Notación asintótica

Notación asintótica

Cuando analizamos algoritmos para instancias grandes de su entrada, de manera que sólo el orden de crecimiento sea relevante, decimos que hacemos un **análisis asintótico** de su eficiencia.

Para comparar la eficiencia de los algoritmos utilizamos una notación que permita capturar la noción intuitiva de orden de crecimiento.
Hay varias clases de funciones que capturan distintas propiedades. A continuación veremos las definiciones de las notaciones O, Ω y Θ, que utilizaremos.

Definición **1 (O)**
Sean $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Decimos que f tiene orden de crecimiento $O(g)$ (y escribimos $f \in O(g)$), si existen constantes $c \in \mathbb{R}$, $n_0 \in \mathbb{N}$, tales que:

$$\forall\, n \geq n_0 \quad \cdot \quad 0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)$$

Definición **2 (Ω)**
Sean $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Decimos que f tiene orden de crecimiento $\Omega(g)$ (y escribimos $f \in \Omega(g)$), si existen constantes $c \in \mathbb{R}$, $n_0 \in \mathbb{N}$, tales que:

$$\forall\, n \geq n_0 \quad \cdot \quad 0 \leq c \cdot g(n) \leq f(n)$$

Definición **3 (Θ)**
Sean $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Decimos que f tiene orden de crecimiento $\Theta(g)$ (y escribimos $f \in \Theta(g)$), si $f \in O(g)$ y $g \in O(f)$.

Pisos y techos

Definición **4 (Piso de x)**
Sea $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor \; = \; max\, \{n \mid n \leq x, n \in \mathbb{Z}\}$

Definición **5 (Techo de x)**
Sea $x \in \mathbb{R}$, $\lceil x \rceil \; = \; min\, \{n \mid n \geq x, n \in \mathbb{Z}\}$

Para cualquier $x \in \mathbb{R}$ se cumple que:

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x + 1$$

Logaritmo

Utilizaremos la siguiente notación:

$$\lg n = \log_2 n \text{ (logaritmo en base 2)}$$
$$\ln n = \log_e n \text{ (logaritmo natural)}$$

Propiedades de logaritmo:

$$\log_a(x.y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a x^n = n.\log_a x$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$$x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$$

$$\log_a(1/x) = -log_a x$$

$$\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$$

Exponenciales

$$a^{-1} = 1/a$$

$$(a^m)^n = a^{m.n}$$

$$a^m.a^n = a^{m+n}$$

Series

$$\sum_{k=0}^{n} a + b.k = (n+1).(a + \frac{1}{2}.b.n)$$

$$\sum_{k=0}^{n} a.x^k = \frac{a - a.x^{n+1}}{1-x} \quad \text{para } x \neq 1$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n.(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n.(n+1).(2.n+1)}{6}$$