



Grundlagen der Multimediaetechnik

Bildverbesserung

12.11.2021, Prof. Dr. Enkelejda Kasneci



Termine und Themen

22.10.2021	Einführung
29.10.2021	Menschliche Wahrnehmung – visuell, akustisch, haptisch, ...
05.11.2021	Informationstheorie, Textcodierung und -komprimierung
12.11.2021	Bildverbesserung
19.11.2021	Bildanalyse
26.11.2021	Grundlagen der Signalverarbeitung
03.12.2021	Bildkomprimierung
10.12.2021	Videokomprimierung
17.12.2022	Audiokomprimierung
14.01.2022	Videoanalyse
21.01.2022	Dynamic Time Warping
28.01.2022	Gestenanalyse
04.02.2022	Tiefendatengenerierung
11.02.2022	FAQ mit den Tutoren
15.02.2022	Klausur (noch nicht bestätigt)



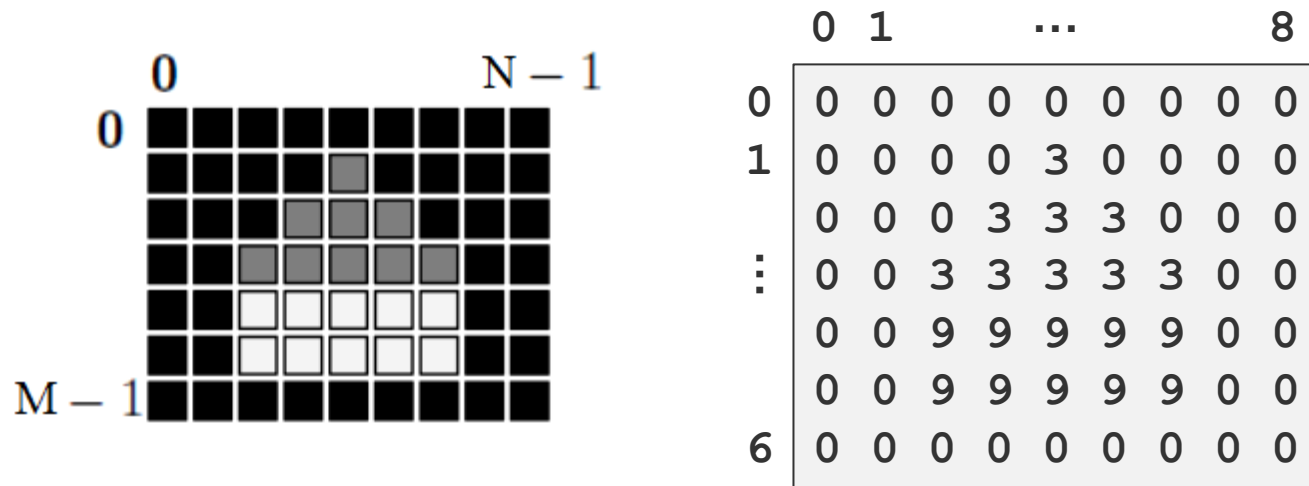
Anwendungen

- Zeichenerkennung
- Qualitätsprüfung in der industriellen Produktion
- Medizinische Bildanalyse
- Luftbildauswertung
- Fahrzeugsteuerung
- Gesichtserkennung
- Robotik
- Inhaltsbasierte Bildsuche im Internet



Bild

- Unter einem **Bild** $B = \{f(i, j) \text{ mit } 0 \leq i < M, 0 \leq j < N\}$ verstehen wir eine **Matrix von Bildpunkten** (auch **Pixel** von „**picture element**“), zunächst Beschränkung auf Intensitätswerte (Grauwerte)

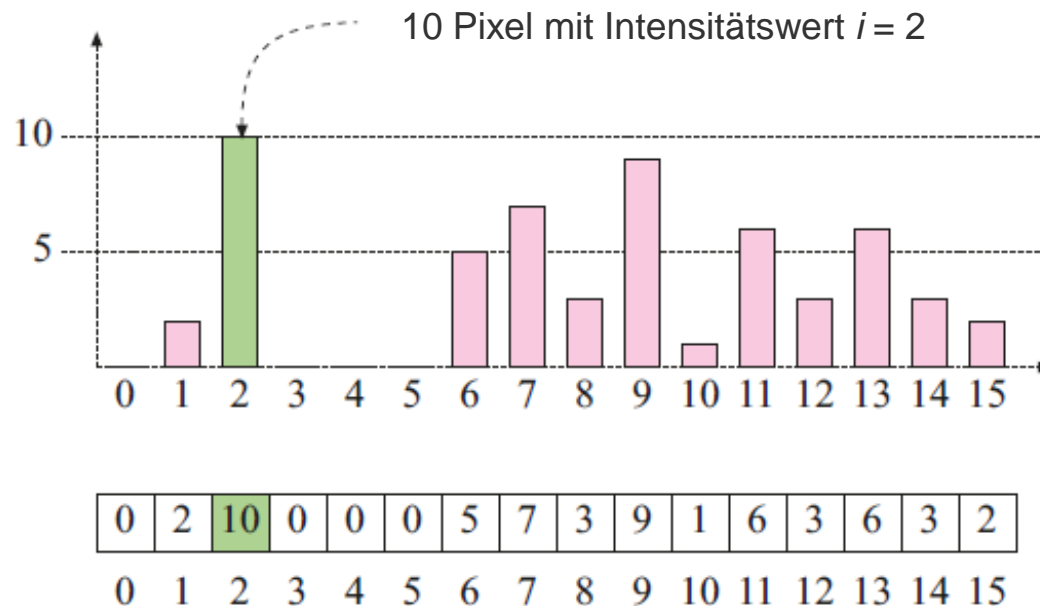


- Eingabebild:** $B_E = \{f_E(i, j) \text{ mit } 0 \leq i < M, 0 \leq j < N\}$
- Eingabebildfolge:** $B_E(p) = \{f_E(i, j, p) \text{ mit } 1 \leq p \leq P\}$, P : Anzahl Bilder
- Ausgabebild:** $B_A = \{f_A(i, j) \text{ mit } 0 \leq i < M, 0 \leq j < N\}$



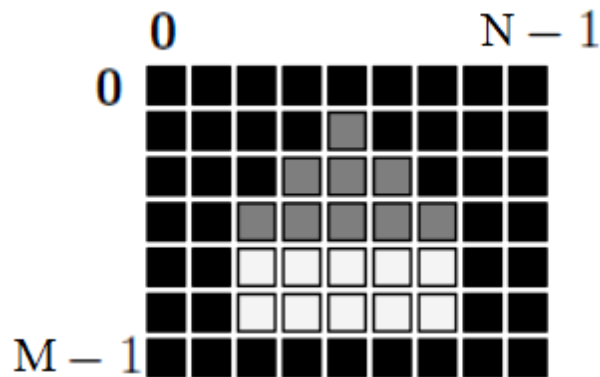
Histogramm

- Ein **Histogramm** beschreibt die **Häufigkeitsverteilung** $H(w)$ **einzelner Intensitätswerte** w (z.B. Grauwerte) eines Bildes
 $H(w) = |\{(i, j) : f(i, j) = w\}| : w \in [0, K - 1]$ (*Intensitätswerte*),
 z.B. $K = 256$

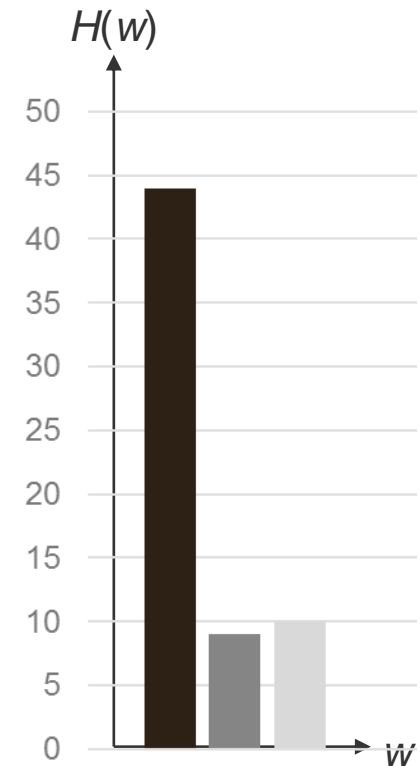




Histogramm (Beispiel)

