

Tema 2: Filtrado en el dominio de la frecuencia



ÍNDICE

2.1 Introducción

2.2 Transformada Discreta de Fourier (DFT)

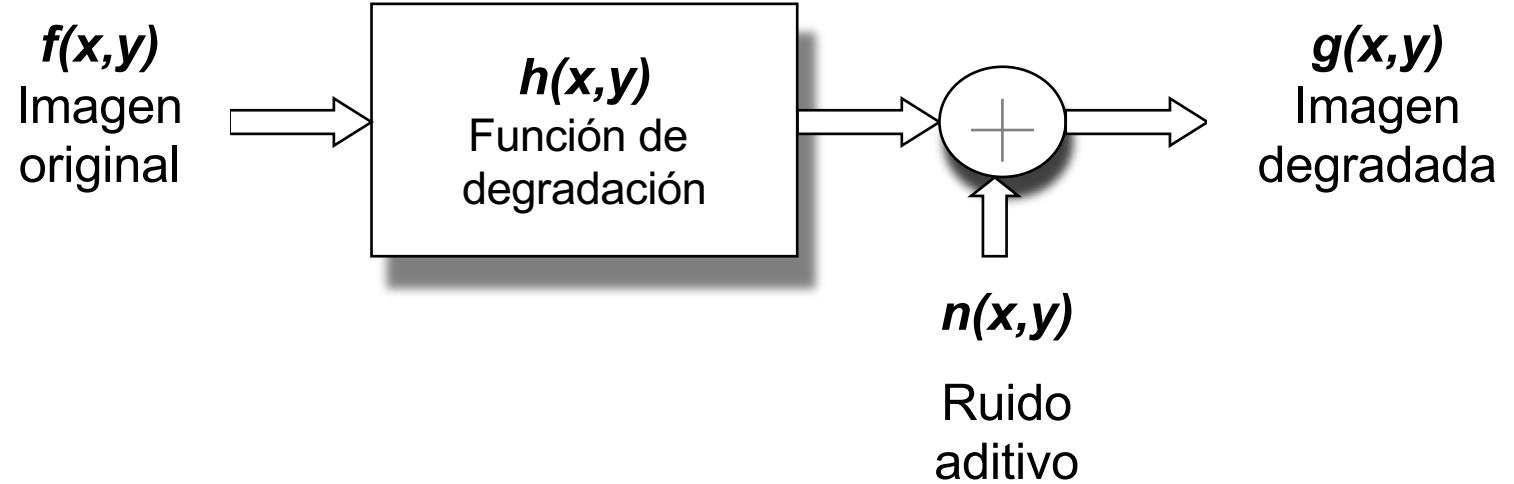
2.3 Propiedad de la DFT

2.4 Procesamiento en el dominio de la frecuencia

2.5 Restauración de imagen. Filtro de Wiener



2.5.1 Modelo general de degradación



En espacio (2D):

$$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y) + n(x, y)$$

↓ TF

En frecuencia:

$$G(u, v) = F(u, v)H(u, v) + N(u, v)$$

2.5.1 Modelo general de degradación

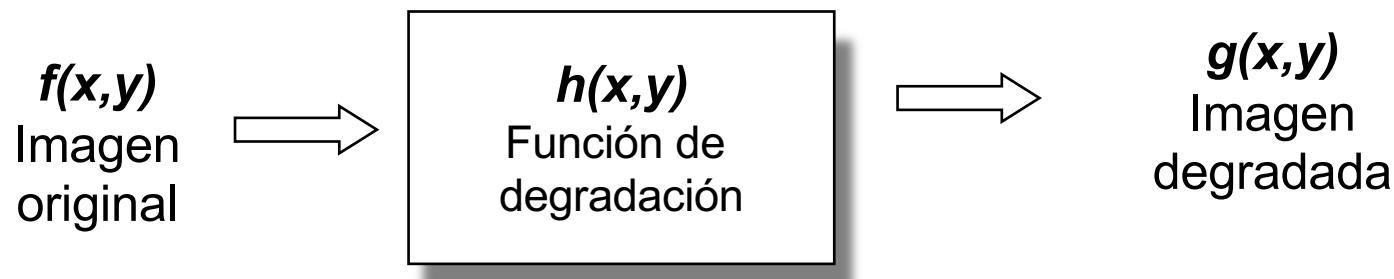
$$g(x,y) = h(x,y) * f(x,y) + n(x,y)$$

siendo

- g : imagen captada
 - f : imagen original (desconocida)
 - h : respuesta al impulso, también llamada función de distorsión o función de dispersión de punto (PSF, *Point Spread Function*)
 - n : ruido aleatorio independiente de la señal (desconocido)
-
- h : LSI → la invarianza espacial supone implícitamente que la degradación es uniforme en toda la imagen.
 - para poder utilizar DFTs, supondremos convolución circular.

2.5.2 La función de degradación

- También llamada PSF (*Point Spread Function*)
- Es la respuesta al impulso espacial. Contiene toda la información del sistema distorsionador (en ausencia de ruido aditivo).



- En general puede ser variante en el espacio (no es infrecuente). Aquí la PSF se asume lineal e invariante en el espacio.
- La utilización de un modelo lineal hace que estemos frente a un problema de deconvolución (bidimensional).

