

钢管的订购和运输解答模型

邵 铮, 周天凌, 马健兵

指导老师: 扈志明

(清华大学, 北京 100084)

编者按: 本文把 B 题的问题 1 和 3 归结为网络最小费用流问题, 建立了线性和非线性最小费用流模型, 并运用相应的解法和分支定界法求解, 叙述清晰, 简洁, 层次分明. 本刊予以部分发表. 我们指出: 本文的网络流模型和线性规划中标号运输问题模型是等价的.

摘要: 首先通过最短路算法简化了供需距离网络, 去掉了铁路、公路等边的性质, 使供需距离网络简化为一个供需运输价格表. 在此基础上构造了三个模型: 线性费用的网络流模型、改进的线性费用的网络流模型和具有非线性费用的网络流模型. 通过改进传统的最小费用最大流算法, 解决了本题的非线性费用网络流模型, 并给出了算法的正确性证明与复杂度分析.

关键词: 运输问题; 网络流; 树形网络; 分支定界

1 问题的提出(略)

2 基本假设和符号说明

2.1 基本假设

1. 原图是一个连通的简单图;
2. 铁路、公路的运量没有限制;
3. 为了满足费用最小的要求, 允许出现生产过剩现象;
4. 工厂的数目(图中 S 点的个数)不太多, 约在 10 个以下;
5. 待铺设的钢管长度不太长, 约在 10000 公里以下;
6. 待铺设的线路的段数不太多, 约在 40 段以下;
7. 公路运输不足整公里部分按整公里算

2.2 符号说明

1. 工厂(图中 S 点), 设有 n 个, 记作 S_1, S_2, \dots, S_n ;
2. 在不至于混淆的情况下, S_i 同时用来表示每个工厂的产量, $i = 1, \dots, n$;
3. 待铺设线路的端点(图中 A 点, 以后简称关节点), 设有 m 个, 记作 A_1, A_2, \dots, A_m ;
4. 在不至于混淆的情况下, A_j 同时用来表示从各个工厂运到 A_j 的钢管总数量, $j = 1, \dots, m$;
5. 待铺设的管道, 记作 P_{jk} (j, k), 表示 A_j 与 A_k 之间有一条待铺设的管道, 它的长度也用 P_{jk} 来表示, 如果 A_j 与 A_k 之间没有待铺设的管道, 则 $P_{jk} = 0$;
6. SAQ_{ij} 表示从 S_i 到 A_j 的运输量, $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$;
7. $SA P_{ij}$ 表示从 S_i 到 A_j 运输单位长度钢管的最小费用, $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$;
8. AAQ_{jk} 表示 A_j 提供的用于铺设 A_j 与 A_k 之间管道的长度, $j, k = 1, \dots, m$. 显然有

$AAQ_{jk}+AAQ_{kj}=P_{jk};$
9 下文所有费用的单位均为千元

3 问题的分析与简化

3.1 问题的分析

整个铺设管道的工程看似错综复杂,其实可分为三个部分:

- 1 各个工厂(S 点)生产一定数量的钢管
- 2 把钢管从工厂(S 点)运送到铺设管道的关节点(A 点)
- 3 从关节点(A 点)将管道运至铺设地点

这三个部分是相互依赖的,不能简单地把三个部分孤立开来讨论 但是通过仔细观察,我们发现第二部分中的运费事实上只与出发点(S 点)、目标点(A 点)和运量有关,并且是运量的线性函数,具备可叠加性

运输总费用: $W = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m SAQ_{ij} \times SAP_{ij}$

因此,我们可以简化第二部分的计算,即先从铁路与公路网络得出 SAP 矩阵

3.2 问题的简化

求 SAP 矩阵的基本思路是图的最短路算法

由于铁路的运输费用与线路的长度不是线性关系,必须对铁路网做一些预处理才能套用图的标准最短路算法

下面叙述求 SAP 矩阵的过程:

- 1 利用图的标准最短路算法,从铁路网络得出图中任两个点之间的最短路径表 T (如果两个点之间不连通,认为它们之间的最短路长度为 $+$)。
- 2 利用题中的铁路运价表将 T 中的每个元素(即最短距离)转化为运输费用,将运输费用表记为 C 。
- 3 将公路的长度换算为运输费用,由公路路程图(包括要沿线铺设管道的公路)得出公路费用图 G ,若 i, j 不连通,则令 $G_{ij}=+$ 。
- 4 对于任一组 $(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}$ 如果 $C_{ij} < +$,且小于 G_{ij} ,那么就在公路费用图中加一条边 即令 $G_{ij} = \min\{C_{ij}, G_{ij}\}$ 。
- 5 利用图的标准最短路算法,求公路费用图中任一个 S 点到任一个 A 点的最小费用路径,得出 SAP 矩阵 如表 1 所示:

表 1 图 1 的 SAP 矩阵

A \ S	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1707	1603	1402	986	380	205	31	212	642	920	960	1060	1212	1280	1420
2	2157	2053	1902	1716	1110	955	860	712	1142	1420	1460	1560	1712	1780	1920
3	2307	2203	2002	1816	1210	1055	960	862	482	820	860	960	1112	1180	1320
4	2607	2503	2352	2166	1560	1405	1310	1162	842	620	510	610	762	830	970
5	2557	2453	2252	2066	1460	1305	1210	1112	792	570	330	510	712	730	870
6	2657	2553	2352	2166	1560	1405	1310	1212	842	620	510	450	262	110	280
7	2757	2653	2452	2266	1660	1505	1410	1312	992	760	660	560	382	260	20

经过这一变换, 问题大大简化, 下面将原问题用纯数学语言做一个描述

3.3 问题的数学描述

常量: R_i : 第 i 个工厂的钢管单价, L_i : 第 i 个工厂的产量上限

变量表: $S_i, SAQ_{ij}, A_j, AAQ_{jk}$

$\min (c1 + c2 + c3)$

s t

$$c1 = \sum_{i=1}^n S_i \times R_i$$

$$c2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m SAQ_{ij} \times SAP_{ij}$$

$$c3 = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m (AAQ_{jk} \times (AAQ_{jk} + 1)/2)$$

$$S_i = \sum_{j=1}^n SAQ_{ij}$$

$$A_j = \sum_{i=1}^n SAQ_{ij}$$

$$A_j = \sum_{k=1}^m AAQ_{jk}$$

$$AAQ_{jk} + AAQ_{kj} = P_{jk}$$

$$S_i \leq L_i$$

$$S_i = 0 \text{ or } S_i \geq 500$$

4 问题的求解

上面的数学描述中, 最难处理的是 $S_i = 0 \text{ or } S_i \geq 500$ 这个条件. 求解过程分为三步:

- 假设工厂的产量只有上限, 下面的三个流网络模型都是针对这种情况
- 假设工厂的产量有上下限, “产量有下限的模型”一节讨论这种情况
- 工厂的产量 $\{0, [500, L_i]\}$, “基于分支定界搜索的求解过程”一节讨论这种情况

4.1 线性费用流网络模型一

下面建立一个线性费用流网络的模型(图 1):

图中边上的 (A, B) , A 表示边的流量限制, B 表示边的单位流量的费用, 下同

1) 网络有一个源点 Source, 从 Source 到每个 S 点有一条边, 边的流量限制为 S_i 的最大产量 L_i , 单位费用为 S_i 生产钢管的单价 R_i

2) 从 S_i 到 A_j 有一条边, 边的流量限制为 $+$, 单位费用为 SAP_{ij} , 即从 S_i 到 A_j 运输单位长度钢管的费用

3) 对于每一条要铺设的管道 P , 设其长度为 Len , 两端点为 A_j, A_k , 则 P 对应着 Len 个点, 分别表示要铺设的一个单位长度的钢管(如图中 P_{11}, P_{12}, P_{13}), 从 A_j 到这 Len 个点各有一条边, 边的流量限制为 1, 单位费用分别为 $1, 2, 3, \dots, Len$, 从 A_k 到这 Len 个点也各有一条边, 边的流量限制为 1, 单位费用分别为 $Len, Len-1, \dots, 3, 2, 1$

