

B 题 钢管订购和运输

要铺设一条 $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_{15}$ 的输送天然气的主管道，如图一所示(见下页)。经筛选后可以生产这种主管道钢管的钢厂有 S_1, S_2, \dots, S_7 。图中粗线表示铁路，单细线表示公路，双细线表示要铺设的管道(假设沿管道或者原来有公路，或者建有施工公路)，圆圈表示火车站，每段铁路、公路和管道旁的阿拉伯数字表示里程(单位 km)。

为方便计，1km 主管道钢管称为 1 单位钢管。

一个钢厂如果承担制造这种钢管，至少需要生产 500 个单位。钢厂 S_i 在指定期限内能生产该钢管的最大数量为 s_i 个单位，钢管出厂销价 1 单位钢管为 p_i 万元，如下表：

i	1	2	3	4	5	6	7
s_i	800	800	1000	2000	2000	2000	3000
p_i	160	155	155	160	155	150	160

1 单位钢管的铁路运价如下表：

里程 (km)	≤ 300	301~350	351~400	401~450	451~500
运价 (万元)	20	23	26	29	32

里程 (km)	501~600	601~700	701~800	801~900	901~1000
运价 (万元)	37	44	50	55	60

1000km 以上每增加 1 至 100km 运价增加 5 万元。

公路运输费用为 1 单位钢管每公里 0.1 万元 (不足整公里部分按整公里计算)。

钢管可由铁路、公路运往铺设地点 (不只是运到点 A_1, A_2, \dots, A_{15} ，而是管道全线)。

- (1) 请制定一个主管道钢管的订购和运输计划，使总费用最小 (给出总费用)。
- (2) 请就 (1) 的模型分析：哪个钢厂钢管的销价的变化对购运计划和总费用影响最大，哪个钢厂钢管的产量的上限的变化对购运计划和总费用的影响最大，并给出相应的数字结果。
- (3) 如果要铺设的管道不是一条线，而是一个树形图，铁路、公路和管道构成网络，请就这种更一般的情形给出一种解决办法，并对图二按 (1) 的要求给出模型和结果。

x_{ij} 表示从钢厂 $i \rightarrow A_j$ 的量

$$\min C_{\Sigma} = C_{\text{订}} + C_{\text{运}}$$
$$= \sum_{i=1}^7 S_i \cdot n_i \cdot p_i + \sum_{i=1}^7 \sum_{j=1}^{15} x_{ij} \cdot c_{\text{E}ij}$$

$c_{\text{E}ij} = 1 \cdot q_{\text{E}ij}$

$$\begin{cases} 500 \leq n_i \leq S_i \\ S_i = 0 \text{ 或 } 1 \end{cases}$$
$$x_{ij} = R_j + L_j$$
$$L_{j,j+1} = R_j + L_{j+1}$$