2.5.2 La función de degradación

Tipos de degradación

- Causas **extrínsecas**:
 - Movimiento relativo entre cámara y objeto.
 - Turbulencias atmosféricas (en Teledetección y Astronomía).
- Causas **intrínsecas**. Pueden identificarse en laboratorio.
 - Defectos en las lentes.
 - No-linealidad del sensor electro-óptico.
 - Película de material granuloso.
 - Desenfoques.
- En general, todas tienen las mismas características: producen un **suavizado** **paso** bajo de la imagen original, que **atenúa los bordes** (importantes para la percepción visual).

2.5.2 La función de degradación

Estimación de la PSF

- *Blind deconvolution*: proceso de restaurar una imagen usando una función de degradación estimada
 - 1. Por experimentación
 - 1. Por observación de la imagen
 - 1. Por modelado

2.5.2 La función de degradación

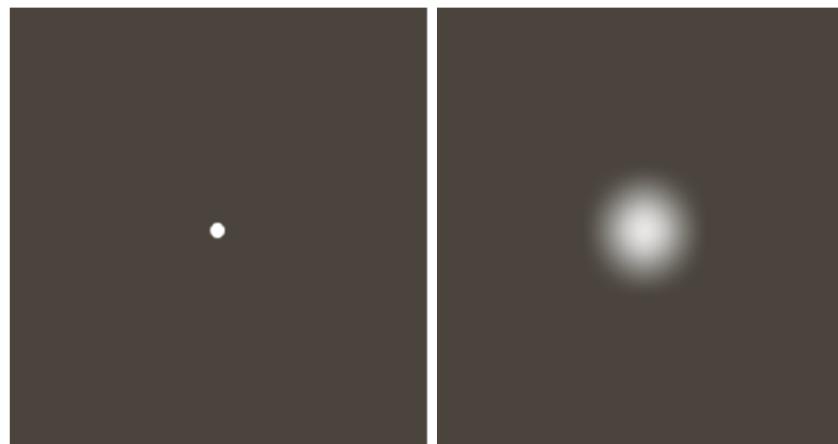
Estimación de la PSF

(I) Por experimentación.

- Si se dispone de un equipo similar al usado para adquirir la imagen, es posible obtener una estimación muy aproximada de la degradación.
- Idea: generar una imagen degradada lo más parecida posible a la que tenemos.
- Se busca obtener la respuesta a un Impulso (punto de luz)

a b

FIGURE 5.24
Degradation estimation by impulse characterization.
(a) An impulse of light (shown magnified).
(b) Imaged (degraded) impulse.



2.5.2 La función de degradación

Estimación de la PSF

(II) Por observación de la imagen.

- Buscaremos una pequeña sección rectangular de la imagen que contenga estructuras simples (parte de un objeto, o fondo): subimagen G_p .
- Debe ser una zona con fuerte contenido en señal, para limitar el efecto del ruido (p.e., un área de alto contraste).
- Se procesa esa subimagen hasta conseguir eliminar lo mejor posible la distorsión. Sea T_p , la subimagen procesada.
- Asumiendo que el ruido casi no afecta:

$$H_p(u, v) = \frac{G_p(u, v)}{T_p(u, v)}$$

Para estimar la $H(u, v)$ completa, se usa la propiedad de invarianza a la posición.



