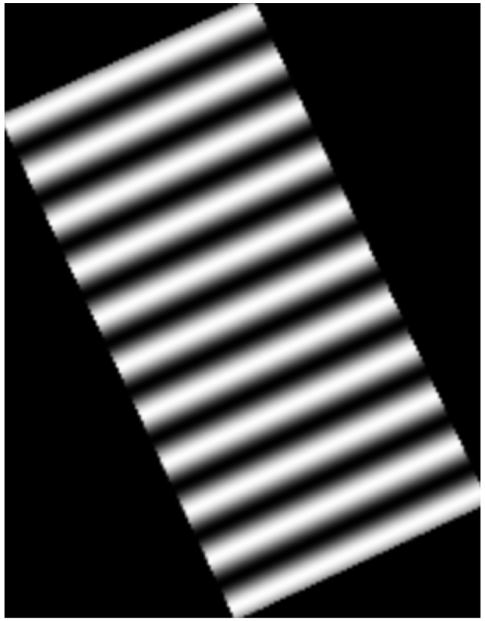


Ejercicio 4

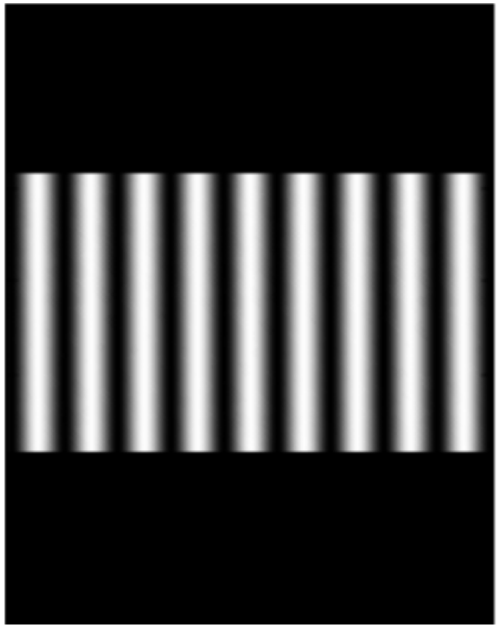


Ejercicio 5

Ejercicio 5



Ejercicio 6



Ejercicio 6