1. Типы моделей (аналитическая, имитационная, физическая,...). Методы моделирования. Пакеты прикладных программ для моделирования. Моделирование случайных величин с заданным вероятностным распределением. Порядок построения имитационной модели пуассоновского потока событий.

Модель - физический или абстрактный образ моделируемого объекта, удобный для проведения исследований и позволяющий адекватно отображать интересующие исследователя физические свойства и характеристики объекта. Моделирование - процесс замещение объекта исследования его моделью и проведение исследований на модели с целью получения необходимой информации об объекте. **Типы моделей**: - Физическая: 1) сама исследуемая система (например, производственный эксперимент); 2) другая система с подобной физической природой (макет: продувка моделей самолетов в аэродинамических трубах) - Математическое моделирование - процесс установления соответствия данной реальной системы некоторой математической модели и исследование этой модели, позволяющее получить характеристики реальной системы - Компьютерное моделирование - математическая модель системы, представлена в виде программы на ЭВМ, позволяющей проводить с ней вычислительный эксперименты - Численное моделирование - использование методов вычислительной математики в численном решении некоторых математических уравнений при заданных значениях параметров и начальных условий - Имитационное моделирование - воспроизведение на ЭВМ элементарных явлений, составляющих реальный исследуемый процесс (объект), с сохранением последовательности протекания событий во времени. - Статистическое моделирование - это вид моделирования для получения статистических данных о процессах в моделируемой системе.

Пакеты прикладных программ для моделирования: - Python: scipy, sympy, matplotlib - MatLab: SimuLink - GPSS (general Purpose Simulation System, система моделирования общего назначения) - язык моделирования, используемый для имитационного моделирования различных систем, в основном систем массового обслуживания. **Моделирование случайных**

величин с заданным вероятностным распределением: Моделирование случайных величин с заданным вероятностным распределением — это процесс генерации выборки данных, которая соответствует определённой вероятностной модели. Этот процесс используется для симуляции реальных систем, проведения экспериментов, анализа и решения задач, связанных со случайностью. 1) Генерация случайной величины U, равномерно распределенной на (0, 1) 2) Применение обратной функции $X = F^{-1}(U)$ 3) Полученная величина X имеет заданное распределение Использование экспоненциального распределения $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$ $F^{-1}(u) = -\frac{ln(1-u)}{\lambda}$ Генерация: $X = -\frac{ln(1-U)}{\lambda}$ Вероятностное распределение (ВР) описывает, как значения СВ распределены в пространстве возможных исходов. Она показывает, с какой вероятностью случайная величина принимает те или иные значения. - для дискретных ВР представлено функцией вероятностей $P(X = x_i)$, которая указывает вероятность каждого возможного значения x_i . - для непрерывных СВ используется функция плотности вероятности f(x), которая показывает насколько “плотно” распределены вероятности вокруг значения x. Распределение Пуассона: вероятность k событий за фиксированный период времени:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Порядок построения имитационной модели пуассоновского потока событий 1) Генерируем случайное вещественное число ϵ_i в диапазоне (0, 1). Преобразуем это число в СВ с показательным распределением с помощью обратного отображения:

$$u_i = -\frac{ln(\epsilon_i)}{\lambda}$$

u_i - интервал между наступлениями событий 2) Получаем значения момента наступления очередного события, i = 1, 2, ...

$$t_i = T_1 + \sum_{j=0}^{i} u_j$$

3) Генерируем массив значений u_i и t_i пока $t_i \leq T_2$ Полученный массив есть модель Пуассоновского потока

2. Моделирование простейших потоков событий (отказов систем, СМО,...). Определение пуассоновского потока. Уравнения Колмогорова для состояний систем массового обслуживания (стационарном и не стационарном). Структура и примеры СМО.

Пуассоновский поток - процесс наступление определенных событий длительность между которыми (τ) распределена по показательному закону с параметром λ. А основная характеристика потока - это количество событий, наступивших за наблюдаемый промежуток времени, и если речь идет о пуассоновском поток, то количество наступлений событий (как случайная величина), вероятность наступления определенного числа событий распределены по закону Пуассона. За пуассоновский поток отвечает случайная величина - количество наступлений событий вероятностное распределение которой распределено по закону Пуассона с параметром λ Вероятностное распределение - это закон, описывающий область значений случайной величины и соответствующие вероятности появления этих значений.

Пуассоновский поток характеризуется тем, что длительности между наступлениям событий $(\tau_1, \tau_2, ...\tau_n)$ распределены по экспоненциальному/показательному закону с параметром λ.

$$P(\tau < t) = F(t) = 1 - e^{-\lambda \times t}$$

τ - НВС, распределенная по показательному закону с параметром λ **Показательным (экспоненциальным) распределением** называют распределение вероятностей НСВ τ, которое описывается **плотностью распределения** $f(t)$ и функцией распределения $F(t)$. **Плотность распределения** показывает вероятность того, что НСВ τ пример значение из отрезка $[a, b]$.

$$P(a \geq \tau \geq b) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0 \\ \int_a^b f(t)\mathrm{dt} = \int_a^b \lambda * e^{-\lambda \times t} dt & \text{при } t \leq 0 \end{cases}$$

где λ = const.

Функция распределения $F(t)$ показывает вероятность, что НСВ τ принимает значение меньшее, чем t.

$$P(\tau < t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0 \\ F(t) = 1 - e^{-\lambda t} & \text{при } t \leq 0 \end{cases}$$

Физический смысл λ - интенсивность потока (среднее число событий в единицу времени). Пуассоновское распределение описывает вероятность того, что за время $\triangle$t произойдет определенное количество событий k.

$$P(X(\triangle t) = k) = \frac{(\lambda \times \triangle t)^k}{k!} \times e^{-\lambda \times \triangle t}$$

Количество событий $X(\triangle t)$ зависит от того, сколько экспоненциально распределенных временных интервалов τ (средняя длительность каждого 1 / λ) можно вместить в промежуток длительности $\triangle$t.

3. Состояние динамической системы. Постановка задачи управления для нелинейного объекта на принципах задания целевых инвариантов и вариационного исчисления (на примере). Роль функционала качества в конструировании управления.

ДС - система любой природы, состояние которое изменяется. Состояние динамической системы: - **Состояние** (совокупность переменных) детерминированной **динамической** системы (ДС) изменяется во времени по некоторому заданному закону. - **Регулярные ДС** - устойчивые (малые возмущения со временем затухают, ДС возвращается к исходному регулярному (стационарному) поведению) - **Хаотические ДС** обладают экспоненциальной чувствительностью к начальным условиям (изменение в начальных условиях усиливается экспоненциально во времени). **Примеры хаотического поведения**. Броуновское движение, изменения погоды, колебания орбит в астрономических тел, поведение фондовой биржи, биологические процессы в организме человека, криптографические системы. **Объекты исследований**: открытые сложные нелинейные системы с обратными связями.