Universidad
Rey Juan Carlos

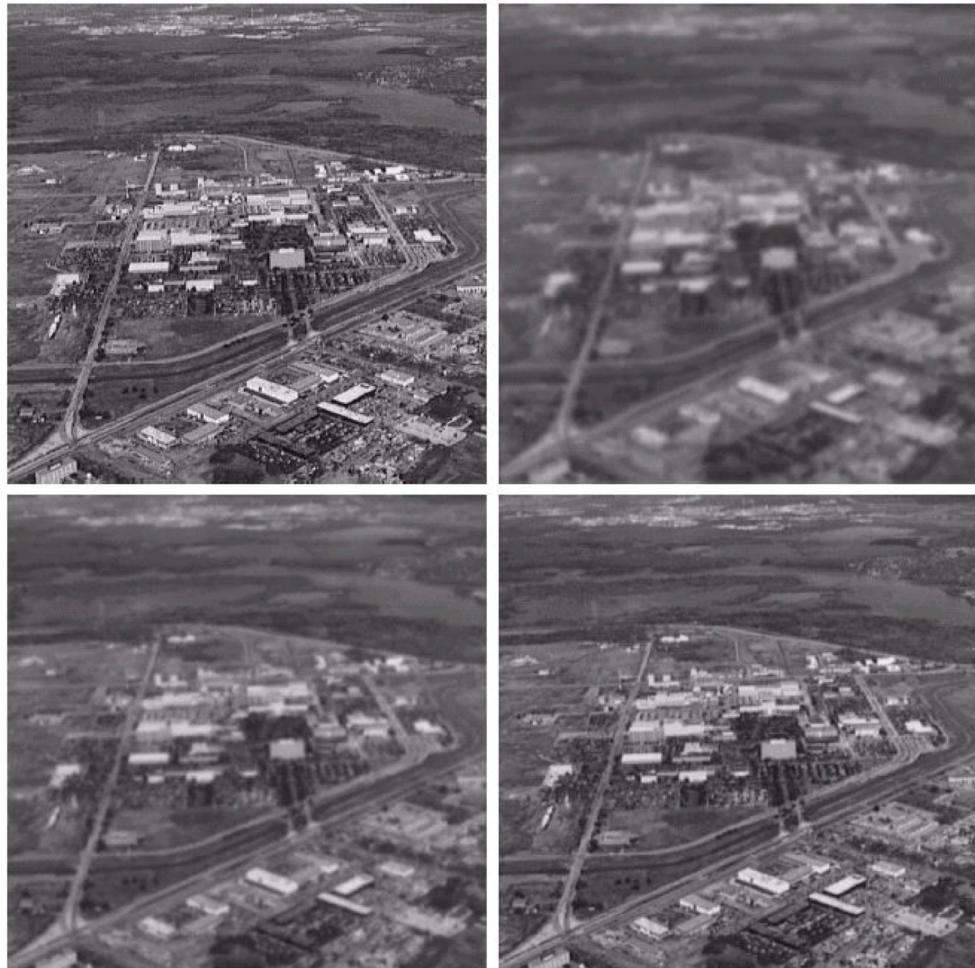
2.5.2 La función de degradación

Estimación de la PSF

(II) Por observación de la imagen.

a b
c d

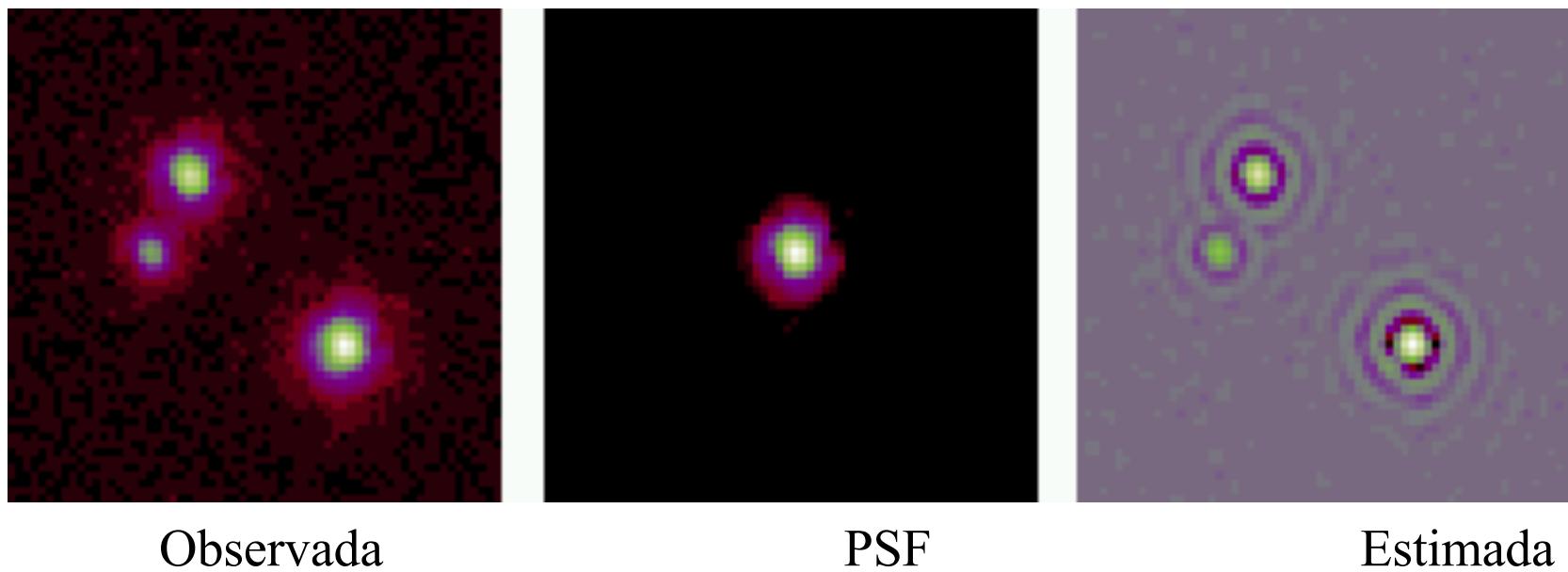
FIGURE 5.25
Illustration of the atmospheric turbulence model.
(a) Negligible turbulence.
(b) Severe turbulence, $k = 0.0025$.
(c) Mild turbulence, $k = 0.001$.
(d) Low turbulence, $k = 0.00025$.
(Original image courtesy of NASA.)



2.5.2 La función de degradación

Ejemplo de estimación de la función de distorsión

Restauración de imágenes del *Hubble Space Telescope* (HST)



2.5.2 La función de degradación

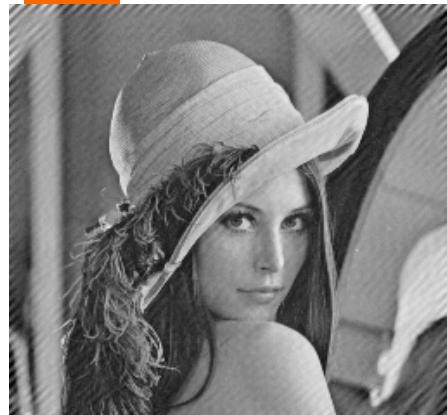
Estimación de la PSF

(III) Por modelado

- Con conocimientos acerca de las condiciones físicas del entorno que causa las degradaciones. P.e., modelos basados en las características físicas de las turbulencias atmosféricas.
- Con conocimientos matemáticos sobre la distorsión:
 - Movimiento lineal uniforme entre cámara y objeto: PSF es una recta.
 - Trayectoria curvilínea: PSF es una curva.
 - Imagen doble: psf es ..



