培文笔记

陈培文

2020 年 3 月 28 日

目录

1 线性空间的定义

1.1 线性空间的定义

用 F 表示实数全体（R）或复数全体（C）

定义 1.1 设 V 是非空集合，F 是实数（R）或复数（C）域

在 V 及 F 上定义了两种运算：

定义 1.2 (加法) 对 $\forall \alpha, \beta \in V$，在 V 中有唯一的元素与之对应，记这个元素为 $\alpha + \beta$，称为 α, β 的和。

定义 1.3 (数乘) 对 $\forall \alpha \in V, k \in F$，在 V 中有唯一对元素与之对应，记这个元素为 $k \cdot \alpha$，称为 k 与 α 的积。

如果满足下述公理，则称 V 是数域 F 上的线性空间，V 中的元素称为是向量。

1. 加法运算

   公理 1.1 (交换律) 对 $\forall \alpha, \beta \in V, \alpha + \beta = \beta + \alpha$

   公理 1.2 (结合律) 对 $\forall \alpha, \beta, \gamma \in V, (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$

   公理 1.3 (零元素) $\exists \theta \in V$，使得 $\forall \alpha \in V, \alpha + \theta = \alpha$

   公理 1.4 (负元素) 对 $\forall \alpha \in V, \exists \beta \in V$，使 $\alpha + \beta = \theta$

2. 数乘运算

   公理 1.5 对 $\forall \alpha \in V, 1 \cdot \alpha = \alpha$

   公理 1.6 对 $\forall \alpha \in V, k, l \in F, k \cdot (l \cdot f) = (k \cdot l) \cdot f$

3. 数乘和加法运算

   公理 1.7 对 $\forall \alpha \in V, k, l \in F, (k + l) \cdot \alpha = k\alpha + l\alpha$

   公理 1.8 对 $\forall \alpha, \beta \in V, k \in F, k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$

例 *1.* n 维向量，$V = F^n$

2. $n \times n$ 维矩阵全体，$V = F^{n \times n}$

3. 系数在 F 中关于 x 的多项式全体，$V = F[x]$

4. $V = F_n[x]$

5. $V = C, F = R$

6. $V = C, F = C$

7. 不构成线性空间，$V = R, F = C$

8. 通常运算，R^+：正实数全体，不构成线性空间，$V = R^+, F = R$

9. $V = R^+, F = R$

定义新的运算：

定义 1.4 ($\bigoplus$) 对 $\alpha, \beta \in V, \alpha \bigoplus \beta = \alpha \cdot \beta$

定义 1.5 ($\circ$) 对 $\alpha \in V, k \in F, k \circ \alpha = \alpha^k$

验证：

① $\alpha, \beta \in V, \alpha \bigoplus \beta = \alpha\beta, \beta \bigoplus \alpha = \beta\alpha, \alpha \bigoplus \beta = \beta \bigoplus \alpha$

③ $\theta inV, \forall\alpha \in V, \alpha \bigoplus \theta = \alpha, \theta = 1$

④ $\alpha \in V, \alpha \bigoplus \beta = \theta = 1, \beta = \alpha^{-1}$

⑦ $k, l \in F, \alpha \in V, (k+l) \circ \alpha \stackrel{?}{=} k \circ \alpha \bigoplus l \circ \alpha$

性质 1.1 (线性空间的性质) 假设 V 是数域 F 上的线性空间，则：

1. V 中的零向量是唯一的

   证明 若有 2 个零元素 θ_1, θ_2，则：

$$\theta_1 = \theta_1 + \theta_2 = \theta_2 + \theta_1 = \theta_2 \tag{1}$$

故 $\theta_1 = \theta_2$，零元素唯一。

2. 对 $\forall\alpha \in V, \alpha$ 的负元素是唯一的，记为 $-\alpha$

   证明 设 β_1, β_2 均为 α 的负元素

$$\beta_1 = \beta_1 + \theta = \beta_1 + (\alpha + \beta_2) = (\beta_1 + \alpha) + \beta_2 = (\alpha + \beta_1) + \beta_2 = \theta + \beta_2 = \beta_2 + \theta = \beta_2 \tag{2}$$

