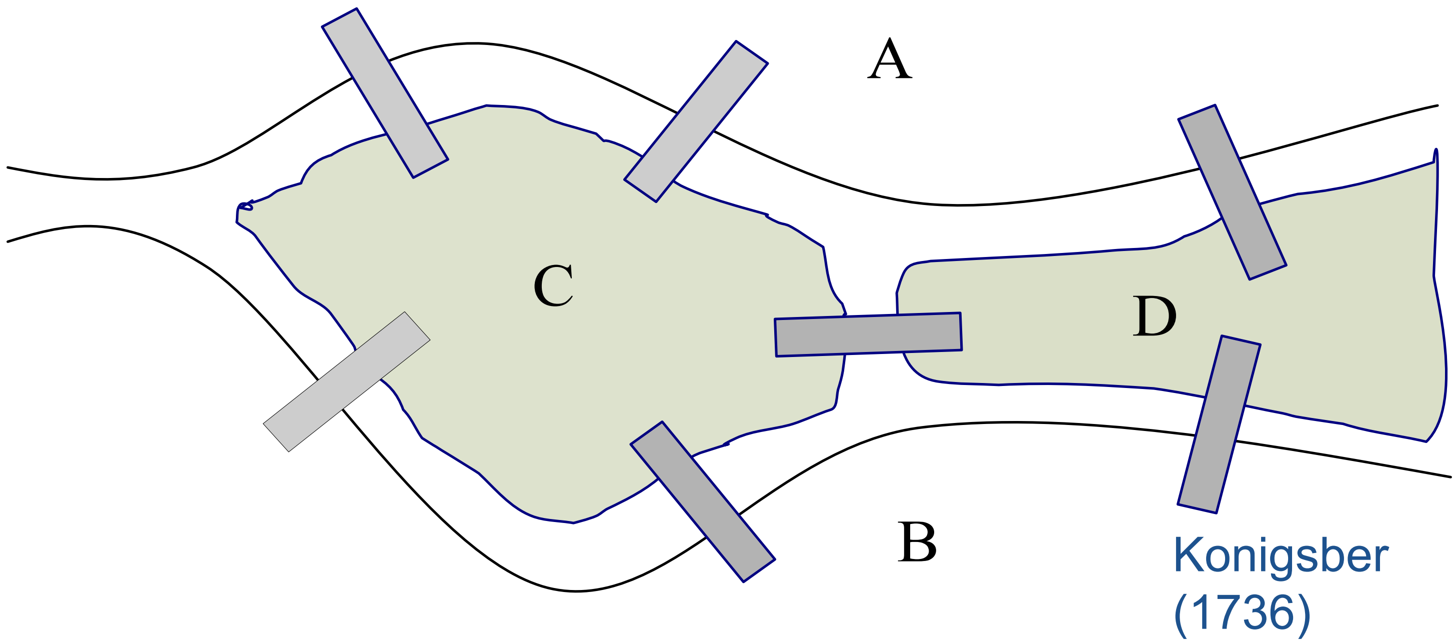
Lý thuyết đồ thị

Chương 1: Các khái niệm cơ bản

Nội dung

I. Định nghĩa đồ thị

❖ Bài toán Euler

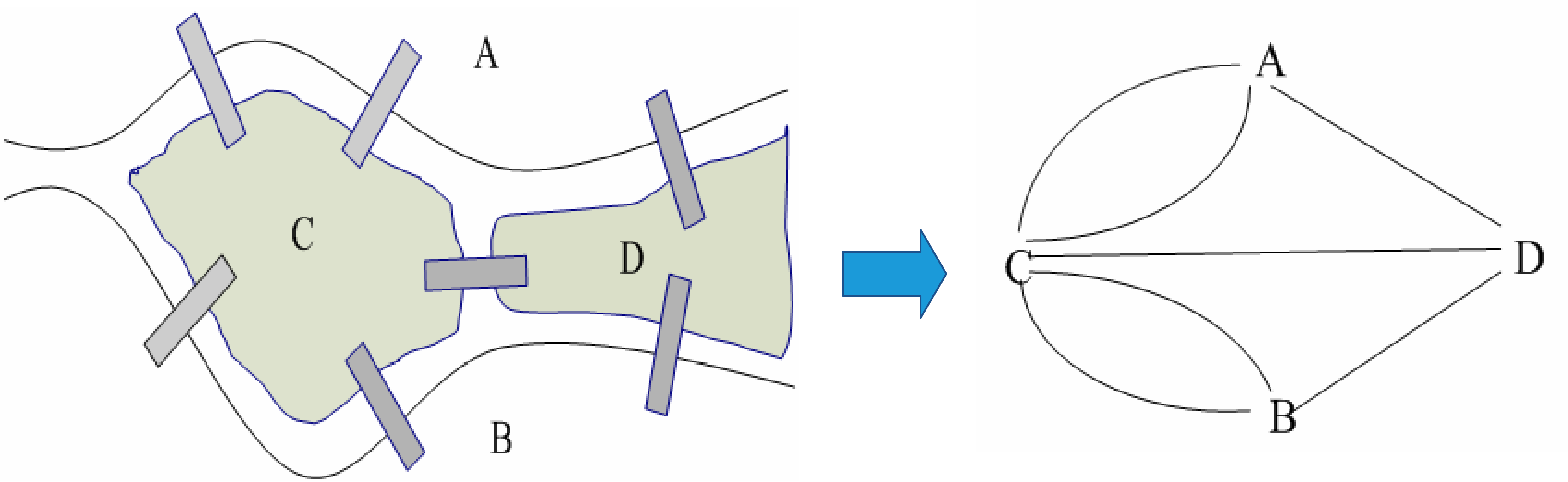


Có thể chỉ <u>một lần</u> đi qua <u>tất cả</u> 7 chiếc cầu này hay không?

I. Định nghĩa đồ thị

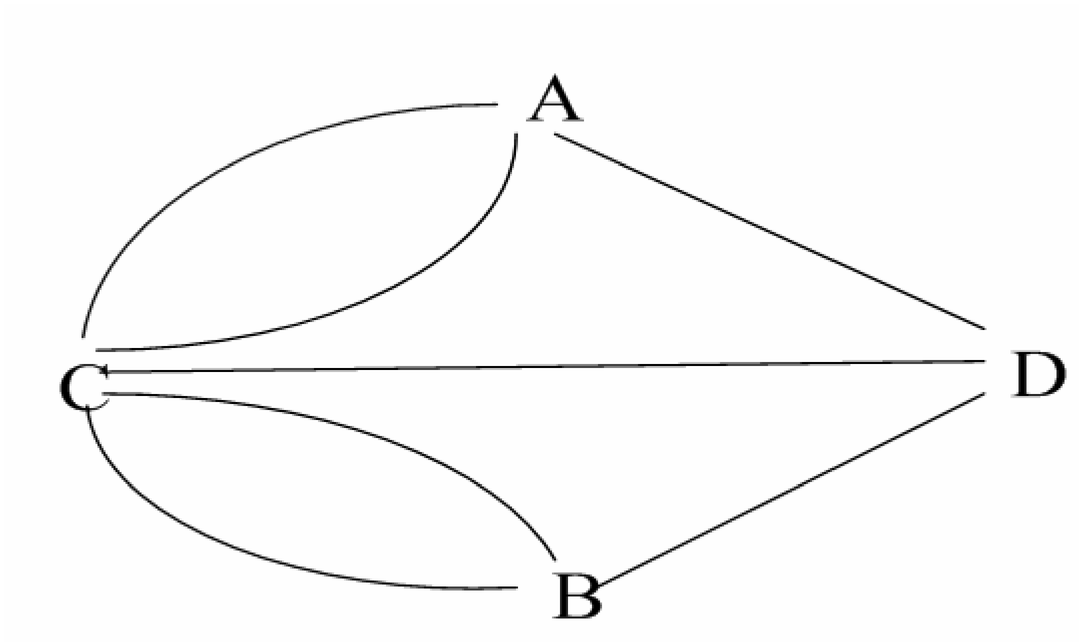
❖ Chuyển bài toán về dạng đồ thị

- Mỗi vùng là 1 đỉnh
- Mỗi chiếc cầu là 1 cạnh



I. Định nghĩa đồ thị

- Đồ thị được xây dựng từ bài toán Euler
  - Có thể đi qua tất cả các cạnh của đồ thị, sao cho mỗi cạnh chỉ đi qua đúng một lần được không?

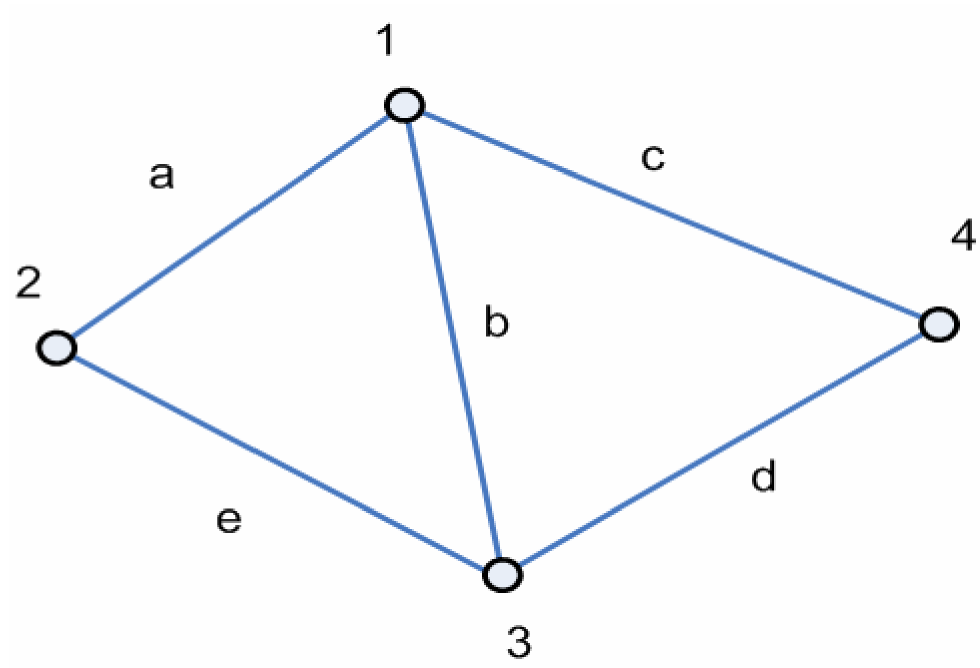


I. Định nghĩa đồ thị

❖ Định nghĩa

- Đồ thị G là một tập hợp gồm các đỉnh và các cạnh. Ta thường ký hiệu: G = (V, E), trong đó:

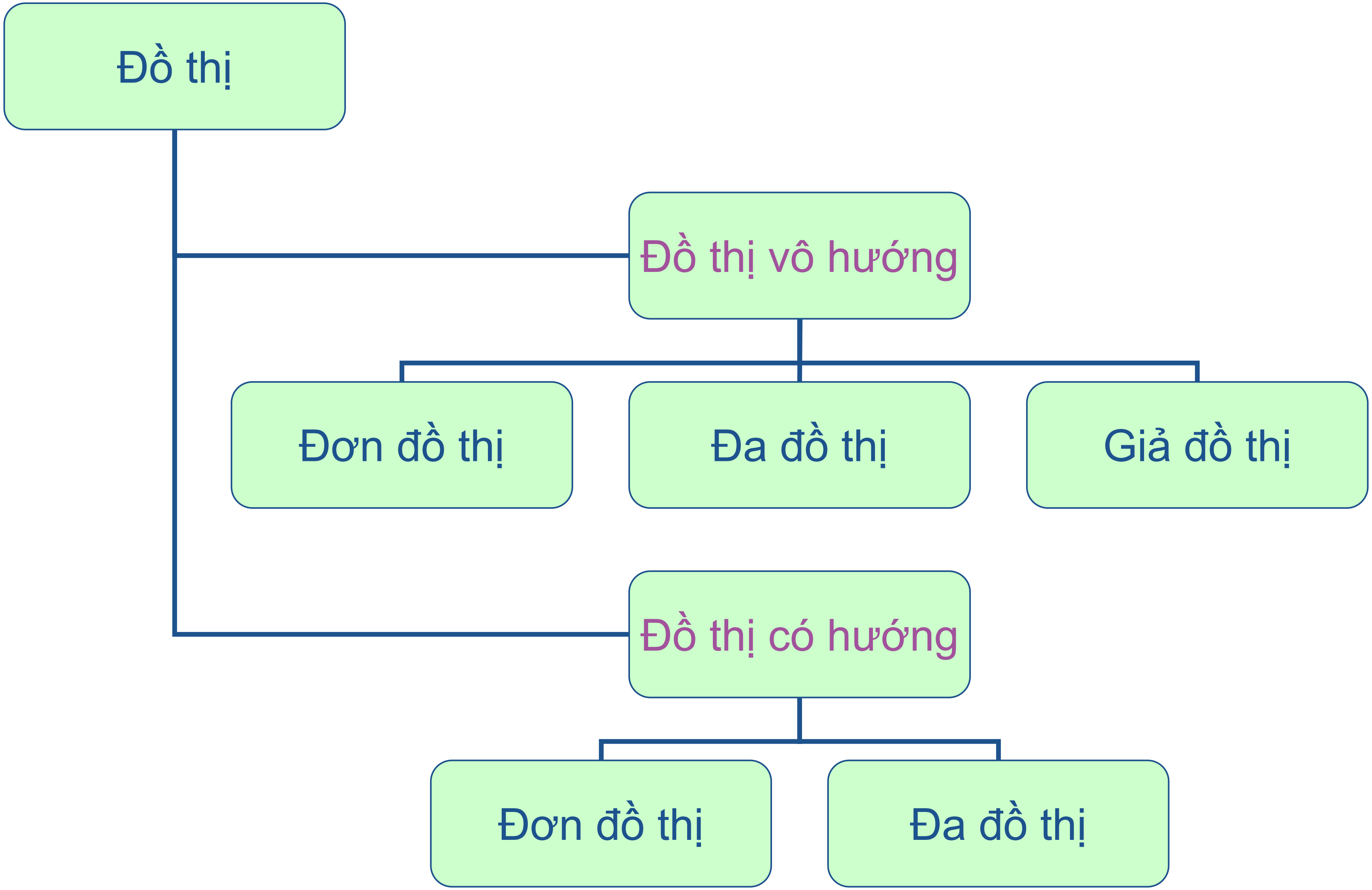
  + V: Là tập các đỉnh
  + E: Là tập các cạnh