Universidad
Rey Juan Carlos

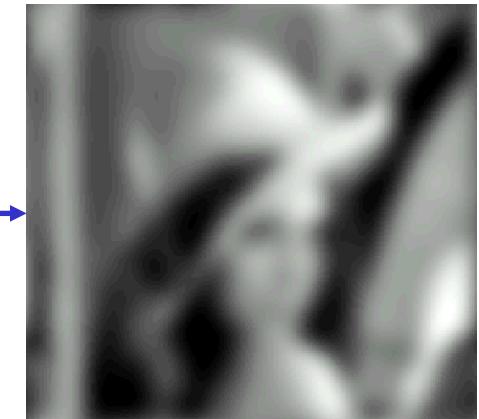
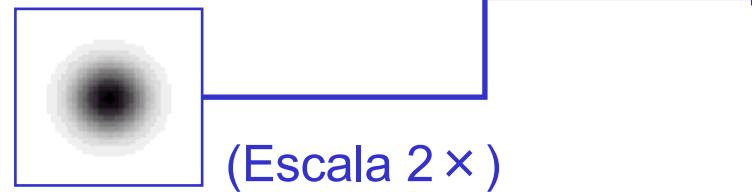


Original

2.5.2 La función de degradación

Ejemplos de funciones de distorsión

Desenfoque



Movimiento



Imagen doble



2.5.2.1. Degradación por movimiento

- Considerando movimiento (lineal) entre cámara y objeto durante un tiempo T.
- Sea $f(x,y)$ una imagen que sufre un movimiento en un plano descrito por $x_0(t)$ e $y_0(t)$.
- La exposición total (durante un tiempo T) en cualquier punto del medio registrado (p.e., una película) viene dada por

$$g(x,y) = \int_{\gamma}^T f(x - x_o(t), y - y_o(t)) dt$$

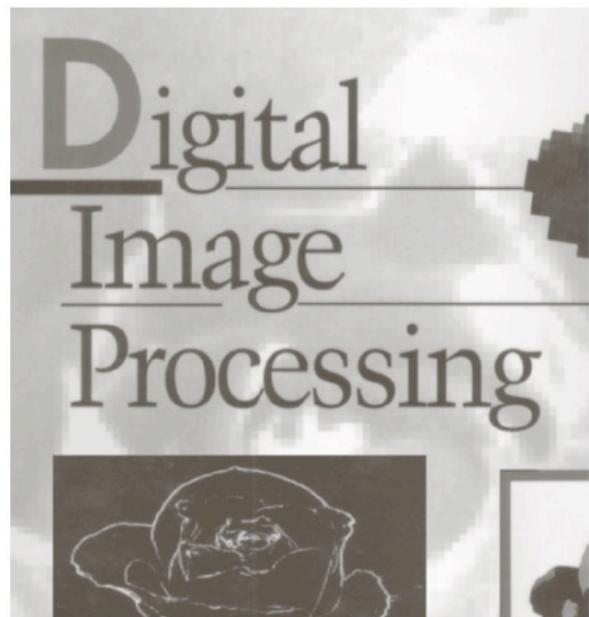
- En frecuencia: $G(u,v) = H(u,v)F(u,v)$

donde $H(u,v) = \int_0^T e^{-j2\pi[u x_o(t) + v y_o(t)]} dt$

2.5.2.1. Degradación por movimiento

- Si $x_o(t) = \frac{a}{T}t$ $y_o(t) = \frac{b}{T}t$

$$H(u, v) = \frac{T}{\pi(ua + vb)} \sin[\pi(ua + vb)] e^{-j\pi(ua + vb)}$$



Original: $f(x, y)$



Degrada: $g(x, y)$

a b

FIGURE 5.26
(a) Original image.
(b) Result of blurring using the function in Eq. (5.6-11) with $a = b = 0.1$ and $T = 1$.

2.5.2.2 Desenfoque uniforme

Suavizado de la imagen causado por el enfoque incorrecto de una lente fina:

$$h(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi R^2}, & \text{si } \sqrt{x^2 + y^2} \leq R \\ 0, & \text{demás valores} \end{cases}$$
$$H(u, v) = 2\pi R \frac{J_1(Rr)}{ar}$$

con $r^2 = u^2 + v^2$.

J_1 : función de Bessel de orden 1.

$$J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^2 \cdot 4} + \frac{x^5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6} - \frac{x^7}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8} + \dots$$

El grado de desenfoque depende de la longitud focal, la apertura de las lentes y la distancia entre cámara y objeto.

