Teilnahme auf ALMA registrieren

BESPRECHUNG ÜBUNG 6

Eberhard Karls Universität Tübingen

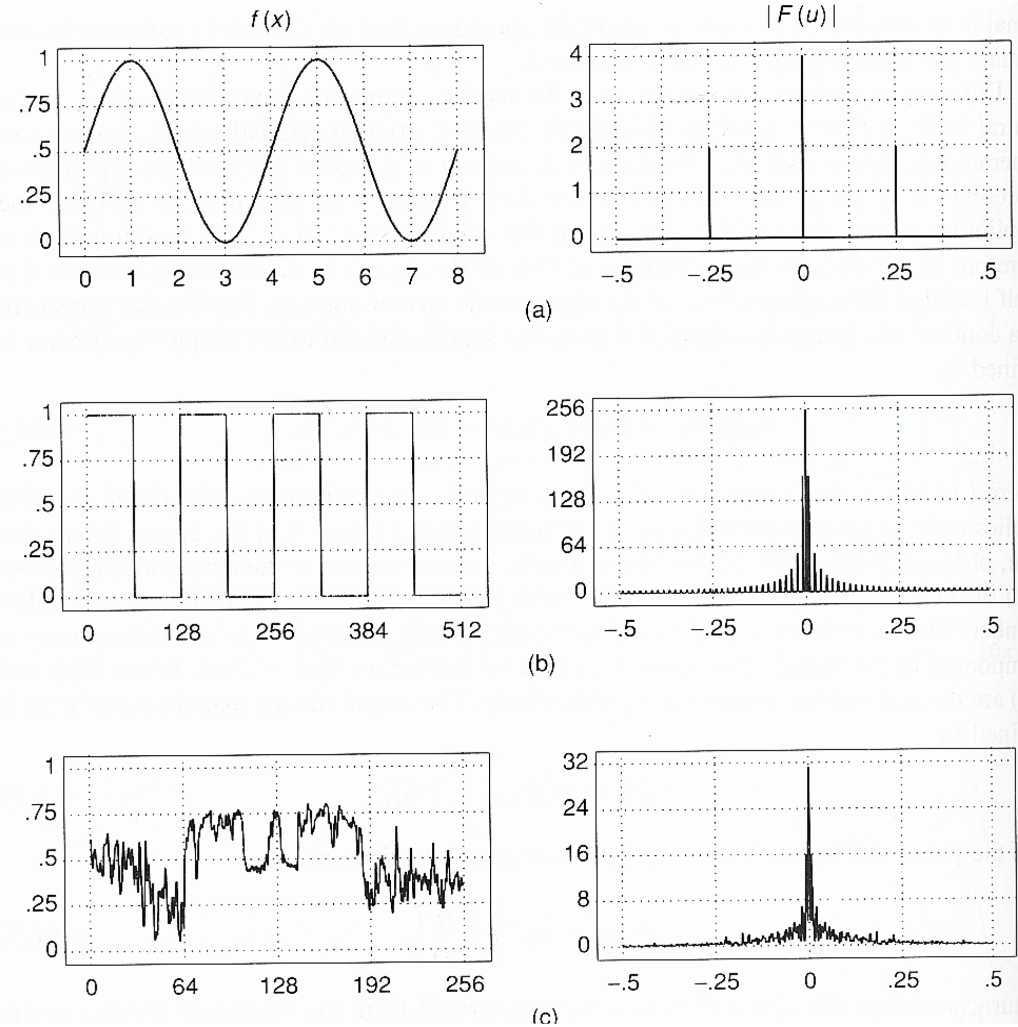
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät

Signalverarbeitung

Idee der Fourier-Transformation

→ Jede Funktion lässt sich als gewichtete Summe von periodischen Grundfunktionen mit verschiedener Frequenz beschreiben