V={1, 2, 3, 4}
E={a, b, c, d, e}

Nội dung

II. Các loại đồ thị

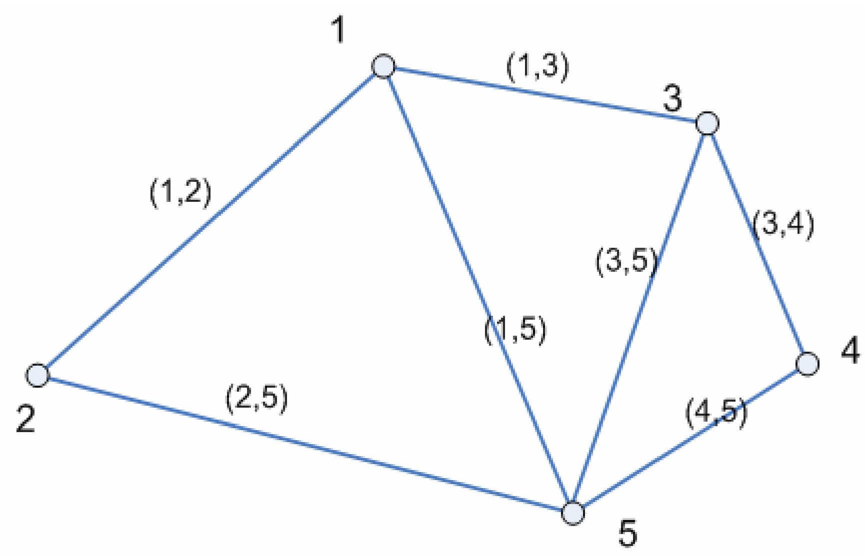


II. Các loại đồ thị

❖ Đơn đồ thị vô hướng

Đồ thị G=(V, E) được gọi là đơn đồ thị vô hướng:

- V: Là tập các đỉnh
- E: là tập các cặp không có thứ tự gồm hai phần tử khác nhau của V.



V={1, 2, 3, 4, 5}
E={(1, 2), (1, 3), (1, 5), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5)}

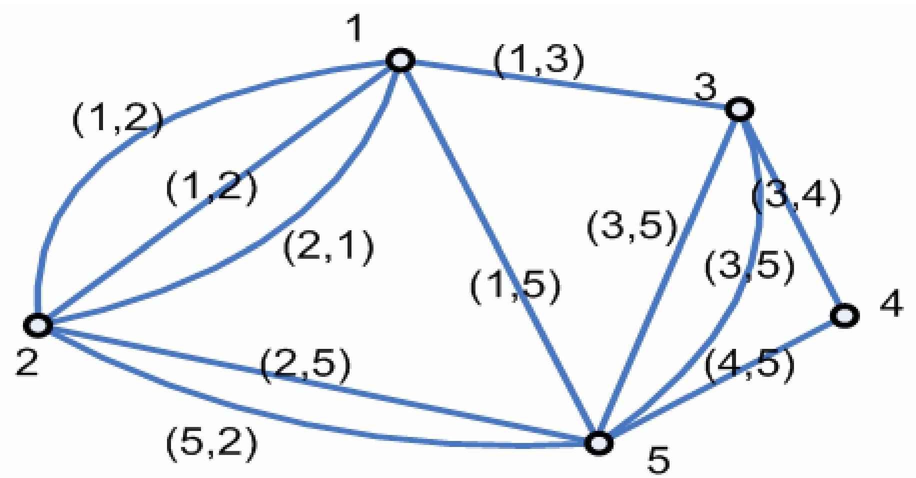
II. Các loại đồ thị

Đa đồ thị vô huớng

Đồ thị G=(V, E) được gọi là đa đồ thị vô hướng:

- V: Là tập các đỉnh
- E: Là <u>họ</u> các cặp <u>không có thứ tự</u> gồm hai phần tử <u>khác nhau</u> của V.

Hai cạnh e1, e2 gọi là <u>cạnh lặp</u> nếu chúng cùng tương ứng với một cặp đỉnh



V={1, 2, 3, 4, 5}

E={(1, 2), (1, 3), (1, 5), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5), **(1, 2), (2, 1), (5, 2), (3, 5)** }

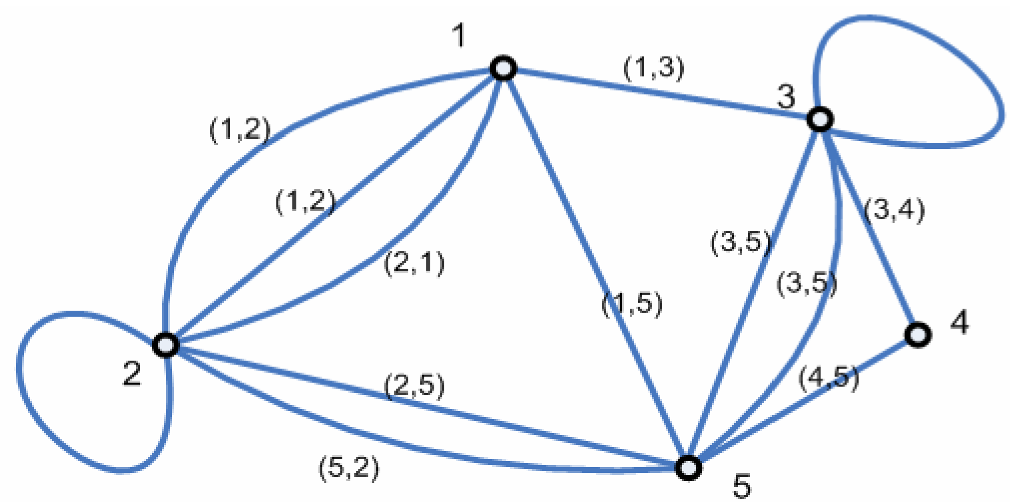
II. Các loại đồ thị

❖ Giả đồ thị vô hướng

Đồ thị G=(V, E) được gọi là giả đồ thị vô hướng:

- V: Là tập các đỉnh
- E: Là <u>họ</u> các cặp <u>không có thứ tự</u> gồm hai phần tử <u>không nhất thiết khác nhau</u> của V.

Cạnh e được gọi là <u>khuyên</u> nếu nó có dạng: e=(u, u)



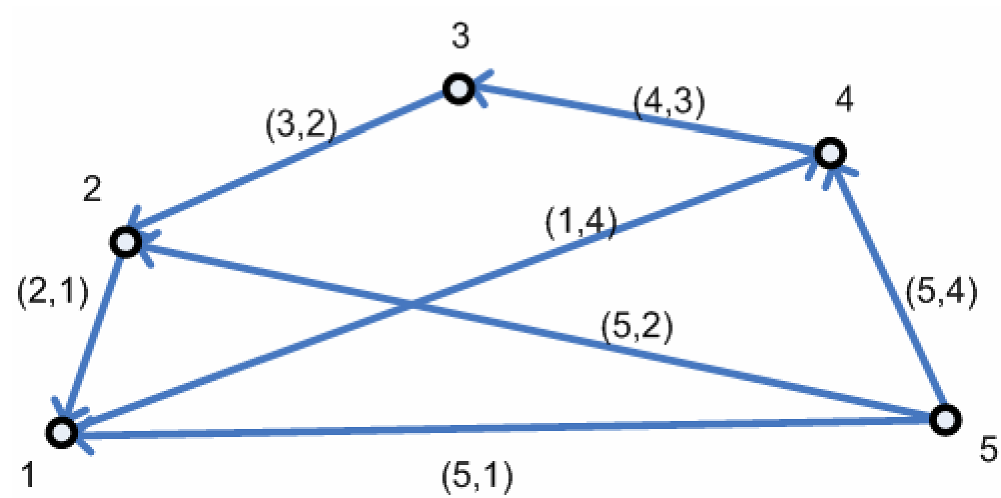
V={1, 2, 3, 4, 5}
E={(1, 2), (1, 3), (1, 5), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5), (1, 2), (2, 1), (5, 2), (3, 5), **(2, 2), (3, 3)** }

II. Các loại đồ thị

Đơn đồ thị có hướng

Đồ thị G=(V, E) được gọi là đơn đồ thị có hướng:

- V: Là tập các đỉnh
- E: Là tập các cặp có thứ tự gồm hai phần tử khác nhau của V. (tập các cung)



V={1, 2, 3, 4, 5}

E={(2, 1), (1, 3), (5, 1), (4, 2), (3, 4), (3, 5), (5, 4)}

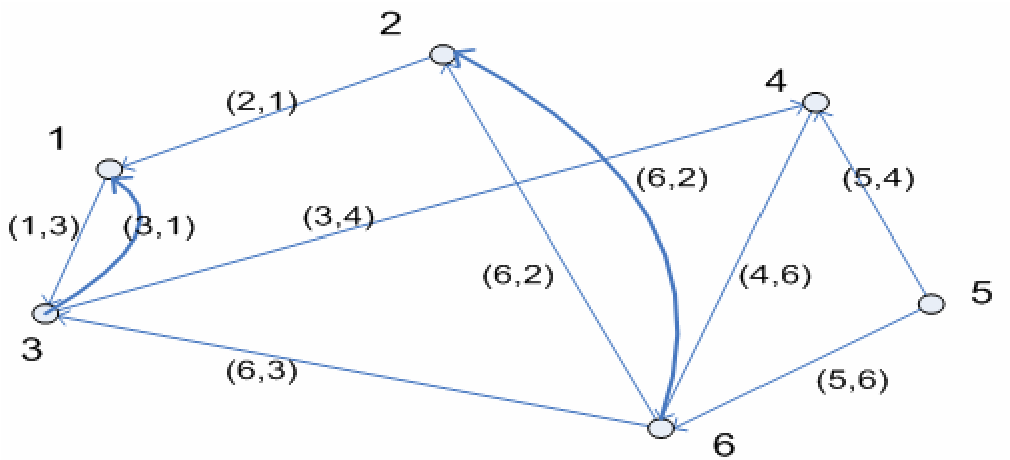
II. Các loại đồ thị

Đa đồ thị có hướng

Đồ thị G=(V, E) được gọi là đơn đồ thị có hướng:

- V: Là tập các đỉnh
- E: Là họ các cặp có thứ tự gồm hai phần tử khác nhau của V. (tập các cung)

  Hai cung e1, e2 được gọi là cung lặp nếu chúng cùng tương ứng với một cặp đỉnh.



V={1, 2, 3, 4, 5}

E={(2, 1), (1, 3), (6, 2), (3, 4), (6, 3), (4, 6), (5, 4), (5, 6), **(3,1), (6,2)**}

II. Các loại đồ thị

- Đồ thị
  - Đồ thị vô hướng — Không có thứ tự
    - Đơn đồ thị — Không cạnh lặp, không khuyên
    - Đa đồ thị — Có cạnh lặp, không khuyên
    - Giả đồ thị — Có cạnh lặp, Có khuyên
  - Đồ thị có hướng — Có thứ tự
    - Đơn đồ thị — Không cung lặp, không khuyên
    - Đa đồ thị — Có cung lặp, không khuyên

Nội dung

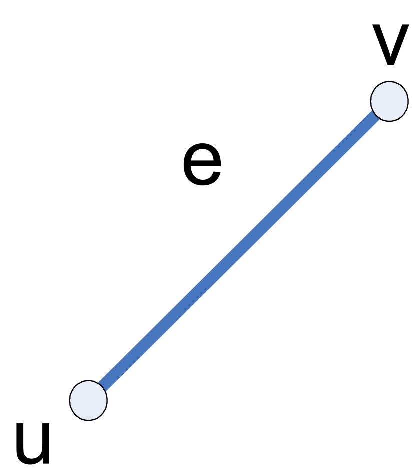
III. Các thuật ngữ cơ bản

Kề và liên thuộc

- Giả sử u và v là hai đỉnh của đồ thị vô hướng G và e=(u, v) là cạnh của đồ thị, khi đó ta nói:

  + u và v kề nhau và e liên thuộc với u và v.