?обратные связи? **Система** (от греч - целое, составленное из частей, соединение) - множество элементов, находящихся в отношениях и связях с друг другом, образующих определенную целостность, единство. *Любая система может быть охарактеризована* некоторым набором величин. Величины, которые можно измерить, называют физическими: “длина”, “температура”, “цена”, скорость, ... Все величины можно раздели на параметры и переменные. Переменные - величины, которые могут изменяться, Параметры - постоянные величины в рамках задачи. Независимые переменные - переменные, меняющиеся независимо от системы. Зависимые переменные - зависят от независимых и изменяются с изм независимых величин. Пример: температура и давление зависимые, время - независимая

Сложный динамический объект (по Растригину) - нестационарность - многомерность - многосвязность - нелинейность - хаотичность - слабая формализуемость и управляемость Свойства 1) объект не имеет полного аналитического описания и полностью описывающей его модели, т.е. для построения его адекватной модели недостаточно его априорной инф-и 2) нестационарность описывающего его случайного процесса (слабопредсказуемость) 3) нелинейность имеющихся моделей описания 4) многомерность, многосвязность **Постановка задачи управления для нелинейного объекта...** Если некоторому числу x из области D ставится в соответствие по определенному правилу или закону **число y**, то говорят, что задана **функция y = f(x)**. Если функция y(x) ставится в соответствие по определенному правилу или закону **число J**, то говорят, что задан **функционал J = J(y)** Пример: определенный интеграл

$$V[y] = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)} dx$$

Если функция y(x) ставится в соответствие по определенному правилу или закону другая функция z(x), то говорят, что **задан оператор z = L(y), z = Ly** *Пример*: неопределенный интеграл. Дифференциальный оператор

$$Ly = y'' + P(x)y' + q(x)y$$

$$Lu = \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta y^2}$$

Пусть A - множество элементов произвольный природы, и пусть каждому элементу $u \in A$ приведено в соответствие *одно и только одно число J(u)*. В этом случае говорят, что на множества A (область определения функционала J) задан функционал J(u). Число J(u) называется *значением функционала J на элементе u*. Функционал J называется вещественным, если все его значения вещественны. Функционал J называется линейным, если его область определения есть линейное множество.

$$J(\alpha u + \beta v) = \alpha J(u) + \beta J(v)$$

Задача вариационного исчисления - исследование функционалов на экстремум и отыскивание тех функций, на которых этот экстремум достигается Примеры постановок задач 1) Задача о брахистохроне - плоской линии, по которой материальная точка быстрее всего соскальзывает по действием только силы тяжести из точки A в точку B (B ниже A и точки не лежат на одной вертикально прямой) Если начальная и конечная точки заданы, то поскольку прямая есть кратчайшее расстояние между ними, то можно было бы думать, что движение, совершающееся по ней, требует наименьшего времени. На самом деле это не так. Галилей. 2) Задача о геодезической линии - линии наименьшей длины, расположенной на заданной поверхности и соединяющей две данные точки 3) Задача Дидоны - легендарной карфагенской царевны, которой понадобилось ремешком фиксированной длины ограничить участок земли наибольшей площади. Среди замкнутых плоских кривых, имеющих заданную длину, найти кривую, охватывающую максимальную площадь.(минимальный периметр) Формализация: найти фигуру наибольшей площади, которую можно ограничить кривой заданной длины/ найти фигуру заданной площади, которая имеет наименьшую длину границы. Пусть (x(t), y(y)) - решение изопериметрической задачи на плоскости

$$\int_0^T \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}dt \to (min)$$

$$\int_0^T y(t)x(t)dt = C$$

$$x(0) = x(T), y(0) = y(T)$$

Сложности: бесконечное число переменных (решением является функция). Среди каких кривых искать решение? **Изопереметрическая теорема в пространстве**: Из всех тел равного объема наименьшую поверхность имеет шар 4) Задача Чаплыгина. Определить замкнутую кривую, по которой должен двигаться центр масс летательного аппарата, чтобы за время T облететь наибольшую площадь, если задана постоянная скорость ветра q. Скорость летательного аппарата постоянна и равна V_0.

Классическая простейшая вариационная задача. Лагранж, аналитическая механика, 1788 Механическая система движется по траектории x(t), в которой функционал S называемый действием достигает своего минимума

$$S(x) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x(t))dt$$

где L - лагранжаин системы (разность кинетической и потенциальной энергии). Соответствующие уравнения Эйлера-Лагранжа описывают эволюцию системы во времени Лагранж: метод множителей Лагранжа (Замена сложной задачи на условный экстремум задачей поиска обычного экстремума) Задача поиска условного экстремума $F(x) \to \mathrm{extr}, F_0(x) = 0$, сводится к задаче поиска экстремума функции $F(x) + \lambda F_0(x)$, где λ_0 - новая переменная, называемая множителем Лагранжа.

Роль функционала качества управления в конструировании управления Поведение объекта = управление 1744 Мопертюн (фр 18 век) Действие (функционал) - мера поведение физической системы. Принцип наименьшего действия (ПНД) - очень удобная математическая модель описания того, почему система ведет себя так, а не иначе: 1) каждый объект ведется себя экономно в том смысле, что для выбранного поведения *существует функционал, достигающий экстремума на этом поведении*; 2) если функционал известен, то его экстремали следует искать на решениях некоторого ДУ 2-го порядка (теорема Эйлера-Лагранжа) 3) если нужно определенно заданное поведение объекта, то следует задать такой функционал, экстремали которого и дадут нужное поведение объекта (управление) * Современные исследования. Задавая произвольные функционалы, можно выявить новые свойства объекта на основе ПНД.

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx$$

4. Элементы моделей массового обслуживания. Типовая модель системы массового обслуживания типа. Роль пуассоновского процесса в моделировании систем. Основные элементы СМО: входной поток заявок, очереди заявок, ожидающих обслуживание, канала (приборы) обслуживания, выходной поток обслуженных заявок. Поток событий - последовательность однородных событий, появляющихся одно за другим в случайный моменты времени; наглядно изображаются рядом точке с абсциссами $\theta_1, \theta_2, \ \dots, \ \theta_n$. $T_1 = \theta_{i+1} - \theta_i$ - интервалы между событиями. $\theta_1; \theta_2 = \theta_1 + T_1; \theta_3 = \theta_1 + T_1 + T_2;$ - последовательность случайных величин, моменты наступления событий в одной реализации случайного процесса. Рассматривается простейшая задача в теории массового обслуживания - задача о функционировании одноканальной СМО с отказами. Пусть система имеет всего один канал обслуживания (s = 1) и на нее поступает пуассоновский поток заявок с интенсивностью λ. Заявка, заставшая канал занятым, получает отказ и покидает систему. Обслуживание заявки продолжается за

время t, следовательно, “поток обслуживания” - простейший с интенсивностью μ.

