线性规划

实验报告

——大学数学实验

姓名：梁露露

班级： 电 51

学号：2015010723

日期：2017.4.22

线性规划

电 51 梁露露 2015010723

[实验目的]

- 了解线性规划问题，理解单纯形算法的基本思想，掌握用 MATLAB 优化工具箱求解线性规划问题；
- 练习建立实际问题的线性规划模型。

[实验任务]

Part1 投资问题

[实验题目]

某银行经理计划用一笔资金进行有价证券的投资，可供购进的证券以及其信用等级、到期年限、收益如下表所示，按照规定，市政证券的收益可以免税，其他证券的收益需要按照 50%的税率纳税，此外还有以下限制：

证券名称	证券种类	信用等级	到期年限/年	到期税前收益/%
A	市政	2	9	4.3
B	代办机构	2	15	5.4
C	政府	1	4	5.0
D	政府	1	3	4.4
E	市政	5	2	4.5

（1） 政府及代办机构的证券总共至少要购进 400 万元；

（2） 所购证券的平均信用等级不超过 1.4（信用等级数字越小，信用程度越高）；

（3） 所购证券的平均到期年限不超过 5 年。

① 若该经理有 1000 万元资金，应该如何投资？

② 如果能够以 2.75%的利率借到不超过 100 万元资金，该经理应该如何操作？

③ 在 1000 万元资金情况下，若证券 A 的税前收益增加为 4.5%，投资应否改

变？若证券 C 的税前收益减少为 4.8%，投资应否改变？

［问题分析］

本题是一个有约束的优化问题，模型应当包含决策变量、目标函数和约束条件。

① 设该经理对 A,B,C,D,E 证券分别购入 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 万元（决策变量），总收益（目标函数）为 z 万元，则易写出

$$z=0.043x_1+0.027x_2+0.025x_3+0.022x_4+0.045x_5$$ （万元）

约束条件：

（1） $x_2+x_3+x_4\ge 400$

（2） $\dfrac{2x_1+2x_2+x_3+x_4+5x_5}{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5}\le 1.4$

（3） $\dfrac{9x_1+15x_2+4x_3+3x_4+2x_5}{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5}\le 5$

（4） $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1000$

（5） x_1， x_2， x_3， x_4， $x_5\ge 0$

将（4）代入（2）和（3）中得：

（2） $2x_1+2x_2+x_3+x_4+5x_5\le 1400$

（3） $9x_1+15x_2+4x_3+3x_4+2x_5\le 5000$

② 设该经理应借 x6 万元的资金，则目标函数与约束条件变化如下：

目标函数：

$$\max z=0.043x_1+0.027x_2+0.025x_3+0.022x_4+0.045x_5-0.0275x_6$$

约束条件：

$$x_2+x_3+x_4\ge 400$$

$$2x_1+2x_2+x_3+x_4+5x_5-1.4x_6\le 1400$$

$$9x_1+15x_2+4x_3+3x_4+2x_5-5x_6\le 5000$$

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5-x_6=1000$$

x_1， x_2， x_3， x_4， $x_5\ge 0$

$x_6 \le 100$

③ 若证券 A 的税前收益增加为 4.5%，则目标函数的 x1 的系数改为 0.045；若 C 的税前收益减少为 4.8%，则目标函数中 x_3 的系数改为 0.024 即可。

显然本题中的三种情况都是线性规划问题，求出的最优解将给出使收益最大化的投资计划，要讨论的问题需考虑参数的灵敏度分析。

[程序设计]

```
clear all,clc
c=[0.043,0.027,0.025,0.022,0.045];
A1=[0,-1,-1,-1,0;2,2,1,1,5;9,15,4,3,2];
b1=[-400,1400,5000];
A2=[1,1,1,1,1];
b2=[1000];
v1=[0,0,0,0,0];
[x,z0,ef,out,lag]=linprog(-c,A1,b1,A2,b2,v1)
```

第 ① 小问程序

```
clear all,clc
c=[0.043,0.027,0.025,0.022,0.045,-0.0275];
A1=[0,-1,-1,-1,0,0;2,2,1,1,5,-1.4;9,15,4,3,2,-5];
b1=[-400,1400,5000];
A2=[1,1,1,1,1,-1];
b2=[1000];
v1=[0,0,0,0,0,];
v2=[1100,1100,1100,1100,1100,100]
[x,z0,ef,out,lag]=linprog(-c,A1,b1,A2,b2,v1,v2)
```

第 ② 小问程序

```
clear all,clc
c=[0.045,0.027,0.025,0.022,0.045];
A1=[0,-1,-1,-1,0;2,2,1,1,5;9,15,4,3,2];
b1=[-400,1400,5000];
A2=[1,1,1,1,1];
b2=[1000];
v1=[0,0,0,0,0];
[x,z0,ef,out,lag]=linprog(-c,A1,b1,A2,b2,v1)
```

