

考研数学核心笔记

高等数学 · 线性代数 · 概率论与数理统计

张庭祥

版本：2025.1

2026 年 1 月 10 日

目录

1	第二章：极限与连续	2
2	一元函数微分学	3
3	一元函数积分学	4
4	无穷级数	5
5	多元函数微积分	6
6	多元函数积分学	7
7	常微分方程	8
8	行列式与矩阵	9
9	向量与线性方程组	10
10	特征值、特征向量与二次型	11
11	概率论基础	12
12	随机变量及其分布	13
13	数理统计	14

插图

表格

前言

这里是前言内容...

作者

2026 年 1 月 10 日

Chapter 1

第二章：极限与连续

本章目标

- 理解极限的概念（数列极限、函数极限），掌握极限的性质（唯一性、有界性、保号性）
- 掌握极限的两个准则：夹逼准则、单调有界准则，能利用准则求极限
- 熟练掌握等价无穷小替换公式（重点： $\sin x \sim x$ 、 $\ln(1+x) \sim x$ 、 $e^x - 1 \sim x$ ），能结合洛必达法则求未定式极限（ $\frac{0}{0}$ 型、 $\frac{\infty}{\infty}$ 型、 $0 \cdot \infty$ 型、 $\infty - \infty$ 型）
- 理解函数连续性的定义及判定方法（在一点连续、在某个区间连续），判断函数间断点的类型（第一类：可去、跳跃；第二类：无穷间断、振荡间断）
- 了解闭区间连续函数（有界性、最大值最小值定理、介值定理、零点定理），能应用性质证明简单命题
- 掌握极限的四则运算法则
- 掌握复合函数极限运算法则
- 掌握幂指函数极限的求解方法

Chapter 2

一元函数微分学

本章目标

- 掌握导数的概念及几何意义，掌握导数的定义式（左导数、右导数），判断函数在某点的可导性（可导与连续的关系）
- 熟练掌握基本求导公式、四则运算法则、复合函数求导法则（链式法则），掌握隐函数求导、参数方程求导、高阶导数的求解方法
- 理解微分的概念及几何意义，掌握微分的运算法则，了解微分在近似计算中的应用
- 掌握并能灵活应用微分中值定理（重点：罗尔定理、拉格朗日中值定理、柯西中值定理），能利用中值定理证明不等式、等式
- 掌握函数单调性、极值、最值的判定方法，能求解函数的极值和闭区间上的最值
- 理解函数凹凸性、拐点的概念，掌握凹凸性的判定方法及拐点的求解，能绘制函数的图形（含渐近线：水平、垂直、斜渐近线）

Chapter 3

一元函数积分学

本章目标

- 理解原函数与不定积分的概念，掌握不定积分的基本性质和基本积分公式，熟练掌握不定积分的换元积分法（第一类、第二类）和分部积分法
- 理解定积分的概念及几何意义，掌握定积分的性质（线性性、保号性、区间可加性等），了解定积分中值定理
- 掌握微积分基本定理（牛顿-莱布尼兹公式），能利用换元法、分部积分法计算定积分
- 理解反常积分的概念（无穷限反常积分、无界函数反常积分），掌握反常积分的敛散性判定方法及计算
- 掌握定积分的几何应用（求面积、体积、弧长、旋转体表面积）和物理应用（求功、引力、压力、质心）
- 掌握有理函数积分、三角函数有理式积分的求解技巧

Chapter 4

无穷级数

本章目标

本章目标是掌握无穷级数的基本概念、收敛性判别方法及其应用，重点包括：

- 理解常数项级数收敛、发散的概念，掌握级数收敛的必要条件和基本性质（线性性、加括号性质）
- 掌握正项级数收敛性的判定方法（比较判别法、比值判别法、根值判别法、积分判别法）
- 掌握交错级数的莱布尼兹判别法，理解绝对收敛与条件收敛的概念及关系
- 理解幂级数的概念，掌握幂级数的收敛半径、收敛区间、收敛域的求解方法
- 掌握幂级数的四则运算法则、逐项求导、逐项积分性质，能将函数展开为幂级数（泰勒级数），能利用幂级数求常数项级数的和
- 了解傅里叶级数的概念，掌握周期为 2π 的傅里叶级数展开式，了解狄利克雷收敛定理；掌握周期为 $2l$ 的傅里叶级数展开式

Chapter 5

多元函数微积分

本章目标

本章主要介绍多元函数微积分的基本概念和方法，重点包括多元函数的极限与连续、偏导数与全微分、方向导数与梯度、多元函数的极值及其应用等内容。通过学习本章内容，读者将掌握处理多变量问题的基本工具和技巧，为后续学习多元积分和应用数学打下坚实基础。本章重点如下：