5. Автоколебательные системы. Определение, назначение и моделирование. Примеры математических описаний автоколебательных систем. Практическое применение АКС. Отличие АКС от колебательных систем.

Автоколебательные системы - колебательные системы, совершающие незатухающие колебания за счет действия источника энергии, не обладающего колебательными свойствами (постоянное, равномерное, непериодическое влияние). - часовые механизмы (незатухающие колебания маятника за счет постоянного действия тяжести заводной гири) - смычковые и духовые музыкальные инструменты (колебания скрипичной струны под воздействием равномерно движущегося смычка...) - паровая машина - механические устройства с вибрационными эффектами (флаттер и бафтинг элементов конструкции летательного аппарата) - электронные генераторы при постоянном напряжении питания - биологические (работа сердца и легких) - астрономические (движения планет) Свободные (или собственные) - это колебания в системе под действием внутренних сил после того, как система выведена из состояния равновесия (в реальных условиях свободные колебания всегда затухающие).

Вынужденные колебания: вызваны периодическим внешним воздействием и происходят с частотой этого воздействия.

6. Постановка задач линейного программирования (ЗЛП). Отличие от задачи нелинейного программирования. Пример задачи нелинейного программирования. Функции Phyton, MatLab для решения задач ЗЛП.

Задачей линейного программирования (ЛП) называется задача минимизации или максимизации линейного функционала при линейных ограничениях. Постановка линейной задачи: $Y = b \times X + \epsilon$ Постановка нелинейной задачи: $Y = f(X, b, \epsilon)$, где вид f - нелинейный. Линейные модели? 1) Чем дальше в лес, тем больше дров 2) По доходу и расход

Основное различие между линейным и нелинейным программированием состоит в том, что линейное программирование помогает найти лучшее решение из набора параметров или требований, которое имеют линейную зависимость, в то время как нелинейное программирование помогает найти лучшее решение из набора параметров или требований, которые имеют нелинейные отношения. Транспортная задача имеет целью минимизацию транспортных издержек при перевозках однотипных грузов от нескольких поставщиков (с различных складов), расположенных в разных местах, к разным потребителям.

7. Постановка простейшей задачи вариационного исчисления. Примеры практического применения. Роль уравнения Эйлера-Лагранжа в исследовании функционала на экстремум. Привести пример конкретного практически используемого функционала качества (напр., управления).

8. Верификация, валидация конструируемых моделей. Статистический анализ результатов моделирования на примере проверки потока на свойства пуассоновского. Алгоритм проверки статистической гипотезы. Функции проверки статистической гипотезы в ППП.

Адекватность - соответствие или сходство отображения (образа, знания) оригиналу, благодаря чему они имеют характер объективных истин. Под адекватностью модели понимают правильное качественное и количественное описание объекта(процесса) по выбранному множеству характеристик с некоторой разумной степенью точности. При этом имеется в виду адекватность не вообще, а адекватность по тем свойствам модели, которые являются для исследователя существенными. Полная адекватность означает тождество между моделью и прототипом. **Оценка адекватности** полученного решения.

Ретроспективные расчеты по модели, сопоставление с имеющимися результатами других исследователей, предыдущими данным, расчетами по другим моделям, экспертным моделям, экспертными оценками и т.д. **Верификация модели** - проверка ее истинности, адекватности. Верификация имитационной модели есть проверка соответствия ее поведения предположениям экспериментатора. Когда модели организована в виде вычислительной программы для компьютера, то сначала исправляют ошибки в ее записи на алгоритмическом языке, а затем переходят к верификации. Это первый этап действительной подготовки к имитационному эксперименту. Подбираются некоторые исходные данные, для которых могут быть предсказаны результаты расчета. Если окажется, что ЭВМ выдаст модель неверна, т.е. она не соответствует заложенным в нее ожиданиям. В обратном случае переходят к следующему этапу проверки работоспособности модели - ее валидации.

9. Имитационное моделирование. Временные диаграммы на примере модели пуассоновского потока (моменты поступления и обслуживания заявки, проецируемые на одну временную ось). Примеры имитационных моделей.

Аналитическая модель (АМ)	Имитационная модель (ИМ)
Совокупность функциональных соотношений, логических условий, описывающих связи между параметрами, переменными и показателями эффективности системы S	программы (алгоритмы), позволяющие имитировать на ЭВМ поведение отдельных элементов системы S и связей между ними в течение заданного времени моделирования
Условия применения	

Аналитическая модель (АМ)	Имитационная модель (ИМ)
- сравнительно простые (как правило, линейный или корректно линаризуемые) системы);- упрощенные примитивы реальных систем с целью изучения некоторых свойств нервной системы	- широкий класс систем практически любой сложности, аналитические модели которых частично или полностью не определенны;- в случаях, когда практическое построение и/или использование АМ невозможно
Достоинства	
универсальность;высокая степень общности и значимости результатов	- законы функционирования всей системы в целом могут быть неизвестными;возможности исследования:- системы на различных уровнях ее детализации;- динамики взаимодействия элементов системы времени и пространстве;- оценивания характеристик системы в разные моменты времени
Недостатки	
- чувствительность к степени сложности;- частичная возможная неадекватность реальной системе	- дороговизна, требует больших временных затрат;- меньшая степень общности пр сравнению с АМ: выявляют общие закономерности функционирования классов систем;- не существует надежных методов оценки адекватности ИМ.

10. Моделирование временного ряда. Метод МНК – условие применимости. (на примере). Всегда ли применение МНК корректно?

Временной ряд (ВР) - последовательность упорядоченных во времени числовых показателей (вообще говоря, случайных), характеризующих состояние изучаемого явления (процесса) в динамике, например $y_1, y_2, \dots, y_k$. Общий вид ВР - случайный процесс (с дискретным временем):

$$y(k\triangle) = f(k\triangle) + \epsilon(k\triangle), k = 0, 1, ...; \triangle > 0$$

где $y_k = Y(k\triangle)$ - временной ряд; $f = f(k\triangle)$ - тренд ВР; $\epsilon(k\triangle)$ - случайная составляющая ВР (процесс, шум); параметр k принимает дискретные значения, равные номеру отсчета значения ВР. Задачи, решаемые при моделировании ВР: 1) Задать множество аналитически заданных моделей (описаний)

$$M = \left\{f_j^{mod}(k, \theta_j)\right\}_{j=\overline{1,J}}, k = \overline{1, n}$$

