

Aufgabe 4.3: Rauschreduktion 1: Sobel-Filter

Wenden Sie den 3×3 Sobel-Filter auf das Bild an. Welchen Effekt bemerken Sie anhand Ihrer berechneten Werte? [7 Punkte]

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 9 & 8 \\ 6 & 4 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{mit Padding: } \begin{array}{ccccc} 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 0 & 0 & 1 & 8 \\ 8 & 1 & 9 & 8 & 8 \\ 8 & 6 & 4 & 3 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \end{array}$$

$$\text{Sobel: } S_x = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S_y = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Sobel X:

1. $\begin{bmatrix} 8 & 8 & 8 \\ 8 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow -8 + 8 - 2 \cdot 8 + 2 \cdot 0 - 8 + 9 = -15 \Rightarrow \begin{bmatrix} -15 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} 8 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 9 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow -8 + 8 - 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 - 1 + 8 = 9 \Rightarrow \begin{bmatrix} -15 & 9 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} 8 & 8 & 8 \\ 0 & 1 & 8 \\ 9 & 8 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow -8 + 8 - 2 \cdot 0 + 2 \cdot 8 - 9 + 8 = 15 \Rightarrow \begin{bmatrix} -15 & 9 & 15 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 9 \\ 8 & 6 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow -8 + 0 - 2 \cdot 8 + 2 \cdot 9 - 8 + 4 = -10 \Rightarrow \begin{bmatrix} -15 & 9 & 15 \\ -10 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$
5. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 9 & 8 \\ 6 & 4 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow 0 + 1 - 2 \cdot 1 + 2 \cdot 8 - 6 + 3 = 12 \Rightarrow \begin{bmatrix} -15 & 9 & 15 \\ -10 & 12 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$
6. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 8 \\ 9 & 8 & 8 \\ 4 & 3 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow 0 + 8 - 2 \cdot 9 + 2 \cdot 8 - 4 + 8 = 10 \Rightarrow \begin{bmatrix} -15 & 9 & 15 \\ -10 & 12 & 10 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$
7. $\begin{bmatrix} 8 & 1 & 9 \\ 8 & 6 & 4 \\ 8 & 8 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow -8 + 9 - 2 \cdot 8 + 2 \cdot 4 - 8 + 8 = -7 \Rightarrow \begin{bmatrix} -15 & 9 & 15 \\ -10 & 12 & 10 \\ -7 & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$

$$8. \begin{bmatrix} 1 & 9 & 8 \\ 6 & 4 & 3 \\ 8 & 8 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow -1 + 8 - 2 \cdot 6 + 2 \cdot 3 - 8 + 8 = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} -15 & 9 & 15 \\ -10 & 12 & 10 \\ -7 & 1 & \cdot \end{bmatrix}$$

$$9. \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 4 & 3 & 8 \\ 8 & 8 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow -9 + 8 - 2 \cdot 4 + 2 \cdot 8 - 8 + 8 = 7 \Rightarrow \begin{bmatrix} -15 & 9 & 15 \\ -10 & 12 & 10 \\ -7 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

Sobel Y:

$$1. \begin{bmatrix} 8 & 8 & 8 \\ 8 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow -8 - 2 \cdot 8 - 8 + 8 + 2 \cdot 1 + 9 = -13 \Rightarrow \begin{bmatrix} -13 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

$$2. \begin{bmatrix} 8 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 9 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow -8 - 2 \cdot 8 - 8 + 1 + 2 \cdot 9 + 8 = -5 \Rightarrow \begin{bmatrix} -13 & -5 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

$$3. \begin{bmatrix} 8 & 8 & 8 \\ 0 & 1 & 8 \\ 9 & 8 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow -8 - 2 \cdot 8 - 8 + 9 + 2 \cdot 8 + 8 = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} -13 & -5 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