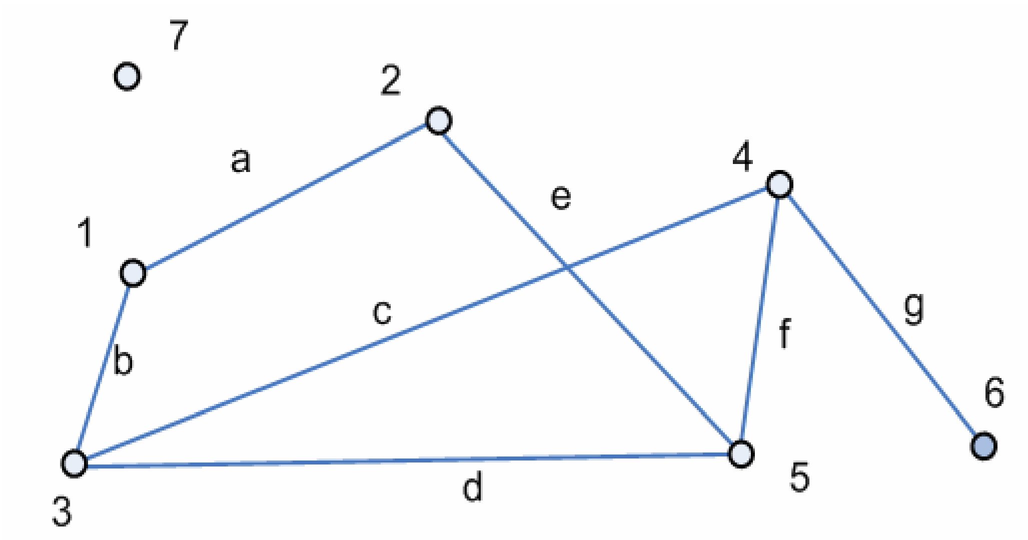
  + u và v là các đỉnh đầu của cạnh e



III. Các thuật ngữ cơ bản

Bậc của đỉnh

- Bậc của đỉnh v trong đồ thị vô hướng là số cạnh liên thuộc với nó.
- Ký hiệu: deg(v)



deg(1)= 2, deg(2)= 2,
deg(3)= 3, deg(4)= 3,
deg(5)= 3, deg(6)= 1,
deg(7)= 0.

- Đỉnh treo là đỉnh chỉ có duy nhất một cạnh liên thuộc với nó. → Đỉnh 6
- Đỉnh cô lập là đỉnh không có cạnh nào liên thuộc với nó.→ Đỉnh 7

III. Các thuật ngữ cơ bản

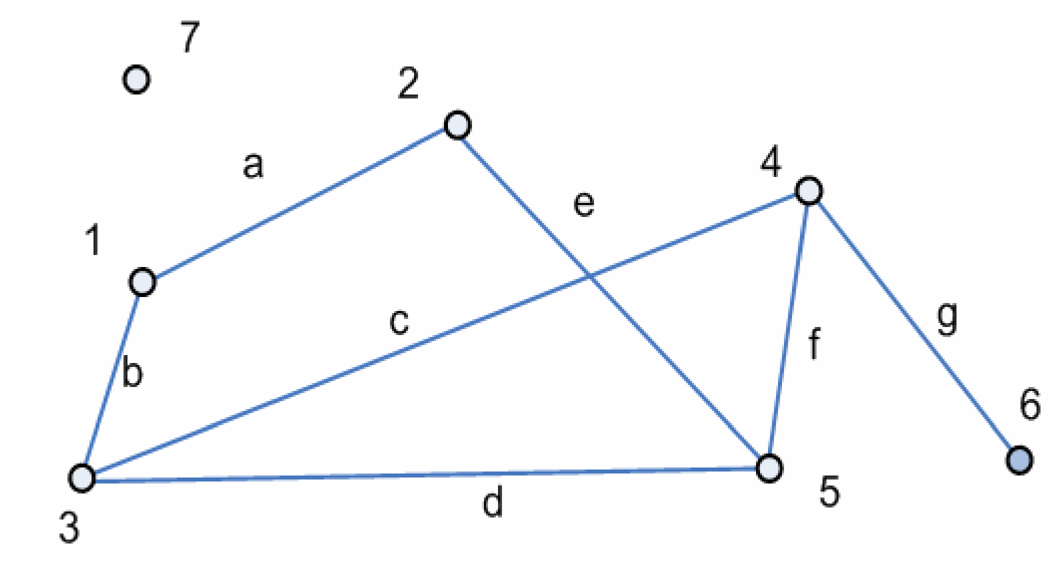
❖ Định lý bắt tay

Giả sử G=(V,E) là đồ thị vô hướng với m cạnh. Khi đó tổng tất cả các bậc của đỉnh trong V bằng 2m.

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2m$$

$$m = 7$$

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2m = 14$$



III. Các thuật ngữ cơ bản

- Định lý bắt tay

  Chứng minh?

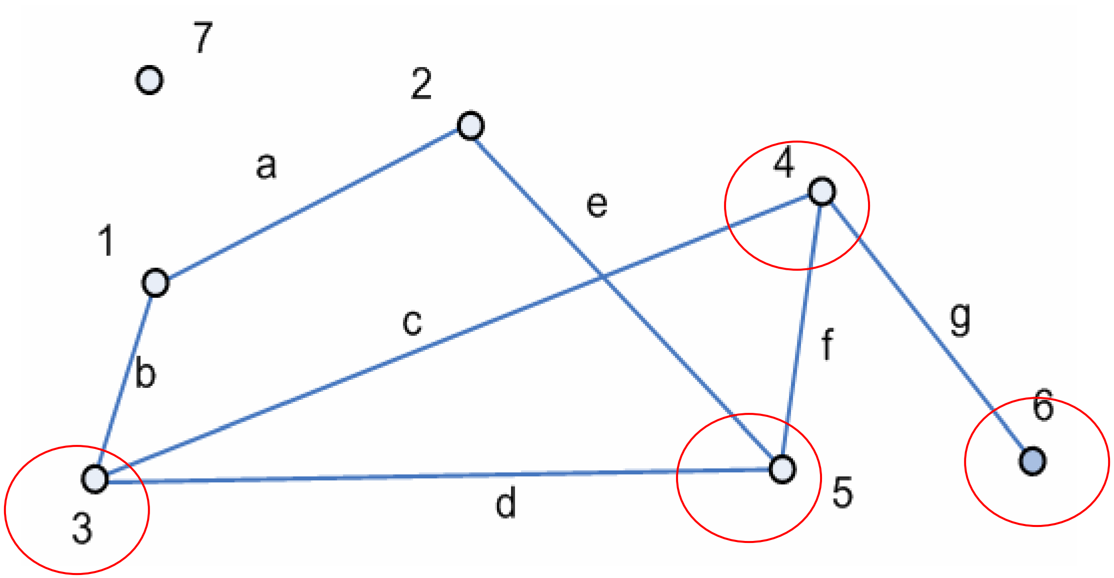
- Mỗi một cạnh nối với đúng hai đỉnh, vì thế một cạnh đóng góp 2 đơn vị vào tổng các bậc của tất cả các đỉnh.

  ➔ tổng các bậc của tất cả các đỉnh gấp đôi số cạnh của đồ thị

III. Các thuật ngữ cơ bản

❖ Hệ quả của định lý bắt tay

Trong đồ thị vô hướng, số đỉnh bậc lẻ là một số chẵn.



Các đỉnh bậc lẻ: 3, 5, 4, 6 → 4 đỉnh

III. Các thuật ngữ cơ bản

- Hệ quả của định lý bắt tay

  Trong đồ thị vô hướng, số đỉnh bậc lẻ là một số chẵn.

  <u>Chứng minh</u>:?

  - Gọi L và C lần lượt là tập các đỉnh bậc lẻ và bậc chẵn của đồ thị vô hướng G= (V, E). Ta có:

$$2m = \sum_{v \in V} \deg(v) = \sum_{v \in L} \deg(v) + \sum_{v \in C} \deg(v)$$

+ Tổng 2m chẵn

+ Tổng $\sum_{v \in C} \deg(v)$ chẵn

➔ Tổng $\sum_{v \in L} \deg(v)$ chẵn

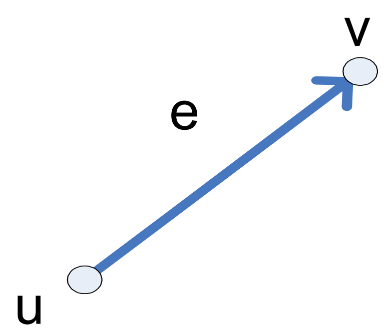
III. Các thuật ngữ cơ bản

Kề trong đồ thị có hướng

- Giả sử u và v là hai đỉnh của đồ thị có hướng G và e=(u, v) là một cung của đồ thị, khi đó ta nói:

+ u và v kề nhau, cung e đi ra khỏi u và đi vào v.

+ u là đỉnh đầu, v là đỉnh cuối của cạnh e.



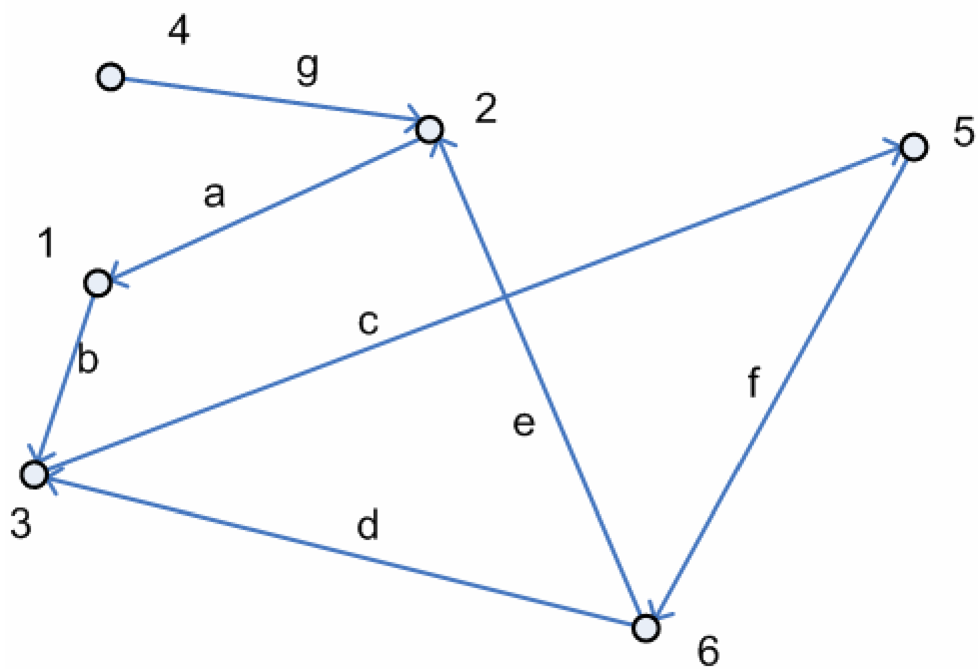
III. Các thuật ngữ cơ bản

❖ Bán bậc vào và bán bậc ra của đỉnh

- Bán bậc ra (bán bậc vào) của đỉnh v trong đồ thị có hướng là số cung ra khỏi nó (đi vào nó).
- Ký hiệu: $\deg^+(v)$ $\quad (\deg^-(v)\ )$

$$\deg^+(2) = 1, \deg^-(2) = 2$$

$$\deg^+(6) = 2, \deg^-(6) = 1$$



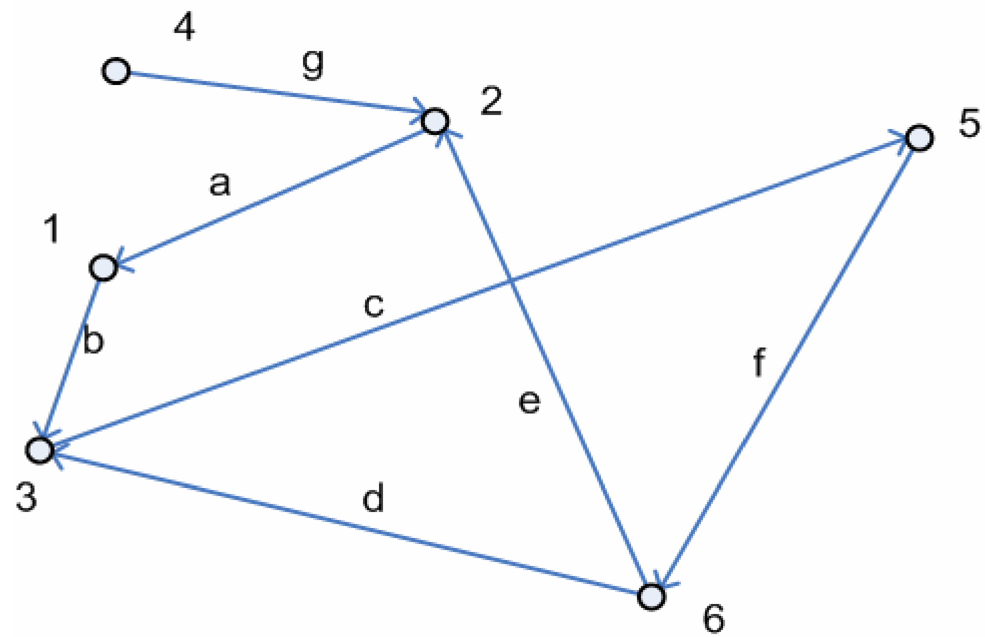
III. Các thuật ngữ cơ bản

Định lý

Giả sử G=(V,E) là đồ thị có hướng với m cung, khi đó tổng tất cả các bán bậc ra bằng tổng tất cả các bán bậc vào và bằng m.