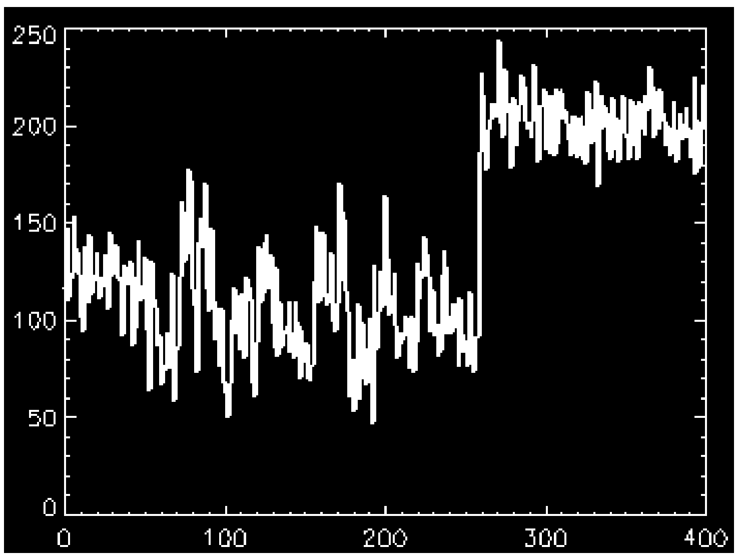
Interaktives Beispiel:
http://www.falstad.com/fourier/



(a)
(b)
(c)

Idee der Fourier-Transformation

- Wir betrachten Bilder also nun als Ergebnis von Helligkeitsfunktionen, die wir dann als gewichtete Sinus- und Cosinus-Funktionen beschreiben



Diskrete Fourier-Transformation (DFT)

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(2\pi n x) + b_n \sin(2\pi n x))$$

Wir machen und zunutze, dass folgendes gilt:

$$e^{i2\pi\omega x} = \cos(2\pi\omega x) + i\sin(2\pi\omega x)$$

Und erhalten so die Fourier-Koeffizienten aus den N Messwerten y_n:

$$a_k = \sum_{n=0}^{N-1} y_n \cdot e^{-i2\pi\frac{nk}{N}} \qquad \text{mit } a_k \in \mathbb{C}$$

$\Rightarrow$ Je größer k wird, desto höher die Frequenz des Koeffizienten

Inverse Fourier-Transformation (IDFT)

Wir summieren die Werte aller periodischen Funktionen auf, um wieder unsere Funktion zu erhalten:

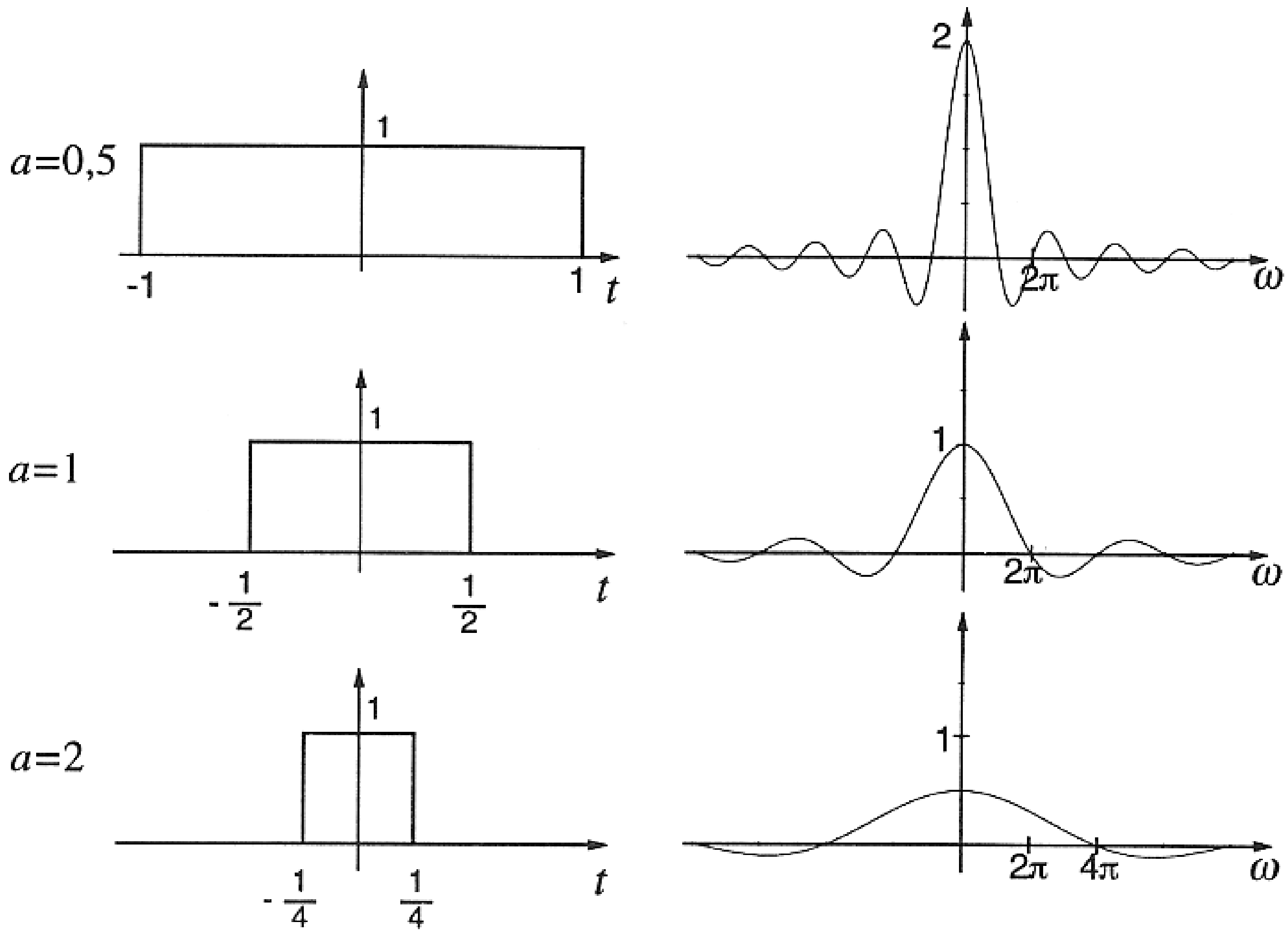
$$y_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} a_k \cdot e^{i2\pi\frac{nk}{N}} \qquad \text{mit } y_n \in \mathbb{R}$$