претендентов на "лучшую" модель; θ_j - вектор параметров j-й модели 2) Определить критерий (возможно множество критериев) , согласно которым будет проводиться подгонка модели f_j^{mod} к реальным данным $\left\{y_k^{data}\right\}$, $k = \overline{1, n}$. 3) Для каждой модели определить "наилучшие" оценки параметров θ_j 4) Оценить близость каждой j-й модели к набору исходных данных $\left\{y_k^{data}\right\}$, $k = \overline{1, n}$ по одному из показателей эффективности, например, относительная ошибка аппроксимации и средний квадрат ошибки. Полагают условно: точность модели хорошая, если среднее значение относительной погрешности не превышает 5%, удовлетворительная, если среднее значение относительной погрешности не превышает 15%, и неудовлетворительная, если среднее значение относительной погрешности больше 15%. **Показатели качества моделирования ВР** - Абсолютная относительная ошибка (ARE, AbsoluteRelativeError)

$$ARE = \left|\frac{Y_t - \widehat{Y_t}}{Y_t}\right|$$

- Среднее значение абсолютной относительной ошибки

$$MARE = \frac{1}{L}\sum_{t=1}^{L}\left|\frac{Y_t - \widehat{Y_t}}{Y_t}\right| \times 100\%$$

- Средняя квадратичная ошибка (MSE, MeanSquareError)

$$MSE = \frac{1}{L}\sum_{t=1}^{L}(Y_t - \widehat{Y_t})^2$$

- Отношение мощности полезного сигнала к мощности шума (ОСШ)

$$SER = 101g\left(\frac{\sum_{t=1}^{L} Y_t^2}{\sum_{t=1}^{L}(Y_t - \widehat{Y_t})^2}\right)$$

- Среднее квадратичное отклонение (СКО)

$$\gamma = \sqrt{\frac{1}{L}\sum_{t=1}^{L}\left(Y_t - \widehat{Y_t}\right)^2}$$

11. Обосновать получение параметров модели на основе МНК.

12. Применение разностной схемы (Ньютона/Эйлера) для преобразования непрерывных моделей в дискретные модели. Обоснование через определение производной.

13. Алгоритм моделирования временного ряда согласно МНК. Критерий МНК. Различие процесса моделирования линейного и нелинейного. Отличие задач прогноза и аппроксимации временного ряда.

14. Моделирование наступления событий согласно свойствам простейших потоков отказов. Обнаружение момента наступления стационарного состояния потока событий.

Поток отказов - это последовательность отказов, происходящих один за другим в случайные моменты времени. Простейший (пуассоновский) поток - это поток отказов, который одновременно обладает свойствами стационарности, ординарности и отсутствия последствия. Поток событий называется: - стационарным, если вероятность попадания того или иного числа отказов на участок времени зависит только от длины участка и не зависит от того, где именно на оси расположен этот участок - потоком без последствия, если для любых неперекрывающихся участков времени число отказов, попадающих на один из них, не зависит от числа отрезков, попадающих на другие - ординарным, если вероятность попадания на элементарный участок 2-х и более отказов пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания одного отказа.

15. Аналитическое и имитационное моделирование. Примеры имитационных моделей. Проверка их адекватности реальным процессам. Временные диаграммы наступления событий на примере 1-канальной СМО с отказами.

16. Принцип минимального действия: основные понятия. Примеры применения.

Принцип наименьшего действия (НПД) есть выше. … Указанный принцип состоит в том, что тело (в любых определенных условиях) двигается таким образом, чтобы совершаемое при это действие (которое зависит от траектории движения) было минимальным в условиях задания граничных условий (местоположения тела в начальный и конечный моменты времени). Другими словами, любая физическая система стремится минимизировать свою энергию при смене состояний (существует функционал качества, который минимизируется формой действия системы). Содержательные примеры, подтверждающие этот тезис: 1) Шар, находящийся на склоне горы, покатится вниз, стремясь уменьшить потенциальную энергию 2) электрический конденсатор постепенно разрядится 3) Мыльная пленка попытается уменьшить свою энергию, если это возможно (эта энергия запасается в поверхностном натяжении, чем больше площадь поверхности, тем большее ее энергия); пленка стремится обладать геометрией с минимальной площадью поверхности, оптимизируя любые изгибы и стыки конструкции.

Пример Лагранжиана. Для тела, двигающегося в потенциальном поле (например, в гравитационном поле Земли), функция Лагранжа равна: $L = L(v) - P(x, y, z)$. Кинетическая энергия $K(v)$ зависит от скорости тела v, а потенциальная P(x, y, z) - от его положения (x, y, z). В *аналитической* механике всю совокупность координат, определяющих положение системы, обычно обозначают одной буквой q. Для шара, свободно двигающегося в поле тяжести q = (x, y, z) Закон Ньютона можно сформулировать не в виде F = ma, а т.о: средняя кинетическая энергия минус средняя потенциальная энергия достигает своего самого наименьшего значения на той траектории, по которой предмет двигается в действительности от одного места к другому.

Функций Лагранжа и ПНД Функция Лагранжа L(ϕ_i) - функция, описывающая развитие системы в обобщенных координатах. Это означает: пространственные координаты и время + внутренние степени свободы, колебания и вращения, электрические и др. параметры. В современной тфзике также работают не с самой функцией Лагранжа, а с ее плотностью, которую именую ланигражианом. С функцией Лагранжа связан **принцип наименьшего действия S**:

$$\frac{\delta S}{\delta \phi_i} = 0$$

, где ϕ_i - обобщенные координаты (например, координаты частиц), s - множество параметров системы, физическая величина S, называемая действием, связана с функцией Лагранжа через интеграл:

$$S|\phi_i| = \sum ll[\phi_i(s)]d^n s$$

Действие является мерой движения системы, а принцип наименьшего действия демонстрирует, что природа "экономна" по своей сути и не допускает лишних движений.

В классической механике функцию Лагранжа обычно определяют в виде разности кинетической и потенциальной энергии механической системы.

Примеры областей ПНД 1) Транспортная задача Монжа (19 в). Как перевести груз со складов в разные места назначения с наименьшими затратами? 2) Линейной программирование Л.В. Канторовича (30-50 гг 20 в). Найти минимум Линейной функции на выпуклом множестве (Нобелевская премия по экономике) 3) Теория управления. найти функцию управления, выводящую объект в целевое состояние с минимальной затратой на управление. 4) Задача геодизическая. Требуется найти линию наименьшей длины, соединяющую две заданные точки на некоторой поверхности. 5) Общая теория относительности. Роль геодезических в 4-мерном пространстве-времени играют уравнения движения материальной точки. В частности, геодезической с нулевой "длиной" является уравнения движения частицы со скоростью света. Геометрия пространства зависит от реального распределения масс.

17. Постановка задач нелинейного программирования на примере простейшей вариационной задачи с закрепленными концами. Решение вариационной задачи на примере своего варианта ЛР.

Пусть функция F(x, y, y') имеет непрерывные частные производные по всем аргументам до третьего порядка включительно. Среди всех непрерывно дифференцируемых функций y(x), таких, что $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$, найти доставляющую слабый экстремум функционалу $J(u) = \sum_{x_0}^{x_1} F(x, y, y',)dx$. Слабый экстремум есть экстремум в некоторой окрестности U(y(x)).

