

# 考研数学核心笔记

高等数学 • 线性代数 • 概率论与数理统计

张庭祥

版本：2025.1

2026 年 1 月 9 日

# 目录

<b>1 功能测试章节</b>	<b>2</b>
1.1 文本与基础格式测试	2
1.2 列表功能测试	2
1.2.1 无序列表	2
1.2.2 有序列表	2
1.3 公式功能测试	2
1.3.1 行内公式	2
1.3.2 单行编号公式	2
1.3.3 多行公式	3
1.4 表格功能测试	3
1.5 图片功能测试	3
1.6 代码块功能测试	3
1.7 交叉引用综合测试	3
1.8 浮动体位置测试	5
1.9 极限的概念与性质	5
1.9.1 数列极限	5
1.9.2 函数极限	6
1.10 极限的计算方法	7
1.10.1 基本方法	7
1.10.2 洛必达法则	7
1.11 连续与间断	7
1.11.1 连续的定义	7
1.11.2 间断点类型	8
1.12 本章习题	8
1.13 本章总结	8
<b>2 第二章：极限与连续</b>	<b>9</b>
<b>3 一元函数微分学</b>	<b>10</b>
<b>4 一元函数积分学</b>	<b>11</b>
<b>5 无穷级数</b>	<b>12</b>
<b>6 多元函数微积分</b>	<b>13</b>
<b>7 多元函数积分学</b>	<b>14</b>
<b>8 常微分方程</b>	<b>15</b>
<b>9 行列式与矩阵</b>	<b>16</b>
<b>10 向量与线性方程组</b>	<b>17</b>

---

11 特征值、特征向量与二次型	18
12 概率论基础	19
13 随机变量及其分布	20
14 数理统计	21

# 插图

1-1 测试图片（验证图插入、缩放、标题） . . . . .	4
1-2 浮动体位置测试（h 参数） . . . . .	5

# 表格

1-1 测试表格（基础格式） . . . . .	3
1-2 间断点分类 . . . . .	8

# 前言

这里是前言内容...

作者  
2026 年 1 月 9 日

# Chapter 1

## 功能测试章节

### 1.1 文本与基础格式测试

本章用于测试 README.md 中定义的所有 LaTeX 功能，包括基础文本格式、图表插入、公式排版、交叉引用等。加粗文本示例：这是加粗文本；斜体文本示例：这是斜体文本；脚注示例<sup>1</sup>。

### 1.2 列表功能测试

#### 1.2.1 无序列表

- 测试无序列表项 1
- 测试无序列表项 2
- 嵌套无序列表
  - 嵌套项 1
  - 嵌套项 2

#### 1.2.2 有序列表

- 1) 测试有序列表项 1
- 2) 测试有序列表项 2
- 3) 嵌套有序列表
  - 1) 嵌套项 1
  - 2) 嵌套项 2

### 1.3 公式功能测试

#### 1.3.1 行内公式

行内公式示例： $E = mc^2$ （质能方程）， $f(x) = \sum_{i=1}^n x_i$ （求和公式）。

#### 1.3.2 单行编号公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad (1.1)$$

公式(1.1)为高斯积分，验证公式交叉引用功能。

---

<sup>1</sup>这是测试脚注，验证脚注功能是否正常编译

### 1.3.3 多行公式

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad (1.2)$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad (1.3)$$

公式(1.2)和(1.3)验证多行公式排版与引用。

## 1.4 表格功能测试

表 1-1: 测试表格 (基础格式)

列 1	列 2	列 3
数据 1	数据 2	数据 3
数据 4	数据 5	数据 6

表格1-1验证表格插入、标题与交叉引用功能。

## 1.5 图片功能测试

图1-1

## 1.6 代码块功能测试

```
# Python 测试代码
def hello_world():
    print("Hello, LaTeX!")
hello_world()
```

Listing 1.1: Python 代码高亮示例

```
# 带高亮的 Python 测试代码
def add(a, b):
    """求和函数"""
    return a + b

result = add(3, 5)
print(f"结果: {result}")
```