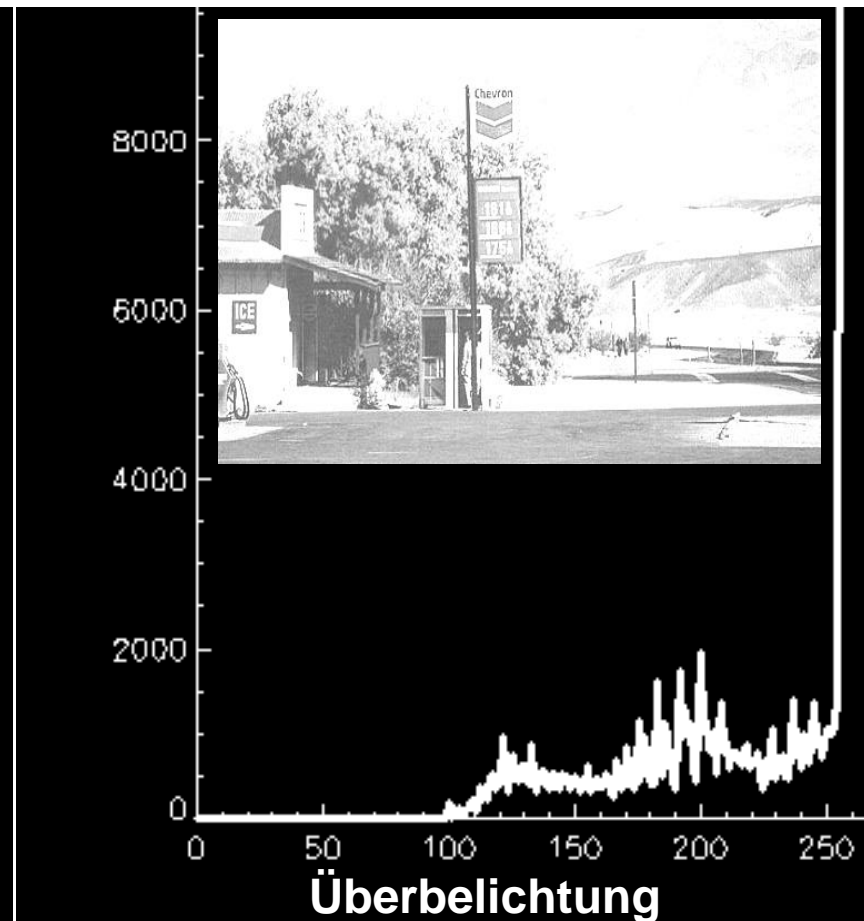
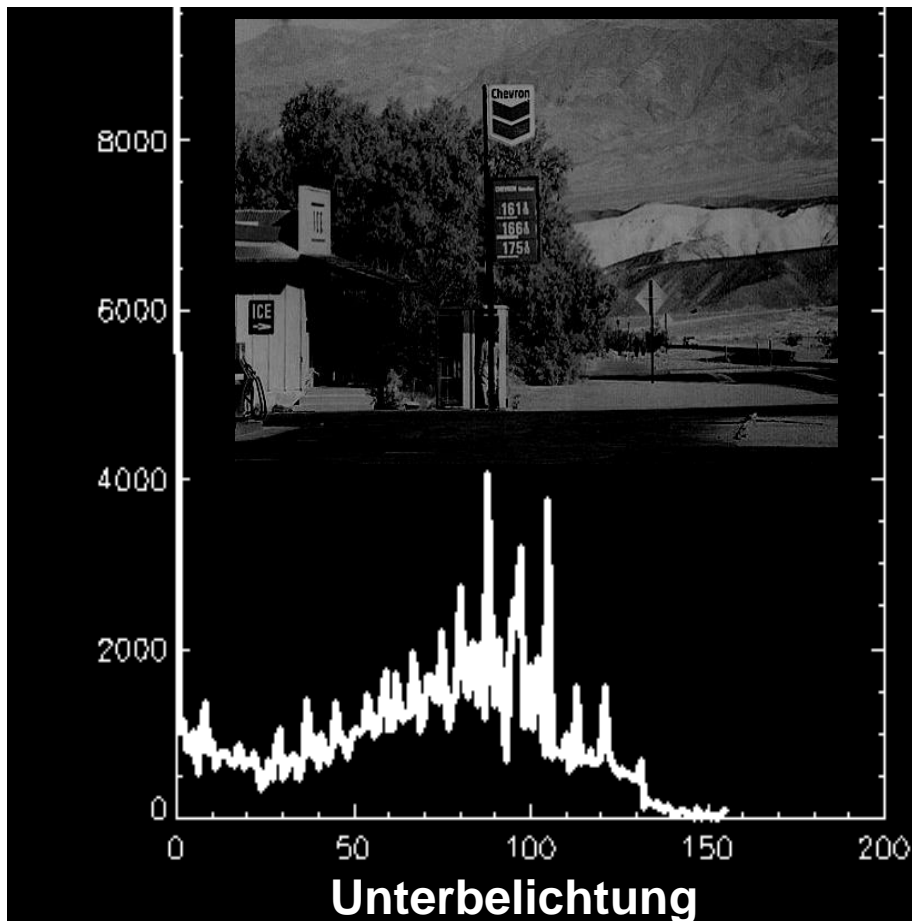


	0	1	...				8		
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	3	0	0	0	0
	0	0	0	3	3	3	0	0	0
⋮	0	0	3	3	3	3	3	0	0
	0	0	9	9	9	9	9	0	0
	0	0	9	9	9	9	9	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0



Interpretation von Histogrammen – Belichtung –

- Ungenutzte Intensitätsbereiche „am Anfang“ oder „am Ende“ im Histogramm

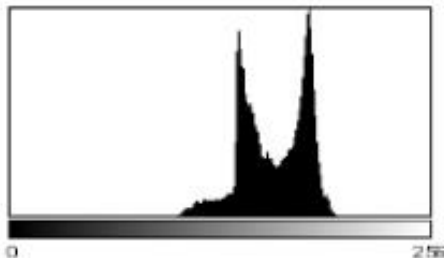


Interpretation von Histogrammen

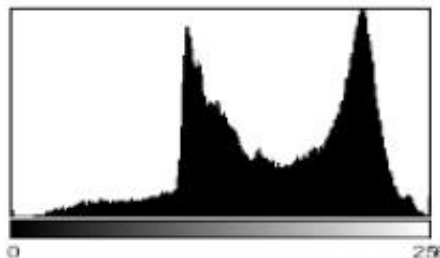
– Kontrast –

- **Kontrast:** Abstand zwischen minimal und maximal vorkommenden Intensitätswert

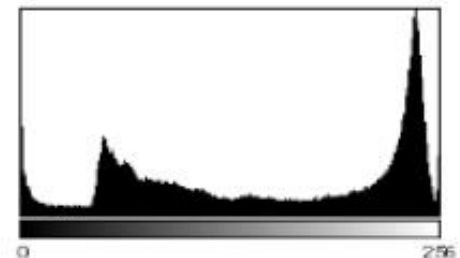
Geringer Kontrast



Normaler Kontrast



Hoher Kontrast

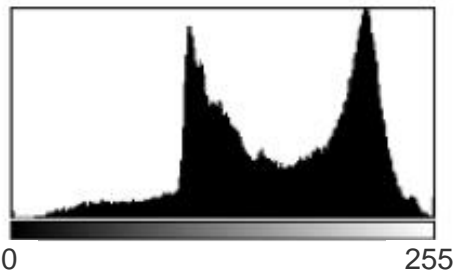


Interpretation von Histogrammen

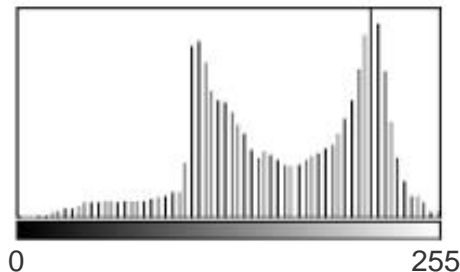
– Dynamik –

- **Dynamik:** Anzahl unterschiedlicher Pixelwerte

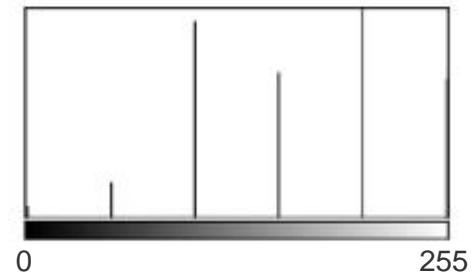
**Hohe Dynamik
maximaler Kontrast**



**Geringe Dynamik,
maximaler Kontrast**



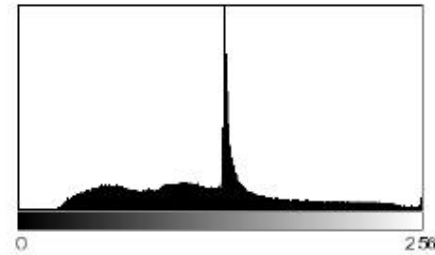
**Sehr geringe Dynamik,
maximaler Kontrast**



Histogrammberechnung bei Farbbildern (Trennung der Farbkanäle)



(a)



(b) h_{Lum}



(c) R



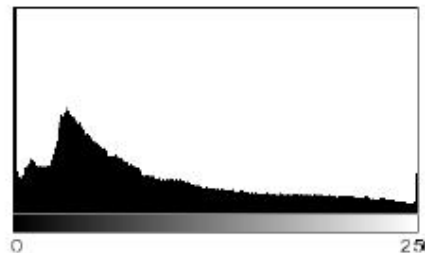
(d) G



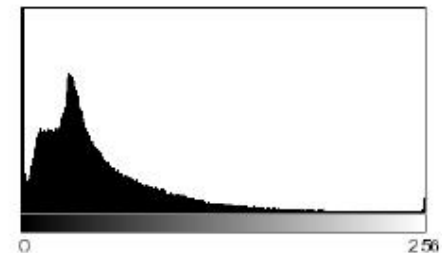
(e) B



(f) h_R



(g) h_G



(h) h_B



```
public void run (ImageProcessor ip) {
    int[] H = new int[256]; // histogram array
    int w = ip.getWidth();
    int h = ip.getHeight();
    for (int v = 0; v < h; v++) {
        for (int u = 0; u < w; u++) {
            int i = ip.getPixel(u,v);
            H[i] = H[i] + 1;
        }
    }
    ... // histogram H[] kann nun verwendet werden
}
```



Bildverbesserung

- Grauwerttransformation (Punktoperation)
- Histogrammausgleich
- Nachbarschaftsoperatoren
- Bildglättung
- Bildverschärfung
- Korrektur von uneinheitlichem Hintergrund



Punktoperation

- Ein Bildpunkt $f_A(i, j)$ des Ausgabebildes ist nur **eine Funktion eines einzelnen Bildpunktes** des Eingabebildes $f_E(i_1, j_1)$ bzw. der Eingabebildfolge $f_E(i_1, j_1, p)$

$\forall i, i_1 \in \{0, \dots, M - 1\}$ und $j, j_1 \in \{0, \dots, N - 1\}$:

$$f_A(i, j) = g_{punkt}(f_E(i_1, j_1, p) : p \in \{1, \dots, P\})$$

- Neuer Farb-/Grauwert allein vom bisherigen eigenen Farb-/ Grauwert abhängig
- **Beispiele:**
 - Kontrast und Helligkeit
 - Farbtransformation
 - Hintergrundsubtraktion
 - Bildmaskierungen



Lokale Operation

- Ein Bildpunkt $f_A(i, j)$ des Ausgabebildes ist eine **Funktion der Bildpunkte in einer wohldefinierten lokalen Umgebung U** um den entsprechenden Punkt (i, j) des Eingabebildes bzw. der Eingabebildfolge.

$$f_A(i, j) = g_{\text{lokal}}(\{f_E(i, j, p) : (i, j) \in U; p \in \{1, \dots, P\}\})$$

- Die lokale Umgebung wird meist symmetrisch zum betrachteten Punkt, oft quadratisch gewählt.
- **Beispiele:**
 - Faltungsoperationen mit Faltungskern
 - Mittelwertfilter
 - Kantendetektion
 - Eckpunktdetektion
 - Reihenfolgeoperationen



Globale Operation

- Ein Bildpunkt $f_A(i, j)$ des Ausgabebildes ist **eine Funktion aller Punkte des Eingabebildes** bzw. der Eingabebildfolge:

$$f_A(i, j) = g_{global}(\{f_E(i, j, p) : i \in \{0, \dots, M - 1\}; j \in \{0, \dots, N - 1\}; p \in \{1, \dots, P\}\})$$

- **Beispiele:**
 - Fouriertransformation
 - Diskrete Kosinustransformation(→ späterer Vorlesungsblock)



Pixelbasierte Bildverbesserung (Punktoperation)

- **Abbildung der Grau-/Farbwerte unabhängig von ihrem Ort oder ihrer Zuordnung**

- innerhalb der Grau- bzw. Farbwerte:

$$g_{neu} = f(g) \text{ oder } [r_{neu}, g_{neu}, b_{neu}] = [f(r), f(g), f(b)]$$