第 ③ 小问改变 A 的证券收益程序

```
clear all,clc
c=[0.043,0.027,0.024,0.022,0.045];
A1=[0,-1,-1,-1,0;2,2,1,1,5;9,15,4,3,2];
b1=[-400,1400,5000];
A2=[1,1,1,1,1];
b2=[1000];
v1=[0,0,0,0,0];
[x,z0,ef,out,lag]=linprog(-c,A1,b1,A2,b2,v1)
```

第 ③ 小问改变证券 C 的税前收益程序

[运算结果]

第①问：

得到最优解为 x=[218.1818,0.0000,736.3636,0.0000,45.4545]

z0=-29.8364,故 max z=29.8364

ef=1（收敛）

第②问：

得到最优解 x =[240.0000,0.0000,810.0000,0.0000,50.0000,100.0000]

z0 =-30.0700,故 max z=30.0700

ef =1（收敛）

第③问：

改变证券 A 的税前收益：

得到最优解仍为 x=[218.1818,0.0000,736.3636,0.0000,45.4545]

z0 =-30.2727，故 max z=30.2727

ef =1（收敛）

改变证券 C 的税前收益：

得到最优解为 x =[336.0000,0.0000,0.0000,648.0000,16.0000]

z0 =-29.4240，故 max z=29.4240

ef =1（收敛）

[结果分析]

首先，从本题可以看出，对于线性规划的相关问题程序较为简单，没什么难度，解此类问题的关键是模型的建立，确定相应的决策变量、目标函数及约束条件。

其次，从③ 可以看出，虽然 AC 的税前收益都改变了 0.2%，但 C 的收益率发生了巨大的变化，A 却没有改变，这说明最优投资方案对证券 C 收益率的敏感度较大，对 A 的敏感度则相对较小。

深入分析，发现本题中的税前收益（再乘以定税率）即为决策变量的费用系数，讨论改变相应证券的税前收益后的最优投资计划即**对线性规划中的费用系数进行敏感性分析**。

而上述的敏感性取决于基变量还是非基变量的费用系数变化，以及 r_k' 是否小于 0。例如若是非基变量的费用系数发生变化，且 $r_k'\geqslant 0$，则由于最优基不变，因此最优解与最优值也不变，而若 $r_k'<0$，则最优基、最优解和最优值都可能发生改变，需要重新求解线性规划问题。

最后，该问题有很大的现实意义。现实生活中，居民总是离不开投资等相关事件，且总会有一系列条件的约束，此时居民所关注的指标即为目标函数，若是能够充分研究线性规划的问题，居民才能够将自己的利益最大化。对于国家亦是这样。因此对于线性规划的研究具有十分重要的现实意义。

[实验结论]

① 若该经理有 1000 万元资金，应对 A~E 证券分别购进 218.1818、0、736.3636、45.4545 万元，总收益为 29.8364 万元。

② 若能够以 2.75%的利率借到不超过 100 万元资金，该经理应该借资金 100 万元，对 A~E 证券应该分别购进 240、0、810、0、50 万元，总收益为 30.0700 万元。

③ 在 1000 万元资金情况下，若证券 A 的税前收益增加为 4.5%，投资不变，总收益变为 30.2727 万元。

若证券 C 的税前收益减少为 4.8%，则应改变投资，对 A~E 证券分别购进 336、0、0、648、16 万元，总收益为 29.4240 万元。

Part 2 营养配置问题

[实验题目]

某牧场主知道，对于一匹平均年龄的马来说，最低的营养需求为：40 磅蛋白质，20 磅碳水化合物，45 磅粗饲料，这些营养成分是从不同饲料中得到的，饲料及其价格在下表中列出。建立数学模型，确定如何以最低的成本满足最低的营养需求。

	蛋白质/磅	碳水化合物/磅	粗饲料/磅	价格/美元
干草/捆	0.5	2.0	5.0	1.80
燕麦片/袋	1.0	4.0	2.0	3.50
饲料块/块	2.0	0.5	1.0	0.40
高蛋白浓缩料/袋	6.0	1.0	2.5	1.00
每匹马的需求/天	40.0	20.0	45.0	—

[问题分析]

本题的决策变量为干草、燕麦片、饲料块、高蛋白浓缩料四种饲料的使用数量，分别设为x_1,x_2,x_3，x_4，目标函数为饲料的总成本，设为 z 美元。

则易写出目标函数$z=1.8x_1+3.5x_2+0.4x_3+x_4$

由每匹马的需求及决策变量非负得约束条件为：

$$0.5x_1+x_2+2x_3+6x_4\ge 40$$
$$2x_1+4x_2+0.5x_3+x_4\ge 40$$
$$5x_1+2x_2+x_3+2.5x_4\ge 40$$
$$x_1，x_2，x_3，x_4\ge 0$$