2.5.2.2. Desenfoque uniforme



Original: $f(x,y)$



Degrada: $g(x,y)$

2.5.2.3. Desenfoque bidimensional

- Es una forma más severa y aproxima el desenfoque uniforme.
- Muy utilizado en simulaciones.

$$h(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{L^2}, & \text{si } -\frac{L}{2} \leq x, y \leq \frac{L}{2} \\ 0, & \text{demás valores} \end{cases}$$

Original: $f(x,y)$



Degrada: $g(x,y)$



2.5.3. Métodos de restauración

2.5.3.1. Filtro inverso

2.5.3.2. Filtro de Wiener

2.5.3. Métodos de restauración

¿Qué es la restauración de la imagen?

- Estimación de la imagen original dada una versión distorsionada de la misma
- Es la eliminación o reducción de la degradación existente en una imagen:
 - difuminado originado por problemas de enfoque, movimiento o perturbaciones atmosféricas
 - contaminación por ruido
 - patrones de interferencia superpuestos producidos por un sistema mecánico
 - distorsiones geométricas o no linealidades debidas a los sensores

2.5.3. Métodos de restauración

¿Cuándo interesa restaurar?

- la captación de la imagen no puede repetirse
- el coste de una nueva captación es alto
- hay disponibilidad de gran cantidad de material deteriorado de interés
- existe un procedimiento (semi-)automático

La restauración:

- es un tarea difícil: activo campo de investigación
- es una tarea muy artesanal:
 - Cada caso es distinto
 - Se requiere gran experiencia para identificar los síntomas de cada caso
- la información perdida no se puede recuperar
- muchas veces, no se puede saber si el resultado es correcto o no
- puede introducir artefactos que distorsionen la realidad

→ No existe una técnica infalible

2.5.3. Métodos de restauración

Realce vs Restauración

- **Objetivo común:** mejorar la calidad de la imagen. Es decir, acentuar determinadas características para un posterior análisis o con efectos de visualización.
- Subjetivo vs objetivo.
- Realce manipula la imagen para resaltar aspectos al observador.
- Restauración usa conocimiento a priori del fenómeno de degradación ⇒ modela la degradación y la invierte para recuperar la imagen.

5.4.4. Métodos de restauración

Técnicas clásicas de restauración

- **Deterministas:**

- Para imágenes con poco ruido y función de degradación perfectamente conocida.
- Con una transformación inversa a la degradación se obtiene la imagen original.

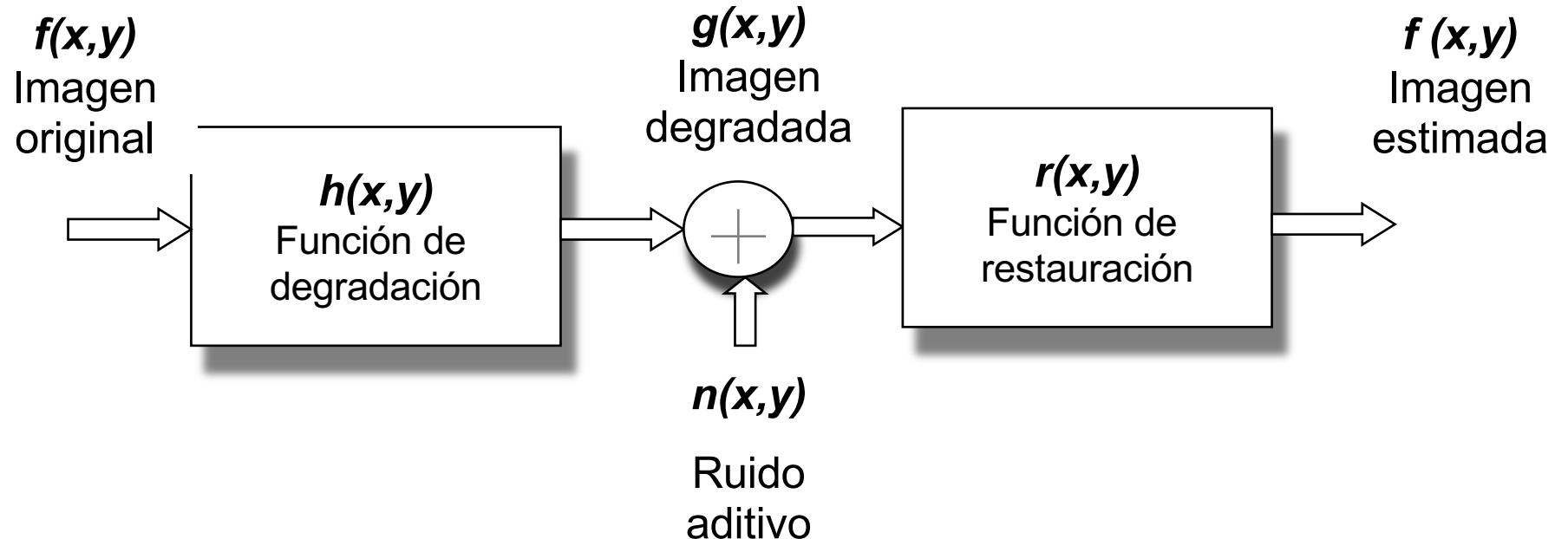
- **Estocásticas:**

- Se aplica algún criterio estocástico, p. e., mínimos cuadrados.
Necesitamos un modelo de ruido, o un modelo de imagen, o ambos.
- En algunos casos, es necesario estimar previamente el modelo de degradación.