$$4. \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 9 \\ 8 & 6 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow -8 - 2 \cdot 0 - 0 + 8 + 2 \cdot 6 + 4 = 16 \Rightarrow \begin{bmatrix} -13 & -5 & 1 \\ 16 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

$$5. \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 9 & 8 \\ 6 & 4 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow -0 - 2 \cdot 0 - 1 + 6 + 2 \cdot 4 + 3 = 16 \Rightarrow \begin{bmatrix} -13 & -5 & 1 \\ 16 & 16 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

$$6. \begin{bmatrix} 0 & 1 & 8 \\ 9 & 8 & 8 \\ 4 & 3 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow -0 - 2 \cdot 1 - 8 + 4 + 2 \cdot 3 + 8 = 8 \Rightarrow \begin{bmatrix} -13 & -5 & 1 \\ 16 & 16 & 8 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

$$7. \begin{bmatrix} 8 & 1 & 9 \\ 8 & 6 & 4 \\ 8 & 8 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow -8 - 2 \cdot 1 - 9 + 8 + 2 \cdot 8 + 8 = 13 \Rightarrow \begin{bmatrix} -13 & -5 & 1 \\ 16 & 16 & 8 \\ 13 & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

$$8. \begin{bmatrix} 1 & 9 & 8 \\ 6 & 4 & 3 \\ 8 & 8 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow -1 - 2 \cdot 9 - 8 + 8 + 2 \cdot 8 + 8 = 5 \Rightarrow \begin{bmatrix} -13 & -5 & 1 \\ 16 & 16 & 8 \\ 13 & 5 & \cdot \end{bmatrix}$$

$$9. \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 4 & 3 & 8 \\ 8 & 8 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow -9 - 2 \cdot 8 - 8 + 8 + 2 \cdot 8 + 8 = -1 \Rightarrow \begin{bmatrix} -13 & -5 & 1 \\ 16 & 16 & 8 \\ 13 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

Bei S_x erkennt man eine vertikale Kante. Bei S_y erkennt man eine horizontale Kante.

$$M = \sqrt{S_x^2 + S_y^2}$$

$$S_x^2 = \begin{bmatrix} (-15)^2 & (9)^2 & (15)^2 \\ (-10)^2 & (12)^2 & (10)^2 \\ (-7)^2 & (1)^2 & (7)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 225 & 81 & 225 \\ 100 & 144 & 100 \\ 49 & 1 & 49 \end{bmatrix}$$

$$S_y^2 = \begin{bmatrix} (-13)^2 & (9)^2 & (1)^2 \\ (16)^2 & (16)^2 & (8)^2 \\ (13)^2 & (5)^2 & (-1)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 169 & 25 & 1 \\ 256 & 256 & 64 \\ 169 & 25 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_x^2 + S_y^2 = \begin{bmatrix} 225 & 81 & 225 \\ 100 & 144 & 100 \\ 49 & 1 & 49 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 169 & 25 & 1 \\ 256 & 256 & 64 \\ 169 & 25 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 394 & 106 & 226 \\ 356 & 400 & 164 \\ 218 & 26 & 50 \end{bmatrix}$$

$$\sqrt{S_x^2 + S_y^2} = \sqrt{\begin{bmatrix} 394 & 106 & 226 \\ 356 & 400 & 164 \\ 218 & 26 & 50 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} \sqrt{394} & \sqrt{106} & \sqrt{226} \\ \sqrt{356} & \sqrt{400} & \sqrt{164} \\ \sqrt{218} & \sqrt{26} & \sqrt{50} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 20 & 10 & 15 \\ 19 & 20 & 13 \\ 15 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Die Werte befinden sich nicht innerhalb des gegebenen Bereichs $[0, 15]$:

$$\begin{bmatrix} 20 & 10 & 15 \\ 19 & 20 & 13 \\ 15 & 5 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 15 & 10 & 15 \\ 15 & 15 & 13 \\ 15 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

In der resultierenden Bildmatrix erkennt man eine “schräge” Kante (in blau markiert).