铁路 $\times 23$

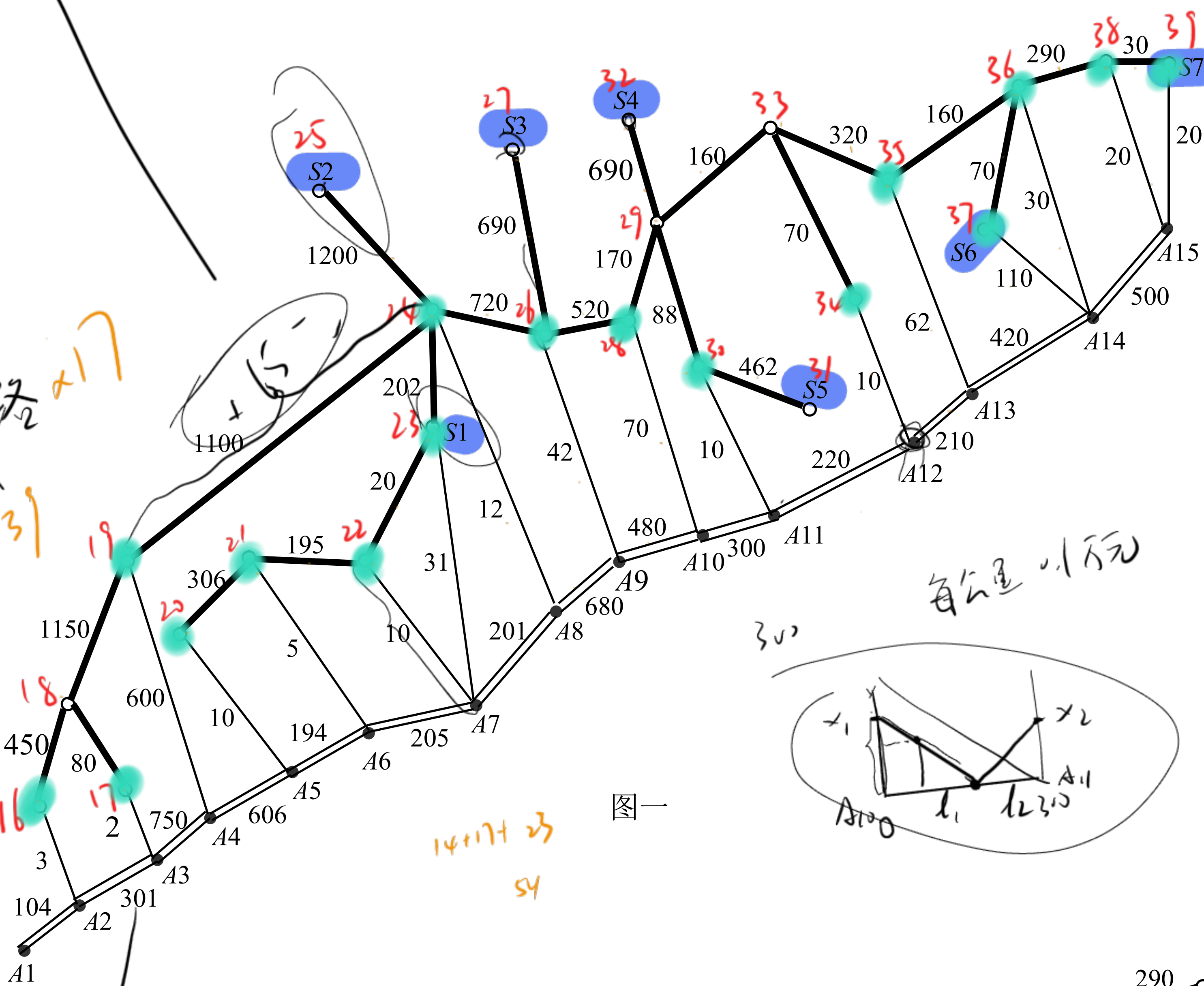
各站汇流最短路径

$S_1 S_2 \dots S_7$
 $A_1 A_2 \dots A_{15}$

7×15
 105

公路 $\times 17$

$24 + 15 = 39$



300

每公里 1.5 元

17×7

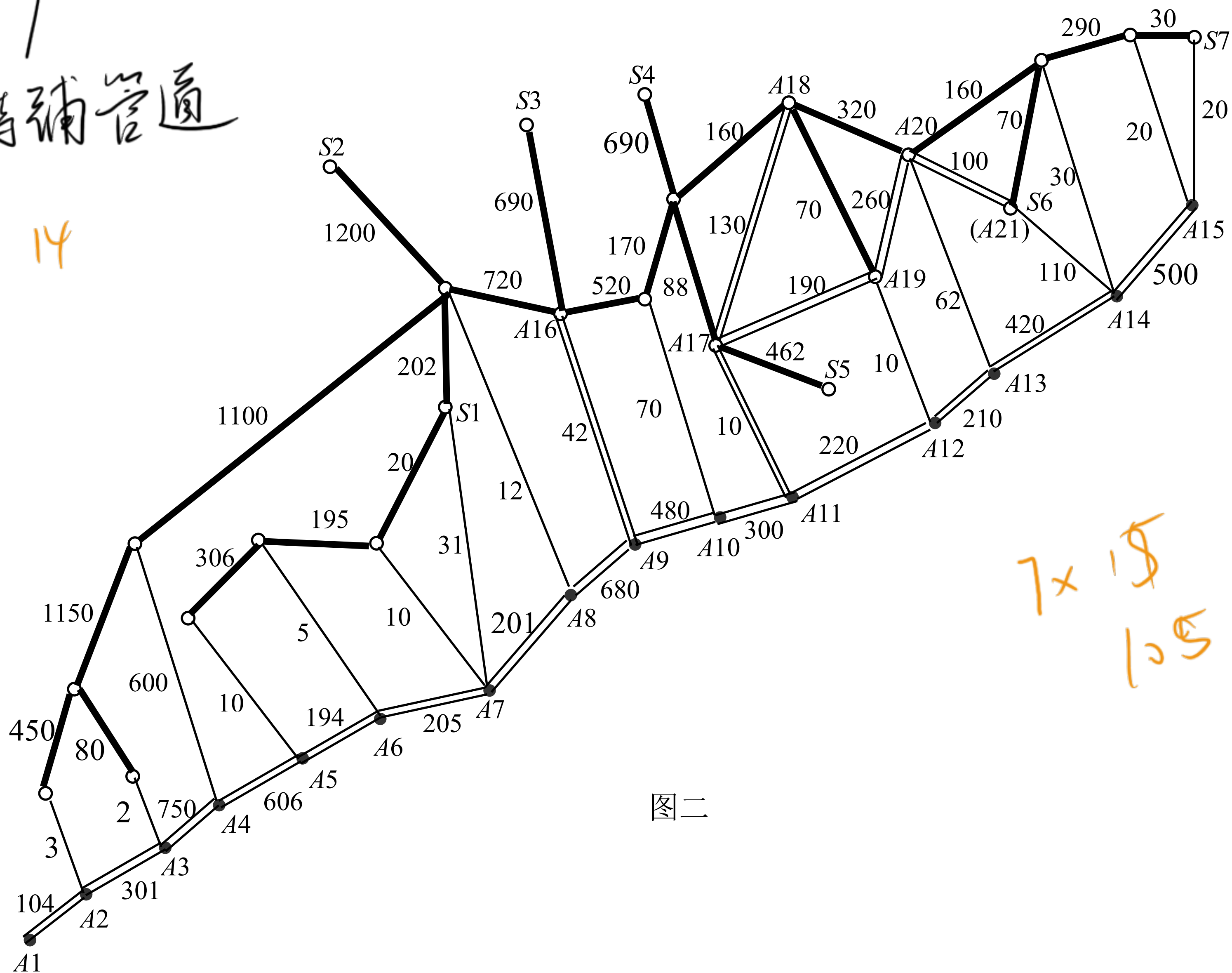
$109 + 14$

$+ 17$

31

待铺管道

14