- Mejor restauración cuanto más conocimiento tengamos sobre la función de degradación.

2.5.3. Métodos de restauración

Técnicas clásicas de restauración



En espacio (2D): $g(x, y) = h(x, y) * f(x, y) + n(x, y)$

$$\hat{f}(x, y) = r(x, y) * g(x, y)$$

En frecuencia:

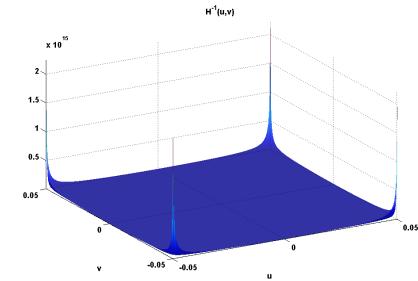
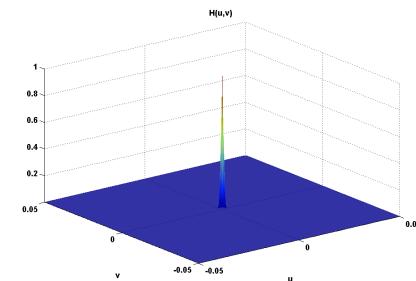
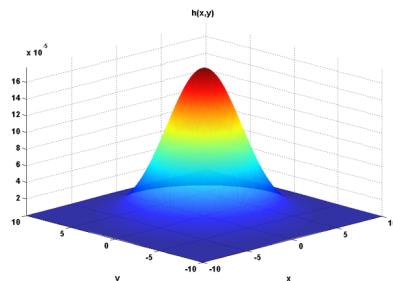
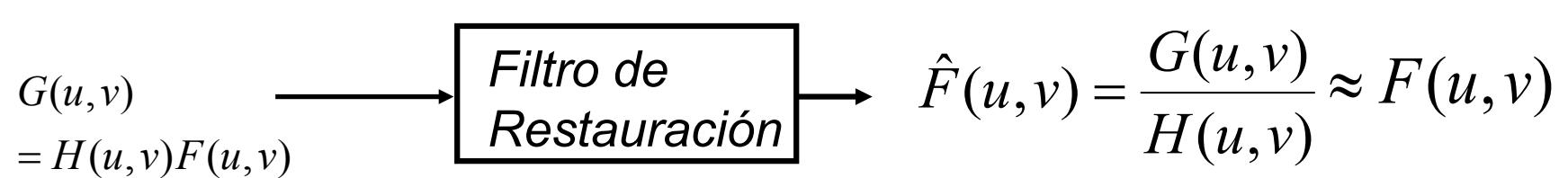
$$G(u, v) = F(u, v)H(u, v) + N(u, v)$$

$$\hat{F}(u, v) = R(u, v)G(u, v)$$

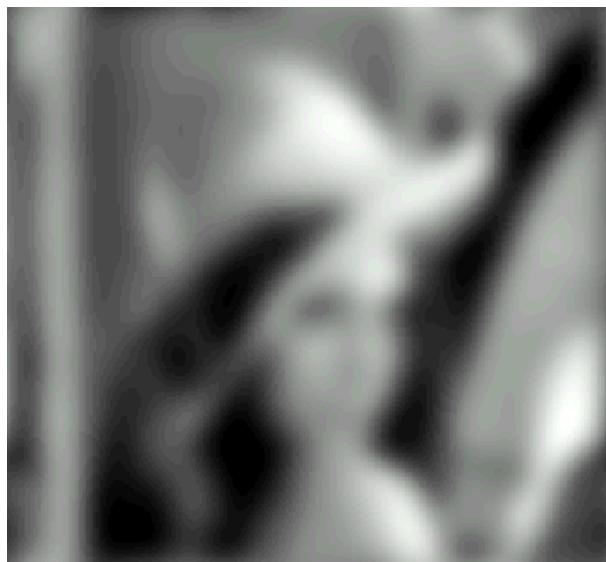
2.5.3.1. Filtro inverso

- Idea: aplicar a la imagen degradada, el proceso inverso al que produjo la degradación, para recuperar la imagen original
- En condiciones de ruido muy bajo o nulo podemos simplemente invertir la PSF, es decir:

$$R(u, v) = \frac{1}{H(u, v)}$$



2.5.3.1. Filtro inverso



Degradada: $g(x,y)$
sin ruido aditivo



Imagen restaurada con
Un filtro inverso



Universidad
Rey Juan Carlos

a b
c d

FIGURE 5.27

Restoring
Fig. 5.25(b) with
Eq. (5.7-1).

(a) Result of
using the full
filter. (b) Result
with H cut off
outside a radius of
40; (c) outside a
radius of 70; and
(d) outside a
radius of 85.