18. Z-преобразование, Лапласа, Фурье-преобразования. Смысл их применения. Передаточные функции в Simulink.

Фурье: Базисная функция - элемент базиса в функциональном простанстве. Причины главенствующей роли гармонических функций в радиотехнике: - гармоническое колебание легко реализуемо на практике; - функции - ортогональные и определены для любого аргументы; - гармоническое колебание сохраняют свою форму при прохождении колебаний через ЛС, могут только изменяться амплитуда и фаза; - для гармонических функций имеется удобный аппарат комплексного анализа Используют кроме гармонического ряда Фурье также и другие виды спектральных разложений: по ф-ям Уолша, Бесселя, Хаара, Лежандра, полиномам Чебышёва и др. Спектр сигнала - коэффициенты разложения сигнала в базисе ортогональных функций. Само разложение называют спектральным разложением сигнала. Токи и напряжения в цепи под действием сигнала описывается ДУ, соответствующими элементами цепи и способу их соединения.

Линейные цепи описываются ЛДУ, причем для линейных цепей верен принцип суперпозиции: действие на систему сложного сигнала, который состоит ищ суммы простых сигналов, равно сумме действий от каждого составляющего сигнала в отдельности.

Пример: Пуст $(\phi_n(x))$ - ортогональная система функций в $L_2[a; b]$.

Выражение

$$c_0\phi_0(x)+c_1\phi_1(x)+c_2\phi_2+\ \ldots,\ c_n\phi_n(x)+\ \ldots=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\phi_n(x) \quad (1)$$

называется обобщенным рядом Фурье по ортогональной системе функций $(\phi_n(x))$. Если $(\phi_n(x))$ - основная тригонометрическая система функций, то ряд (1) называется тригонометрическим рядом Фурье.

Ряд Фурье и спектральный анализ Структура сигнала заведомо известна: оцифрованный сигнал - сумма синусоид со своими частотами, амплитудами и начальными фазами, и, возможно, белый шум. РЯД ФУРЬЕ (19в, фр): любую функцию, удовлетворяющую некоторым условиям (непрерывность, периодичность, удовлетворение условиям Дирихле) можно разложить в РЯД

$$f(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}A_k\cos\left(2\pi\frac{k}{\tau}x+\theta_k\right)$$

k - номер тригонометрической функции (номер гармонической составляющей, номер гармоники) τ - отрезок, где функция определена (длительность сигнала) \$ A_k - амплитуда k-ой гармонической составляющей $A_k=\sqrt{a_k^2+b_k^2}$ θ_k - начальная фаза k-ой гармонической составляющей $\theta_k=\arctan\frac{b_k}{a_k}$

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum\hat{f}k^{e^{i2\pi\frac{k}{\tau}x}}$$

$$f(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}|\alpha_k\cos(2\Pi\frac{k}{\tau}x)+b_k\sin(2\pi\frac{k}{\tau}x)|$$

В инженерной практике: в задачах цепей: несинусоидальное входное воздействие раскладывают на сумму синусоидальных и рассчитывают необходимые параметры цепей. !!! В ряде Фурье вместо степенных функций взяты тригонометрические функции 1.2, cosx, sinx, cos2x, sin2x, ..., cosnx, sinnx, ...

В отличие от ряда Фурье, преобразование Фурье (ПФ) раскладывают функцию по непрерывным частотам. пара взаимных преобразований Фурье, функции F(ω)- преобразованием Фурье функции f(x); $\omega=2\pi f$

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{-\infty}^{\infty}f(u)e^{i\omega u}du$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty} \infty F(\omega) e^{-i\omega x} d\omega$$

$\omega = 2\pi f = 2\pi f v = \frac{2\pi}{T}$ радианы в секунду Линейная частота - это количество периодических процессов в секунду (часто обозначается f, v). Угловая частота колебаний (ω) - это скорость изменения фазы гармонических колебаний.

Фурье-образ -синусоидального сигнала, который отыскивает в спектре. Две дельта-функции, симметричные относительно нулевой частоты в частотной области. Амплитудный спектр синусоидального сигнала.

Взаимосвязь дискретных преобразований Преобразование Лапласа

$$X(p) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) e^{-pnT}$$

z-преобразование

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

Преобразование Фурье

$$X(j\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) e^{-j\omega nT}$$

Основы z-преобразования (дискретный аналог пр. Лапласа) Смысл z-преобразования заключается в том, что последовательности чисел {x(k)} ставится в соответствие функция комплексной переменной z (образ или изображение x(K)) # 19. Структурная схема системы передачи информации. Моделирование цифровых сигналов. Функции из пакетов прикладных программ (ППП) (на примере Simulink).

ППП - пакеты прикладных программ Генерировать сигналы в MATLAB можно тремя способами: - в диалоговом режиме, с помощью последовательности команд в командном окне; - а автоматическом режиме, путем создания и запуска на выполнение m-скрипта; - а автоматическом режиме, путем создания и вызова m-функции

Моделирование сигналов в Simulink: Блок sources (источники сигналов) constant - формирует постоянную величину (Скаляр, вектор) signal generator - создает непрерывный сигнал (перевернутая А)- формы step - единичный дискретный сигнал с заданными параметрами; ramp - линейно возрастающий или убывающий сигнал sine wave - генератор синусоидальных сигналов repeating signal - создает периодический сигнал descrete pulse generator - генератор дискретных импульсных сигналов pulse generator - генератор импульсных сигналов cirp signal - генератор гармонических колебаний переменной частоты clock - источник непрерывного временного сигнала digital clock - источник дискретного временного сигнала fron file - осуществляет передачу данных, хранящихся в matlab файле from workspace - осуществляет ввод в модель данных из рабочего пространства matlab random number - источник дискретного сигнала, амплитуда которого является случайной величиной, распределенной по нормальному закону uniform random number - источник дискретного сигнала, амплитуда которого является равномерно распределенной случайной величиной band-limited while noise - генератор “белого шума” с ограниченной полосой Настройка пользователем (за исключением блока clock)

21. Линейные системы, их свойства, обратная связь, передаточная функция.

Система - это некоторое преобразование сигнала. Система переводит входной сигнал x(t) в выходной сигнал y(t). Будем это обозначать так: x(t) -> y(t). Линейная система - любая система, для которая отклик системы на сумму воздействий равен сумме откликов на каждое воздействие. Линейная система - это система, в которой выполняется следующие свойства линейности: если $x_1(t) \rightarrow y_1(t)$ и $x_2(t) \rightarrow y_2(t)$, то $\alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \rightarrow \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$. Здесь операции над сигналами следует понимать как операции на функциями от аргумента t. Цепям с обратной связью характерно, что выходной сигнал или некоторая его часть поступает снова на вход. **Обратная связь** - это процесс передачи информации о состоянии объекта управления управляющему объекту. Одним из способов построения обратной связи для линейной динамической системы является построение с помощью матрицы обратной связи. **Передаточная функции** - один из способов математического описания динамической системы. Используется в основном в теории управления, связи и цифровой обработке сигналов. Представляет собой дифференциальный оператор, выражающий связь между входом и выходом линейной стационарной системы. Зная входной сигнал системы и передаточную функцию, можно восстановить выходной сигнал.