3. 加法消去率：若 $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$，则 $\beta = \gamma$

4. 对 $\forall\alpha, \beta \in V$，向量方程 $\alpha + x = \beta$ 有唯一解，$x = \alpha + (-\beta)$，记 $x = \alpha - \beta$

5. $(-k) \cdot \alpha = -(k\alpha)$，特别地，$(-1)\alpha = \alpha$

6. $k\alpha \Leftrightarrow k = 0$ 或 $\alpha = 0$

1.2 基、维数和坐标

在线性空间中，可以定义线性组合、线性表、线性相关、线性无关、向量组的极大线性无关组、秩等概念，如：

定义 1.6 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s \in V$，若存在不全为 0 的数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$，使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$，则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关，否则，称 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 是线性无关的。

一些重要结论：

1. **结论 1.1** 若 $s \geq 2$，则 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关 $\Leftrightarrow \exists j$，使 α_j 可由其余 $s-1$ 个向量线性表示。

   证明 存在不全为 0 的数，$k_1, k_2, \cdots, k_s$，使 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$ 不妨设 $k_1\ 0 \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{k_1}{k_1}\alpha_2 - \cdots - \frac{k_s}{k_1}\alpha_s$

2. **结论 1.2** 若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关，但 $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关，则 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表示，而且，线性表示的方法是唯一的。

3. **结论 1.3** 若 $t > s, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表示，则 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 线性相关

   证明 极大线性无关组：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 中的极大线性无关组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 满足 2 个条件：

   ① $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 线性无关

   ② $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_s$ 中的每一个向量均可由 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 线性表示

   推论 1 若 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表示，且 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 线性无关，则 $t \leq s$

   推论 2 若 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 等价，且均线性无关，则 $s = t$

例 *1.* 在 $F^{2\times2}$ 中，$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

   解答 设 $1E_{11} + k_2E_{12} + k_3E_{21} + k_4E_{22} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{pmatrix} = 0 \therefore k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$

2. 在 $F_3[x]$ 中，$\alpha_1 = 2 + x + 3x^2, \alpha_2 = 1 + 3x - x^2, \alpha_3 = 3 + 4x + 2x^2$ $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = \theta$，是否有不全为 0 的 k_1, k_2, k_3 使上式成立

   解答 $\Rightarrow (2k_1 + k_2 + 3k_3) + (k_1 + 3k_2 + 4k_3)x + (3k_1 - k_2 + 2k_3)x^2 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2k_1 + k_2 + 3k_3 = 0 \\ k_1 + 3k_2 + 4k_3 = 0 \\ 3k_1 - k_2 + 2k_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = 1 \\ k_3 = -1 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \text{ 线性相关}$$

3. $V = C, F = R, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = i = -\sqrt{-1}$ 是否存在 $a, b \in F = R, a\alpha_1 + b\alpha_2 = 0$
$\Rightarrow a + b_i = 0 \Rightarrow a = b = 0 \Rightarrow \alpha_1$ 与 α_2 线性无关

4. $V = C, F = R, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = i = -\sqrt{-1}$ 是否存在 $a, b \in F = C$，使得 $a\alpha_1 + b\alpha_2 = 0$
若 $a = i = \sqrt{-1}, b = -1$，则 $a\alpha_1 + b\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1, \alpha_2$ 线性相关
小例子：$V = R^+, F = R$，两种运算 $\bigoplus, \circ, \alpha = 2, \beta = 3 \in V$
$k \circ \alpha \bigoplus l \circ \beta = \theta \Rightarrow \alpha^k \cdot \beta^l = 1 \Rightarrow 2^k + 3^l = 1 \Rightarrow k = 1$，则 $l = -\log_3 2$

定义 1.7 基，维数
若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in V$ 满足条件：

1. $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关

2. $\forall \eta \in V$ 均可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表示