2.5.3.1. Filtro inverso



De Gonzales & Woods, 2007

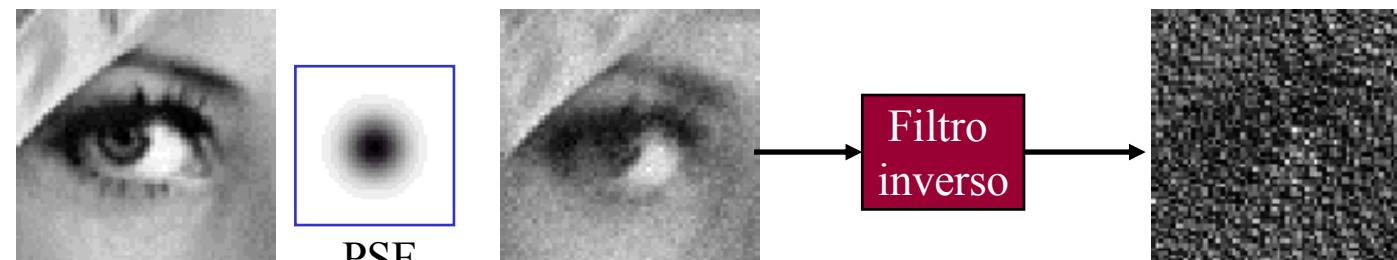
2.5.3.1. Filtro inverso

Para el caso de un sistema con ruido aditivo:

$$G(u,v) = H(u,v)F(u,v) + N(u,v)$$

$G(u,v)$
 $\xrightarrow{\quad}$
Filtro de restauración
 $\xrightarrow{\quad}$

$$\hat{F}(u,v) = F(u,v) + \frac{N(u,v)}{H(u,v)}$$



Problema: en aquellas frecuencias en las que $H(u,v) \approx 0$, ¡se amplifica el término de ruido!

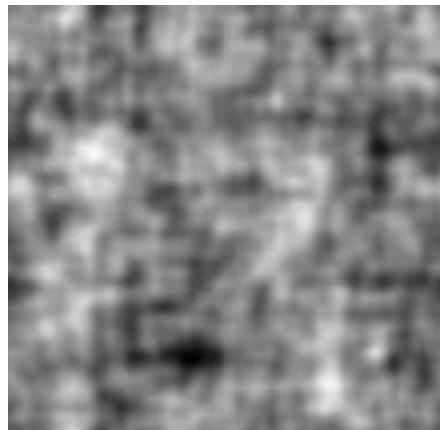
2.5.3.1. Filtro pseudoinverso

Versión estabilizada del filtro inverso:

$$R(u, v) = \begin{cases} \frac{1}{H(u, v)} & |H(u, v)| > \varepsilon \\ 0 & |H(u, v)| \leq \varepsilon \end{cases}$$



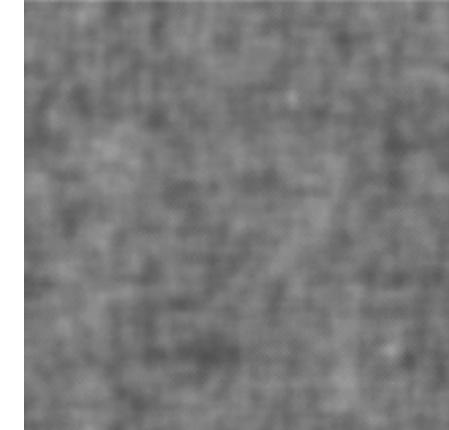
Degrada: $g(x, y)$



Restaurada con
filtro inverso



Restaurada con filtro
pseudo-inverso ($r=70$)



Restaurada con Filtro
pseudo-inverso ($r=85$)

2.5.3.2. Filtro de Wiener

- **Problema de los filtros inverso y pesudoinverso:** son muy sensibles al ruido
- Cuando tenemos ruido y distorsión de tipo difuminado
→ **filtro de Wiener**
- Se basa en minimizar el error cuadrático medio entre la imagen ideal y la restaurada:

$$\min E[\|e(x,y)\|^2] = \min E[\|f(x,y) - \hat{f}(x,y)\|^2]$$

- *Solución:* $R_{Wiener}(u,v) = \frac{S_f(u,v)H^*(u,v)}{S_f(u,v)|H(u,v)|^2 + S_N(u,v)}$

$$S_N(u,v) = |N(u,v)|^2 = \text{potencia de ruido}$$

$$S_f(u,v) = |F(u,v)|^2 = \text{potencia de la imagen}$$

2.5.3.2. Filtro de Wiener

$$R_{Wiener}(u, v) = \frac{S_f(u, v)H^*(u, v)}{S_f(u, v)|H(u, v)|^2 + S_N(u, v)}$$

- **Problema:** estimar el espectro de potencia del ruido y de la imagen ideal
 - si el ruido es incorrelado: S_N = varianza del ruido para todo (u, v)
 - si el ruido es moderado, aproximamos la densidad espectral de la imagen original por la de la imagen real.



Universidad
Rey Juan Carlos

Filtro de Wiener
vs
Filtro inverso

2.5.3.2. Filtro de Wiener



Original:
 $f(x,y)$



Degrada:
 $g(x,y)$



Restaurada
con
filtro inverso



Restaurada
con
Filtro de
Wiener

2.5.3.2. Filtro de Wiener

Filtro de Wiener vs Filtro inverso



a b c

FIGURE 5.28 Comparison of inverse and Wiener filtering. (a) Result of full inverse filtering of Fig. 5.25(b). (b) Radially limited inverse filter result. (c) Wiener filter result.