代码块1.1验证代码高亮、标题与引用功能（需确保 listings 包已加载）。

## 1.7 交叉引用综合测试

- 引用章节: 第二章 (3) 的 §1.1;
- 引用公式: (1.1)、(1.2);
- 引用表格: 1-1;

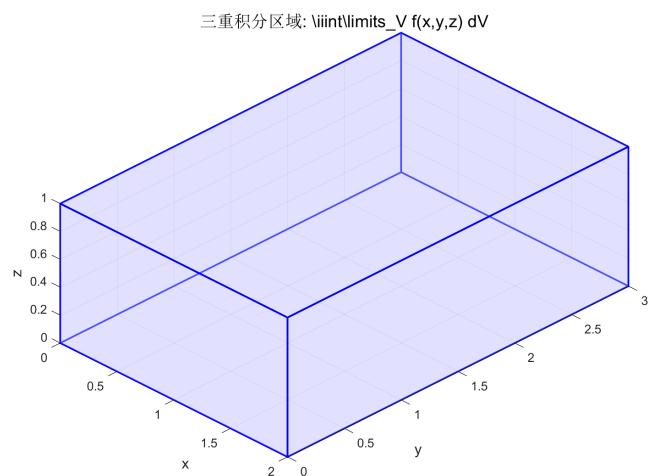


图 1-1: 测试图片 (验证图插入、缩放、标题)

- 引用图片: [1-1](#);
- 引用代码: [1.1](#);
- 引用浮动体测试图: [1-2](#)。

## 1.8 浮动体位置测试

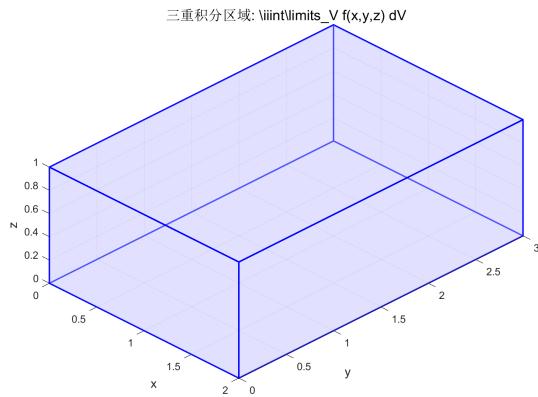


图 1-2: 浮动体位置测试 (h 参数)

本章学习目标: 掌握极限的计算方法, 理解连续性的本质

## 1.9 极限的概念与性质

### 1.9.1 数列极限

#### 定义 1.1: 数列极限

设  $\{x_n\}$  为数列,  $a$  为常数。若对于任意  $\varepsilon > 0$ , 存在正整数  $N$ , 使得当  $n > N$  时, 有  $|x_n - a| < \varepsilon$ , 则称数列  $\{x_n\}$  收敛于  $a$ , 记作  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 。

**例题**

证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

**解**

利用单调有界准则证明:

- 1) 先证数列  $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  单调递增
- 2) 再证数列有上界
- 3) 由单调有界准则知极限存在, 记该极限为  $e$

**【考点】极限存在准则:** 单调有界数列必收敛; 夹逼准则。

**定理 1.1: 唯一性**

若数列  $\{a_n\}$  收敛, 则它只有一个极限.

**证明**

设  $a$  是  $\{a_n\}$  的一个极限. 我们证明: 对任何数  $b \neq a$ ,  $b$  不是  $\{a_n\}$  的极限. 事实上, 若取  $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}|b-a|$ , 则按定义, 在  $U(a; \varepsilon_0)$  之外至多只有  $\{a_n\}$  中有限项, 从而在  $U(b; \varepsilon_0)$  内至多只有  $\{a_n\}$  中有限个项; 所以  $b$  不是  $\{a_n\}$  的极限. 这就证明了收敛数列只能有一个极限.