- von Grauwerten in Farbwerte (Falschfarbdarstellung):

$$[r_{neu}, g_{neu}, b_{neu}] = [f_1(g), f_2(g), f_3(g)]$$

- Qualitätsmerkmal („Figure of Merit“):

- globaler/lokaler Kontrast, Entropie

- Methoden

- Monotone Abbildung der Grauwerte
- Nicht monotone Grauwertabbildung
- Falschfarbdarstellung

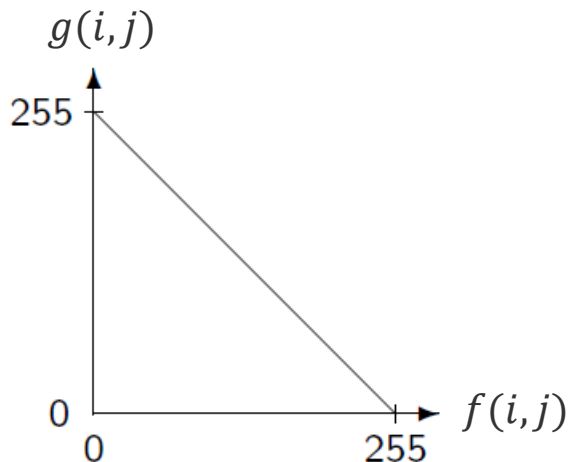


Grauwerttransformationen

- Ein **homogener Punktoperator** $g(i, j) = op(f(i, j))$ definiert eine **Grauwerttransformation**.
- Der Operator op hat Intervall $[0, 255]$ als Definitions- und Wertebereich (deshalb homogen) und ist häufig monoton.

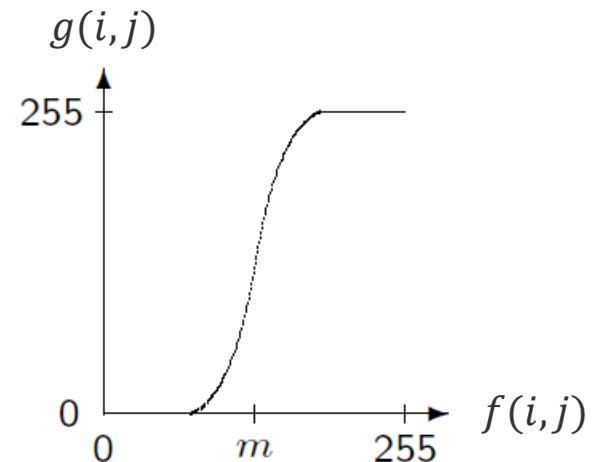
Beispiel:

- Negativ-Bild $g(i, j) = 255 - f(i, j)$



Beispiel:

- Kontraststreckung (um Grauwert m)



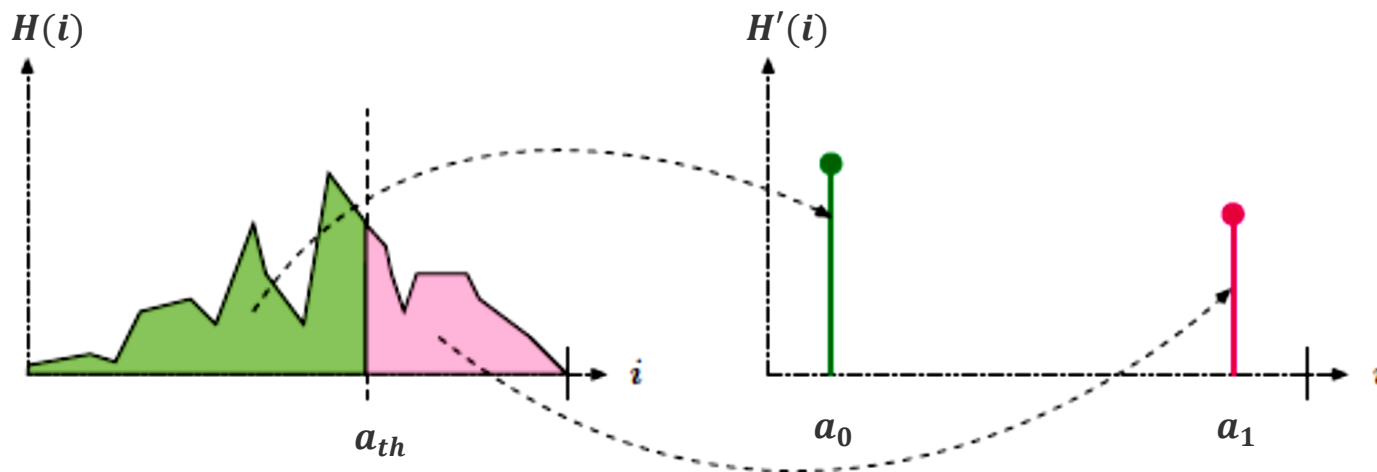


Schwellwertverfahren

- **Schwellwertoperation** ist eine spezielle Form der Quantisierung, bei der die **Bildwerte abhängig von** einen vorgegebenen **Schwellwert** in **zwei Klassen** getrennt werden

$$f_{th}(a) = \begin{cases} a_0 & \text{für } a < a_{th} \\ a_1 & \text{für } a \geq a_{th} \end{cases},$$

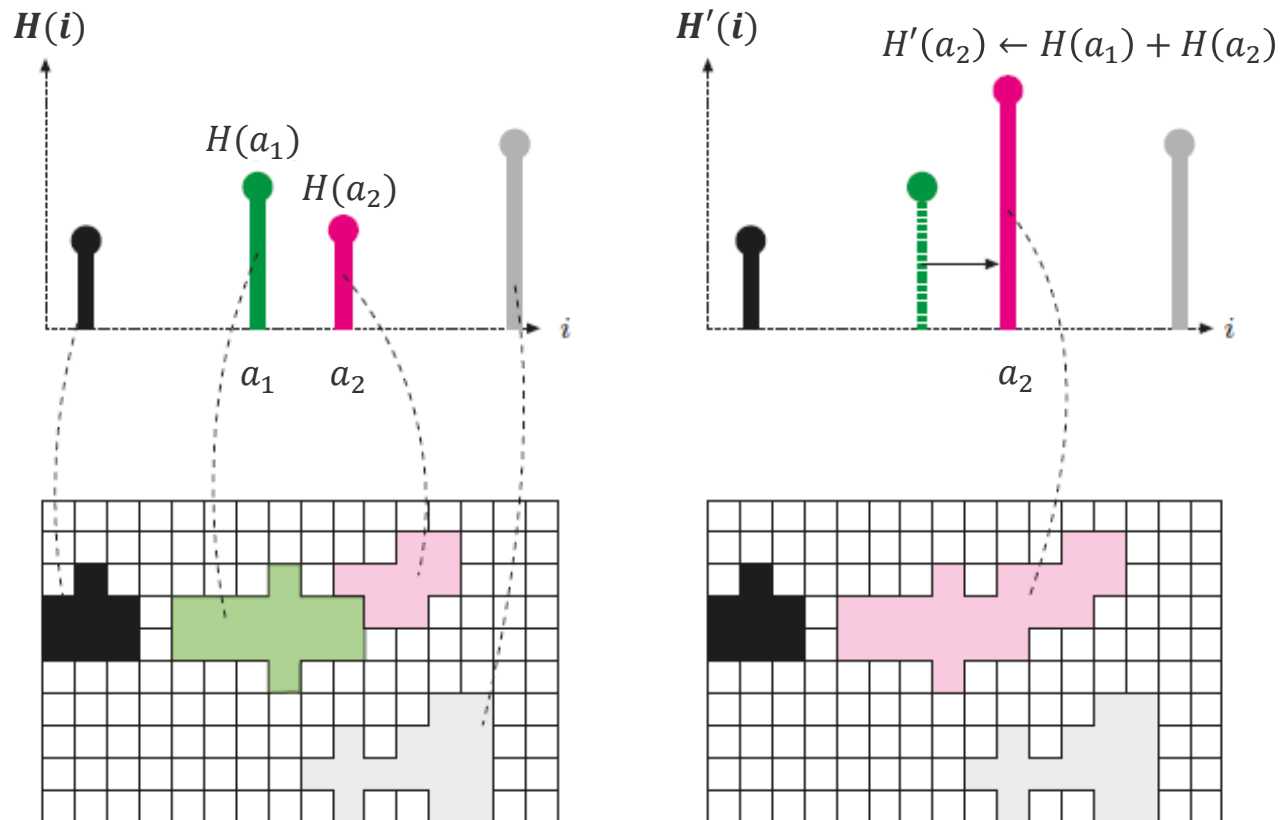
d.h. Alle Pixel werden in dieser Punktoperation einem von zwei fixen Intensitätswerten a_0 oder a_1 zugeordnet.





Auswirkungen von Punktoperationen

- Ungünstige Wahl einer Punktoperationen kann zu einer **untrennbaren Überlappung/Vereinigung** von Objekten führen



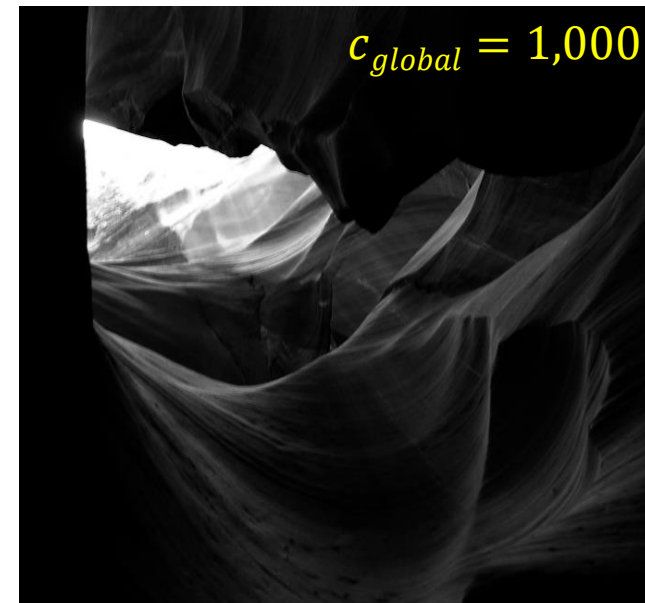


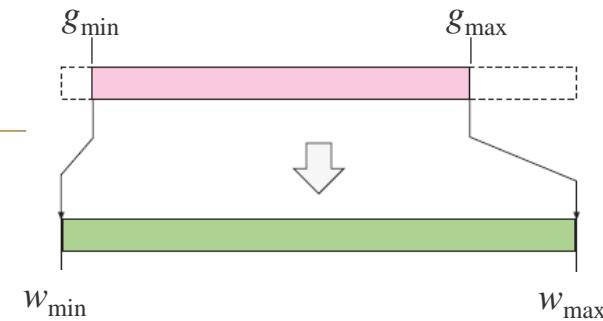
Globaler Kontrast

- **Globaler Kontrast:** Größter Grauwertunterschied im Bild

$$c_{global}(f) = \frac{\left[\max_{i,j}(f(i,j)) - \min_{i,j}(f(i,j)) \right]}{g_{range}}$$

