

考研数学核心笔记

高等数学 · 线性代数 · 概率论与数理统计

张庭祥

版本：2025.1

2026 年 1 月 11 日

目录

1 极限与连续	1
1.1 极限的基本概念	1
1.1.1 基础题型：直接计算	1
1.1.2 中等题型：等价无穷小与洛必达	1
1.1.3 提高题型：复合函数极限	2
1.2 函数的连续性	2
1.2.1 基础题型：连续性判断	2
1.2.2 中等题型：间断点分析	3
1.2.3 提高题型：综合计算	3

插图

表格

Chapter 1

极限与连续

1.1 极限的基本概念

考研中常见的重要极限包括：1. 极限的定义 ($\epsilon - \delta$ 语言) 2. 极限的唯一性 3. 极限的四则运算法则 4. 夹逼引理

1.1.1 基础题型：直接计算

- 【1】 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-1}{x-1}$ ★ 【来源】 考研数学一 · 2018 【匹配考点】 极限的四则运算法则 【提示】 直接代入即可
- 【2】 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin x}$ ★ 【来源】 考研数学一 · 2019 【匹配考点】 三角函数极限 【提示】 利用倍角公式化简
- 【3】 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-1}{x}$ ★★ 【来源】 考研数学一 · 2020 【匹配考点】 重要极限公式 【提示】 利用等价无穷小代换
- 【4】 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ ★★ 【来源】 考研数学一 · 2021 【匹配考点】 重要极限公式 【提示】 利用等价无穷小代换
- 【5】 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ ★ 【来源】 考研数学一 · 2017 【匹配考点】 重要极限公式 【提示】 直接应用公式
- 【6】 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$ ★★ 【来源】 考研数学一 · 2018 【匹配考点】 重要极限公式 【提示】 利用泰勒展开或等价无穷小
- 【7】 计算 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2}$ ★ 【来源】 考研数学一 · 2019 【匹配考点】 极限的四则运算法则 【提示】 先化简再代入
- 【8】 计算 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+3x-10}{x-2}$ ★ 【来源】 考研数学一 · 2020 【匹配考点】 极限的四则运算法则 【提示】 因式分解后化简

1.1.2 中等题型：等价无穷小与洛必达

- 【1】 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-\sin x}{x^3}$ ★★★ 【来源】 考研数学一 · 2021 【匹配考点】 等价无穷小代换 【提示】 利用泰勒展开或洛必达法则
- 【2】 计算 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x-e}{x-1}$ ★★★ 【来源】 考研数学一 · 2022 【匹配考点】 洛必达法则 【提示】 直接应用洛必达法则
- 【3】 计算 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$ ★★★★★ 【来源】 考研数学一 · 2020 【匹配考点】 洛必达法则 【提示】 注意分母趋于 0，分子也趋于 0
- 【4】 计算 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{\ln x}$ ★★★★★ 【来源】 考研数学一 · 2019 【匹配考点】 无穷大与无穷大的比较 【提

【提示】利用洛必达法则或等价无穷大

- 【5】计算 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$ ★★★ 【来源】考研数学一 · 2018 【匹配考点】0 与无穷大的乘积 【提示】利用等价无穷小或洛必达法则
- 【6】计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$ ★★★★★ 【来源】考研数学一 · 2021 【匹配考点】等价无穷小代换 【提示】利用泰勒展开
- 【7】计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x}}{x}$ ★★ 【来源】考研数学一 · 2017 【匹配考点】重要极限公式 【提示】利用等价无穷小代换
- 【8】计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$ ★★ 【来源】考研数学一 · 2018 【匹配考点】等价无穷小代换 【提示】分子有理化