Wenn wir genügend Koeffizienten hatten, erhalten wir so die ursprünglichen Funktionswerte.

<u>Allgemein gilt aber:</u> Die DFT ist **nicht verlustfrei**, da viele „natürliche“ Signale nur mit unendlich vielen Koeffizienten genau dargestellt werden können.

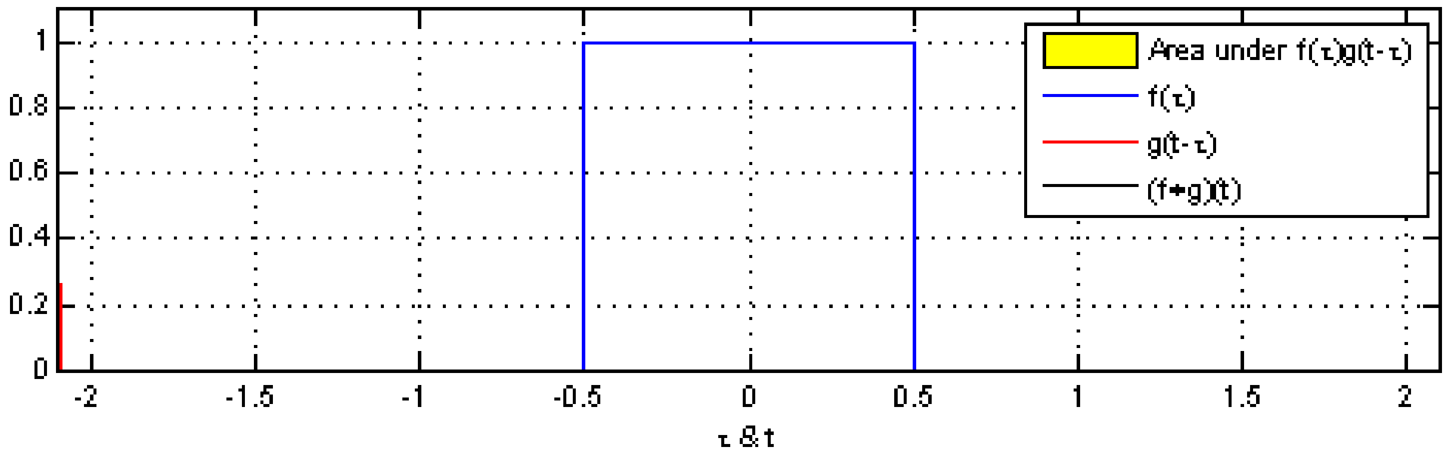
Signalbereich vs. Frequenzebene

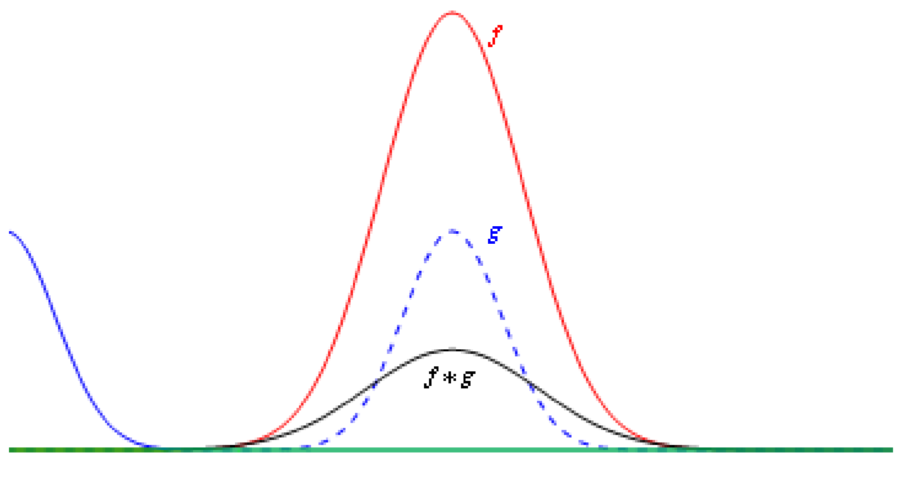
Transformationsverhalten:



Signalbereich vs. Frequenzebene

Faltung im Signalbereich = **Multiplikation** in der Frequenzebene



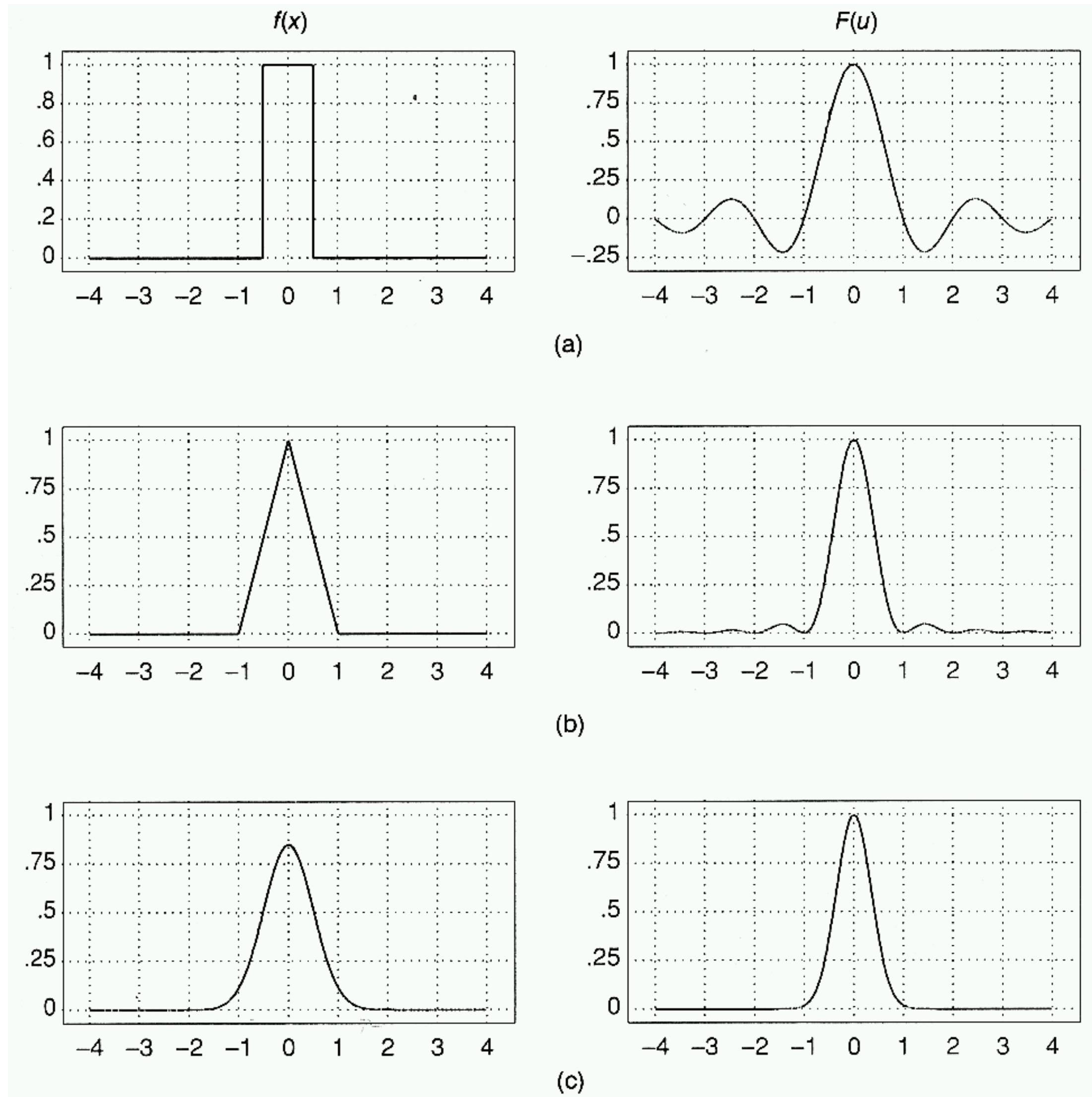


Signalbereich vs. Frequenzebene