21. Свертка функций. Пример свертки функций и ее применение. преобразование Лапласа свертки функций.

На первом скрине f и X точка - звездочка. Таким образом показывают, что это свертка Автокорреляционная функция (АКФ) - зависимость взаимосвязи между функцией (сигналом) и ее сдвинутой копией от величины сдвига τ; - для детерминированных сигналов АКФ $\psi(\tau) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(\tau) f^{\star}(t-\tau) dt$ - для стохастических сигналов АКФ $K(\tau) = M\{X(\tau)X^{\star}(t-\tau)\}$ Геометрический смысл АКФ - площадь пересечения функции и её кнопки, сдвинутой на время τ **Операция свертки**: а) характеристика "схожести" одной функции с отраженной и сдвинутой копией другой; б) описывает взаимодействие сигналов между собой; в) может быть описана как вес одной функцией с случае, если другая функция, будучи отраженной и сдвинутой, является весовой; г) свёртка двух прямоугольных импульсов: в результате даёт треугольный импульс

Применение АКФ 1) Теория информации: выбор кодовых последовательностей с наименьшей вероятностью ошибок 2-го рода (ложная синхронизация) 2) Анализ временных рядов: циклам в поведении динамических систем соответствует максимумы АКФ некоторого характерного параметра. 3) Радиотехника. Если функции отклика (на дельта-функцию, импульсную характеристику) устройства g(t), а на вход подано f(t), то на выходе свёртка функций f и g. # 22. Преобразование ДУ в алгебраическое на основе z-преобразований. ДУ-дифференциальные уравнения Z-преобразованием (преобразованием Лорана) называют свертку исходного сигнала, заданного последовательностью вещественных чисел во временной области, в аналитическую функцию комплексной частоты. Ниже на

23. Формулировка теоремы Котельникова. Ряд Котельникова.

Любой непрерывный сигнал с ограниченным спектром может быть восстановлен однозначно и без потерь по своим дискретным отсчетам, взятым с частотой строго больше удвоенной верхней частоты спектра непрерывного сигнала.

24. Определения

Математическая модель (аналитическая модель) системы - приближенное описание системы с помощью математических соотношений («уравнение, выражающее идею»). Это совокупность функциональных и (или) логических соотношений между параметрами, переменными и показателями эффективности системы (формула, система уравнений, другие математические соотношения).

Динамическая модель - модель, отображающая изменения в динамической системе.

Уравнение Эйлера-Лагранжа Для того, чтобы функционал J(y), определенный на множестве непрерывно дифференцируемых функций D= {y(x)}, удовлетворяющих граничным условием $y(x_0) = y_0, (x_1) = y_1$, достигал на функции y(x) экстремума необходимо, чтобы эта функция удовлетворяла уравнению Эйлера (в краткой записи и развернутой после взятия производной $\frac{d}{dx}\left(\frac{\delta F}{\delta y'}\right)$ соответственно):

$$\frac{\delta F}{\delta y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\delta F}{\delta y'}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta F}{\delta y'}\right) + \frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta F}{\delta y'}\right) y' + \frac{\delta}{\delta y'}\left(\frac{\delta F}{\delta y'}\right) y'' - \frac{\delta F}{\delta y} = 0$$

Интегральные кривы уравнения Эйлера называются экстремалями.

Переходной процесс в системе управления

Датчик базовых случайных величин (генератор псевдослучайных чисел (ГСЧ)) - это модель для получения несколько зависимых реализаций $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ базовой случайной величины ϵ. Исторически различают табличные, физические, программные типы датчиков. (устройство, позволяющее по запросу получать реализацию а или несколько независимых реализаций а1 … ан базовой СВ а) Существует 3 типа датчиков Табличный датчик ПСВ - таблица случайный чисел, представляющая собой экспериментально полученную выборку реализацией равномерно распределенной в [0, 1) случайной величины. Недостатки табличного датчика ПСВ: - нехватка табличных случайных чисел - расход оперативной памяти ЭВМ для хранения таблицы Физический датчик ПСВ - специальное радиоэлектронное устройство - приставка к ЭВМ, выходной сигнал которого имитирует ПСВ; монета; игральный кубик; вращающаяся стрелка; ГСЧ га основе радиоактивного распада; ГСЧ на основе шумов со встроенного микрофона в компьютере а. Недостатки: - невозможность повторения некоторой ранее полученной реализации а, т.к. P$(\alpha = a) = 0$ - схемная нестабильность; необходимость контроля работы датчика при очередном его использовании

Программный датчик ПСВ - это программа, служащая для имитации на ЭВМ реализаций а1, а … базовой СВ; порождает последовательность ПСВ: по происхождению эти числа не случайные, а получаются по известному математическому закону

Дискретная модель - это модель, описывающая исследуемый объект как набор отдельных, обособленных и тем или иным образом взаимодействующих элементов (частиц). модель, которая описывает поведение объекта в отдельные промежутки времени.

Нелинейный объект объект/управление, в математической модели функционирования которая хотя бы одна зависимость между величинами является нелинейной функцией.

Генератор СВ - алгоритм, порождающий последовательность чисел, элементы которой почти независимы друг от друга и подчиняются заданному распределению 1) числа $e_1, ..., e_n$ не случайные, а генерируются по известному закону 2) при определенных условиях эти числа “похожи” на реализации независимых равномерно распределенных в СВ *Этапы моделирования СВ* 1) генерирование N реализаций случайной величины с требуемой функцией распределения; Особенность: все методы для получения заданного распределения используют преобразование равномерно распределенной величины: - задается СВ, равномерно распределенная в интервале (0, 1); - осуществляется обратное отображение; - фиксируется новая СВ с заданным распределением. 2) использование полученной СВ в контексте моделируемого объекта 3) статистическая обработка реализации

Теорема Смирнова метод обратной функции Если X удовлетворяет уравнению

$$\sum_{-\infty}^{X} F_X(t)dt = \alpha,\ \alpha \in [0;1]$$

где $\alpha, \alpha \in [0;1]$ - СВ, равномерно распределенная на [0; 1], т.е. $X = F_X^{-T}(\alpha)$, то СВ X распределена по закону $F_X(t)$

МНК

Дифференциальное уравнение Это уравнение, содержащее производные функции y(x), саму функцию, независимые переменные и иные параметры в различных комбинациях. Порядок входящих в уравнение производных может быть различен. Производные, функции, независимые переменные и параметры могут входить в уравнение в различных комбинациях или могут отсутствовать вовсе, кроме хотя бы одной производной.

Решение ДУ Решением дифференциального уравнения (ДУ) называется функция, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество. Наибольший порядок производной, входящей в дифференциальное уравнение, называется порядком этого уравнения.

