

考研数学核心笔记

高等数学 · 线性代数 · 概率论与数理统计

张庭祥

版本：2025.1

2026 年 1 月 9 日

目录

1	极限与连续	2
1.1	极限的概念与性质	2
1.1.1	数列极限	2
1.1.2	函数极限	3
1.2	极限的计算方法	3
1.2.1	基本方法	3
1.2.2	洛必达法则	3
1.3	连续与间断	4
1.3.1	连续的定义	4
1.3.2	间断点类型	4
1.4	本章习题	4
1.5	本章总结	5
2	第二章：功能测试章节	6
2.1	文本与基础格式测试	6
2.2	列表功能测试	6
2.2.1	无序列表	6
2.2.2	有序列表	6
2.3	公式功能测试	6
2.3.1	行内公式	6
2.3.2	单行编号公式	6
2.3.3	多行公式	7
2.4	表格功能测试	7
2.5	图片功能测试	7
2.6	代码块功能测试	7
2.7	交叉引用综合测试	7
2.8	浮动体位置测试	9

插图

2-1 测试图片（验证图插入、缩放、标题）	8
2-2 浮动体位置测试（h 参数）	9

表格

1-1	间断点分类	4
2-1	测试表格（基础格式）	7

前言

这里是前言内容...

作者
2026 年 1 月 9 日

Chapter 1

极限与连续

本章学习目标：掌握极限的计算方法，理解连续性的本质

1.1 极限的概念与性质

1.1.1 数列极限

定义 1.1: 数列极限

设 $\{x_n\}$ 为数列, a 为常数. 若对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N , 使得当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - a| < \varepsilon$, 则称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a , 记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

例题

证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$

解

利用单调有界准则证明:

- 1) 先证数列 $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ 单调递增
- 2) 再证数列有上界
- 3) 由单调有界准则知极限存在, 记该极限为 e

【考点】极限存在准则: 单调有界数列必收敛; 夹逼准则。

定理 1.1: 唯一性

若数列 $\{a_n\}$ 收敛, 则它只有一个极限.

证明

设 a 是 $\{a_n\}$ 的一个极限. 我们证明: 对任何数 $b \neq a$, b 不是 $\{a_n\}$ 的极限. 事实上, 若取 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}|b-a|$, 则按定义, 在 $U(a; \varepsilon_0)$ 之外至多只有 $\{a_n\}$ 中有限项, 从而在 $U(b; \varepsilon_0)$ 内至多只有 $\{a_n\}$ 中有限个项; 所以 b 不是 $\{a_n\}$ 的极限. 这就证明了收敛数列只能有一个极限.

定理 1.2: 有界性

若数列 $\{a_n\}$ 收敛, 则它是有界的. 即存在正数 M , 使得对一切正整数 n , 都有

$$|a_n| \leq M \quad (1.1)$$

证明

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则对 $\varepsilon = 1$, 存在正整数 N , 使得当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < 1$ 。因此, 对所有 $n \geq 1$, 都有

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|$$

令 $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_N|, 1 + |a|\}$, 则对一切正整数 n 都有 $|a_n| \leq M$ 。

1.1.2 函数极限**定义 1.2: 函数极限**

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义, A 为常数。若对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 则称 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 时的极限为 A 。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

注意

使用洛必达法则前必须检查是否满足 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式。

1.2 极限的计算方法**1.2.1 基本方法**

- 1) 直接代入法: 初等函数在其定义域内连续
- 2) 因式分解法: 消去零因子
- 3) 有理化法: 处理根式
- 4) 等价无穷小替换: 常用等价关系

1.2.2 洛必达法则**定理 1.3: 洛必达法则**

若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ (或 ∞), 且 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在 (或为 ∞), 则

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

例题

求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$

解

这是 $\frac{0}{0}$ 型未定式，使用洛必达法则：

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} \quad (\text{再次洛必达}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

1.3 连续与间断

1.3.1 连续的定义

定义 1.3: 连续

函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续，当且仅当：

- 1) $f(x_0)$ 存在
- 2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在
- 3) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

1.3.2 间断点类型

表 1-1: 间断点分类

类型	条件	示例
可去间断点	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在但不等于 $f(x_0)$	$\frac{\sin x}{x} (x = 0)$
跳跃间断点	左右极限存在但不相等	$\text{sgn}(x) (x = 0)$
无穷间断点	极限为无穷大	$\frac{1}{x} (x = 0)$
振荡间断点	极限不存在且不为无穷	$\sin \frac{1}{x} (x = 0)$

1.4 本章习题

习题

- 1) 求极限: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$
- 2) 求极限: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$
- 3) 判断函数 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ 在 $x = 1$ 处的连续性

1.5 本章总结

本章总结

- **【重点】** 极限的 ε - δ 定义是理论基础
- 掌握七大重要极限：
 - 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
 - 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$
 - 3) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$
- 熟练运用洛必达法则^[1]
- 理解连续^[1-3]与间断的实质^[4]