De Gonzales & Woods, 2007

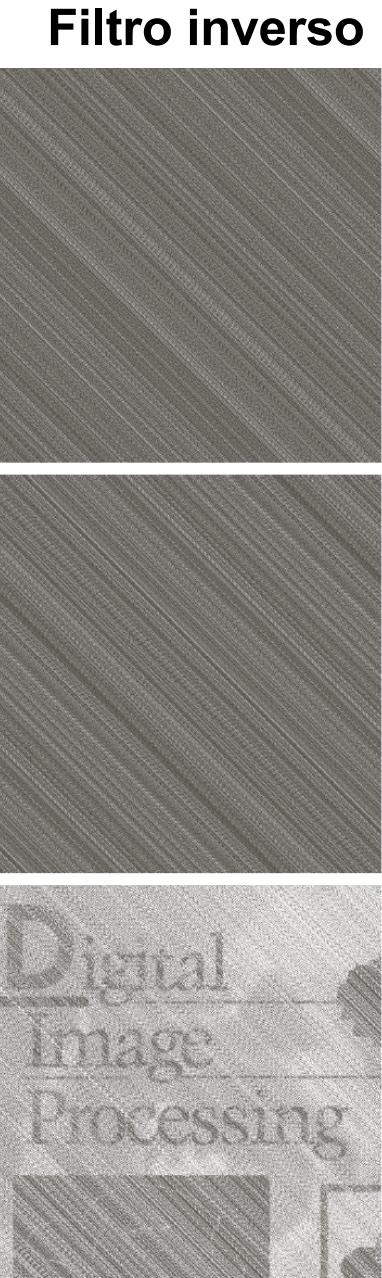
2.5.3.2. Filtro de Wiener

Consideraciones sobre el filtro de Wiener

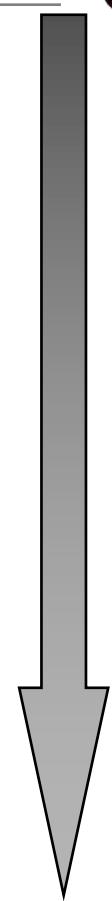
- Si las imágenes no tienen media nula, eliminar previamente la media y luego aplicar el filtro de Wiener. Posteriormente, a la imagen restaurada se le sumará su media.
- En general, la relación SNR es alta para bajas frecuencias espaciales, por lo que este filtro se comporta como un filtro paso bajo.
- La restauración con el filtro de Wiener empeora a medida que aumenta el nivel de ruido.



a
b
c
d
e
f
g
h
i



Más Ruido
(gaussiano)

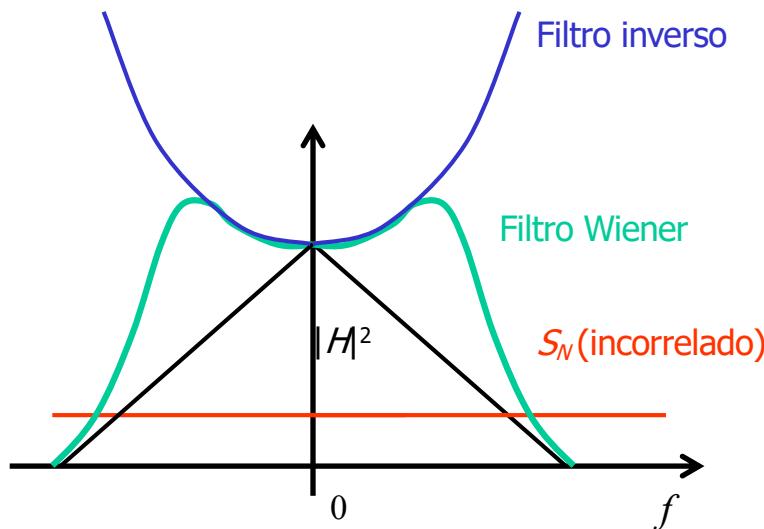


Menos ruido

FIGURE 5.29 (a) 8-bit image corrupted by motion blur and additive noise. (b) Result of inverse filtering. (c) Result of Wiener filtering. (d)–(f) Same sequence, but with noise variance one order of magnitude less. (g)–(i) Same sequence, but noise variance reduced by five orders of magnitude from (a). Note in (h) how the deblurred image is quite visible through a “curtain” of noise.

2.5.3.2. Filtro de Wiener

Interpretación de la respuesta en frecuencia del filtro de Wiener



El filtro de Wiener alcanza un compromiso entre:

- suavizado paso-bajo
- filtrado inverso (que corrige el efecto de h)

5.4.4.2. Filtro de Wiener

Limitaciones del filtro de Wiener

- No siempre se conocen S_f ni S_N

En la práctica, se supone $S_N/S_f = K$, de modo que

$$R_{Wiener}(u, v) = \frac{H^*(u, v)}{|H(u, v)|^2 + K}; \quad K = \frac{S_N(u, v)}{S_f(u, v)} = \frac{|N(u, v)|^2}{|F(u, v)|^2} = \frac{\text{potencia de ruido}}{\text{potencia de la imagen}}$$

y K se determina a partir de información a priori o mediante exploración.

- No siempre se conoce H
- La distorsión de la imagen puede ser no estacionaria
- La distorsión de la imagen puede ser no lineal
- El ruido puede depender del nivel de intensidad de la imagen (no aditivo)
- No tiene en cuenta aspectos perceptuales → presencia de artefactos