mit g_{range} : Grauwertbereich, z.B.: [0, 255] bei 8 Bit

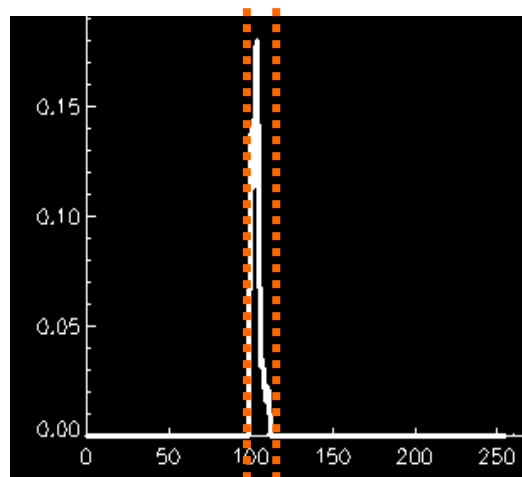




Maximierung des globalen Kontrasts

- Kontrastumfang $g_{max} - g_{min}$ im Verhältnis zum maximalen Wertebereich $w_{min} \dots w_{max}$ (z.B. 0 ... 255) ist Skalierungsfaktor.
- Transferfunktion

$$g'(g) = (g - g_{min}) \cdot \frac{w_{max} - w_{min}}{g_{max} - g_{min}}$$



g_{min} g_{max}

←
Histogramm



$c_{global} = 0,083$



Maximierung des globalen Kontrasts

- Grauwertspreizung:

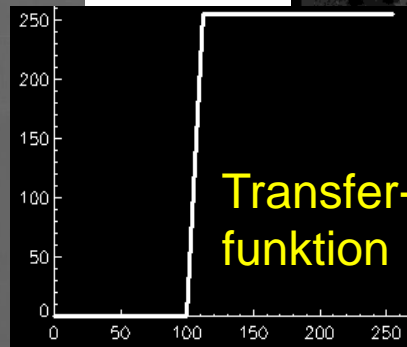
$$g'(g) = (g - g_{\min}) \cdot \frac{w_{\max} - w_{\min}}{g_{\max} - g_{\min}}$$

$$g_{\min} = 100, g_{\max} = 112$$

$$w_{\min} = 0, w_{\max} = 255$$

$$g'(g) = (g - 100) \cdot \frac{255}{12}$$

$c_{\text{global}} = 0,083$

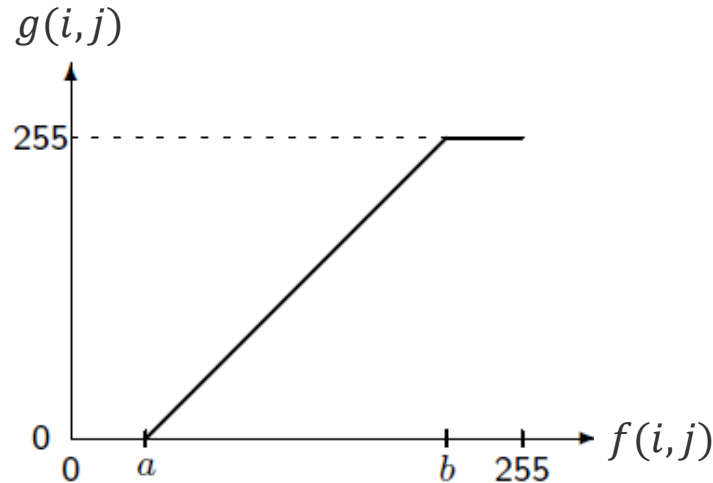


$c_{\text{global}} = 1,000$





- **Anwendung:** Dehnung der Grauwerte zur Kontrastverstärkung

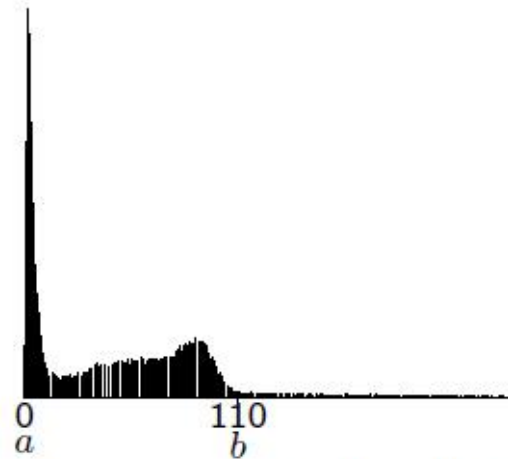
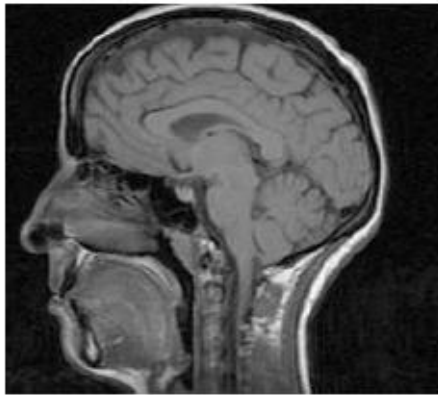


$$g(i, j) = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } f(i, j) < a \\ \frac{f(i, j) - a}{b - a} \cdot 255 & , \text{ falls } a \leq f(i, j) \leq b \\ 255 & , \text{ falls } f(i, j) > b \end{cases}$$

- Anwendbar, falls $f(i, j)$ nur Grauwerte aus $[a, b]$ belegt oder falls Bildinhalte aus dem Teilbereich $[a, b]$ hervorgehoben werden sollen

Stückweise lineare Transformation

- **Beispiel:** Parameter a und b werden durch Betrachtung des Histogramms bestimmt



- Kontrastverstärkung durch Dehnung der Grauwerte: $[0,110] \rightarrow [0,255]$





Lokaler Kontrast

- **Globaler Kontrast:** Größter Grauwertunterschied im Bild

$$c_{global}(f) = [\max_{i,j}(f(i,j)) - \min_{i,j}(f(i,j))] / g_{range}$$

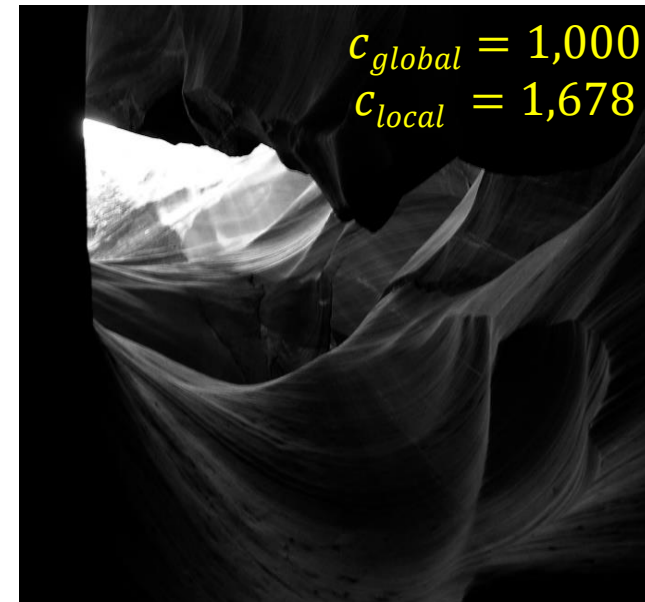
mit g_{range} : Grauwertbereich (zur Erinnerung)

- **Lokaler Kontrast:** z.B. durchschnittlicher Grauwertunterschied zwischen benachbarten Pixeln

$$c_{local}(f) = 1/MN \sum_i \sum_j |f(i,j) - f_{nb}(i,j)|$$

mit $f_{nb}(i,j)$: durchschnittlicher Grauwert in der Umgebung von (i,j)

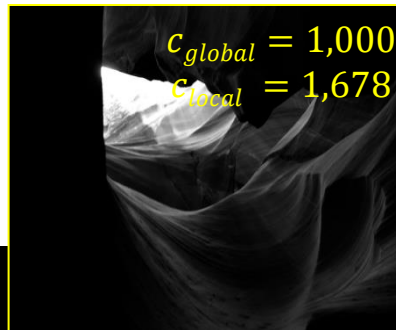
- **Anmerkung:** Aufgrund des Nachbarschaftsbezugs scheint keine Punktoperation zur Verbesserung des lokalen Kontrasts zu existieren





Globaler / Lokaler Kontrast

$$c_{global} = 0,500$$
$$c_{local} = 0,839$$



$$c_{global} = 1,000$$
$$c_{local} = 4,580$$

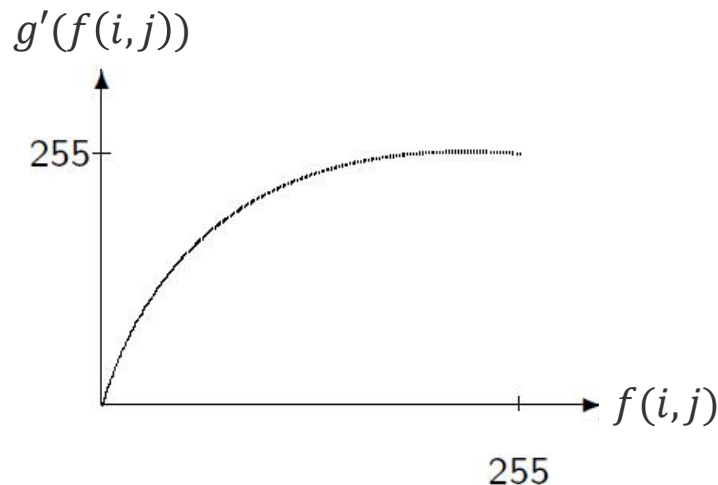


Verbesserung des lokalen Kontrasts: Log-Transformation

- **Idee:** Pixel mit häufig vorkommenden Grauwerten sind häufig benachbart
- **Lösung:** Betrachte Pixelhäufungen im unteren/oberen Grauwertbereich
→ Nicht-lineare Transformation als Näherungsmethode zur Erhöhung des lokalen Kontrasts

$$g'(f) = w_{max} \cdot \frac{\log(1 + f(i, j))}{\log(1 + w_{max})}$$

- **Eigenschaften:**
 - Dehnung der Grauwertdynamik im unteren Grauwertbereich
 - Gleichzeitige Stauchung im oberen Grauwertbereich



