

# 考研数学核心笔记

高等数学 • 线性代数 • 概率论与数理统计

张庭祥

版本：2025.1

2026 年 1 月 11 日

# 目录

1 极限与连续	1
1.1 极限的基本概念	1
1.1.1 基础题型：直接计算	1
1.1.2 中等题型：等价无穷小与洛必达	1
1.1.3 提高题型：复合函数极限	2
1.2 函数的连续性	2
1.2.1 基础题型：连续性判断	2
1.2.2 中等题型：间断点分析	3
1.2.3 提高题型：综合计算	3

# 插图

# 表格

# Chapter 1

## 极限与连续

### 1.1 极限的基本概念

考研中常见的重要的极限包括：1. 极限的定义（ $\epsilon - \delta$  语言）2. 极限的唯一性 3. 极限的四则运算法则 4. 夹逼引理

#### 1.1.1 基础题型：直接计算

- 【1】计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$  ★ 【来源】考研数学一 · 2018 【匹配考点】极限的四则运算法则 【提示】直接代入即可
- 【2】计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin x}$  ★ 【来源】考研数学一 · 2019 【匹配考点】三角函数极限 【提示】利用倍角公式化简
- 【3】计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$  ★★ 【来源】考研数学一 · 2020 【匹配考点】重要极限公式 【提示】利用等价无穷小代换
- 【4】计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$  ★★ 【来源】考研数学一 · 2021 【匹配考点】重要极限公式 【提示】利用等价无穷小代换
- 【5】计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$  ★ 【来源】考研数学一 · 2017 【匹配考点】重要极限公式 【提示】直接应用公式
- 【6】计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$  ★★ 【来源】考研数学一 · 2018 【匹配考点】重要极限公式 【提示】利用泰勒展开或等价无穷小
- 【7】计算  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$  ★ 【来源】考研数学一 · 2019 【匹配考点】极限的四则运算法则 【提示】先化简再代入
- 【8】计算  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2}$  ★ 【来源】考研数学一 · 2020 【匹配考点】极限的四则运算法则 【提示】因式分解后化简

#### 1.1.2 中等题型：等价无穷小与洛必达

- 【1】计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$  ★★★ 【来源】考研数学一 · 2021 【匹配考点】等价无穷小代换 【提示】利用泰勒展开或洛必达法则
- 【2】计算  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x - 1}$  ★★★ 【来源】考研数学一 · 2022 【匹配考点】洛必达法则 【提示】直接应用洛必达法则
- 【3】计算  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}$  ★★★★ 【来源】考研数学一 · 2020 【匹配考点】洛必达法则 【提示】注意分母趋于 0，分子也趋于 0
- 【4】计算  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{\ln x}$  ★★★★ 【来源】考研数学一 · 2019 【匹配考点】无穷大与无穷大的比较 【提

示】利用洛必达法则或等价无穷大

- 【5】计算  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$  ★★★ 【来源】考研数学一·2018 【匹配考点】0 与无穷大的乘积 【提示】利用等价无穷小或洛必达法则
- 【6】计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$  ★★★★ 【来源】考研数学一·2021 【匹配考点】等价无穷小代换 【提示】利用泰勒展开
- 【7】计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-e^{-x}}{x}$  ★★ 【来源】考研数学一·2017 【匹配考点】重要极限公式 【提示】利用等价无穷小代换
- 【8】计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$  ★★ 【来源】考研数学一·2018 【匹配考点】等价无穷小代换 【提示】分子有理化