$$\sum_{v \in V} \deg^{+}(v) = \sum_{v \in V} \deg^{-}(v) = m$$

$$\sum_{v \in V} \deg^{+}(v) = \sum_{v \in V} \deg^{-}(v) = 7$$



III. Các thuật ngữ cơ bản

❖ Bài tập

1. Có bao nhiêu cạnh trong đồ thị có 10 đỉnh, mỗi đỉnh có bậc bằng 6

   a) 20 b) 30 c) 40 d)50

2. Cho biết các đỉnh của đồ thị có bậc lần lượt là: 4, 3, 3, 2, 2. Số cạnh của đồ thị này là:

   a) 5 b) 6 c) 7 d) 8

3. Cho danh sách bậc các đỉnh của các đồ thị sau, đồ thị nào không tồn tại?

   a) 3, 3, 3, 3, 2 b) 1, 2, 3, 4, 5

   c) 0, 1, 2, 2, 3 d) 1, 1, 1, 1

III. Các thuật ngữ cơ bản

- Bài tập

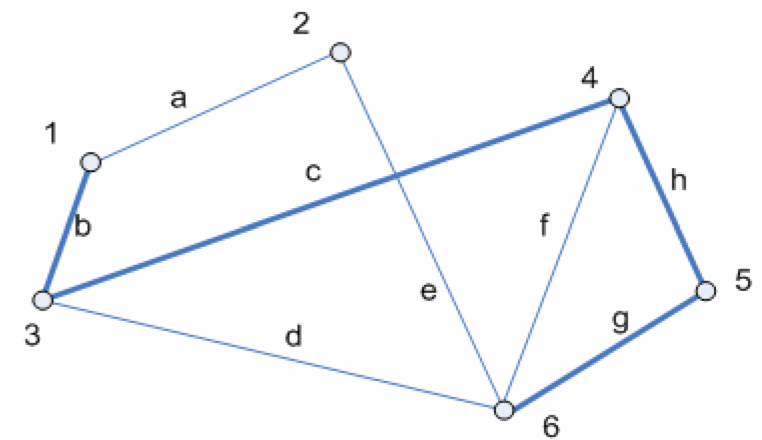
4. Có thể tồn tại đồ thị đơn 15 đỉnh, mỗi đỉnh có bậc bằng 5 hay không?
5. Trong một giải thi đấu có n đội tham dự và đã có n+1 trận đấu được tiến hành. CMR có 1 đội đã thi đấu ít nhất 3 trận.

Nội dung

IV. Đường đi, chu trình

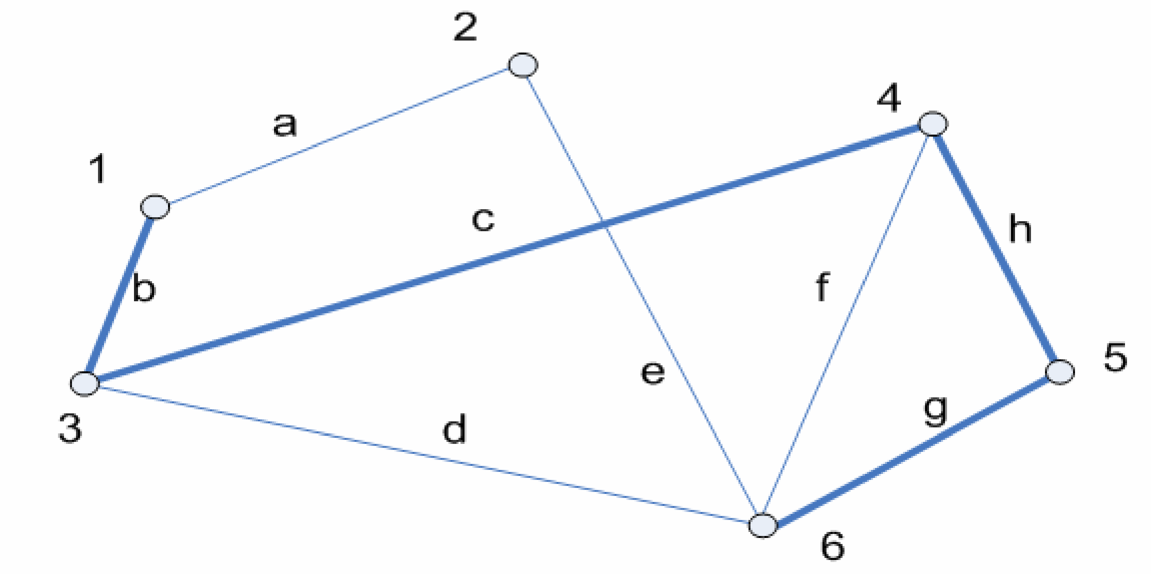
- Đường đi độ dài n từ đỉnh u đến đỉnh v trên đồ thị vô hướng G=(V,E) là dãy(theo đỉnh): $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$.
  Trong đó:
  + $u = x_0$
  + $v = x_n$
  + $(x_i, x_{i+1}) \in E$
- Hay theo cạnh: $(x_0, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, x_n)$.
- Khi đó: u gọi là đỉnh đầu, v gọi là đỉnh cuối của đường đi.

Theo đỉnh: (1, 3, 4, 5, 6)
Theo cạnh: (b, c, h, g)



IV. Đường đi, chu trình

- Đường đi có đỉnh đầu và đỉnh cuối trùng nhau gọi là chu trình.
  - Đường đi (hay chu trình) được gọi là đơn nếu nó không đi qua một cạnh nào quá một lần.



Chu trình đơn: (1, 2, 6, 3, 1)
Chu trình không phải chu trình đơn: (2, 6, 4, 3, 6, 2)

IV. Đường đi, chu trình

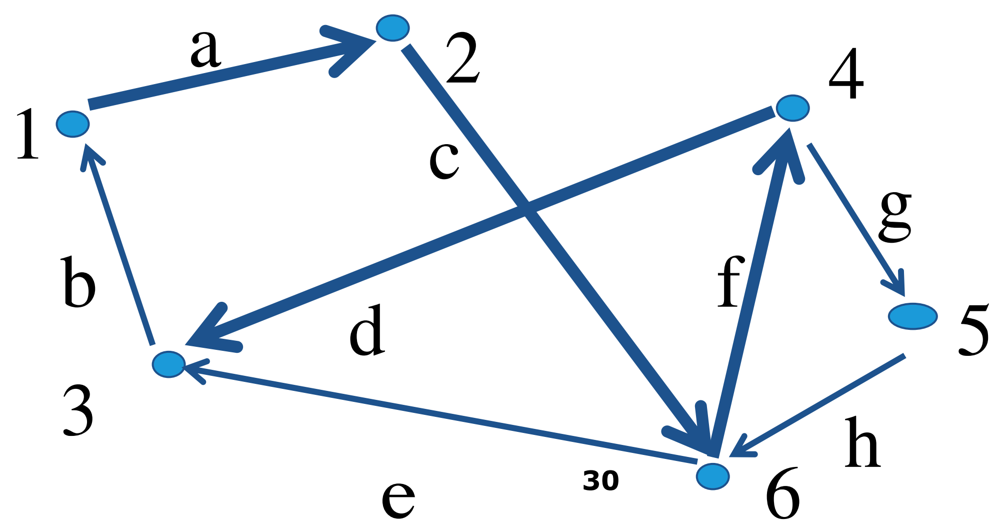
❖ Đường đi và chu trình trong đồ thị có hướng

Đường đi độ dài n ($n \in N^+$) từ đỉnh u đến đỉnh v trên đồ thị **<u>có hướng</u>** G=(V,E) là dãy:

$x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$.

Trong đó $u = x_0$, $v = x_n$, $(x_i , x_{i+1}) \in E$

Hay theo các **<u>cung</u>**: $(x_0 , x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, x_n)$.



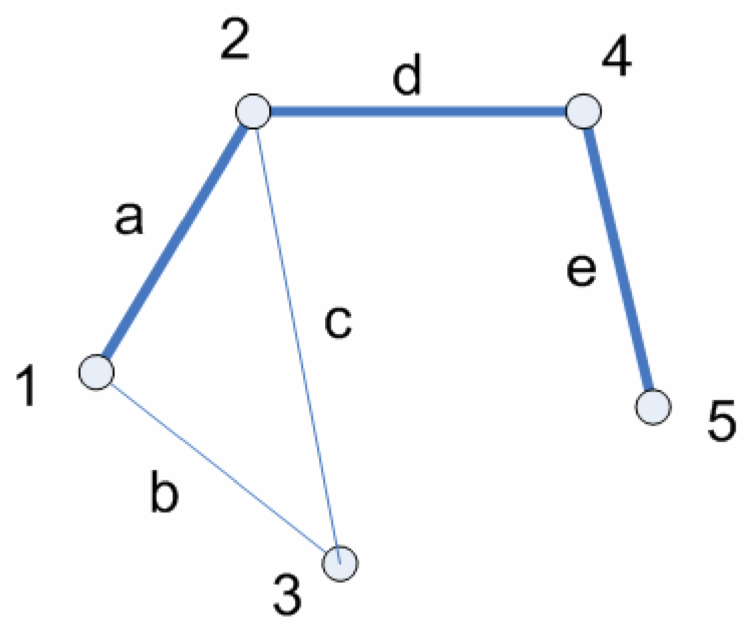
(1, 2, 6, 4, 3)
(a, c, f, d)
(1, 3, 4, 5, 6)

Nội dung

V.Đồ thị liên thông

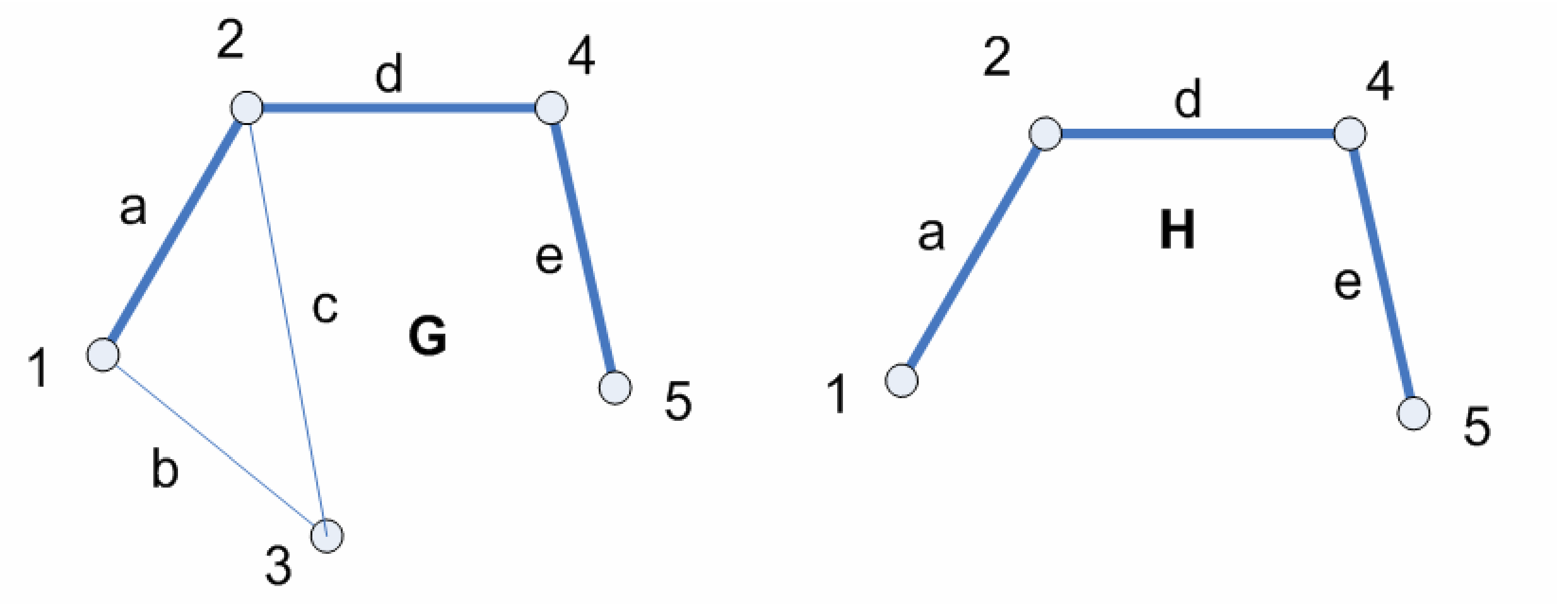
❖ Đồ thị vô hướng G=(V,E) được gọi là liên thông nếu luôn tìm được đường đi giữa 2 đỉnh bất kỳ của nó.