Original



Log-Transformation



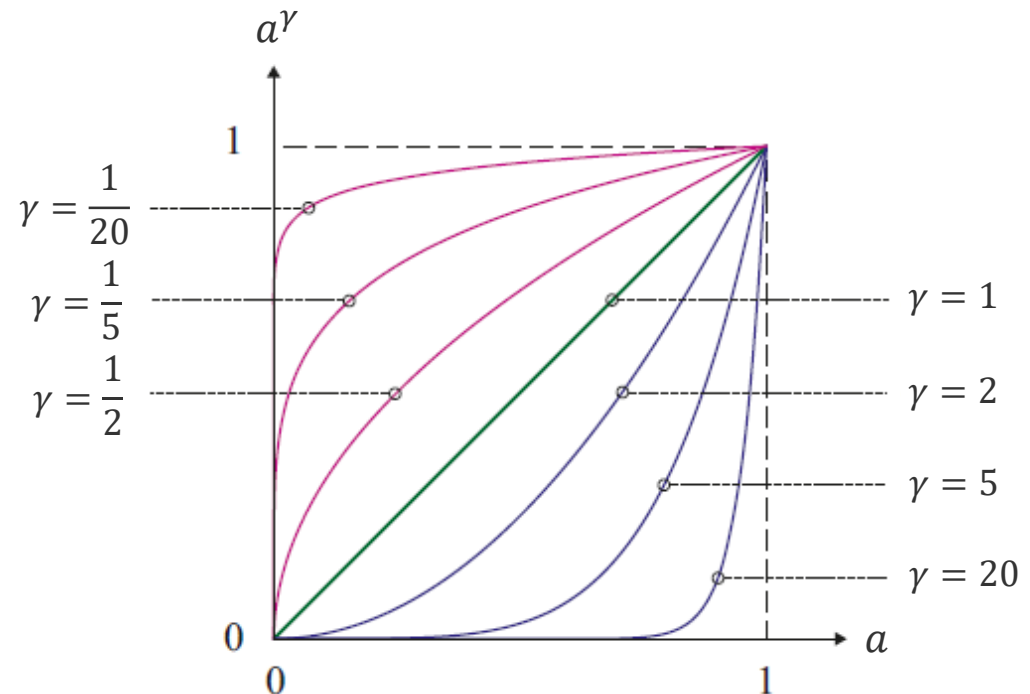
Verbesserung des lokalen Kontrasts: Gamma-Korrektur

- Bild ist zu hell oder zu dunkel, aber Grauwertbereich ist nahezu ausgenutzt.
- Nichtlineare, monotone Transferfunktion für **Über- und Unterbelichtung**
- Allgemeine Form der Log-Transformation: **Gamma-Korrektur**

$$g'(f) = w_{max} \cdot \left(\frac{f(i,j)}{w_{max}} \right)^\gamma$$

- Vereinfachende Annahme:

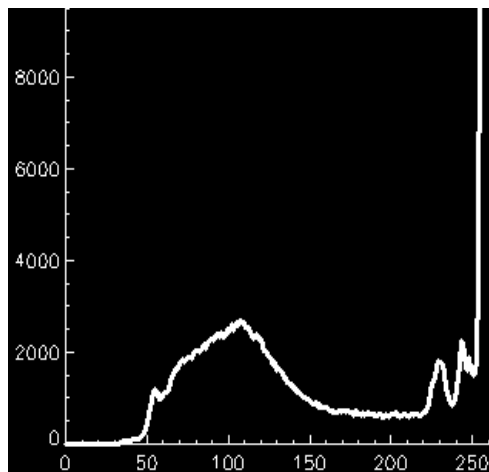
$$w_{min} = 0$$



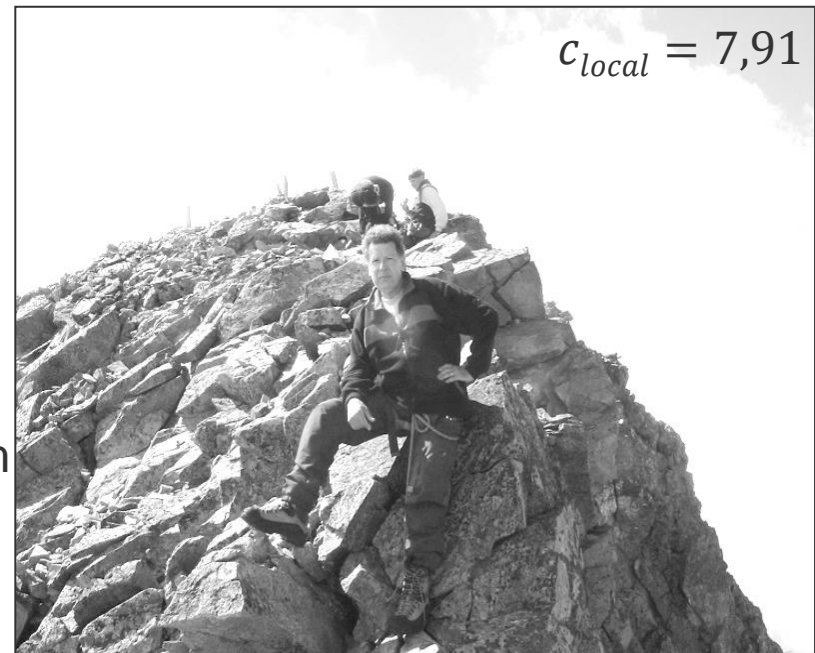
Verbesserung des lokalen Kontrasts: Gamma-Korrektur

- Bild ist zu hell oder zu dunkel, aber Grauwertbereich ist nahezu ausgenutzt.
- Nichtlineare, monotone Transferfunktion für **Über- und Unterbelichtung**
- Allgemeine Form der Log-Transformation: **Gamma-Korrektur**

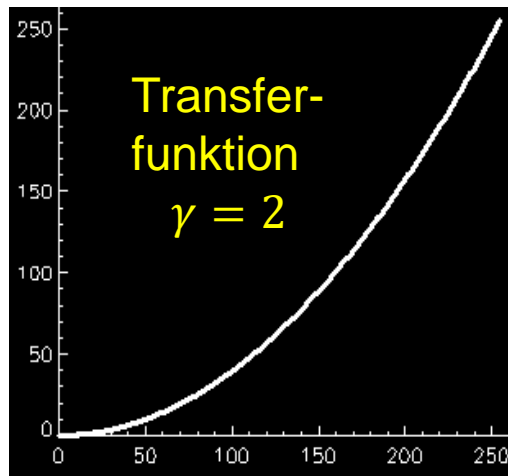
$$g'(f) = w_{max} \cdot \left(\frac{f(i,j)}{w_{max}} \right)^\gamma$$



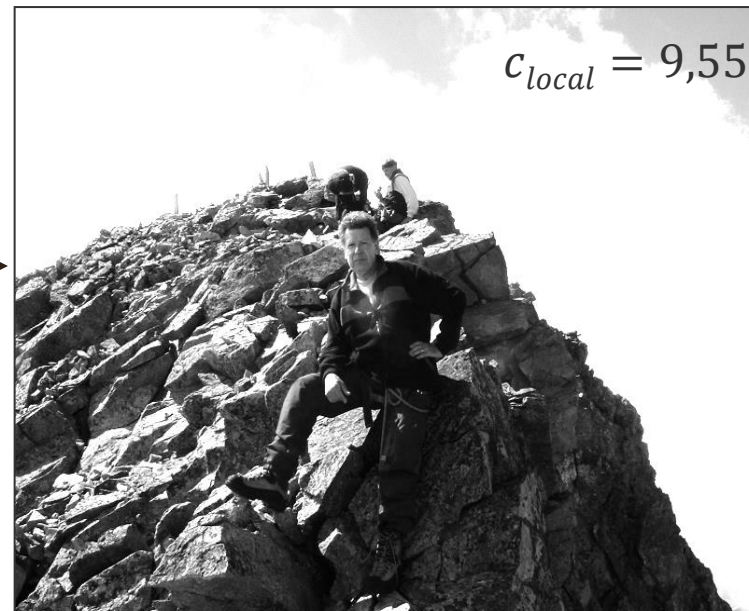
←
Histogramm



Verbesserung des lokalen Kontrasts: Gamma-Korrektur



$$g'(f) = w_{max} \cdot \left(\frac{f(i,j)}{w_{max}} \right)^\gamma$$



- $\gamma < 1$: Spreizung heller Grauwerte, Stauchung dunkler Grauwerte (ähnlich Log-Trans.)
- $\gamma > 1$: Spreizung dunkler Grauwerte, Stauchung heller Grauwerte

Verbesserung des lokalen Kontrasts: Gamma-Korrektur (Beispiele)

- Fall 1: $\gamma < 1$:
 - Kennlinie ist derjenigen der Log-Transformation ähnlich
 - erhöht Helligkeit und ermöglicht insbesondere bessere Sichtbarkeit im dunklen Bildbereich



Originalbild



$\gamma = 0,6$



$\gamma = 0,4$



Verbesserung des lokalen Kontrasts: Gamma-Korrektur (Beispiele)

- Fall 2: $\gamma > 1$:

Das Verhalten exakt umgekehrt im Vergleich zu $\gamma < 1$. Das transformierte Bild wirkt dunkler. Der untere Grauwertbereich wird zusammengestaucht, was bei zu hellen Bildern eine bessere Betrachtung ermöglicht.



Originalbild



$\gamma = 2$



$\gamma = 3,5$



$\gamma = 5$



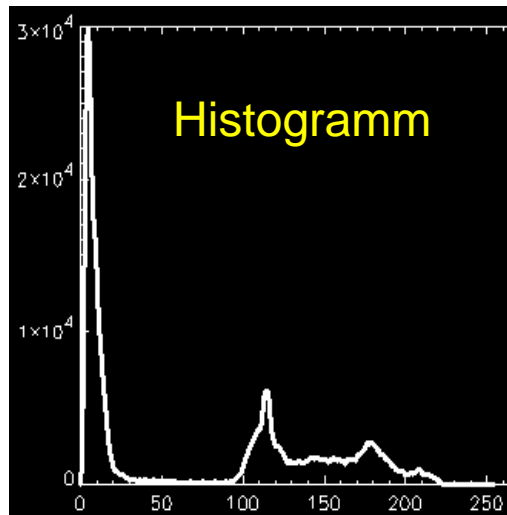
- Viele Ausgabe-Geräte zeigen kein lineares, sondern exponentielles Verhalten
 - Bildschirm: $1,8 \leq \gamma \leq 2,5$.
Z.B. erscheint mit $\gamma = 2,5$ ein Bild tendenziell zu dunkel
- Vorgeschaltete γ -Korrektur

$$g'(f(i, j)) = 255 \cdot \left(\frac{f(i, j)}{255} \right)^{\frac{1}{2,5}} = 255 \cdot \left(\frac{f(i, j)}{255} \right)^{0,4}$$

kompensiert diesen Effekt und erlaubt natürlichere Betrachtung

Maximierung des Informationsgehalts

- Gibt es eine „optimale“ Korrektur?
- Optimal = maximaler Informationsgehalt





Wiederholung: Modell der Diskreten gedächtnislosen Quelle

- Eine **diskrete gedächtnislose Quelle** X setzt in jedem Zeittakt ein Zeichen x_i aus dem Zeichenvorrat, dem Alphabet $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, mit der Wahrscheinlichkeit $P(x_i) = p_i$ ab. Die Auswahl der Zeichen geschieht unabhängig voneinander.
- **Beispiel: gedächtnislose Binärquelle**
 - Zeichenvorrat: $X = \{x_1, x_2\}$
 - Wahrscheinlichkeiten: $0 \leq p_1 \leq 1$ und $p_2 = 1 - p_1$
- Fragestellung: Wie kann man mit möglichst **wenig Aufwand** an Symbolen bzw. Zeichen **möglichst viel Information übertragen**?