$$\text{Box} \leftrightarrow \operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(x\pi)}{x\pi}$$

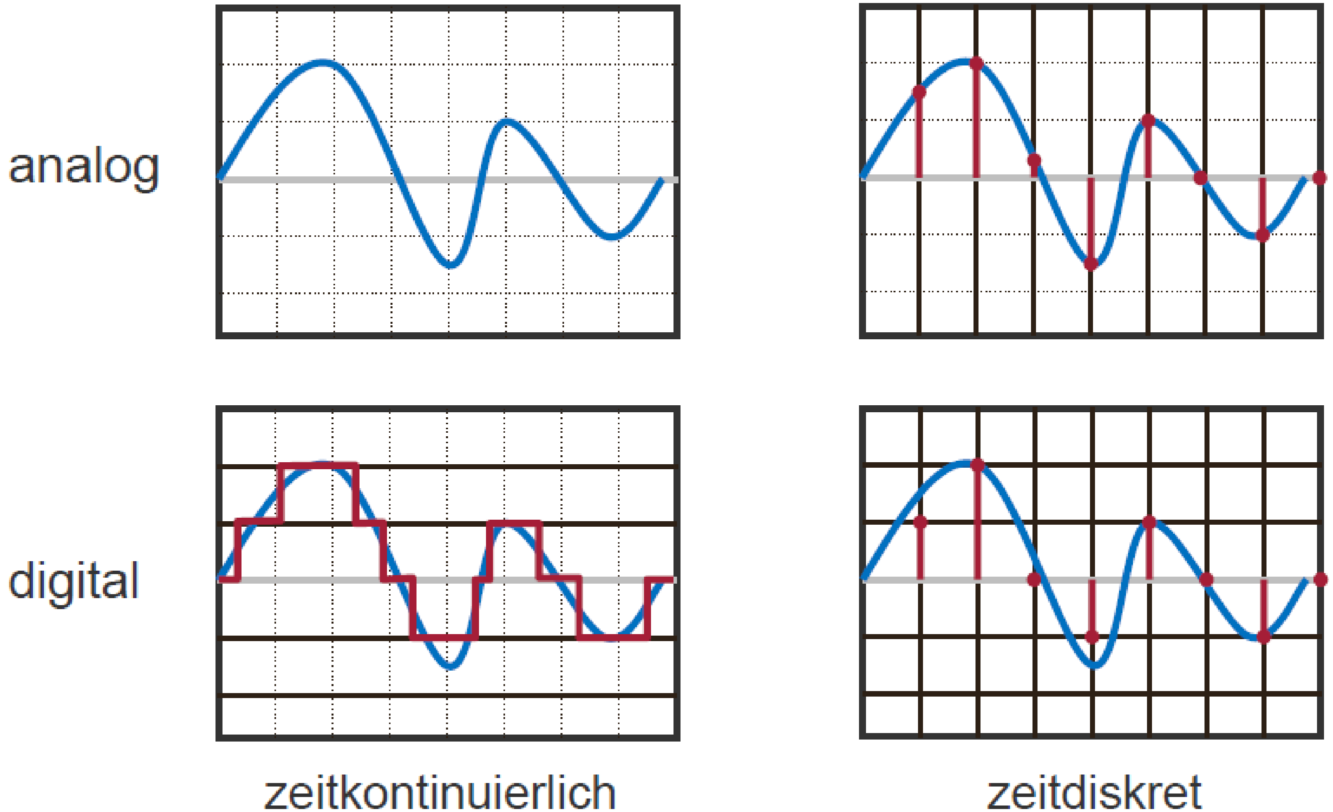
$$\text{Box} * \text{Box} \leftrightarrow \operatorname{sinc}(x)^2$$