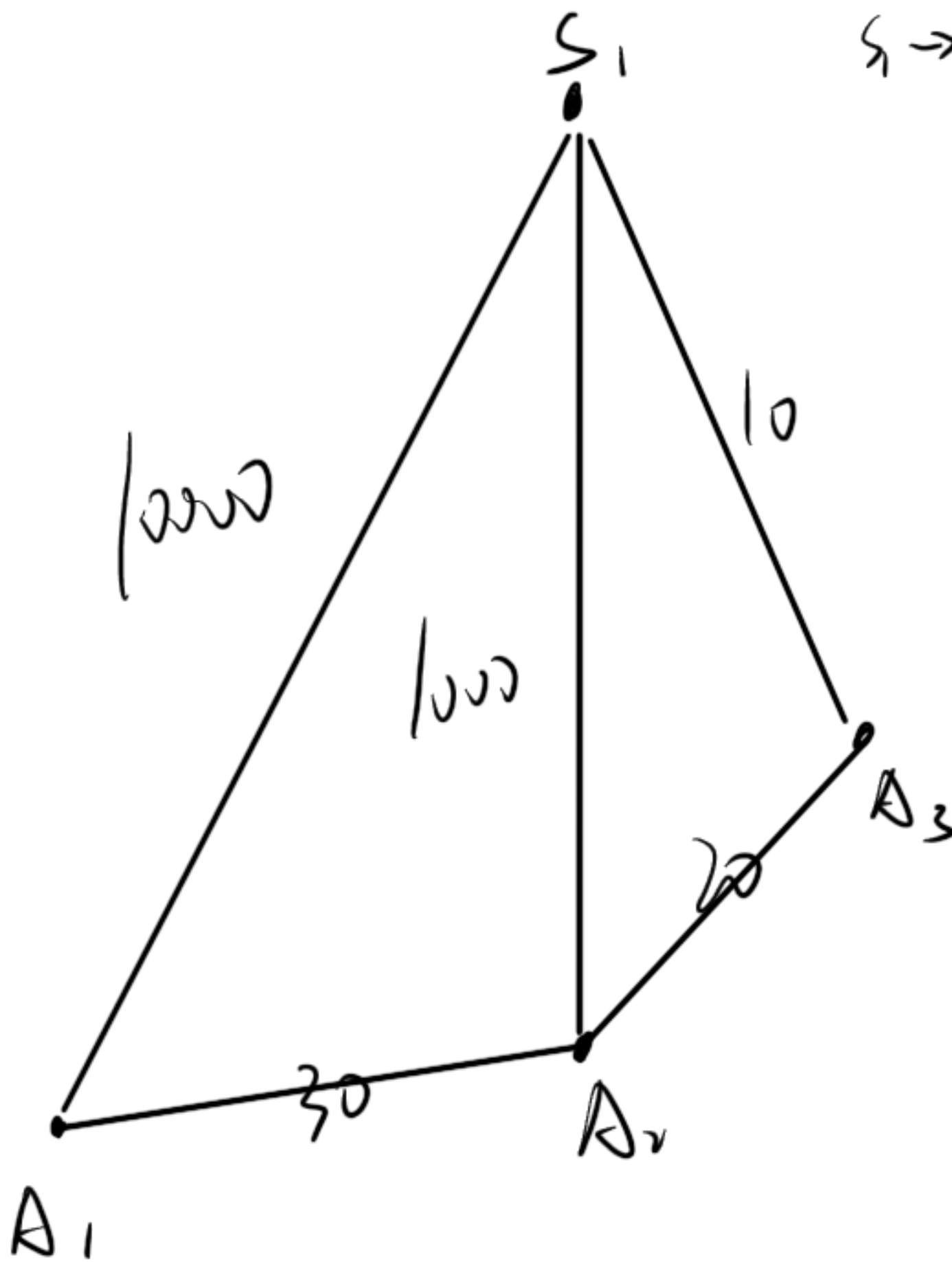


7×15
 105

$$H: S_1 \rightarrow A_1 = 10 + 20 + 30 < 1000$$

$$S_1 \rightarrow A_2 = 10 + 20 < 1000$$

$$S_1 \rightarrow A_3 = 10$$



1° 运输 20 到 A_3 , 30 到 A_2

2° 运输 10 到 A_3 , 40 到 A_2

显然方案 1 的成本更小

∴ 最优方案不会出现折返

当然, 目标函数可以改成

$$\begin{aligned} \min C = & \sum_{i=1}^7 S_i \cdot n_i \cdot P_i + \sum_{i=1}^7 \sum_{j=1}^{15} X_{ij} \cdot C_{\text{运}ij} \\ & + \sum_{j=1}^{14} \left(\frac{R_j^2}{2} + \frac{L_{j+1}^2}{2} \right) \times P_{\text{公路}} \end{aligned}$$

11
0.1