4) 从 3) 中的点(代表每单位长度的钢管的点)到图的汇点 Target 各有一条边, 流量限

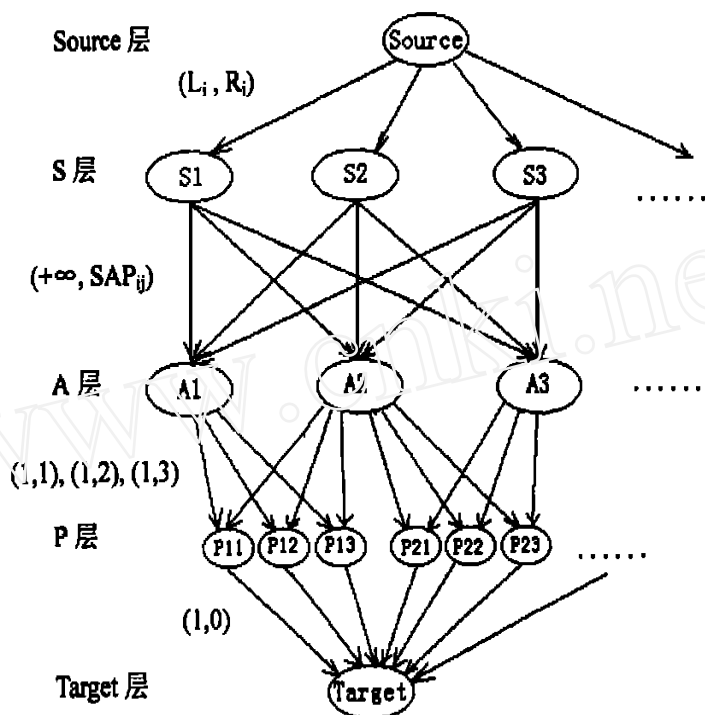


图 1 线性费用流网络模型一

制为 1, 单位费用为 0

这种流网络模型最简单, 效率也较低. 设铺设的管道共有 Tl 公里, 显然 $Tl \gg n$ 与 m . 网络中的点数大约为 Tl 个, 边数大约为 $3 \times Tl$, 最大流量为 Tl . 标准的网络流算法的时间复杂度为 $O(V^3 \times \text{MaxFlow})$, 因此, 这个模型的复杂度为 $O(Tl^4)$. 对于题中的数据, Tl 大约在 5000 左右, $Tl^4 \approx 10^{15}$, 不可承受.

4.2 线性费用流网络模型二(图 2)

模型一之所以效率低, 最主要的问题是流网络中的点太多了. 通过点的合并, 可以大幅减小流网络中点的个数. 将线性费用流网络模型一中对应同一段要铺设的管道的点合并成一个点(即模型一图中的 P_{11}, P_{12}, P_{13} 合并为 P_1), 从 A 点到这些点的边现在全部转到一个点上(如图), 从这些点到 $Target$ 的边合并为流量限制为 P_i (P_i 即要铺设的管道的长度), 单位费用为 0 的一条边.

模型二中的点数为 $n + m + P_{\text{count}} + 2$, 边数大约为 $2 \times Tl$ 个. 均比模型一有了大幅减小. 然而边数仍然太多, 而且这张流网络不是一张简单图(A 层与 P 层中两个点之间的边数 > 1), 因此, 不能直接套用标准最小费用最大流的复杂度计算公式.