Đường đi: 1, 3, 2, 4, 5



V.Đồ thị liên thông

- Đồ thị H=(W,F) được gọi là **đồ thị con** của đồ thị G=(V,E) nếu : W $\subseteq$ V và F $\subseteq$ E

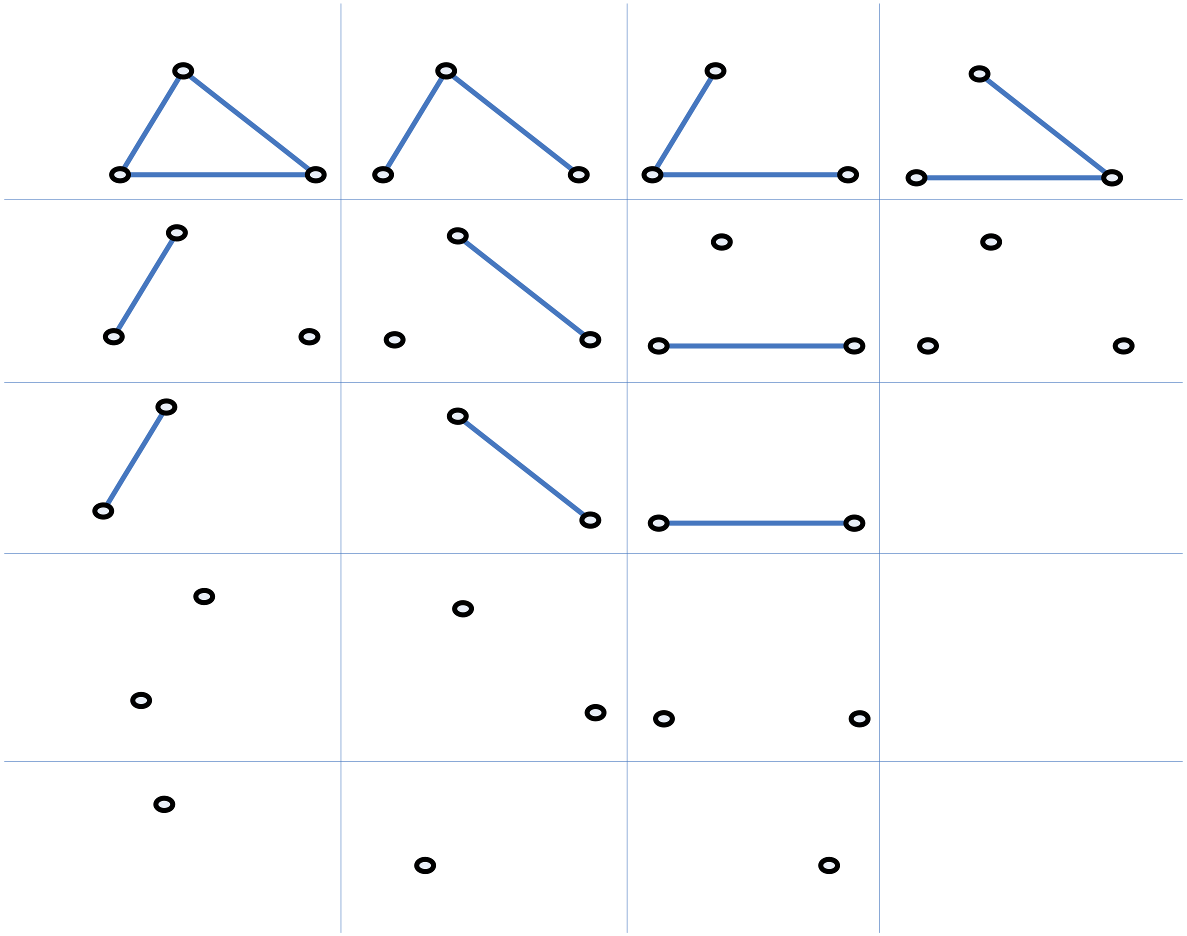


V={1, 2, 3, 4, 5} W={1, 2, 4, 5}
E={a, b, c, d, e} F={a, d, e}

VI. Một số dạng đồ thị đặc biệt

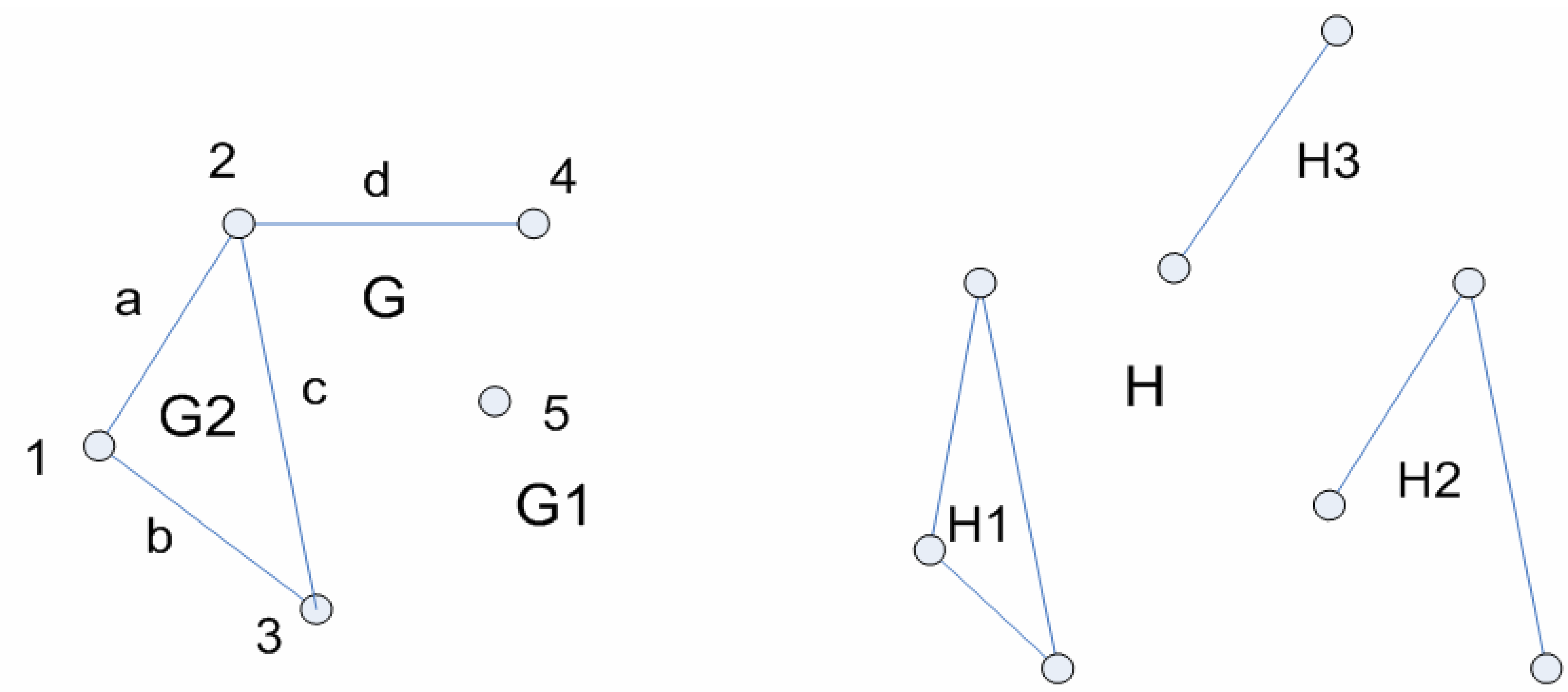
❖ Bài tập

1. Đồ thị K_3 có bao nhiêu đồ thị con có ít nhất một đỉnh ?



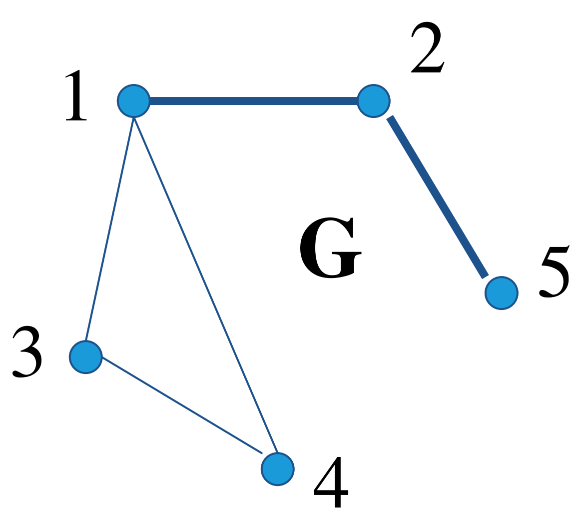
V.Đồ thị liên thông

- Một đồ thị không liên thông sẽ được phân rã thành các thành phần liên thông, và mỗi thành phần liên thông này là một đồ thị con của đồ thị ban đầu.



V.Đồ thị liên thông

- Đỉnh v được gọi là đỉnh rẽ nhánh nếu việc loại bỏ v cùng các cạnh liên thuộc với nó sẽ làm tăng số thành phần liên thông của đồ thị
- Cạnh e được gọi là cầu nếu việc loại bỏ nó sẽ làm tăng số thành phần liên thông của đồ thị

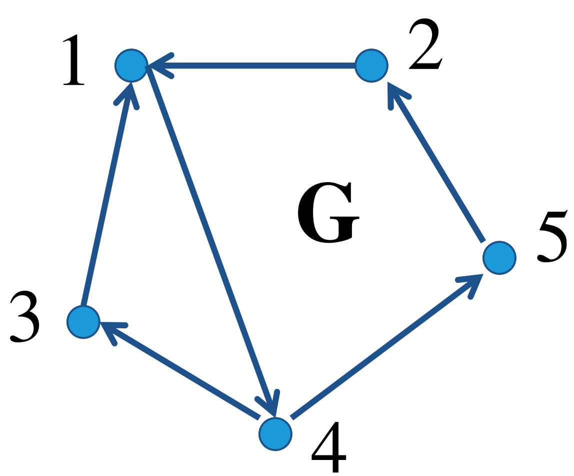


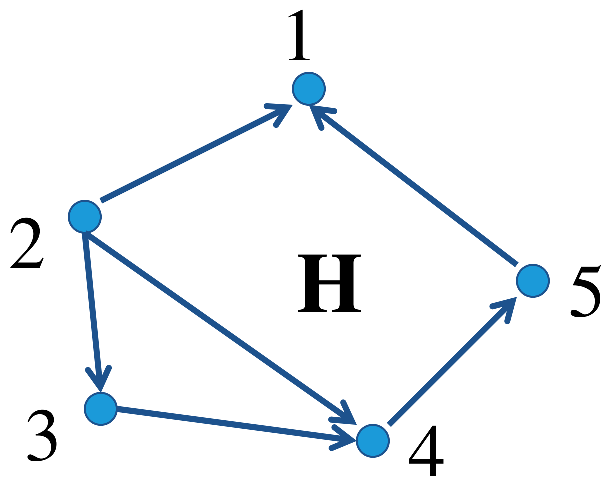
Các đỉnh rẽ nhánh?

Các cạnh là cầu ?

V.Đồ thị liên thông

- Đồ thị có hướng G=(V,E) được gọi là liên thông mạnh nếu luôn tìm được đường đi từ 1 đỉnh bất kỳ đến một đỉnh bất kỳ khác của nó.
- Đồ thị có hướng G=(V,E) được gọi là liên thông yếu nếu đồ thị vô hướng tương ứng với nó là đồ thị vô hướng liên thông.





V.Đồ thị liên thông

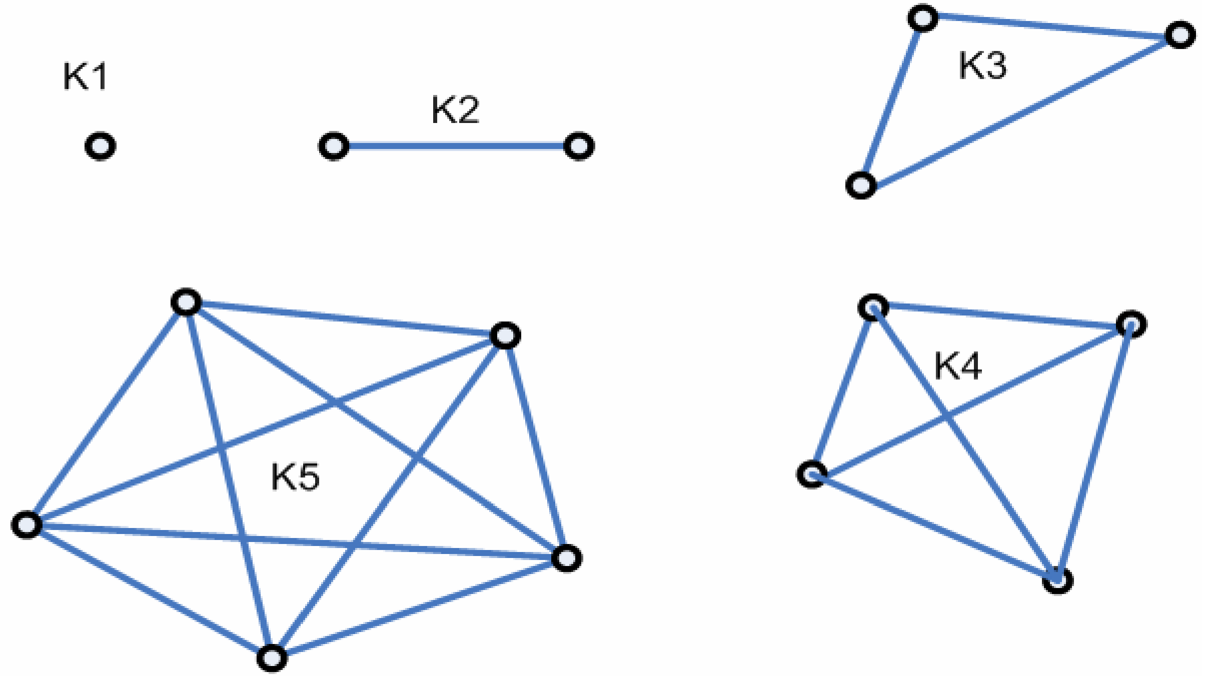
- Bài tập

1. Trong 1 đồ thị G có chứa đúng 2 đỉnh bậc lẻ (các đỉnh còn lại nếu có đều bậc chẵn). CM có 1 đường đi nối 2 đỉnh bậc lẻ đó với nhau.