为线性规划问题，下面直接进行编程求解即可。

[程序设计]

```
clear;clc;
c=[1.8,3.5,0.4,1];
A1=[0.5,1,2,6;2,4,0.5,1;5,2,1,2.5];
b1=[40,20,45]';
v1=[0,0,0,0];
[x,fv,ef,out,lag]=linprog(c,-A1,-b1,[],[],v1)
opt1=optimset('largescale','off');%有效集算法
[x,fv,ef,out,lag]=linprog(c,-A1,-b1,[],[],v1,[],[],opt1)
opt2=optimset(opt1,'simplex','on');%单纯形算法
[x,fv,ef,out,lag]=linprog(c,-A1,-b1,[],[],v1,[],[],opt2)
lag.ineqlin
```

[运算结果]

x =[5.0000,0.0000,20.0000,0.0000]

fv =17.0000

ef =1（收敛）

三种算法的迭代次数（iterations）依次为 10 次，5 次，2 次。

lag.ineqlin：[0.0000,0.4000,0.2000]

[结果分析]

首先，本题中依次采用了大规模算法（内点算法）、中规模算法（有效集算法）、单纯形算法进行运算。结果显示三者迭代次数一次减小，反映了对于小规模问题时单纯形算法的优势。但这并不意味着‘大规模算法比小规模算法需要更多次迭代’的结论。

其次，lag.ineqlin=（0.0000,0.4000,0.2000），第 2、第 3 分量为 0，表示第二、第三个约束条件是起作用的，而第 1 分量为 0，表示第 1 个约束不起作用。

最后，本题可归为食谱问题，对实际生活有较广泛的应用。

[实验结论]

最优饲料配置为：5 捆干草和 20 块饲料块，此时既能够满足每匹马的需求，成本又最低，为 17 美元。

Part3 污水处理问题

［实验题目］

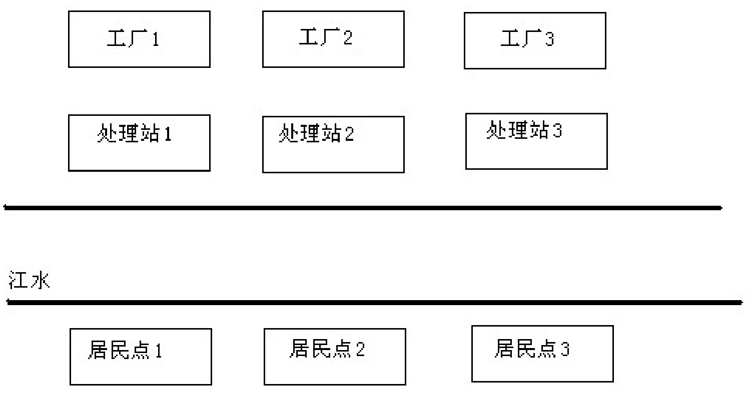
如下图有若干工厂的排污口流入某江，各口有污水处理站，处理站对面位居民点，工厂一上游江水流量和污水浓度，国家规定的水的污染程度，以及各工厂的污水流量和污水浓度均已知道，设污水处理费用与污水处理前后的浓度差和污水流量成正比，使每单位流量的污水下降一个浓度单位需要的处理费用（称处理系数）为已知。处理后的污水与江水混合，流到下一个排污口前，自然状态下的江水也会使污水浓度降低一个比例系数（称自净系数），该系数可以估计。试确定各污水处理站出口的污水浓度，使在符合国家规定的标准下总的处理理费用最小。

先建立一般标准下的数学模型，再求解以下的具体问题：

设上游江水流量为 1000（10^12L/min），污水浓度为 0.8（mg/L），3 个工厂的污水流量为 5（10^12L/min），污水浓度（从上游到下游排列）分别为 100，60，50（mg/L），处理系数均为 1（万元/（10^12L/min）*（mg/L）），3 工厂之间的自净系数从上游到下游分别为 0.9 和 0.6，国家标准规定的水的污染系数不得超过 1（mg/L）。

（1）为了使江面上所有地段的水污染达到国家标准，至少需要花费多少费用。

（2）如果只是要求 3 个居民点上游的水源污染达到国家标准，至少需要花费多少费用。



［问题分析］

本题可转化为线性规划问题求解。设定以下参数：

$x_i, i=1,2,3$ 表示 1, 2, 3 号处理站出水口的污水浓度（mg/L）

$p_{i,1}$，$i=1,2,3$ 表示居民点上游的污水浓度（mg/L）

$p_{i,2}$，$i=1,2,3$ 表示居民点下游的污水浓度（mg/L）

$q_{i,1}$，$i=1,2,3$ 表示居民点上游的江水流量（10^12L/min）

$q_{i,2}$，$i=1,2,3$ 表示居民点下游的江水流量（10^12L/min）

m, n 分别为 1 到 2、2 到 3 段的江水的自净系数

z 为三个污水处理厂处理污水所需要的总花费（万元）

另，对本题的模型进行完善:

① 假设污水经过处理厂处理后，仅有污水的浓度发生改变，水的流量并不发生变化。

② 忽略自然环境、天气等的影响，假定江水的流速、流量不发生改变。

对于（1），有

目标函数：$z=1050+(-5,-5,-5)(x_1,x_2,x_3)^T$

约束条件：
$$\begin{aligned}
&0\le x_1\le 100\\
&0\le x_2\le 60\\
&0\le x_3\le 50\\
&5x_1+800\le 1005\\
&4.5x_1+5x_2+720\le 1010\\
&2.7x_1+3x_2+5x_3+432\le 1015
\end{aligned}$$

对于（2），有

目标函数：$z=1050+(-5,-5,-5)(x_1,x_2,x_3)^T$

约束条件：
$$\begin{aligned}
&0 \le x_1 \le 100 \\
&0 \le x_2 \le 60 \\
&0 \le x_3 \le 50 \\
&0.9*(5x_1+800) \le 1005 \\
&0.6*(4.5x_1+5x_2+720) \le 1010
\end{aligned}$$

下面编写程序求解即可。

[程序设计]

```
clear all,clc
c=-[5,5,5];
x0=[80,40,20];
A1=[5,0,0;4.5,5,0;2.7,3,5];
b1=[205;290;583];
v1=[0,0,0];
v2=[100,60,50];
[x,z0,ef,output,lag]=linprog(c,A1,b1,[],[],v1,v2,x0,[])
opt1=optimset('largescale','off');%有效集算法
[x,fv,ef,out,lag]=linprog(c,-A1,-b1,[],[],v1,[],[],opt1)
opt2=optimset(opt1,'simplex','on');%单纯形算法
[x,fv,ef,out,lag]=linprog(c,-A1,-b1,[],[],v1,[],[],opt2)
z=z0+1050
```

第（1）问程序

```
clear all,clc
c=-[5,5,5];
x0=[80,40,20];
A1=[4.5,0,0;2.7,3,0];
b1=[285;578];
v1=[0,0,0];
v2=[100,60,50];
[x,z0,exitflag,output,lag]=linprog(c,A1,b1,[],[],v1,v2,x0,[])%内点算法
z=z0+1050
```

第（2）问程序

[运算结果]

第（1）问：

x=[41.0, 21.1, 50.0]

z=489.5000

内点算法、有效集算法、单纯形算法的迭代次数分别为 5 次、3 次、3 次。

第（2）问：

x =[63.3333,60.0000,50]

z =183.3334

［结果分析］

对比第（1）问与第（2）问发现，由于第（2）问中对水质控制的范围缩小，从全面控制到居民点上游的水质控制，因此所需的自利费用大大减小，这充分利用了江水自净的功能，节约了成本。

同时，在（2）的约束条件下，虽然花费被大大降低，但从结果可以看到，污染却大大增加，使得排污口之间的江面净化污染能力达到饱和。

综上所述，应根据地区经济和地域情况制定地区排污口的排放标准，考虑江水的自净能力，制定出不同的约束条件以达到最满意的结果。

另外，由于各自单位距离的自净能力相同，因此可以增加变量求解出某段距离的江水的自净系数，此时当居民点处于任意位置时的情况都可求解。

此外，本模型中仍有许多缺陷之处，如

① 本题中的模型只考虑了一个污染控制标准，与实际生活中多个污染控制标准不相符。

② 本题中将自净系数作为一个常数，但实际并非这样，不同水质中的自净系数不尽相同。

③ 本题中忽略了很多其他因素的影响，如自然环境，天气，化学物质之间的反应等对江水的影响。

但本模型采用 MATLAB 求解，省去了大量计算工程，且运用线性规划计算简单易懂，对于许多不是特别复杂的模型准确度较高，这是其优点。

［实验结论］

（1）若要求江面上所有地段的水污染都达到国家标准，则处理站 1、2、3 的污水浓度分别为 41.0, 21.1, 50.0 mg/L 时，所需总费用最小,为 489.5 万元。

（2）若只要求三个居民点上游的水污染都达到国家标准，则处理站 1、2、3 的污水浓度分别为 63.3, 60.0, 50.0 mg/L 时，所需总费用最小，为 183.3 万元。

［实验收获］

1.了解了线性规划问题的求解关键在于模型的建立，即确定决策变量、目标函数、约束条件，具体的编程实现则相对容易。

2.另外，本次实验让我对单纯形算法、内点算法、有效集算法有了进一步的了解。以及学会了如何用 MATLAB 工具包对实际线性规划问题求解。