4.3 非线性费用流网络模型(图 3)

第三种模型是非线性费用网络流模型

1) 模型中所有的点与模型二相同;

2) 模型中除了 A 层与 P 层之间的边以外, 均与模型二相同;

3) A 层与 P 层之间的边的流量限制与模型二相同, 但是没有单位费用的概念, 因为费用是非线性的, 费用 = 流量 \times (流量 + 1) / 2

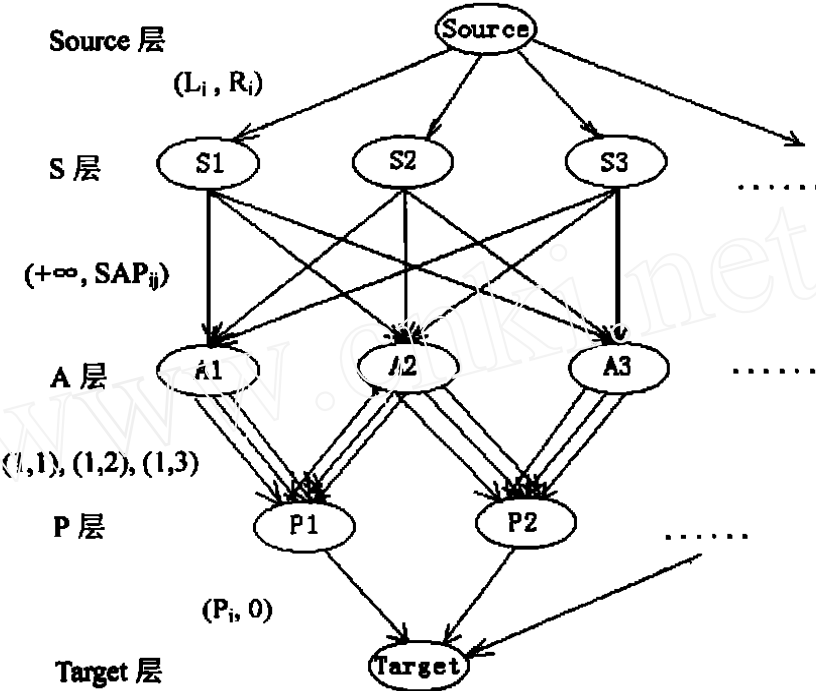


图 2 线性费用流网络模型二

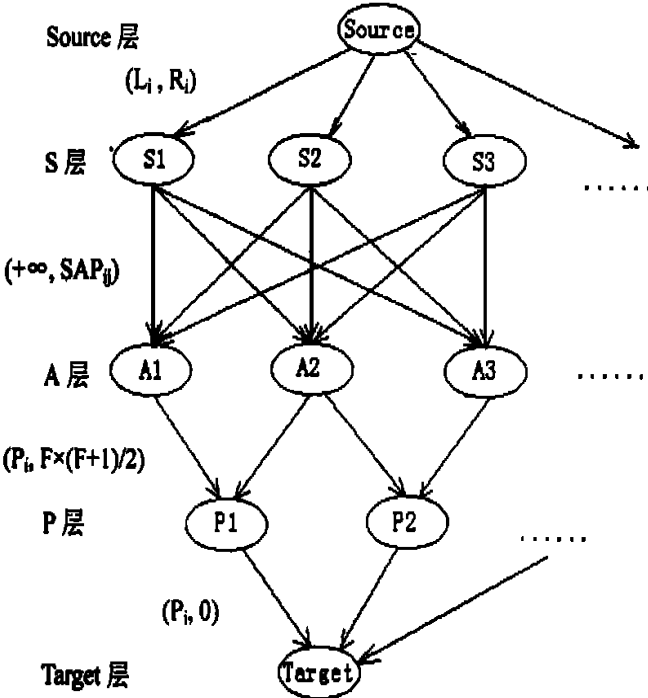


图 3 非线性费用流网络模型

线性费用流网络模型一可用标准的最小费用最大流算法(如最小费用路算法)来求解而非线性费用流网络模型不能直接套用标准算法 下面我们先叙述一下最小费用路算法,

再提出非线性模型的求解算法

标准的最小费用最大流算法——最小费用路算法:

Step 0: 取零流 f 为初始可行流

Step 1: 如果 $v(f) = \text{最大流量 } v_{\max}$, 则 f 为 D 中流值为 v_{\max} 的最小费用流 否则转 Step 2;

Step 2: 构造增量网络 $D(f)$. 如果 $D(f)$ 中不存在 (Source, Target) 路, 则 $D(f)$ 中没有流值为 v_{\max} 的可行流, 停止, 否则在 $D(f)$ 中找一条最小费用路 U , 转 Step 3

Step 3: 用 $c(U)$ 表示 U 的容量, 对 f 沿 U 增广流值, 增广量为 $c(U)$, 得到新流 f , 转 Step 1.