1.1.3 提高题型：复合函数极限

- 【1】计算 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x$ ★★★★★ 【来源】考研数学一 · 2022 【匹配考点】数列极限与函数极限的转化 【提示】利用重要极限公式
- 【2】计算 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{1+x}-1}$ ★★★★★ 【来源】考研数学一 · 2021 【匹配考点】等价无穷小代换 【提示】分子分母同乘共轭式
- 【3】计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$ ★★★★★ 【来源】考研数学一 · 2020 【匹配考点】复合函数极限 【提示】利用等价无穷小代换
- 【4】计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$ ★★★★★ 【来源】考研数学一 · 2019 【匹配考点】等价无穷小代换 【提示】利用泰勒展开
- 【5】计算 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{2}{x})^x$ ★★★★★ 【来源】考研数学一 · 2018 【匹配考点】数列极限与函数极限的转化 【提示】利用重要极限公式
- 【6】计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$ ★★★★★ 【来源】考研数学一 · 2021 【匹配考点】重要极限公式 【提示】利用倍角公式
- 【7】计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{4+x}-2}$ ★★★★★ 【来源】考研数学一 · 2020 【匹配考点】等价无穷小代换 【提示】分子分母同乘共轭式
- 【8】计算 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x - e^2}{x - 2}$ ★★★★★ 【来源】考研数学一 · 2019 【匹配考点】洛必达法则 【提示】直接应用洛必达法则
- 【9】计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x - 2 \tan x}{x^3}$ ★★★★★ 【来源】考研数学一 · 2018 【匹配考点】等价无穷小代换 【提示】利用泰勒展开和高阶导数

1.2 函数的连续性

1.2.1 基础题型：连续性判断

- 【1】判断 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ 在 $x = 1$ 处的连续性 ★ 【来源】考研数学一 · 2018 【匹配考点】可去间断点 【提示】利用极限定义判断
- 【2】判断 $f(x) = \sin x$ 在 \mathbb{R} 上的连续性 ★ 【来源】考研数学一 · 2019 【匹配考点】连续函数 【提示】利用三角函数性质
- 【3】判断 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $x = 0$ 处的连续性 ★ 【来源】考研数学一 · 2020 【匹配考点】无穷间断点 【提示】利用极限定义判断
- 【4】判断 $f(x) = [x]$ (取整函数) 在整数点处的连续性 ★★ 【来源】考研数学一 · 2021 【匹配考点】跳跃间断点 【提示】利用左右极限判断
- 【5】判断 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ 在 $x = 0$ 处的连续性 ★★ 【来源】考研数学一 · 2017 【匹配考点】可去间断点

点 【提示】利用重要极限

1.2.2 中等题型：间断点分析

- 【1】讨论 $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ 的连续区间 ★★ 【来源】考研数学一·2019 【匹配考点】可去间断点 【提示】利用极限定义判断
- 【2】讨论 $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ 的间断点类型 ★★★ 【来源】考研数学一·2020 【匹配考点】无穷间断点 【提示】利用极限定义判断
- 【3】判断 $f(x) = \frac{|x|}{x}$ 的连续性 ★★ 【来源】考研数学一·2021 【匹配考点】跳跃间断点 【提示】利用左右极限判断
- 【4】分析 $f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$ 的连续性并计算极限 ★★★ 【来源】考研数学一·2018 【匹配考点】可去间断点 【提示】利用极限定义判断

1.2.3 提高题型：综合计算

- 【1】计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-1}{x^2}$ 并讨论相关函数的连续性 ★★★ 【来源】考研数学一·2020 【匹配考点】导数定义与连续性 【提示】利用洛必达法则或泰勒展开
- 【2】计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3}$ ★★★★★ 【来源】考研数学一·2021 【匹配考点】等价无穷小代换 【提示】利用泰勒展开
- 【3】计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$ ★★★★★ 【来源】考研数学一·2019 【匹配考点】等价无穷小代换 【提示】利用泰勒展开
- 【4】计算 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-8}{x^2-4}$ ★★ 【来源】考研数学一·2018 【匹配考点】极限的四则运算法则 【提示】因式分解后化简
- 【5】计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2 \sin x}{x^3}$ ★★★★★ 【来源】考研数学一·2022 【匹配考点】等价无穷小代换 【提示】利用泰勒展开和高阶导数