数学建模第 5 次问题（教材 126 页）

问题 某公司计划在某地通过 5 种媒体(手机、网络、电视、报纸、电台)对公司产品做广告,并将目标人群分为 7 类(如按年龄分为小孩、老人、青年人、中年人，某些年龄段的人再按性别细分，等等).根据过去的经验以及当前的市场预测，每花费 1 万元广告费，能够吸引到的目标人群的数量(万人)如表 1（教材 126 页）所示。表格最后两行列出了公司希望吸引到的目标人群的最小数量，和可能吸引到的目标人群的最大数量。

问公司应该在 5 种媒体上分别花费多少广告费？如果公司还希望吸引到尽可能多的目标人群，并得到花费的广告费与所能吸引的目标人群之间的数量关系，应该怎么做呢？

增加问题及提示:

（1）如果仅考虑广告费用最少（满足目标人数最低要求），请你建立数学模型，并求解。

教材中给出的最优值是 6.327 万。你能给出证明吗?

（2）如果要把所有潜在的目标人群全部吸引过来，请你建立数学模型，并求解。

教材中给出的最优值是 13.798 万。你能给出证明吗?

（3）对于不同的广告费（6.327 万至 13.798 万），分别能吸引到多少人？我们可以像教材一样对广告费进行分段，从 6.5 到 14.最后得到的图形见 128 页图 1.这个图上的函数是分段线性函数吗？怎么说明是或者不是。如果是，能否给出分段的点在哪里?

你能理论上给出分段函数的解析表达式吗？你能理论上证明你的结论吗?

（4）教材中所使用的软件是 LINGO 软件，你们可以使用这个软件。也可以使用 MATLAB 软件求解该问题。有一个约束是难以处理的:

$$y_j = \min(\sum_{i=1}^{5} a_{ij} x_i, u_j) \qquad (1)$$

此时，一种处理方法是条件如实地写，但是问题就不是线性规划了，可能要使用 fmincon 命令来求解。

另一种处理方法是，把这个约束转化为

$$y_j \le \sum_{i=1}^{5} a_{ij} x_i \text{ 且 } y_j \le u_j \qquad (2)$$

当然条件（1）可以推出条件（2）。

但是（2）不能推出（1）。这是你该怎么处理?

最粗暴的处理方法是不管那么多，先直接把（1）就转化成（2），看看解出来的最优值和教材上的是不是一样。如果一样，我们再往下考虑。在培训题目中这样思考是可以的。你们可以试一试。

（5）多目标优化的数学模型，教材上给的形式是正确的。还有一种更为常用的写法是这样

的(摘自最优化方法教材)：

$$
\begin{aligned}
&\min f_1(x_1,\cdots,x_n) \\
&\quad \cdots\cdots \\
&\min f_m(x_1,\cdots,x_n) \\
&s.t.\ g_i(x_1,\cdots,x_n) \ge 0, i=1,\cdots,p \\
&\quad\ h_j(x_1,\cdots,x_n) = 0, j=1,\cdots,q
\end{aligned}
$$

教材中多目标优化问题的处理方法是固定一个目标（费用），优化另一个目标。这是多目标优化问题的一个常用的处理方法。

另一种常用的处理方法是加权平均法，先把对各个目标分别求极小极大全部转化为求极小，然后把给出一个目标函数是所有目标函数的加权平均。针对这一个目标再求极小。不过此时加权系数的取法也是一个比较困难的问题。如果是两个目标，加权系数分别是λ和 1-λ，我们通常要对λ从 0 到 1 进行讨论。

要注意的是：进行加权平均时，我们通常要求两个目标的量纲一致，以及数量级基本一致。如果量纲不一致，对各个目标先做某种无量纲化处理后才可以加权平均。教材的第 114 页"选课策略"的案例中进行了加权平均。这是我们把课程总数和学分数都看做无量纲的数，才可以这样做。

（6）在历年的优化问题中，如果问题本身求解不困难，那么获得国奖的论文都会有一些理论性的结果。我们这道题目就属于这种类型。

因此，在以上的增加问题中，有些问题涉及到理论性地证明。这一部分相对困难一些，大家可以尝试去做。注意不是所有提到的理论问题都要做。建模竞赛中，花不太长的时间做出一些理论结果才有意义。如果花太长的时间就本末倒置了。

（7）理论证明的一个例子：

教材 97 页有个最优化问题：

$$
\begin{aligned}
&\max z = 72x_1 + 64x_2 \\
&s.t.\ x_1 + x_2 \le 50 \\
&\quad\ 12x_2 + 8x_2 \le 480 \\
&\quad\ 3x_1 \le 100 \\
&\quad\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

教材中给出的最优解是 $x_1^* = 20, x_2^* = 30$，我们给出一个理论证明，这一定是最优解。

证明：首先 $x_1^* = 20, x_2^* = 30$ 满足所有约束条件，是可行解,对应的函数值为 3360.

对于任意可行解 (x_1, x_2) ,有

$$
\begin{aligned}
&72x_1 + 64x_2 \\
&= 48(x_1 + x_2) + 2(12x_1 + 8x_2) \\
&\le 48 \times 50 + 2 \times 480 \\
&= 3360 \\
&= 72x_1^* + 48x_2^*
\end{aligned}
$$

因此 $x_1^* = 20, x_2^* = 30$ 是最优解。