最小费用路算法在找最小费用路时要用到边的单位费用, 而非线性模型中的非线性费用边没有单位费用的概念 为此, 将最小费用路算法做一点修改:

定义非线性费用边的上下边际费用:

上边际费用 定义为: 流量增加 1, 非线性费用边的费用的增加值

下边际费用定义为: 流量减小 1, 非线性费用边的费用的减小值

当最小费用路算法查询正向流过这条边的单位费用时, 用上边际费用作为单位费用;

当最小费用路算法查询负向流过这条边的单位费用时, 用下边际费用作为单位费用;

经过这个修改, 最小费用路算法就能应用于本题的非线性模型了.

4.4 有产量下限的模型

下面考虑进一步的模型

现在我们给定每个工厂的生产量范围 $[Low_i, High_i]$, 求最小费用方案

为了解决这个问题, 我们要对原来的网络作一点修改 (图 4):

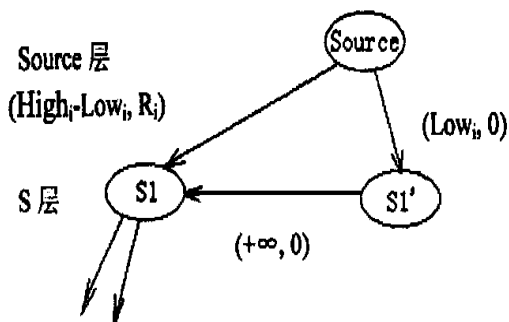


图 4 产量有上下限的非线性费用流网络模型

- 1) 为每个产量下限非 0 的工厂增加一个虚拟点, 如图中的 S_1' 点,
- 2) 增加一条从 Source 到 S_1' 的边, 流量限制为 Low_1 , 费用为 0,
- 3) 增加一条从 S_1' 到 S_1 的边, 流量限制为 $+$, 费用为 0,
- 4) 将 Source 到 S_1 的边的流量限制改为 $High_1 - Low_1$

这样的模型得出的最小费用要加上 $\sum_{i=1}^n Low_i \times R_i$ 才是原问题的解

由于我们假设允许生产过剩现象, 这种方法的正确性显而易见, 这里不再证明

4.5 基于分支定界搜索的求解过程

由于题中给出的工厂产量的范围 $\{0, [500, L_i]\}$ 不是一个区间, 我们需要用分支定界搜索来求解 下面以图 1 中的数据为例, 分析分支定界搜索的求解过程

1) 将工厂产量的范围设定为 (0- 800, 0- 800, 0- 1000, 0- 2000, 0- 2000, 0- 2000, 0- 2000), 求得一个解:

费用为 12753516, 生产方案为= (800, 800, 1000, 0, 1366, 960, 245).

2) 由于 1 的解中第 7 个工厂的产量 245 (0, 500), 要将问题分解为两部分:

i 范围: (0- 800, 0- 800, 0- 1000, 0- 2000, 0- 2000, 0- 2000, 0- 0)

解得: 费用为 12786316, 生产方案为(800, 800, 1000, 0, 1366, 1205, 0),

这个方案是合法的, 将其作为当前最优解

ii 范围: (0- 800, 0- 800, 0- 1000, 0- 2000, 0- 2000, 0- 2000, 500- 2000)

解得: 费用为 12796606, 生产方案为(800, 800, 1000, 0, 1336, 735, 500)

费用> 当前最优解, 舍弃当前节点

搜索结束, 最优解: 费用为 12786316, 生产方案为(800, 800, 1000, 0, 1366, 1205, 0) 至此, 题中第一问与第三问都已被圆满的解决了.