Nội dung

VI. Một số dạng đồ thị đặc biệt

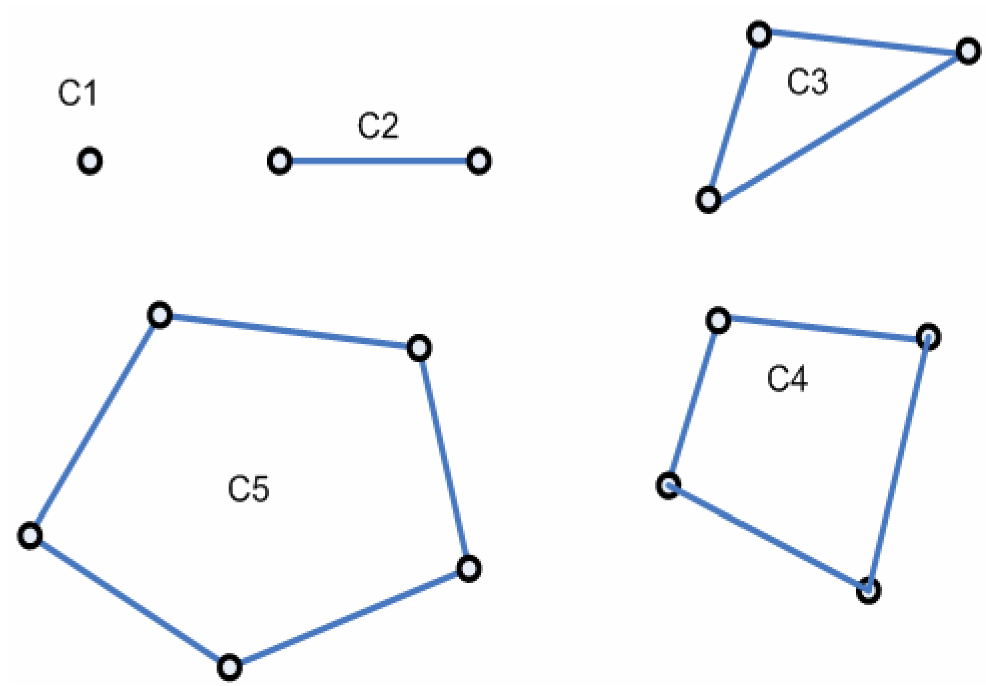
- **<u>Đồ thị đầy đủ</u>**: Một đồ thị đơn vô hướng n đỉnh được gọi là đồ thị đầy đủ nếu hai đỉnh bất kỳ đều được nối với nhau bằng 1 cạnh.
- <u>Ký hiệu</u>: K_n



VI. Một số dạng đồ thị đặc biệt

- **<u>Đồ thị vòng</u>**: Một đồ thị đơn vô hướng n đỉnh được gọi là đồ thị vòng nếu nó có duy nhất một chu trình đơn đi qua tất cả các đỉnh.
- <u>Ký hiệu</u>: C_n

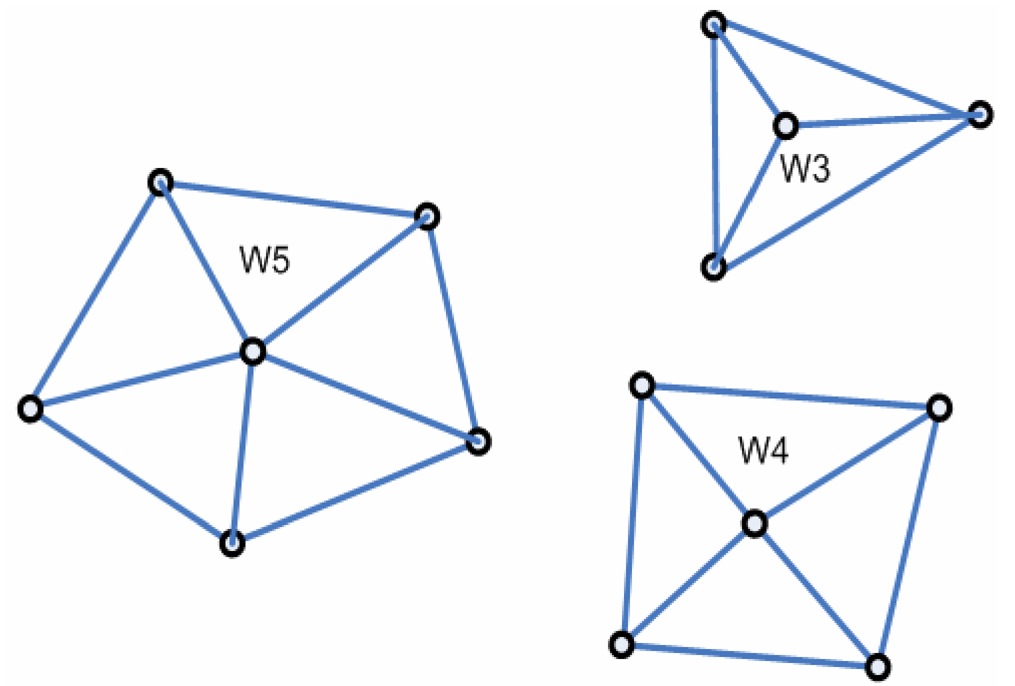
Số cạnh, số đỉnh của Đồ thị vòng ?



VI. Một số dạng đồ thị đặc biệt

- **<u>Đồ thị bánh xe</u>** với n ≥ 3 đỉnh là đồ thị thu được từ đồ thị C_n bằng cách bổ xung thêm một đỉnh mới nối với tất cả các đỉnh của C_n.
- <u>Ký hiệu</u>: W_n

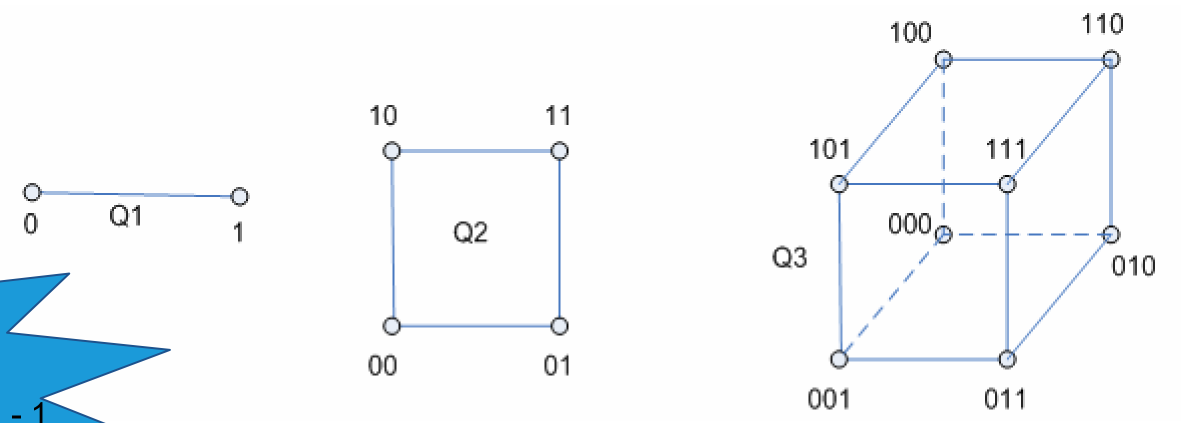
Số cạnh, số đỉnh của Đồ thị bánh xe ?



VI. Một số dạng đồ thị đặc biệt

- **<u>Đồ thị siêu khối</u>**
  Đồ thị siêu khối $k=2^n$ đỉnh là đồ thị có các đỉnh được đánh số bằng các chuỗi nhị phân độ dài n.
- <u>Ký hiệu</u>: Q_n
- Hai đỉnh kề nhau nếu 2 chuỗi nhị phân tương ứng chỉ khác nhau 1 bit.

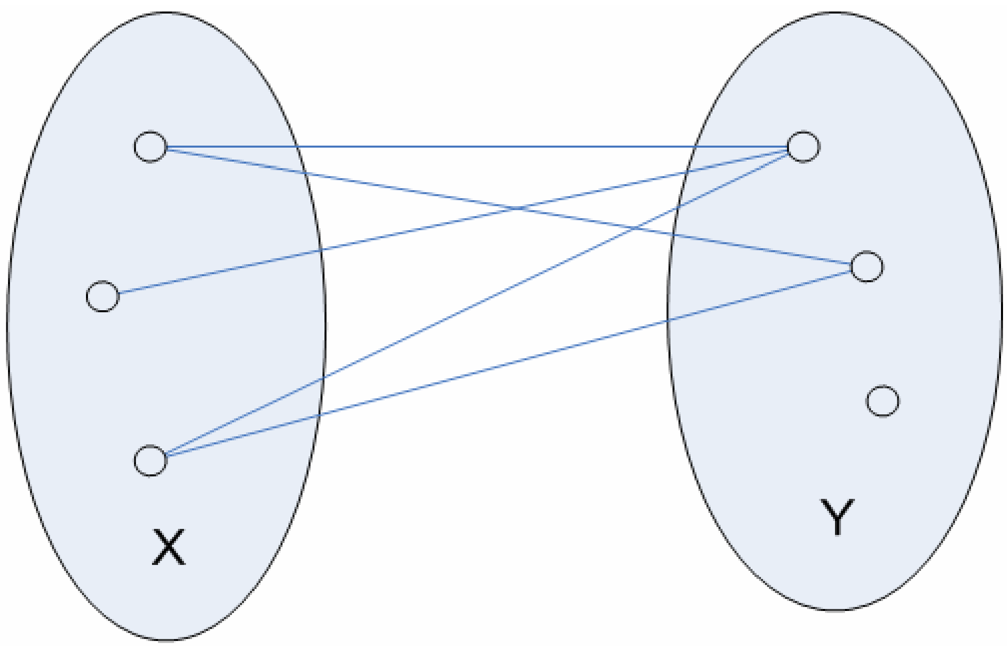
Số cạnh của
đồ thị siêu khối là: $n.2^{n-1}$



VI. Một số dạng đồ thị đặc biệt

❖ **<u>Đồ thị hai phía</u>**
Đơn đồ thị G=(V, E) gọi là đồ thị hai phía nếu:

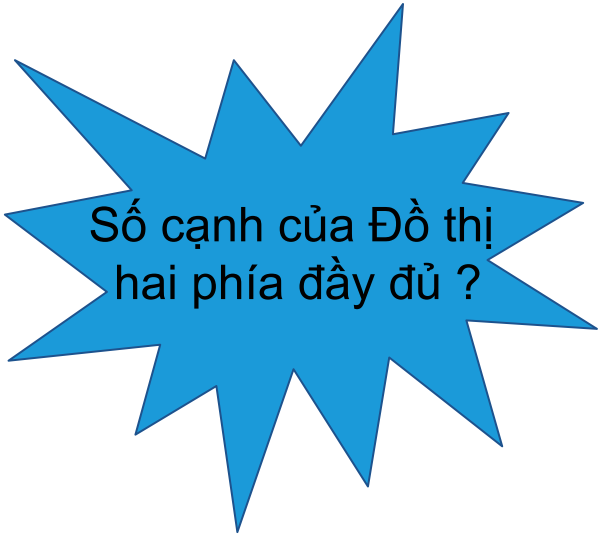
- $V = X \cup Y,\ X \neq \emptyset,\ Y \neq \emptyset,\ X \cap Y = \emptyset$
- Mỗi cạnh của G sẽ có một đỉnh thuộc X và một đỉnh thuộc Y.