Definition: Eine diskrete gedächtnislose Quelle X mit dem Zeichenvorrat $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ und den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten p_1, p_2, \dots, p_N besitzt den **mittleren Informationsgehalt**, die **Entropie** [Shannon, 1948]

$$H(x) = - \sum_{i=1}^N p_i \cdot \log_2(p_i) \text{ bit}$$

Die **Entropie** einer diskreten gedächtnislosen Quelle wird **maximal**, wenn **alle N Zeichen** des Zeichenvorrats **gleichwahrscheinlich** sind.

Beispiel:

(Hinweis: $I(p_i) = \log_2(1/p_i) \text{ bit} = -\log_2(p_i) \text{ bit}$)

Zeichen	a	b	c	d
p_i	1/2	1/4	1/8	1/8
$I(p_i)$	1 bit	2 bit	3 bit	3 bit
$H(X)$	$0,5 \cdot 1 \text{ bit} + 0,25 \cdot 2 \text{ bit} + 0,125 \cdot 3 \text{ bit} + 0,125 \cdot 3 \text{ bit} = 1,75 \text{ bit}$			

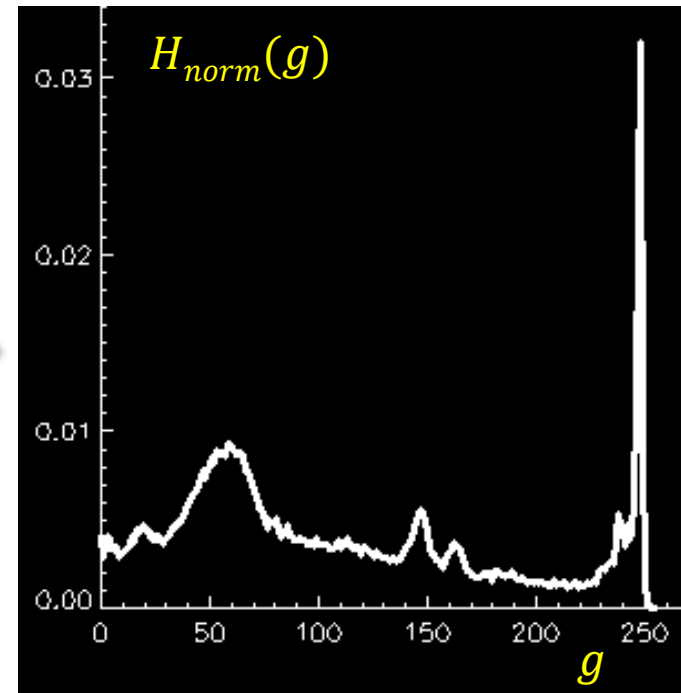
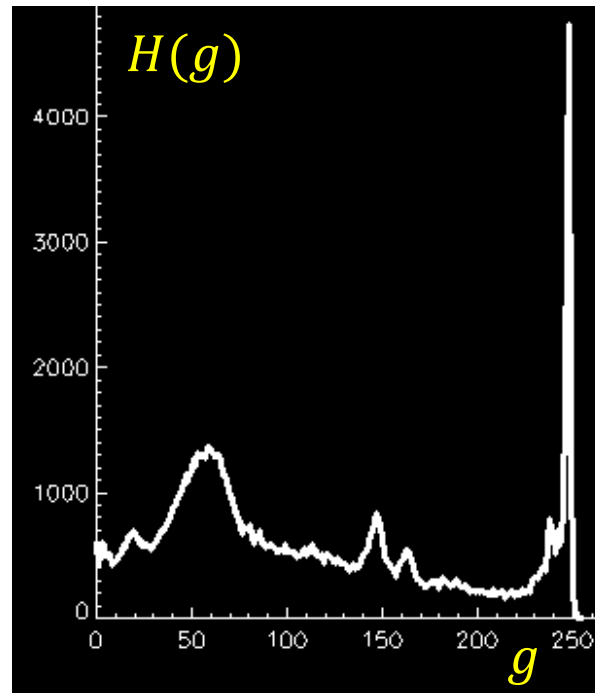


Normiertes Histogramm

- **Normierung nach Anzahl der Pixel eines Bildes** (Größe: $M \times N$):

$$H_{norm}(g) = H(g) / (M \cdot N)$$

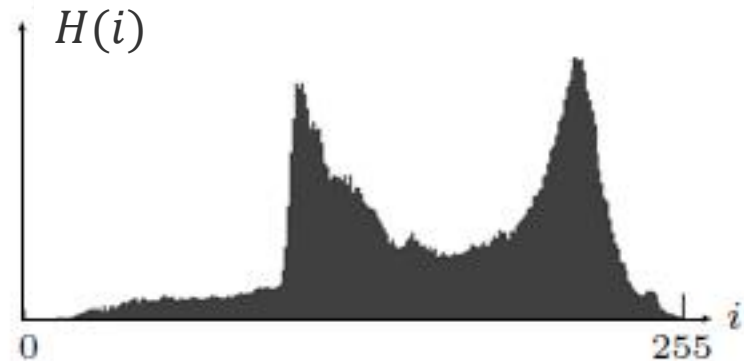
- Ein normiertes Histogramm beschreibt für jeden Grauwert g die Wahrscheinlichkeit, dass ein beliebiges Pixel diesen Grauwert hat.



Kumulatives Histogramm

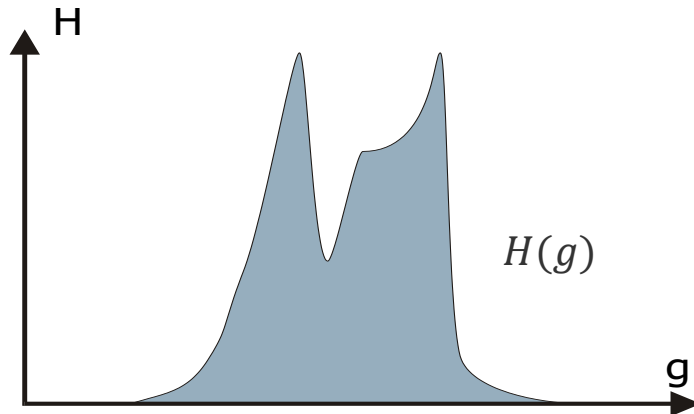
- **Kumulatives Histogramm:** Sukzessive Summation aller Histogrammwerte gemäß

$$H_K(i) = \sum_{j=0}^i H(j) \quad \forall 0 \leq i < w_{max}$$



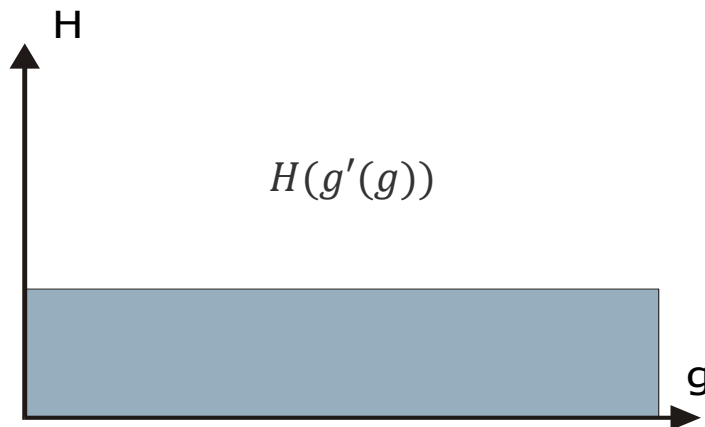


Maximaler Informationsgehalt



Entropie ist maximal, falls $P(g_i) = \text{const}$
für $i = 0, \dots, K - 1$

Gesucht: **Histogrammtransformation** $g'(g)$
zur **Maximierung der Entropie**



Annahme:

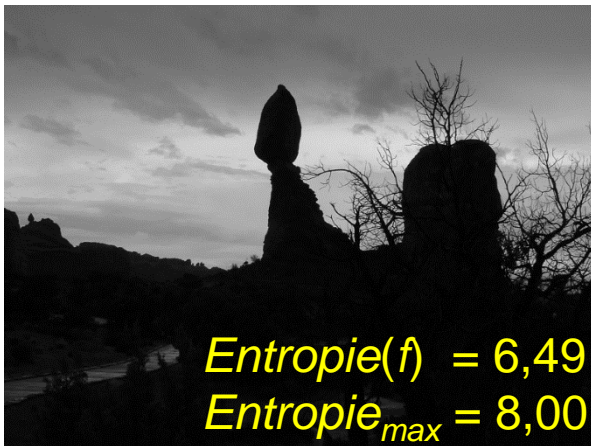
Sei $H_{norm}(g)$ normiert und kontinuierlich, dann gilt:

$$\int H_{norm}(g) = 1$$

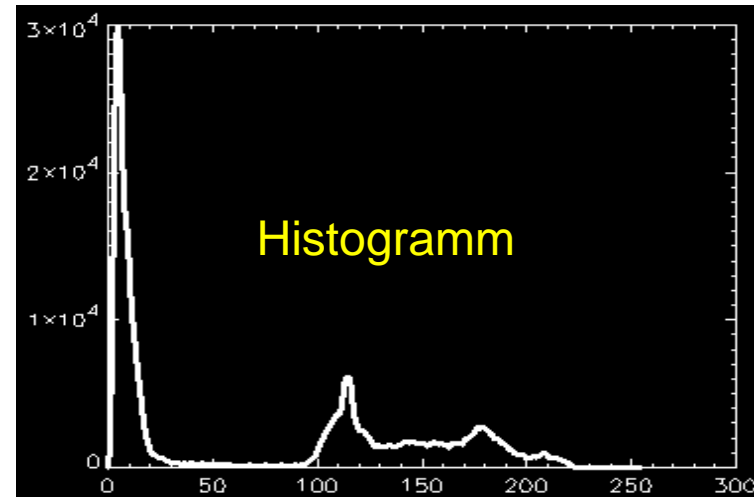
Definiere Abbildung (Transferfunktion) über normiertes Histogramm zur Max. der Entropie:

$$g'(g) = w_{max} \int_0^g H_{norm}(w) dw$$

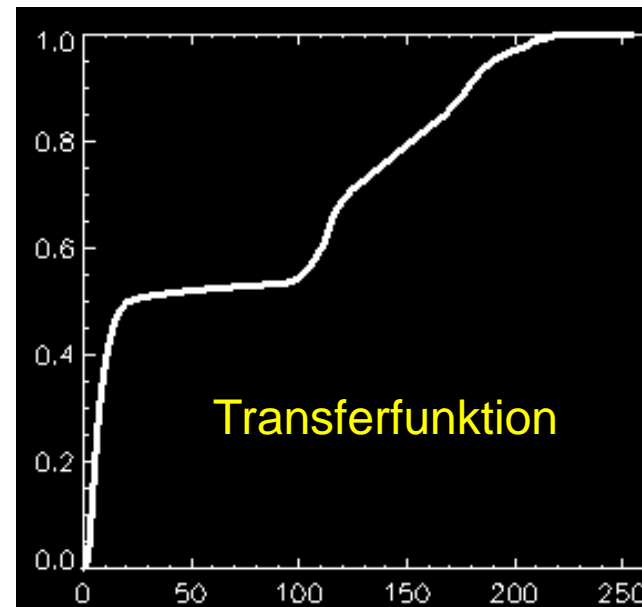
Beispiel



Histogramm
erzeugen



Transfer-
funktion
anwenden



kumuliertes
Histogramm
=
Transfer-
funktion

Aber: was ist, falls $g'(g) \cdot (K - 1)$
keine ganze Zahl ist?



Histogrammlinearisation

Transferfunktion für ein diskretes Histogramm

$$g'(g) = \lceil w_{max} \cdot \sum_{i=0}^g H_{norm}(i) \rceil - 1,$$

mit w_{max} : Anzahl repräsentierbarer Grauwerte

Abbildung auf
nächste ganze Zahl!

Beispiel: (1000 Bildpunkte und $w_{max} = 8$)

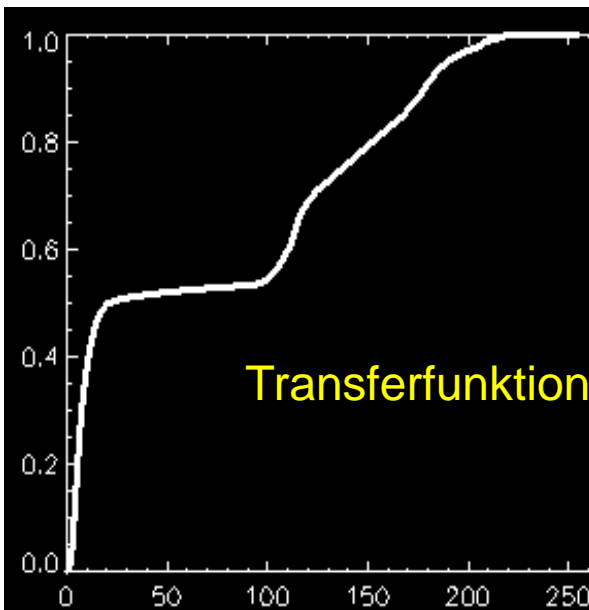
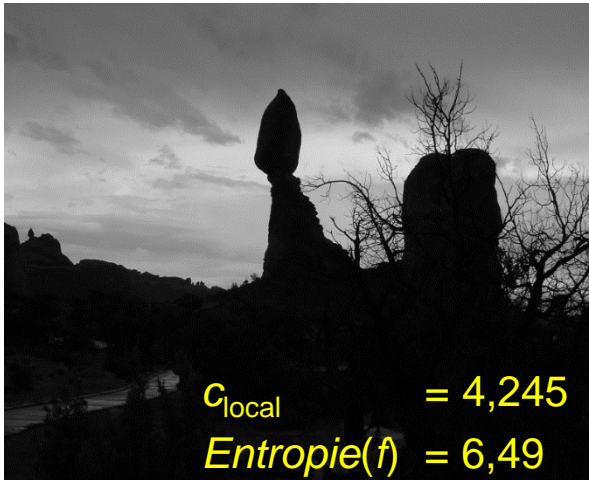
Grauwert	0	1	2	3	4	5	6	7
Häufigkeit	50	150	350	250	100	60	30	10
$H_{norm}(g)$	0,05	0,15	0,35	0,25	0,10	0,06	0,03	0,01
kumulativ	0,05	0,20	0,55	0,80	0,90	0,96	0,99	1,00
Grauwert	0,4	1,6	4,4	6,4	7,2	7,68	7,92	8,00
aufgerundet	1	2	5	7	8	8	8	8
$\lceil \rceil - 1$	0	1	4	6	7	7	7	7

) / 1000

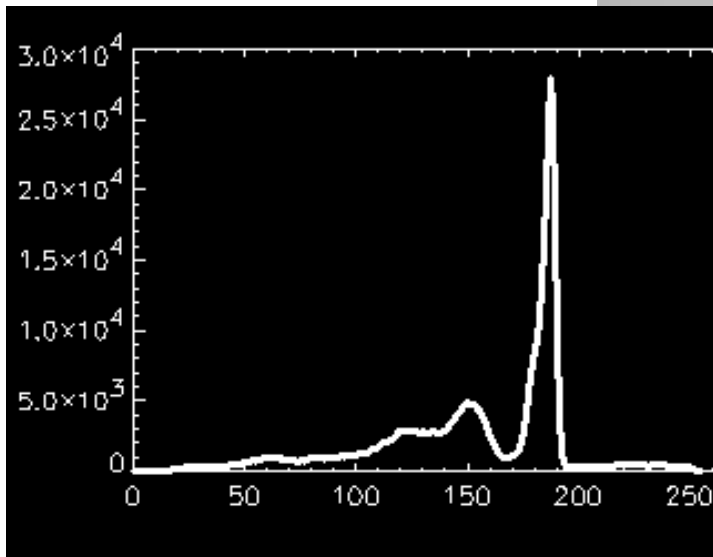
) · w_{max}

Keine **Linearisierung**, sondern von der **Häufigkeit abhängige Spreizung**

Beispiel: Histogrammlinearisation



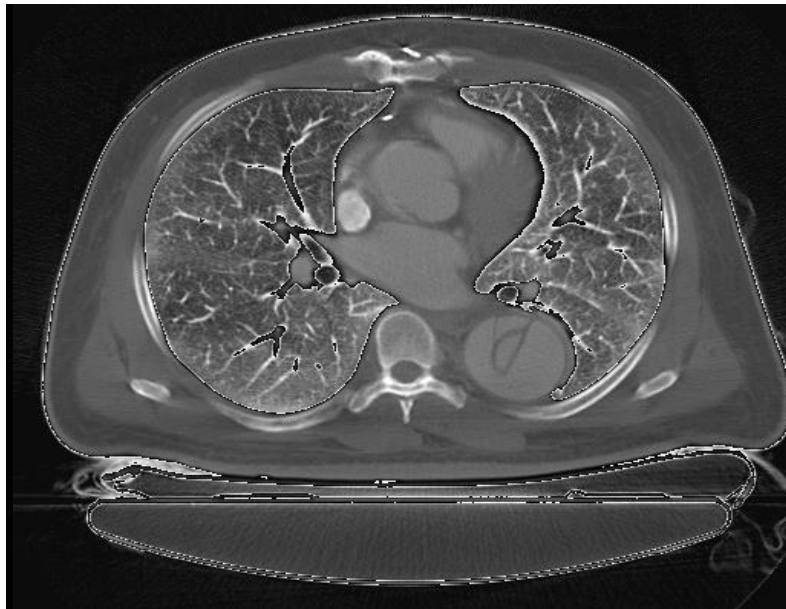
Entropie wurde **kleiner**, da Annäherung des Grauwerts durch ganze Zahl erforderlich ist!



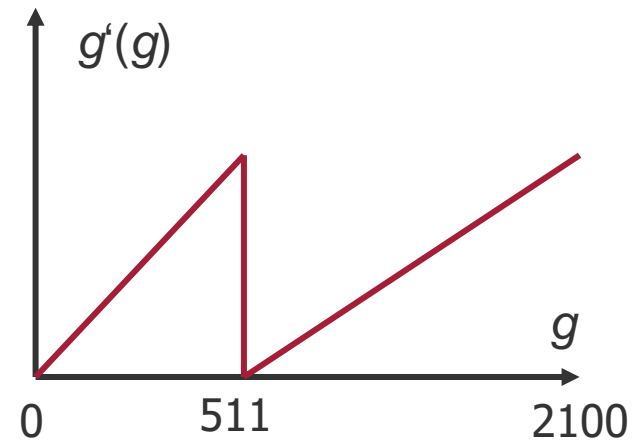


Das „Unwichtige“ wurde verstärkt, das Wichtige abgeschwächt!