称 n 是 V 的维数，记为维（V）或 $\dim V$

注：

命题 1.1 若 $\dim V=n$，则 V 中任意 $n+1$ 个向量线性相关
线性空间的基不一定存在。
例如：零空间 $V=\theta, \dim\theta=0$
$V=F[x], \dim F[x]=\infty$

例 *1.* $V=F^n$

解答 $e_1=(1,0,\cdots,0), e_2=(0,1,\cdots,0), \cdots, e_n=(0,0,\cdots,1)$
$\eta=(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_ne_n$
其中 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 为 V 的自然基，$\dim F^n=n$

2. $V=F^{2\times2}$

解答 $E_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, E_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, E_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, E_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$
$\dim F^{2\times2}=4$
$F^{3\times n}, F$, 基：矩阵单位 $\{E_{ij}\}$, 维数：$\dim F^{s\times n}=s\times n$

3. $V=F_n[x]$

解答 基：$1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}, \dim F_n[x]=n$

4. $V=C, F=R$*(*基*:*$1,\sqrt{-1}$*)*

5. $V=C, F=C$*(*基*:*$1, \dim V=1$*)*

6. $V=R^+, F=R, \bigoplus, \circ, \theta=1$*(*基*:*$\alpha\neq1$ *,*$\dim V=1$*)*

例 证明*:* 在 $F_3[x]$ 中，下述三个向量构成一组基：$f_1(x)=1+2x+3x^2, f_2(x)=3+x-x^2, f_3(x)=2-x+x^2$

方法一： ① 说明 $f_1(x),f_2(x),f_3(x)$ 线性无关
② $\forall p(x)$ 均可由 $f_2(x),f_3(x)$ 线性表示
设 $k_1f_1+k_2f_2+k_3f_3=\theta\Rightarrow k_1=k_2=k_3=0$
$p(x)=a+bx+cx^2$，寻找使 $p(x)=k_1f_1+k_2f_2+k_3f_3$

方法二： $\dim F_3[x]=3$，且 f_1,f_2,f_3 线性无关
由上述定理可知，f_1,f_2,f_3 为一组基

定义 1.8 (坐标) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 V 的一组基，$\beta\in V$ 且 $\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n$，则称 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 β 在基 $a\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的坐标，或 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 是 β 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的坐标（列向量）。

例 1. F^n 中 , $\eta=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在基 $e_1=(1,0,\cdots,0),e_2=(0,1,\cdots,0),\cdots,e_n=(0,0,\cdots,1)$ 下的坐标

$\eta=x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_ne_n\Rightarrow$ 坐标 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$

2. 在 $F^{2\times2}$ 中，$A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ 在基 $E_{11}=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},E_{12}=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},E_{21}=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},E_22=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 下的坐标

$A=aE_{11}+bE_{12}+cE_{21}+dE_{22}\Rightarrow$ 坐标 $\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\\ d\end{pmatrix}$

注:

1. 线性空间的基是有序的

$F^n,\eta=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 下坐标 $\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$, 在 $e_n,e_{n-1},\cdots,e_1$ 下坐标 $\begin{pmatrix} x_n\\ x_{x_1}\\ \vdots\\ x_1\end{pmatrix}$

2. 基的几何意义

定理 1.1 假设 $\eta,\eta_i\in V$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的坐标分别是 X 及 $X_i,i=1,2,\cdots,s$，则:

(a) $\eta=\theta\Leftrightarrow X=\theta$

(b) $\eta=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots,k_s\eta_s\Leftrightarrow X=k_1X_1+k_2X_2+\cdots k_sX_s$

$$\begin{aligned}\eta=k_1\eta_1+k_2\eta_2&=k_1(a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_n\alpha_n)+k_2(b_1\alpha_1+b_2\alpha_2+\cdots+b_n\alpha_n)\\ &=(k_1a_1+k_2b_1)\alpha_1+(k_1a_2+k_2b_2)\alpha_2+\cdots+(k_1a_n+k_2b_n)\alpha_n\end{aligned}\tag{3}$$

$\Rightarrow X=k_1X_1+k_2X_2$