4 6 运行结果

- 图 1 的最优解: 总费用 12786316 千元
- s_1 到 s_7 的产量= (800, 800, 1000, 0, 1366, 1205, 0)
- 图 2 的最优解: 总费用: 14066314 千元
- s_1 到 s_7 的产量= (800, 800, 1000, 0, 1303, 2000, 0)

4 7 算法的复杂度分析

(V 指网络中的总点数, $V = n + m + Pcount + 2$, TL 指待铺设的管道的总长度)

i 预处理时用到的图的最短路算法的复杂度为 $O(V^3)$

ii 主程序外层是分支定界搜索算法, 最坏情况的运行次数为 2^n . 一般情况下运行次数不多

iii 主程序内层是非线性费用网络流模型, 使用非线性最小费用路算法, 复杂度为 $O(V^3 \times TL)$;

由此可见算法的时间复杂度在 $O(V^3 \times TL)$ 到 $O(V^3 \times TL \times 2^n)$ 之间 若数据规模如假设中所述, 则运算量大约在 10^{10} 以下.

参考文献:

- [1] 徐俊明 《图论及其应用》 中国科学技术大学出版社, 1998
- [2] 谢 政, 李建平 《网络算法与复杂性理论》 国防科技大学出版社, 1995

Model for Ordering and Transportation of Steel Pipe

SHAO Zheng, ZHOU Tian-ling, MA Jian-bing

(Tsinghua University, Beijing 100084)

Abstract First we simplified the supply-demand distance network by using the shortest-path algorithm. We got rid of the properties of the railways and roads, reduced the supply-demand

distance network to a supply-demand and transportation price table. Based on this, we constructed three models: the linear-cost-network-flow model, the developed linear-cost-network-flow model and the non-linear-cost-network-flow model. By generalizing the traditional minimum-cost-maximum-flow algorithm, we solved the non-linear-cost-network-flow model. We also gave the truth proving and the complexity-analysis to our algorithm.

订购和运输钢管的最优方案

陆维新, 林 皓, 陈晓东

指导老师: 周 杰

(四川大学, 成都 610064)

编者按: 该文建立了用于天然气管道铺设的钢管订购和运输总费用最省的二次规划模型. 总费用作为目标函数, 钢管生产厂的产量限制等作为约束条件. 所建模型通过定性分析与使用 Lingo 软件求解获得了满意的方案, 并且计算量大大减少了. 整篇文章理由描述充分, 层次清楚, 洞察力强而篇幅较短.

摘要: 本文研究铺设天然气管道的最优方案问题. 我们建立了一个以总费用为目标函数的二次规划模型.

1 问题的重述与分析(略)

2 模型的假设与符号说明

1) 基本假设:

要铺设的管道侧有公路, 可运送所需钢管;

钢管在运输中由铁路运转为公路运时不计换车费用;

所需钢管均由 $S_i (i=1, \dots, 7)$ 钢厂提供;

假设运送的钢管路途中没有损耗

2) 符号说明 ($i=1, 2, \dots, 7, j=1, 2, \dots, 15$):

s_i : 钢厂 S_i 的最大生产能力;

p_i : 钢厂 S_i 的出厂钢管单位价格(单位: 万元);

d : 公路上单位钢管的每公里运费 ($d=0.1$ 万元);

e : 铁路上一单位钢管的运费(分段函数见表 1);

c_{ij} : 1 单位钢管从钢厂 S_i 运到 A_j 的最小费用(单位: 万元);

b_j : 从 A_j 到 A_{j+1} 之间的距离(单位: 千米);

x_{ij} : 钢厂 S_i 运到 A_j 的钢管数;

y_j : 运到 A_j 地的钢管向左铺设的数目;

z_j : 运到 A_j 地的钢管向右铺设的数目;

$t_i = \begin{cases} 1, & \text{钢厂 } S_i \text{ 提供钢管} \\ 0, & \text{钢厂 } S_i \text{ 不提供钢管} \end{cases}$;