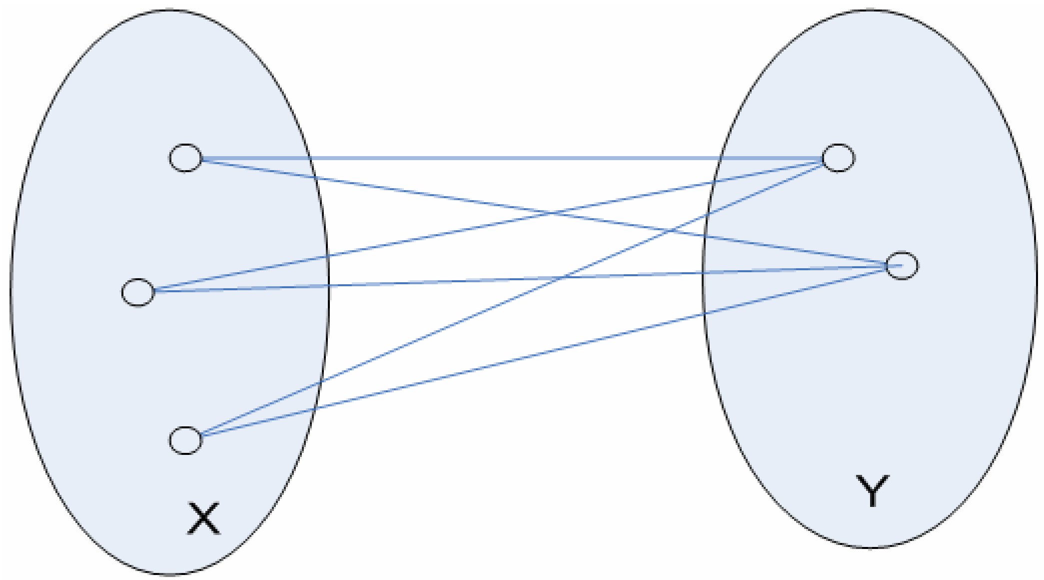


VI. Một số dạng đồ thị đặc biệt

- **<u>Đồ thị hai phía đầy đủ</u>**

  Đơn đồ thị G = (X ∪ Y, E) được gọi là <u>đồ thị hai phía đầy đủ</u> nếu: Mỗi đỉnh thuộc X sẽ được nối với mỗi đỉnh thuộc Y. Nếu |X| = m và |Y| = n thì ta sẽ ký hiệu là: $K_{m, n}$





VI. Một số dạng đồ thị đặc biệt

- **Định lý:**
  Đơn đồ thị G = (V, E) là đồ thị hai phía khi và chỉ khi nó không chứa chu trình độ dài lẻ.

- Chứng minh:
  $\forall$ Đồ thị hai phía
  $\Rightarrow$ Không chứa chu trình độ dài lẻ
  $\forall$ Đồ thị, không chứa chu trình độ dài lẻ
  $\Rightarrow$ hai phía

VI. Một số dạng đồ thị đặc biệt

❖ Thuật toán kiểm tra đồ thị hai phía

1. Chọn v là đỉnh bất kỳ. Đặt $X = \{v\}$
2. $Y = \{ u \mid u$ kề với $v, \forall v \in X\}$
3. Nếu $X \cap Y \neq \varnothing \Rightarrow$ G không là đồ thị hai phía
4. Ngược lại, đặt $X := Y$ Quay trở lại 2.
5. Nếu tất cả các đỉnh được xét hết mà không xảy ra 3. thì G là đồ thị hai phía. Ngược lại G không là đồ thị hai phía.

VI. Một số dạng đồ thị đặc biệt

- Ví dụ:

  $X = \{1\}$

  $Y = \{5\}, X \cap Y = \varnothing, \Rightarrow X{:=}Y$

  $Y = \{1, 2\}, X \cap Y = \varnothing, \Rightarrow X{:=}Y$

  $Y = \{5, 6, 7\}, X \cap Y = \varnothing, \Rightarrow X{:=}Y$

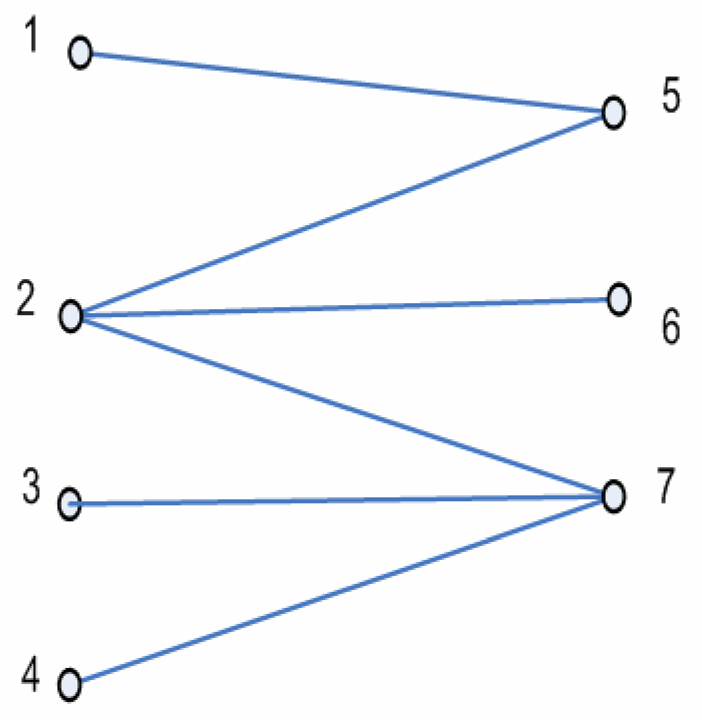
  $Y = \{1, 2, 3, 4\}$

  DỪNG

  Khi đó đồ thị là hai phía:

  $X=\{1, 2, 3, 4\}$

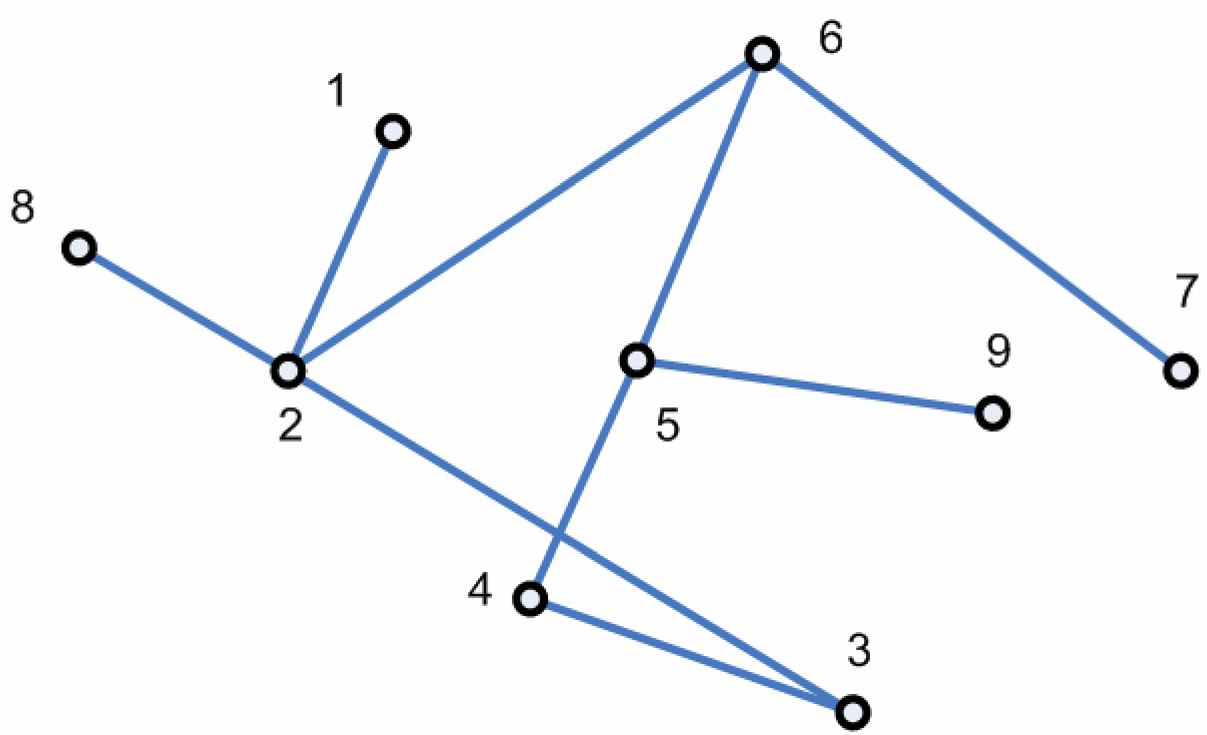
  $Y=\{5, 6, 7\}$



VI. Một số dạng đồ thị đặc biệt

❖ <u>Bài tập</u>:

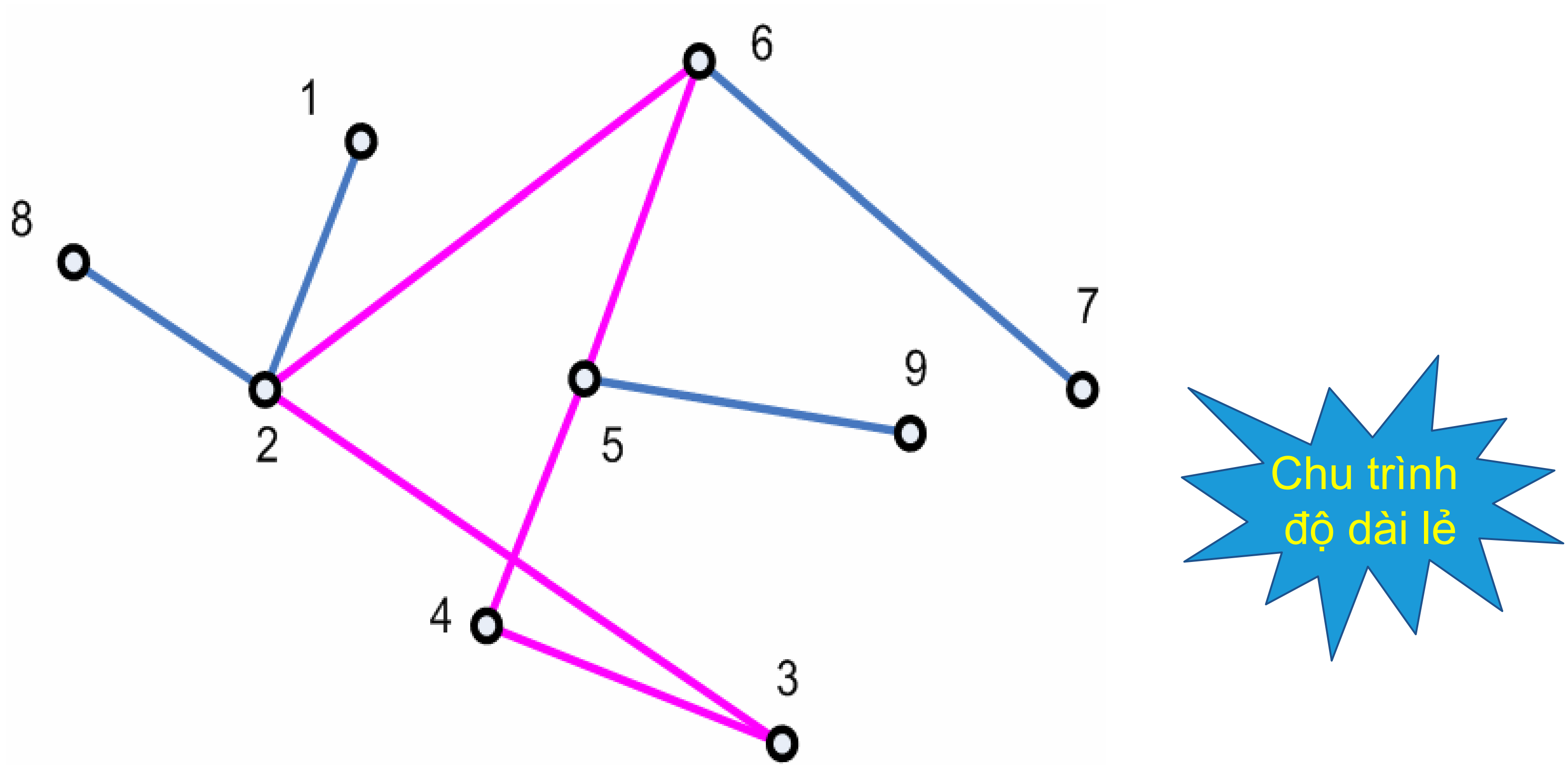
Kiểm tra đồ thị sau có phải là đồ thị hai phía hay không?



VI. Một số dạng đồ thị đặc biệt

- **Bài tập:**

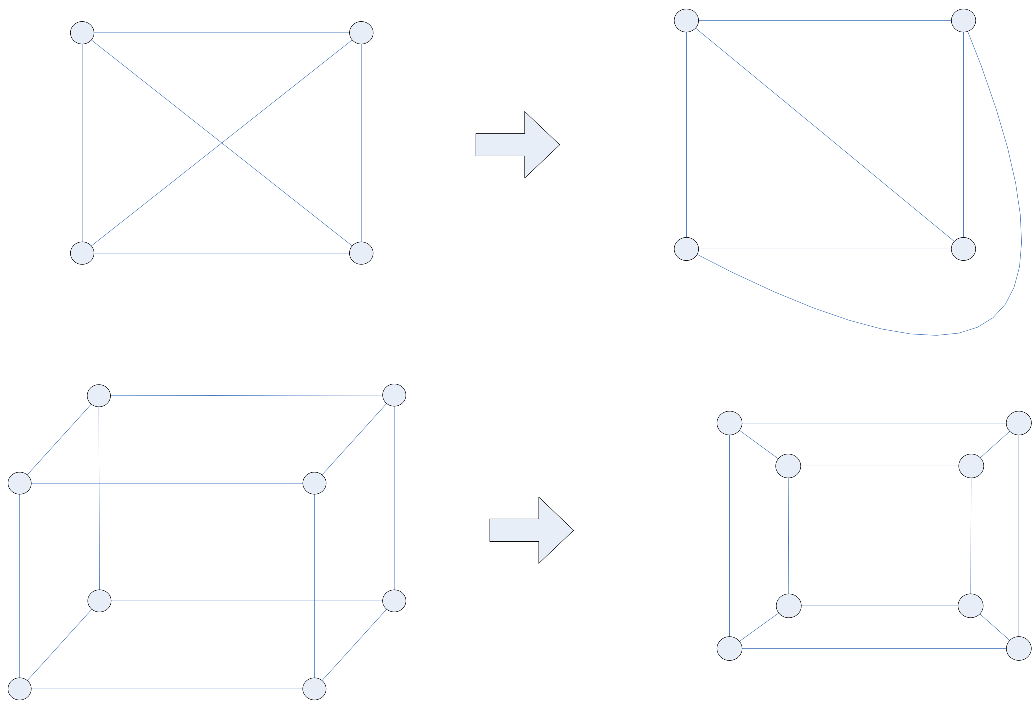
  Không phải là đồ thị hai phía



VI. Một số dạng đồ thị đặc biệt

❖ **<u>Đồ thị phẳng</u>**

Đồ thị được gọi là đồ thị phẳng nếu ta có thể vẽ nó trên một mặt phẳng mà các cạnh không giao nhau.