**定理 1.2: 有界性**

若数列  $\{a_n\}$  收敛, 则它是有界的. 即存在正数  $M$ , 使得对一切正整数  $n$ , 都有

$$|a_n| \leq M \quad (1.4)$$

**证明**

设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 则对  $\varepsilon = 1$ , 存在正整数  $N$ , 使得当  $n > N$  时, 有  $|a_N - a| < 1$ . 因此, 对所有  $n \geq 1$ , 都有

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|$$

令  $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_N|, 1 + |a|\}$ , 则对一切正整数  $n$  都有  $|a_n| \leq M$ .

## 1.9.2 函数极限

**定义 1.2: 函数极限**

设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  的某去心邻域内有定义,  $A$  为常数. 若对于任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 有  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , 则称  $f(x)$  在  $x \rightarrow x_0$  时的极限为  $A$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

**注意**

使用洛必达法则前必须检查是否满足  $\frac{0}{0}$  或  $\frac{\infty}{\infty}$  型未定式。

## 1.10 极限的计算方法

### 1.10.1 基本方法

- 1) 直接代入法: 初等函数在其定义域内连续
- 2) 因式分解法: 消去零因子
- 3) 有理化法: 处理根式
- 4) 等价无穷小替换: 常用等价关系

### 1.10.2 洛必达法则

**定理 1.3: 洛必达法则**

若  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$  (或  $\infty$ ), 且  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  存在 (或为  $\infty$ ), 则

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

**例题**

求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$

**解**

这是  $\frac{0}{0}$  型未定式, 使用洛必达法则:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} \quad (\text{再次洛必达}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

## 1.11 连续与间断

### 1.11.1 连续的定义

**定义 1.3: 连续**

函数  $f(x)$  在点  $x_0$  连续, 当且仅当:

- 1)  $f(x_0)$  存在
- 2)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在
- 3)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

表 1-2: 间断点分类

类型	条件	示例
可去间断点	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在但不等于 $f(x_0)$	$\frac{\sin x}{x} (x = 0)$
跳跃间断点	左右极限存在但不相等	$\operatorname{sgn}(x) (x = 0)$
无穷间断点	极限为无穷大	$\frac{1}{x} (x = 0)$
振荡间断点	极限不存在且不为无穷	$\sin \frac{1}{x} (x = 0)$

### 1.11.2 间断点类型

## 1.12 本章习题

### 习题

- 1) 求极限:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$
- 2) 求极限:  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$
- 3) 判断函数  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$  在  $x = 1$  处的连续性

## 1.13 本章总结

### 本章总结

- 【重点】极限的  $\varepsilon$ - $\delta$  定义是理论基础
- 掌握七大重要极限:
  - 1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
  - 2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$
  - 3)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$
- 熟练运用洛必达法则<sup>[1]</sup>
- 理解连续<sup>[1-3]</sup>与间断的实质<sup>[4]</sup>

## Chapter 2

# 第二章：极限与连续

### 本章目标

- 理解极限的概念（数列极限、函数极限），掌握极限的性质（唯一性、有界性、保号性）

## Chapter 3

# 一元函数微分学

## Chapter 4

# 一元函数积分学

# Chapter 5

## 无穷级数

## Chapter 6

# 多元函数微积分

## Chapter 7

# 多元函数积分学

# Chapter 8

## 常微分方程

## Chapter 9

# 行列式与矩阵

## Chapter 10

# 向量与线性方程组

## Chapter 11

# 特征值、特征向量与二次型

## Chapter 12

### 概率论基础

## Chapter 13

# 随机变量及其分布

## Chapter 14

# 数理统计

# 参考文献

- [1] 同济大学数学系. 高等数学[M]. 第 7 版. 高等教育出版社, 2014.
- [2] 盛骤, 谢式千, 潘承毅. 概率论与数理统计[M]. 第 4 版. 高等教育出版社, 2008.
- [3] 居余马, 林翠琴. 线性代数[M]. 第 2 版. 清华大学出版社, 2013.
- [4] 张宇. 近年考研数学命题特点分析[J]. 数学教育, 2023, 45(3): 12-18.