Nichtmonotone Grauwertabbildung



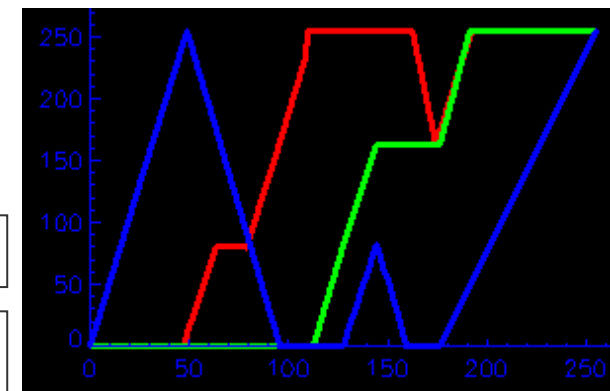
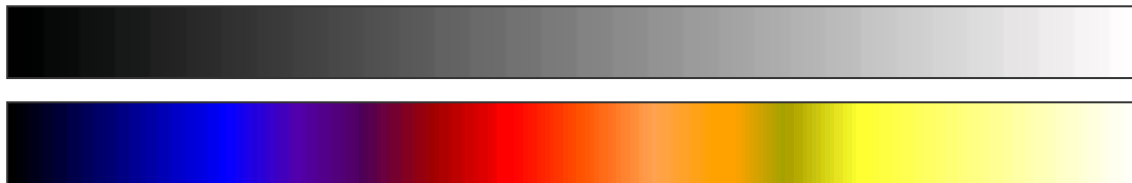
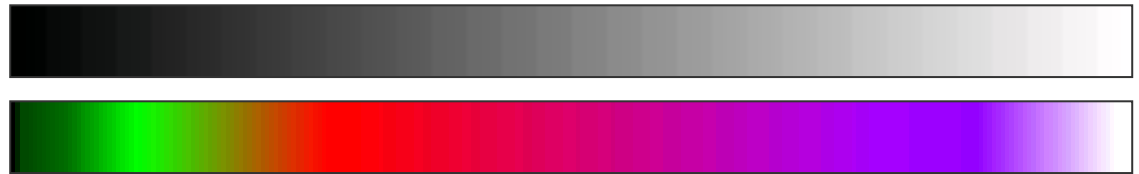
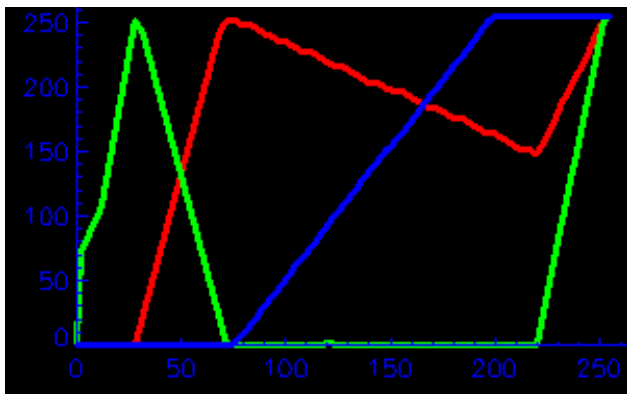
Zwei Grauwertfenster in einem Bild.

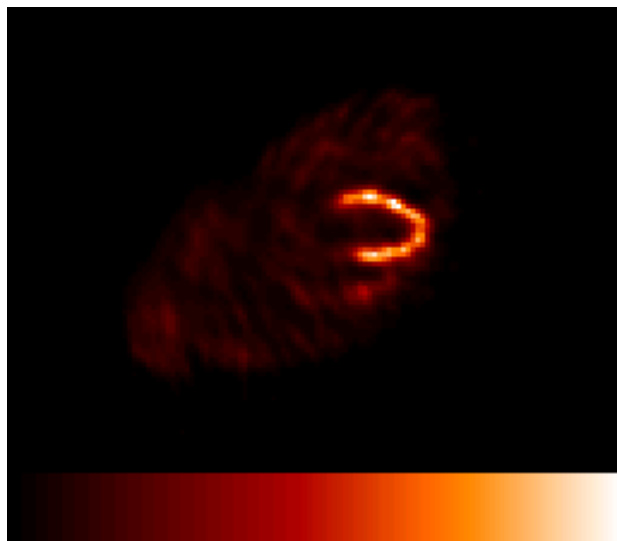
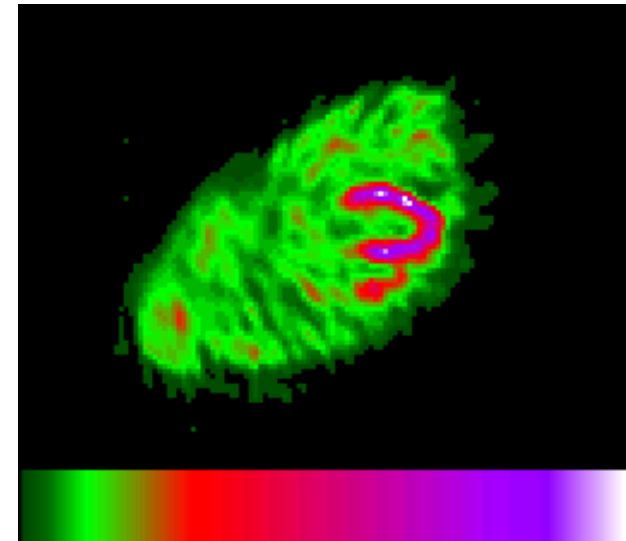
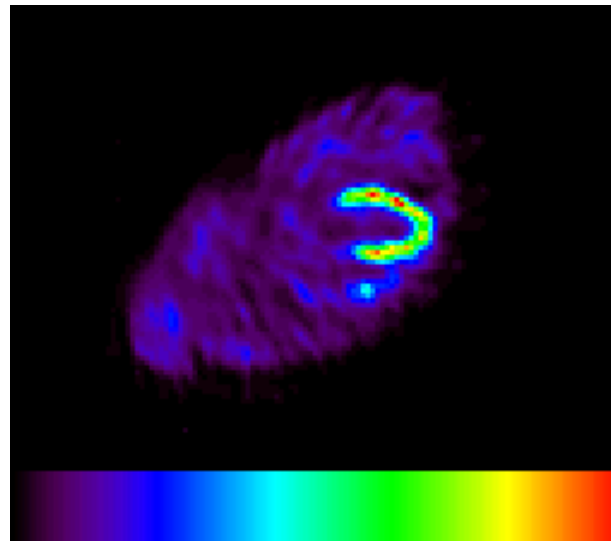
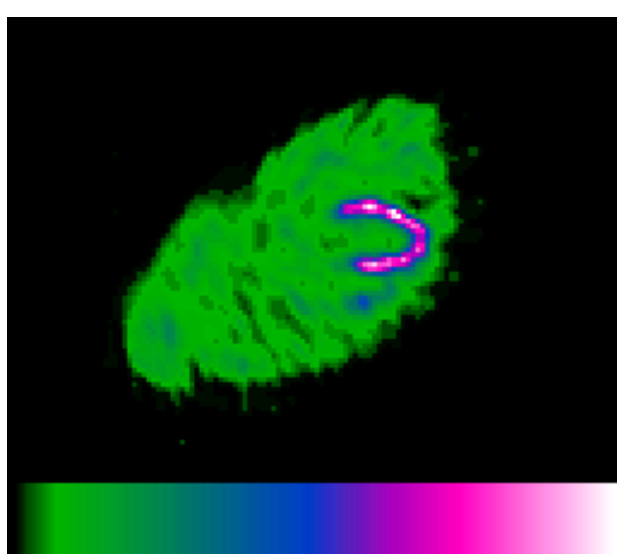


- Erzeugt künstliche Kanten
- Grenzen von Maxima der Transferfunktion nicht immer erkennbar

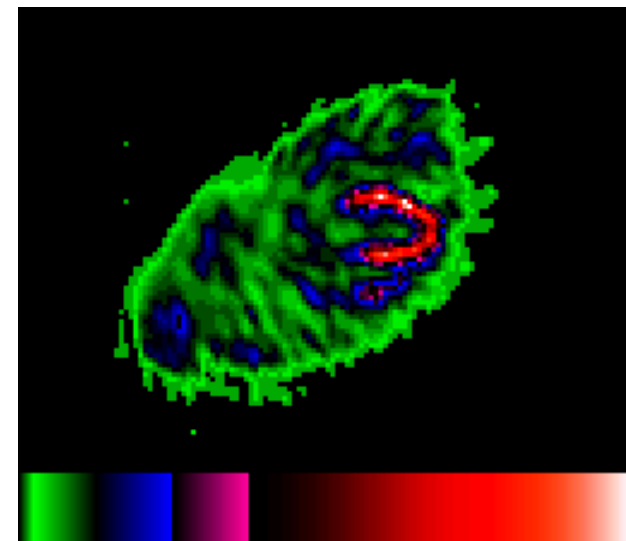
Farbe zur Kontrastverstärkung

- Es können wesentlich mehr Farb- als Grauwerte unterschieden werden
- Kontrastverstärkung durch drei nicht-lineare, nicht-monotone Abbildungsfunktionen der Grauwerte: $red_i(g)$, $green_i(g)$, $blue_i(g)$





- Achtung: Nichtlineare Transformationen erzeugen **künstliche Kanten**





- **Farbtransformation**

- 3 Farbauszüge einer Szene: B_R, B_G, B_B
- Farbtransformation durch Wahl geeigneter skalarer Gewichte
- $f_A(i, j) = a \cdot f_R(i, j) + b \cdot f_G(i, j) + c \cdot f_B(i, j)$

- **Hintergrundsubtraktion**

- Aufnahme eines Hintergrundbild B_H , das die relevanten Objekte des zu verarbeitenden Bildes B_E nicht enthält
- $f_A(i, j) = f_E(i, j) - f_H(i, j)$

- **Maskierung**

- Extraktion semantisch bedeutsamer Teile mit Binärmaske, in der interessante Punkte durch $f_B(i, j) = 1$ gekennzeichnet sind
- $f_A(i, j) = f_E(i, j) \cdot f_B(i, j)$



- **Geometrische Transformationen**

- Transformation der Ortskoordinaten zur Größenanpassung
- $f_A(i, j) = f_E(i + p, j + q)$ mit den Konstanten p, q

- **Alpha-Blending**

- Methode, um zwei Bilder B_H und B_E transparent zu überblenden
- Hintergrundbild B_H wird von Bild B_E überdeckt
- Durchsichtigkeit wird durch den Transparenzwert α bestimmt
- $f_A(i, j) = \alpha \cdot f_H(i, j) + (1 - \alpha) \cdot f_E(i, j)$



Alpha-Blending (Beispiel)



I_{BG}



$\alpha = 0.25$



I_{FG}



$\alpha = 0.50$



Fazit: Punktoperatoren

- Punktoperatoren finden breite Anwendung zur globalen Bildverbesserung
- Histogramme bieten gute Basis zur Kontrasterhöhung
- **Grauwerttransformationen (Punktoperatoren) sind jedoch nicht in der Lage, die räumlichen Beziehungen der Grauwerte einer kleinen Umgebung zu erkennen**
- Zu diesem Zweck sind eine andere Klasse von Operationen notwendig, welche die Bildpunkte einer Nachbarschaft in geeigneter Weise kombinieren:

$$g(i, j) = (N(f(i, j)))$$

→ Lokale Operatoren (Nachbarschaftsoperatoren) oder Filter

Literatur



K. D. Tönnies:
Grundlagen der
Bildverarbeitung,
Pearson Studium, 2005.



W. Burger, M.Burge:
Digitale Bildverarbeitung:
Eine algorithmische
Einführung mit Java;
Springer Vieweg,
3. Auflage 2015.



J. Steinmüller:
Bildanalyse,
Springer-Verlag,
1. Auflage 2008.

Quellenangabe: Bilder und Folienmaterial sind auszugsweise aus den Lehrbüchern und Materialien von Tönnies und Burger, Burge sowie den Vorlesungsmaterialien von Prof. Xiaoyi Jiang, Universität Münster entnommen.