$$\text{Gauß} \leftrightarrow \text{Gauß}$$



Abtastung

Wir wollen analoge zeitkontinuierliche Signale in digitale zeitdiskrete Signale überführen:



Abtastungsfehler

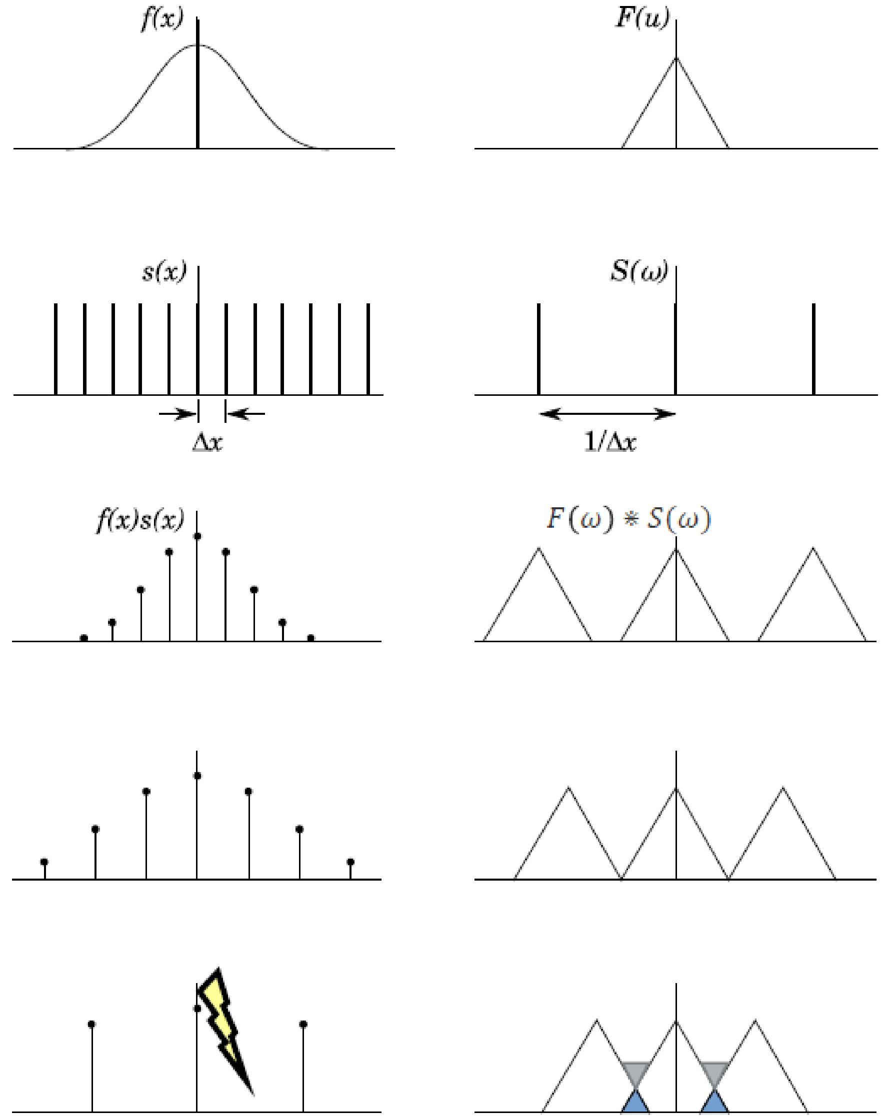
Betrachtetes Signal:

Abtastimpulse:

Ergebnis einer hohen Abtastfrequenz:

Ergebnis der Nyquist Abtastfrequenz:

Zu niedrige Abtastfrequenz:



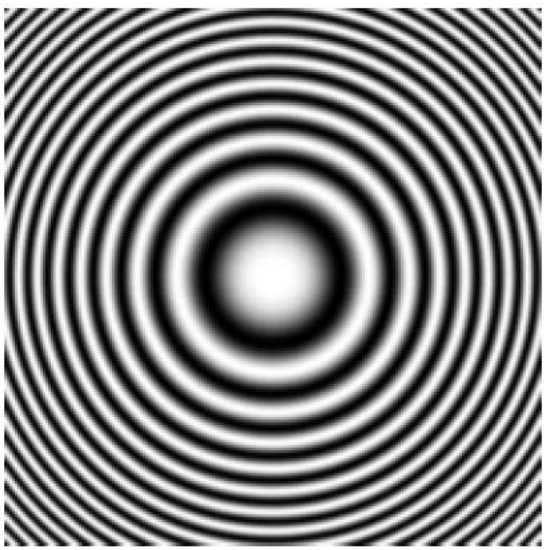
EBERHARD KARLS UNIVERSITÄT TÜBINGEN

Nyquist Abtasttheorem

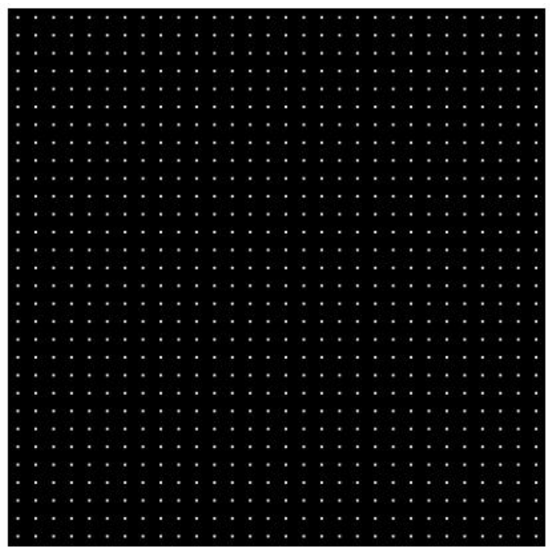
Die Rekonstruktion des Signals ist möglich, wenn:

Abtastrate $f_{sample} > 2 \cdot f_{max}$ des Signals

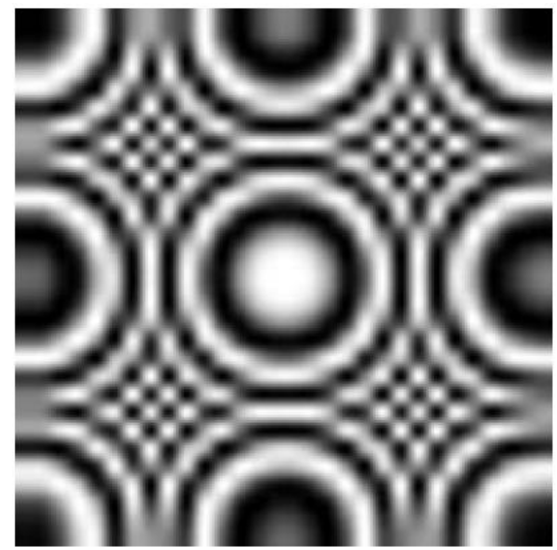
Niedrigere Abtastraten führen zu **Aliasing**:



Original



Abtastpunkte



Ergebnis