### 1.1.3 提高题型：复合函数极限

- 【1】计算  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x$  ★★★★ 【来源】考研数学一·2022 【匹配考点】数列极限与函数极限的转化 【提示】利用重要极限公式
- 【2】计算  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{1+x-1}}$  ★★★ 【来源】考研数学一·2021 【匹配考点】等价无穷小代换 【提示】分子分母同乘共轭式
- 【3】计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}-1}{x}$  ★★★★ 【来源】考研数学一·2020 【匹配考点】复合函数极限 【提示】利用等价无穷小代换
- 【4】计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$  ★★★★★ 【来源】考研数学一·2019 【匹配考点】等价无穷小代换 【提示】利用泰勒展开
- 【5】计算  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{2}{x})^x$  ★★★★ 【来源】考研数学一·2018 【匹配考点】数列极限与函数极限的转化 【提示】利用重要极限公式
- 【6】计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 2x}{x^2}$  ★★★ 【来源】考研数学一·2021 【匹配考点】重要极限公式 【提示】利用倍角公式
- 【7】计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{4+x-2}}$  ★★★ 【来源】考研数学一·2020 【匹配考点】等价无穷小代换 【提示】分子分母同乘共轭式
- 【8】计算  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x - e^2}{x-2}$  ★★★★ 【来源】考研数学一·2019 【匹配考点】洛必达法则 【提示】直接应用洛必达法则
- 【9】计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x - 2 \tan x}{x^3}$  ★★★★★ 【来源】考研数学一·2018 【匹配考点】等价无穷小代换 【提示】利用泰勒展开和高阶导数

## 1.2 函数的连续性

### 1.2.1 基础题型：连续性判断

- 【1】判断  $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$  在  $x = 1$  处的连续性 ★ 【来源】考研数学一·2018 【匹配考点】可去间断点 【提示】利用极限定义判断
- 【2】判断  $f(x) = \sin x$  在  $\mathbb{R}$  上的连续性 ★ 【来源】考研数学一·2019 【匹配考点】连续函数 【提示】利用三角函数性质
- 【3】判断  $f(x) = \frac{1}{x}$  在  $x = 0$  处的连续性 ★ 【来源】考研数学一·2020 【匹配考点】无穷间断点 【提示】利用极限定义判断
- 【4】判断  $f(x) = [x]$  (取整函数) 在整数点处的连续性 ★★ 【来源】考研数学一·2021 【匹配考点】跳跃间断点 【提示】利用左右极限判断
- 【5】判断  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  在  $x = 0$  处的连续性 ★★ 【来源】考研数学一·2017 【匹配考点】可去间断

**点 【提示】利用重要极限****1.2.2 中等题型：间断点分析**

- 【1】 讨论  $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$  的连续区间 ★★ 【来源】考研数学一·2019 【匹配考点】可去间断点 【提示】利用极限定义判断
- 【2】 讨论  $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$  的间断点类型 ★★★ 【来源】考研数学一·2020 【匹配考点】无穷间断点 【提示】利用极限定义判断
- 【3】 判断  $f(x) = \frac{|x|}{x}$  的连续性 ★★ 【来源】考研数学一·2021 【匹配考点】跳跃间断点 【提示】利用左右极限判断
- 【4】 分析  $f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$  的连续性并计算极限 ★★★ 【来源】考研数学一·2018 【匹配考点】可去间断点 【提示】利用极限定义判断

**1.2.3 提高题型：综合计算**

- 【1】 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x^2}$  并讨论相关函数的连续性 ★★★★ 【来源】考研数学一·2020 【匹配考点】导数定义与连续性 【提示】利用洛必达法则或泰勒展开
- 【2】 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3}$  ★★★★★ 【来源】考研数学一·2021 【匹配考点】等价无穷小代换 【提示】利用泰勒展开
- 【3】 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$  ★★★★★ 【来源】考研数学一·2019 【匹配考点】等价无穷小代换 【提示】利用泰勒展开
- 【4】 计算  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$  ★★ 【来源】考研数学一·2018 【匹配考点】极限的四则运算法则 【提示】因式分解后化简
- 【5】 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2 \sin x}{x^3}$  ★★★★★ 【来源】考研数学一·2022 【匹配考点】等价无穷小代换 【提示】利用泰勒展开和高阶导数