

数模培训问题四 食饵与捕食者模型

问题背景见教材168页

考虑预测两个物种的种群的问题，其中一个为捕食者， t 时刻其种群数量为 $y(t)$ 以另一个为食物，后者是食饵，其种群数量为 $x(t)$ 。我们假设食饵总是有充足的食物供应，并且它在任何时候的增长率都与当时活着的食饵数量成正比；也就是说，食饵的增长率是 $rx(t)$ 。食饵的死亡率取决于当时活着的食饵和捕食者的数量。为了简单起见，我们假设食饵的死亡率为 $ax(t)y(t)$ 。另一方面，捕食者的增长率取决于其食物供应，以及可用于繁殖目的的捕食者的数量。因此，我们假设捕食者的增长率为 $bx(t)y(t)$ 。捕食者的死亡率将被视为与当时活着的捕食者的数量成正比；即捕食者的死亡率 $dy(t)$ 。

由于 $x'(t)$ 和 $y'(t)$ 分别表示食饵和捕食者种群相对于时间的变化，因此该问题由非线性微分方程组表示

$$x'(t) = rx(t) - ax(t)y(t)$$

和

$$y'(t) = -dy(t) + bx(t)y(t)$$

问题一

- (1) 规范地写出常微分方程组初值问题的数学模型；
- (2) 求解 $0 \leq t \leq 10$ 的方程组(数值解)，假设猎物的初始种群为 $x(0)=1000$ ，捕食者的初始种群是 $y(0)=500$ ，常数为 $r=3, a=0.002, b=0.0006$ 和 $d=0.5$ ；
- (3) 绘制这个问题的解的图形，绘制两个种群随时间的变化图；
- (4) 为 $x(t), y(t)$ 是周期函数找到一些理由，周期是多少；
- (5) 两个物种在一个周期内的平均值分别是多少？

问题二

若给出了如下观测值

t	$x(t)$	$y(t)$
0	1000	500
1	2996	1737
2	217	3069
3	29	2017
4	22	1266
5	49	800
6	214	537

请给出相应的常数 r, a, b 和 d 。

提示：该微分方程组无法写出解析解，必须用数值方法求解。最常见的数值解法是四阶Runge-Kutta算法，其次是四阶Adams预测校正系统。这两种方法精度类似，但是从计算量来讲前者是后者的两倍。如果我们在问题中需要多次求解微分方程（组），就以后者为优。MATLAB中有ode45等命令可以求解常微分方程（组），不过在培训过程中我们建议自己编写Runge-Kutta算法和Adams预测校正系统的程序。这两个算法的原理可以不去掌握，只要能正确编写程序即可。