- 理解多元函数的概念，了解二元函数的几何意义，掌握二元函数的极限与连续性的概念及判定
- 理解偏导数的概念，掌握偏导数的计算方法（一阶、高阶偏导数），理解混合偏导数与求导顺序的关系
- 理解全微分的概念，掌握全微分的存在条件，能计算全微分，了解全微分在近似计算中的应用
- 掌握多元复合函数的求导法则（链式法则），能求解含抽象函数的多元复合函数偏导数；掌握隐函数求导法则（一个方程、方程组）
- 理解多元函数极值的概念，掌握多元函数极值的必要条件和充分条件，能求解实际问题中的最值
- 了解方向导数与梯度的概念，掌握方向导数与梯度的计算方法
- 了解空间曲线的切线与法平面、空间曲面的切平面与发现的方程求解方法

Chapter 6

多元函数积分学

本章目标

- 理解二重积分的概念及几何意义，掌握二重积分的性质，能利用直角坐标、极坐标计算二重积分
- 理解三重积分的概念，能利用直角坐标、柱坐标、球坐标计算三重积分
- 理解曲线积分的概念（第一类曲线积分：对弧长；第二类曲面积分：对坐标），掌握两类曲面积分的计算方法；掌握格林公式，能利用格林公式计算曲线积分与路径无关的条件
- 理解曲面积分的概念（第一类曲线积分：对面积；第二类曲面积分：对坐标），掌握两类曲面积分的计算方法；掌握斯托克斯公式与高斯公式，能利用它们简化曲面积分的计算
- 了解散度、旋度的概念，掌握散度、旋度的计算方法
- 掌握重积分、曲线积分、曲面积分的几何和物理应用（求面积、体积、质量、质心、功、通量）

Chapter 7

常微分方程

本章目标

本章我们将学习常微分方程的基本概念、解法及其应用。通过本章的学习，您将能够：

- 了解常微分方程的基本概念（阶、解、通解、特解、初始条件）
- 熟练掌握一阶微分方程的求解方法：可分离变量方程、齐次方程、一阶线性微分方程（常数变易法）、伯努利方程
- 掌握可降阶的高阶微分方程的求解方法（ $y^{(n)} = f(x)$ 型、 $y'' = f(x, y')$ 型、 $y'' = f(y, y')$ 型）
- 理解二阶线性微分方程的解的结构，掌握二阶常系数齐次线性微分方程的求解方法（特征方程法）
- 理解二阶常系数非齐次线性微分方程的求解方法（待定系数法、常数变易法），能解非齐次项为多项式、指数函数、正弦函数、余弦函数及它们乘积的方程
- 了解高阶常系数齐次线性微分方程的求解方法；了解欧拉方程的求解方法
- 能用微分方程解决简单的物理应用问题（如力学、电路问题）

Chapter 8

行列式与矩阵

本章目标

本章我们将学习行列式与矩阵的基本概念及其运算方法，掌握行列式的性质和计算技巧，理解矩阵的基本运算和类型，为后续章节的线性方程组和特征值问题打下基础。本章重点如下：

- 了解行列式的概念，掌握行列式的性质，熟练掌握 n 阶行列式的计算方法（展开方法、化上三角/下三角、递推法、范德蒙德行列式）
- 理解矩阵的概念，掌握矩阵的线性运算（加法、数乘）、乘法运算、转置运算，了解矩阵运算的性质
- 理解逆矩阵的概念，掌握逆矩阵的性质，熟练掌握逆矩阵的求解方法（伴随矩阵法、初等行变换法），能利用逆矩阵求解矩阵方程
- 理解矩阵的初等变换概念，掌握矩阵的性质，了解矩阵的秩与初等变换的关系
- 理解矩阵的秩的概念，掌握矩阵秩的计算方法，了解矩阵秩的性质
- 了解分块矩阵的概念，掌握分块矩阵的运算法则，能利用分块矩阵简化计算

Chapter 9

向量与线性方程组

本章目标

本章主要介绍向量的基本概念及其运算，线性方程组的表示与求解方法。通过学习本章内容，读者应掌握以下知识点：

- 理解 n 维向量的概念，掌握向量的线性运算（加法、数乘）、理解向量的线性组合与线性表示的概念
- 理解向量组线性相关、线性无关的概念，掌握向量组线性相关、线性无关的判定方法（定义法、秩判别法、行列式判别法）
- 理解向量组的极大线性无关组和向量组的秩的概念，掌握极大线性无关组的求解方法和向量组秩的计算
- 了解向量组等价的概念，了解矩阵的秩与其行（列）向量组的秩的关系
- 理解齐次线性方程组有非零解的充分必要条件，理解非齐次线性方程组的通解的求解方法（初等行变换法）
- 了解 n 维向量空间、基、维数、坐标的概念，了解基变换与坐标变换公式