Начальные условия ДУ - дополнительные к этому уравнению (системе) условия, налагаемые на искомую функцию (функции), отнесенные к некоторому (или несколькими) фиксированному значению аргумента (аргументов, если это уравнение в частных производных), которое объявлено начальным (скажем, моментом времени) В частности, если вместе с обыкновенным дифференциальным уравнением n-го порядка на неизвестную (искомую) функцию y = f(x) наложены дополнительные условия $f(x_0) = y_0; f1(x_0) = y_0'; \ ... \ ; f^{n-1}(x_0) = y_0^{n-1}$, то нахождение решения этого уравнения, удовлетворяющего начальным условиям (*), называется задачей Коши.

Задача Коши решается после нахождения общего решения заданного дифференциального уравнения, зависящего от n произвольных постоянных и состоит в нахождении таких значений этих постоянных, чтобы выполнялись условия (*). Для этого в общее решение подставляются n условий (*) и решается полученная система из n алгебраических уравнений.

Устойчивый динамический объект устойчивая динамическая система - динамическая система, состояние которой полностью. определяется начальными условиями и внешними воздействиями в процессе развития. Устойчивость – это свойство системы сохранять некоторые черты фазового портрета при малых возмущениях закона движения системы. Фазовый портрет – это совокупность фазовых траекторий, по которым система может двигаться в фазовом пространстве из различных начальных точек состояния

Принцип минимального действия Принцип наименьшего действия (ПНД) - очень удобная математическая модель описания того, почему система ведет себя так, а не иначе. Логика описания моделей поведения объектов: 1) каждый объект ведет себя экономно в том смысле, что для выбранного поведения существует функционал, достигающий экстремума на этом поведении; 2) если функционал известен, то его экстремали следует искать на решениях некоторого ДУ 2-го порядка (теорема Эйлера-Лагранжа); 3) если нужно определенное заданное поведение объекта, то следует задать такой функционал, экстремали которого и дадут нужное поведение объекта (управление)

Указанный принцип состоит в том, что тело (в любых определенных условиях) двигается таким образом, чтобы совершаемое при это действие (которое зависит от траектории движения) было минимальным в условиях задания граничных условий (местоположения тела в начальный и конечный моменты времени)

Другими словами, любая физическая система стремится минимизировать свою энергию при смене состояний (существует функционал качества, который минимизируется формой действия системы). Приведем содержательные примеры, подтверждающие этот тезис. Шар, находящийся на склоне горы, покатится вниз, стремясь уменьшить потенциальную энергию.

Функционал мера поведения физической системы. Если некоторому числу x из области D ставится в соответствие по определенному правилу или закону число y, то говорят, что задана функция y = f(x).

Если функция y(x) ставится в соответствие по определенному правилу или закону число J, то говорят, что задан функционал J = J(y). Пример: определенный интеграл.

Задача теория массового обслуживания Задача теории массового обслуживания (ТМС) состоит в выработке рекомендации по рациональному построению СМО и рациональной организации их работы с целью обеспечения высокой эффективности обслуживания при оптимальных затратах. Главная особенность задач данного класс - явная зависимость результатов анализ и получаемых рекомендаций от 2 внешних факторов: частоты поступления и сложности заказов (а значит и времени их исполнения)

Уравнения Колмогорова, принцип составления

Временная диаграмма (при построении имитационной модели) - временные диаграммы представляют собой способ иллюстрации функционирования (работы) устройств во времени. Их, в то же самое время, моно рассматривать как способ анализа (процесса) функционирования устройства.

Принцип обратной связи использование информации о состоянии объекта и внешней среды для построения управления в виде функциональной зависимости от координат пространства состояний замкнутое, или управление с обратной связью: предполагается возможность изменять управление в зависимости от его воздействия на конечный результат; рассчитана в основном на малые промежутки времени.

Принцип обратной связи в системах управления - использование информации о состоянии объекта и внешней среды для построения управления в виде функциональной зависимости от координат пространства состояний.

Принцип обратной связи есть принцип коррекции входных воздействий в процессе управления на основе информации о выходе управляемой системы

Инвариант системы Инвариантное множество – множество точек фазового пространства, начиная движение из которого, траектория целиком остается принадлежащей этому множеству. Любой аттрактор есть инвариантное множество, но обратное неверно. Неустойчивые неподвижные точки и неустойчивые замкнутые орбиты – тоже инвариантные множества.

Инвариа́нт — это свойство некоторого класса (множества) математических объектов, остающееся неизменным при определённого типа преобразованиях.

Классификация блоков Simulink 1) continuous (линейные блоки - модули, используемые при моделировании в непрерывном времени) 2) discrete (дискретные блоки - модули, используемые при моделировании в дискретном времени) 3) function & tables (функции и таблицы) 4) math (модули, реализующие математические операции) 5) nonlinear (нелинейные элементы) 6) signal & systems (модули преобразования сигналов и создания систем) 7) sinks (регистрирующие устройства - получатели сигналов) 8) sources (излучатели сигналов - источники сигналов и воздействий) 9) subsystems (блоки подсистем)

Система массового обслуживания - система, которая производит обслуживание поступающих в нее требований. Обслуживание требований в СМО осуществляется обслуживающими приборами. Классическая СМО содержит от одного до бесконечного числа приборов.

включает в себя следующие элементы: источник требований; входящий поток требований; очередь; обслуживающее устройство (обслуживающий аппарат, канал обслуживания); выходящий поток требований.

Пуассоновский поток поток, у которого количество событий в определенный промежуток времени распределено по пуассоновскому закону с параметром лямбда. Если поток событий обладает всеми тремя свойствами (стационарен, ординарен и не имеет последствий), то он называется простейшим (или стационарным пуассоновским) потоком. Название “пуассоновский” связано с тем, что при соблюдении условий 1-3 число событий, попадающих на любой фиксированный интервал времени, будет распределен по закону Пуассона.

Распределение Пуассона и числовые характеристики простейшего потока

$$\hat{\lambda} + \Delta t = M\nu = \frac{1}{N}\sum_{i=1} L\nu_i n_i$$

выборочная интенсивность наступления событий $\hat{\lambda}\Delta t$ как выборочное математическое ожидание СВ $\lambda\Delta t$ (число событий, наступивших в ед. времени).

$$\widehat{p_i} = \frac{(\hat{\lambda}\cdot\Delta t)^{\nu_t}}{\nu_t} \times e^{-\hat{\lambda}\times\Delta t}$$

Оценка “теоретической” вероятности по формуле Пуассона

$$N = \sum_{i=1}^{L} n_i$$

объем выборки как сумма частот

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{2} \frac{(n_i) - n_i)^2}{n_i}$$

Критерий χ^2 (хи-квадрат), проверяет значимость расхождения эмпирических (наблюдаемых) и теоретических (ожидаемых) частот

Задача вариационного исчисления Основная цель задачи: исследование функционалов на экстремум. Классические задачи прикладной направленности; требующие привлечения аппарат вариационного исчисления - о брахистохроне - плоской линии, по которой мат. точка быстрее всего попадет под действием силы тяжести из точки А в точку В - о геодезической линии - линии наим. длины, расположенной по заданной поверхности и соединяющей 2 данные точки - царевны Дидоны - об экстремальности энтропии в теории инф-и: какими вероятностными характеристиками должен обладать сигнал для переноса максимального количества инф-ии и пр.