Chapter 2

第二章：功能测试章节

2.1 文本与基础格式测试

本章用于测试 README.md 中定义的所有 LaTeX 功能，包括基础文本格式、图表插入、公式排版、交叉引用等。加粗文本示例：这是加粗文本；斜体文本示例：这是斜体文本；脚注示例¹。

2.2 列表功能测试

2.2.1 无序列表

- 测试无序列表项 1
- 测试无序列表项 2
- 嵌套无序列表
 - 嵌套项 1
 - 嵌套项 2

2.2.2 有序列表

- 1) 测试有序列表项 1
- 2) 测试有序列表项 2
- 3) 嵌套有序列表
 - 1) 嵌套项 1
 - 2) 嵌套项 2

2.3 公式功能测试

2.3.1 行内公式

行内公式示例： $E = mc^2$ （质能方程）， $f(x) = \sum_{i=1}^n x_i$ （求和公式）。

2.3.2 单行编号公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \tag{2.1}$$

公式(2.1)为高斯积分，验证公式交叉引用功能。

¹这是测试脚注，验证脚注功能是否正常编译

2.3.3 多行公式

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad (2.2)$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad (2.3)$$

公式(2.2)和(2.3)验证多行公式排版与引用。

2.4 表格功能测试

表 2-1: 测试表格（基础格式）

列 1	列 2	列 3
数据 1	数据 2	数据 3
数据 4	数据 5	数据 6

表格2-1验证表格插入、标题与交叉引用功能。

2.5 图片功能测试

图2-1

2.6 代码块功能测试

```
# Python测试代码
def hello_world():
    print("Hello, LaTeX!")
hello_world()
```

Listing 2.1: Python 代码高亮示例

```
# 带高亮的Python测试代码
def add(a, b):
    """求和函数"""
    return a + b

result = add(3, 5)
print(f"结果: {result}")
```

代码块2.1验证代码高亮、标题与引用功能（需确保 listings 包已加载）。

2.7 交叉引用综合测试

- 引用章节：第二章 (2) 的 §2.1；
- 引用公式：(2.1)、(2.2)；
- 引用表格：2-1；

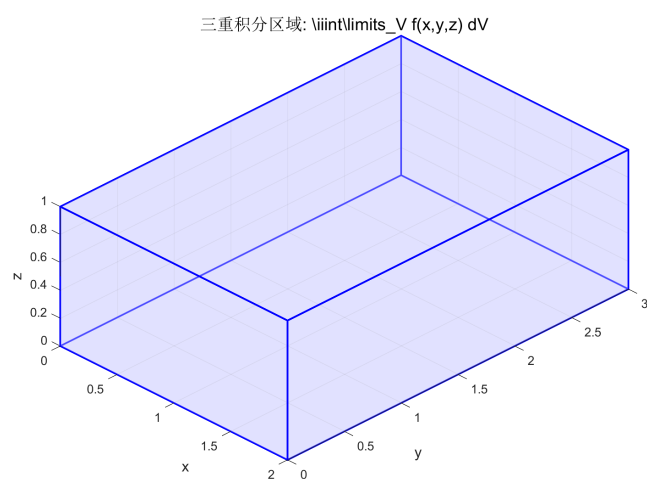


图 2-1: 测试图片（验证图插入、缩放、标题）

- 引用图片：2-1；
- 引用代码：2.1；
- 引用浮动体测试图：2-2。

2.8 浮动体位置测试

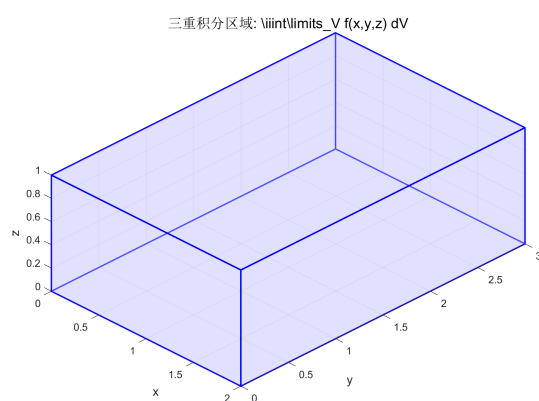


图 2-2: 浮动体位置测试 (h 参数)

参考文献

- [1] 同济大学数学系. 高等数学[M]. 第 7 版. 高等教育出版社, 2014.
- [2] 盛骤, 谢式千, 潘承毅. 概率论与数理统计[M]. 第 4 版. 高等教育出版社, 2008.
- [3] 居余马, 林翠琴. 线性代数[M]. 第 2 版. 清华大学出版社, 2013.
- [4] 张宇. 近年考研数学命题特点分析[J]. 数学教育, 2023, 45(3): 12-18.