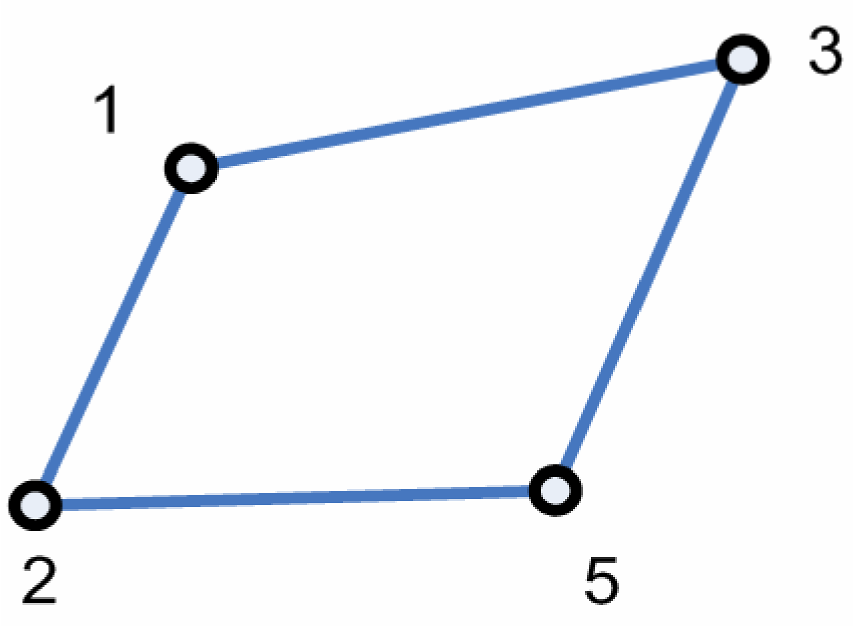


VI. Một số dạng đồ thị đặc biệt

❖ **Định lý Euler**

Giả sử G = (V, E) là đồ thị phẳng, liên thông với e cạnh và v đỉnh. Gọi f là số mặt của đồ thị. Khi đó: $f = e - v + 2$.

Số cạnh: e = 4
Số đỉnh: v = 4
Số mặt: f = 4 – 4 + 2 = 2



VI. Một số dạng đồ thị đặc biệt

- **Định lý Euler**

  Chứng minh: Bằng PP Quy nạp

- Gọi f_n, e_n, v_n lần lượt là số mặt, số cạnh, số đỉnh của đồ thị phẳng G_n do biểu diễn phẳng của đồ thị G với n cạnh sinh ra

  + Trường hợp: $e_1=1$, $v_1=2$ thì $f_1 = 1 - 2 + 2 = 1$

+ Giả sử đồ thị G_n (n cạnh) thỏa đẳng thức: $f_n = e_n - v_n + 2$.

  Thêm vào đồ thị G_n một cạnh (a_{n+1}, b_{n+1}) để được đồ thị G_{n+1}.

  Ta phải chứng minh: $f_{n+1}=e_{n+1} - v_{n+1} + 2$

  Xảy ra hai trường hợp

VI. Một số dạng đồ thị đặc biệt

❖ **<u>Định lý Euler (Chứng minh)</u>**

+ Cả 2 đỉnh a_{n+1}, b_{n+1} thuộc $G_{n:}$

$f_{n+1} = f_n + 1$

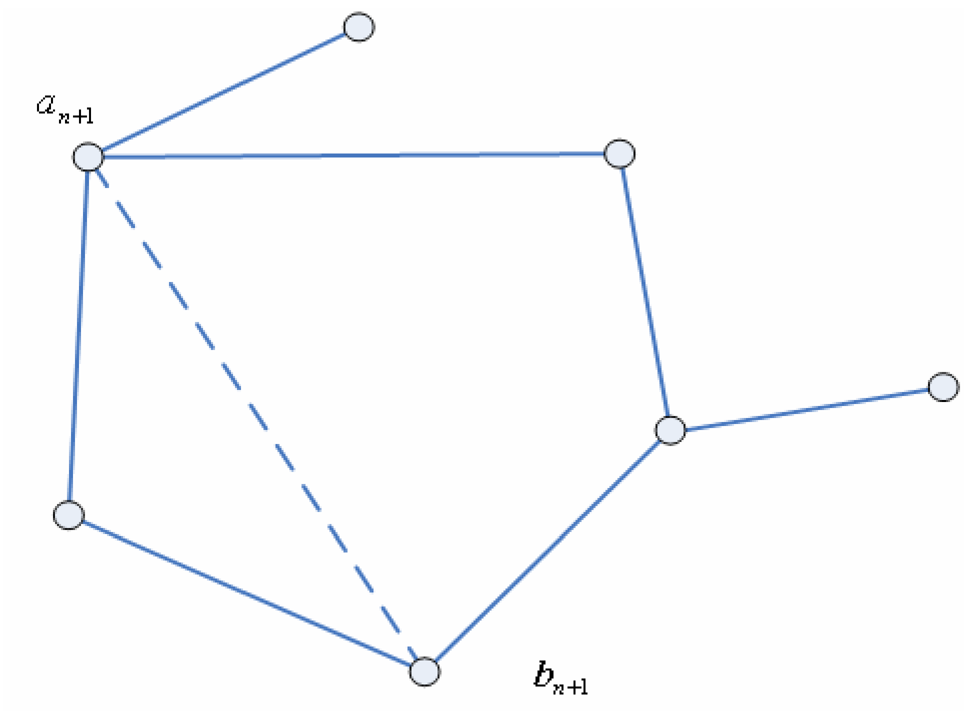
$e_{n+1} = e_n + 1$

$v_{n+1} = v_n$

$$==> f_{n+1} = e_{n+1} - v_{n+1} + 2$$

$$f_n + 1 = e_n + 1 - v_n + 2$$

$$f_n = e_n - v_n + 2$$



VI. Một số dạng đồ thị đặc biệt

❖ **Định lý Euler (Chứng minh)**

+ Cả 2 đỉnh a_{n+1}, b_{n+1} thuộc $G_{n:}$

$f_{n+1} = f_n$

$e_{n+1} = e_n + 1$

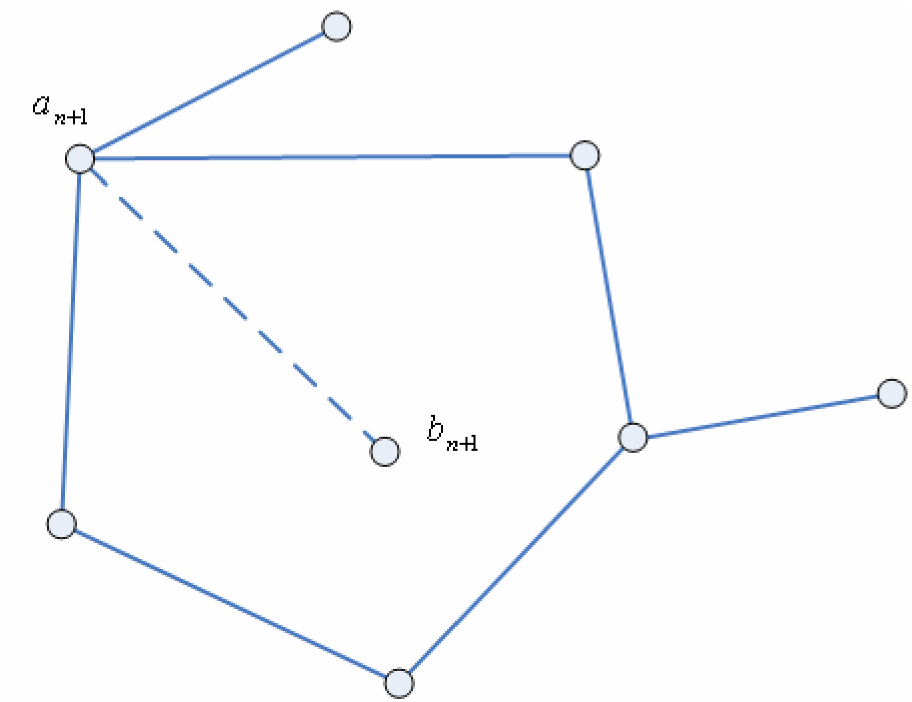
$v_{n+1} = v_n + 1$

➔ $f_{n+1} = e_{n+1} - v_{n+1} + 2$

$f_n = e_n + 1 - v_n + 1 + 2$

$f_n = e_n - v_n + 2$

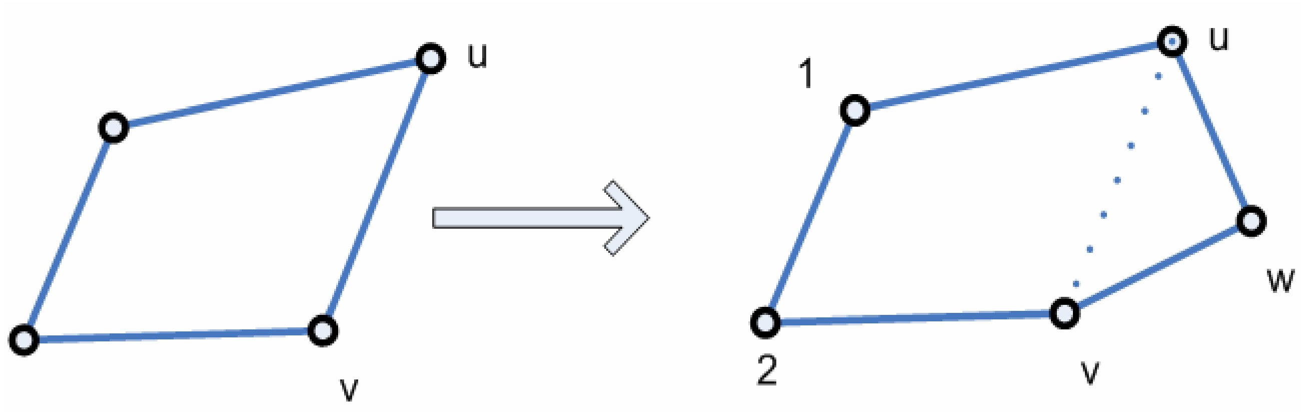
➔ ĐPCM



VI. Một số dạng đồ thị đặc biệt

❖ **<u>Định lý Kuratowski</u>**

Phép chia cạnh (u, v) là việc ta bỏ đi cạnh (u, v) và thêm vào một đỉnh mới w cùng với hai cạnh (u, w), (w, v).



❖ <u>Định nghĩa đồng cấu</u>

Hai đồ thị được gọi là đồng cấu nếu chúng có thể thu được từ cùng một đồ thị nào đó nhờ các phép chia cạnh.

VI. Một số dạng đồ thị đặc biệt

- Định lý Kuratovski
  Điều kiện cần và đủ để một đồ thị là phẳng là đồ thị này không chứa bất kỳ một đồ thị con nào đồng cấu với $K_{3,3}$ *và* K_5

VI. Một số dạng đồ thị đặc biệt

- Các dạng đồ thị đặc biệt
  - Đồ thị đầy đủ (K_n)
  - Đồ thị vòng (C_n)
    - Đồ thị bánh xe (W_n)
  - Đồ thị siêu khối (Q_n)
  - Đồ thị hai phía
    - Đồ thị hai phía đầy đủ ($K_{m,n}$)
  - Đồ thị phẳng

VI. Một số dạng đồ thị đặc biệt

❖ <u>Bài tập</u>

1. Số cạnh của đồ thị K_8 ?
2. Số cạnh của đồ thị C_{2007} ?
3. Số cạnh của đồ thị W_{100} ?
4. Cho đồ thị G phẳng, liên thông có 20 đỉnh, bậc của mỗi đỉnh bằng 3. Đồ thị biểu diễn phẳng của G có bao nhiêu mặt?
5. Cho đồ thị phân đôi p đỉnh và q cạnh. CM:

   $q \leq p^2/4$. Dấu = xảy ra khi nào?
6. Cho đồ thị G có n đỉnh, m cạnh với $m \geq n$. Chứng minh G có một chu trình.
7. Có bao nhiêu đồ thị đơn gồm 5 đỉnh và có 4 hoặc 6 cạnh ?