Простейшая вариационная задача Основная цель задачи: исследование функционалов на экстремум. Постановка основной задачи вариационного исчисления. Для функционала J(f) с областью определения $f \in D$ требуется найти элемент $f_0 \in D$, сообщающий функционалу экстремальное значение.

Простейшая задача вариационного исчисления Вариационное исчисление - раздел анализа, в котором изучаются вариации функционалов. Наиболее типичная задача - найти функцию, на которой заданный функционал достигает экстремального значения. задача с закрепленными границами. Уравнение Эйлера-Лагранжа. Пусть функция F(x, y, y') имеет непрерывные частные производные по всем аргументам до третьего порядка включительно. Среди всех непрерывно дифференцируемых функций y(x), таких, что $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$, найти доставляющую слабый экстремум функционалу $J(y) = \sum_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx$. Слабый экстремум есть экстремум в некоторой окрестности U(y(x))

Граничные условия для простейшей вариационной задачи Диапазон значений, в которых определен функционал с произвольными всех порядков

Как известно, любая задача, приводящая к решению дифференциальных уравнений, требует определенного числа граничных условий для того, чтобы решение было единственным. Эти условия формулируются на основе имеющихся физических соображений. Может, однако, случиться, что физические соображения не приводят к граничным условиям либо дают их в количестве, недостаточном для получения однозначного решения

Модель простейшего потока отказов системы Поток отказов – это последовательность отказов, происходящих один за другим в случайные моменты времени.

Отказы, образующие простейший поток, распределены по закону Пуассона, т.е. вероятность возникновения m отказов в течении 0, t определяется следующим выржением

$$Q_m(T) = \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t}, m = 0, 1, ...,$$

где λ - параметр потока отказов.

Состояние системы совокупность наблюдаемых реализаций переменных (координат) системы, характеризующих ее свойства в определенный момент времени. Например, для технической системы различают аварийное, предаварийное, работоспособное, целевое состояния.

Неустойчивое состояние системы система, объекты которой находятся в хаотичном режиме (имеют экспоненциальное разбегание траектории и хаотичность динамики)

метод Монте-Карло группа численных методов для изучения случайных процессов. Суть метода заключается в следующем: процесс описывается математической моделью с использованием генератора случайных величин, модель многократно рассчитывается, на основе полученных данных вычисляются вероятностные характеристики рассматриваемого процесса.

Например, чтобы узнать методом Монте-Карло, какое в среднем будет расстояние между двумя случайными точками в круге, нужно взять координаты большого числа случайных пар точек в границах заданной окружности, для каждой пары вычислить расстояние, а потом для них посчитать среднее арифметическое.

Преобразование Лапласа

уравнение Эйлера-Лагранжа

Детерминированный хаос явление в теории динамических систем, при котором поведение нелинейной системы выглядит случайным, несмотря на то, что оно определяется детерминистическими законами. В качестве синонима часто используют название *детерминированный хаос*; оба термина полностью равнозначны и используются для указания на существенное отличие *хаоса* как предмета научного изучения в синергетике от хаоса в обыденном смысле.

Причиной появления хаоса является неустойчивость (чувствительность) по отношению к начальным условиям и параметрам: малое изменение начального условия со временем приводит к сколь угодно большим изменениям динамики системы.

Динамику, которая чувствительна к малейшим изменениям начальных условий системы, из которых начинается её развитие, изменение, и в которой эти малейшие отклонения со временем многократно приумножаются, затрудняя предсказание будущих состояний системы, часто и называют хаотичной.

Модель хищник-жертва пара нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка, часто используемых для описания динамики биологических систем, в которых взаимодействуют два вида, один как хищник, а другой как жертва.

это особая взаимосвязь хищника с жертвой, в результате которой выигрывают оба. Выживают наиболее здоровые и приспособленные особи к условиям среды обитания, т.е. все это происходит благодаря естественному отбору. В той среде где нет возможности для размножения, хищник рано или поздно уничтожит популяцию жертвы, в последствии чего вымрет и сам

Автоколебательная система колебательные системы, совершающие незатухающие колебания за счет действия источника энергии, не обладающего колебательными свойствами (постоянное, равномерное, непериодическое влияние)

Странный аттрактор (на примере модели Лоренца)

_Аттрактор – относительно устойчивая область фазового пространства объект__а (структура, возможно задаваемая некоторой функцией от состояния, в рамках настоящего пособия), которая притягивает к себе всевозможные траектории элементов системы (если изображающая точка системы попадает в эту область, то уже никогда из нее не выходит)_

Аттрактор — такое подмножество фазового пространства, что все траектории, стартующие не слишком далеко от него, стремятся к нему с течением времени.

Слово же «странный» здесь выступает в таком ключе: аттрактор как множество не представим в виде кривой или поверхности, он имеет более сложную, фрактальную структуру. Траектории аттрактора не замыкаются, а малые отклонения постоянно накапливаются, причем экспоненциально.

Аттрактор Лоренца (от англ. to attract — притягивать) — странный аттрактор, впервые найденный Лоренцем в нелинейной системе обыкновенных дифференциальных уравнении

Разностное уравнение уравнение, связывающее значение некоторой неизвестной функции в любой точке с её значением в одной или нескольких точках, отстоящих от данной на определённый интервал.

Устойчивая система (по Ляпунову) Устойчивость по Ляпунову – малость отклонений координат объекта от положения равновесия при условии малых начальных возмущений. Соответственно, неустойчивость (по Ляпунову) означает большое расхождение (экспоненциальное) фазовых траекторий во времени при малых различиях в начальных условиях

Имитационная модель Имитационная модель (ИМ) системы – алгоритмы, программы, реализующие поведение объекта (системы) или отдельных его элементов и связей между ними в течение фиксированного времени моделирования с учетом масштабирования реальных характеристик объекта (геометрических, временных и т. д.).

Имитационное моделирование – это вид компьютерного моделирования, для которого характерно воспроизведение на ЭВМ (имитация) процесса функционирования сложной системы (в режиме реального времени в том числе).

Фазовый портрет и фазовая траектория Фазовый портрет - совокупность фазовых траекторий.

МНК

Показательное распределение СВ Распределение называется показательным с параметром λ, если плотность вероятности представляется показательной функцией

Базисные функции -элемент базиса в функциональном пространстве. Базис - упорядоченный набор линейно независимых векторов (функций) в пространстве

Ряд Фурье

Спектральные коэффициенты

Стационарная система

Закон минимального действия