Chapter 10

特征值、特征向量与二次型

本章目标

本章主要介绍特征值与特征向量的概念及其计算方法，二次型的标准形与惯性指数。通过学习本章内容，读者应掌握以下知识点：

- 理解矩阵的特征值、特征向量的概念，掌握特征值、特征向量的求解方法，了解特征值的性质（如迹、行列式与特征值的关系）
- 理解相似矩阵的概念，掌握相似矩阵的性质，了解矩阵可相似对角化的充分必要条件，能将可对角化矩阵化为对角矩阵
- 了解实对称矩阵的性质（特征值为实数、特征向量正交），掌握实对称矩阵正交相似对角化的方法
- 理解二次型的概念，掌握二次型的矩阵表示，了解二次型的秩的概念
- 掌握用正交变换化二次型为标准形的方法；了解用配方法化二次型为标准形的方法
- 理解正定二次型、正定矩阵的概念，掌握正定二次型、正定矩阵的判定方法（顺序主子式法、特征值法）

Chapter 11

概率论基础

本章目标

- 了解随机试验、样本空间、随机事件的概念，掌握事件的关系与运算（并、交、差、对立、互斥）
- 理解概率的概念，掌握概率的基本性质（加法公式、减法公式、乘法公式），掌握古典概型、几何概型的概率计算方法
- 理解条件概率的概念，掌握条件概率公式、全概率公式、贝叶斯公式，能利用公式解决复杂事件的概率计算问题
- 理解事件独立性的概念，掌握独立事件的概率计算；了解伯努利试验的概念，掌握二项概率的计算方法

Chapter 12

随机变量及其分布

本章目标

- 理解随机变量的概念，了解离散型随机变量、连续型随机变量的概念
- 掌握离散型随机变量的分布律（概率质量函数）的概念及性质，熟练掌握常见离散型分布：0-1分布、二项分布、泊松分布、几何分布、超几何分布
- 掌握连续型随机变量的概率密度函数的概念及性质，熟练掌握常见连续型分布：均匀分布、正态分布、指数分布，能利用概率密度计算概率
- 理解随机变量的分布函数的概念和性质，能利用分布律/概率密度求分布函数，反之亦然
- 掌握随机变量函数的分布的求解方法（离散型：直接法；连续型：分布函数、公式法）
- 理解二维随机变量的概念，掌握二维离散型随机变量的联合分布律、边缘分布律、条件分布律；掌握二维连续型随机变量的联合概率密度、边缘概率密度、条件概率密度
- 理解随机变量独立性的概念，掌握二维随机变量独立的判定方法
- 理解随机变量的数学期望、方差、标准差的概念，掌握其性质及计算方法；掌握常见分布的数学期望和方差
- 理解协方差、相关系数的概念，掌握其性质及计算方法，了解相关性与独立性的关系
- 了解切比雪夫不等式、大数定律、中心极限定理的内容，能利用中心极限定理近似计算概率

Chapter 13

数理统计

本章目标

- 了解总体、个体、样本、样本容量的概念，了解简单随机样本的概念，掌握样本均值、样本方差、样本矩的计算方法
- 了解统计量的概念，掌握常见统计量的分布： χ^2 分布、 t 分布、 F 分布，了解这些分布的性质及分位数的概念
- 理解参数估计的概念，掌握点估计的方法：矩估计法、最大似然法
- 了解估计量的评选标准：无偏性、有效性、一致性
- 理解区间估计的概念，掌握单个正态总体的均值、方差的置信区间；掌握两个正态总体的均值差、方差比的置信区间
- 理解假设检验的概念，掌握假设检验的基本步骤（建立假设、构造统计量、确定拒绝域、作出判断）
- 掌握单个正态总体的均值、方差的假设检验；掌握两个正态总体的均值差、方差比的假设检验
- 了解分布拟合检验的 χ^2 检验法

参考文献

- [1] 同济大学数学系. 高等数学[M]. 第 7 版. 高等教育出版社, 2014.
- [2] 盛骤, 谢式千, 潘承毅. 概率论与数理统计[M]. 第 4 版. 高等教育出版社, 2008.
- [3] 居余马, 林翠琴. 线性代数[M]. 第 2 版. 清华大学出版社, 2013.
- [4] 张宇. 近年考研数学命题特点分析[J]. 数学教育, 2023, 45(3): 12-18.