

Bài tập chương 6 Counting

1 Dẫn nhập

Trong bài tập dưới đây, chúng ta sẽ làm quen với các kiến thức liên quan đến các phép đếm (bao gồm lượng số, tổ hợp, chỉnh hợp, và các nguyên lý đếm). Sinh viên cần ôn lại lý thuyết của chương 3 trước khi làm bài tập bên dưới.

2 Bài tập mẫu

Exercise 1.

Giả sử bộ môn Khoa học máy tính có tổng cộng 10 môn học chuyên ngành. Trong bộ môn có 12 giảng viên (6 kĩ sư, 4 tiến sĩ và 2 giáo sư). Biết rằng mỗi môn học sẽ do một tiến sĩ hoặc một giáo sư đảm nhiệm. Mỗi môn học cũng có một trợ giảng là kĩ sư. Cho biết:

- Tổng số kết hợp có thể có của các môn học và các giảng viên trong bộ môn. Cho trước kết hợp là bộ 3: Môn học + Giảng viên lý thuyết + trợ giảng
- Nếu số lượng môn học và giảng viên giảm đi một nửa. Tổng số kết hợp có thể có là bao nhiêu?
- Giả sử số lượng môn học và giảng viên như câu b, khoa tuyển thêm một thạc sĩ toán học chuyên giảng dạy Toán rời rạc. Tổng số kết hợp có thể có là bao nhiêu?

Lời giải.

a) *Kết hợp của các bộ 3 là tích Đề Các $A \times B \times C$ với A là tập tất cả môn học, B là tập các tiến sĩ và giáo sư, C là tập các kĩ sư. Tổng số kết hợp sẽ là 10×6*

b) $5 \times 3 \times 3$

c) *Số lượng tăng thêm $1 \times 1 \times 6$*

□

3 Bài tập cần giải

Exercise 2.

A multiple-choice test contains 10 questions. There are four possible answers for each question.

- In how many ways can a student answer the questions on the test if the student answers every question? 4¹⁰
- In how many ways can a student answer the questions on the test if the student can leave answers blank? 5¹⁰

Exercise 3.

How many positive integers between 100 and 999 inclusive

- are divisible by 7?
- are odd?

- c) have the same three decimal digits?
- d) are not divisible by 4?
- e) are divisible by 3 or 4?
- f) are not divisible by either 3 or 4?
- g) are divisible by 3 but not by 4?
- h) are divisible by 3 and 4?

Exercise 4.

In how many ways can a photographer at a wedding arrange 6 people in a row from a group of 10 people, where the bride and the groom are among these 10 people, if

- a) the bride must be in the picture?
- b) both the bride and groom must be in the picture?
- c) exactly one of the bride and the groom is in the picture?

Exercise 5.

In how many ways can a photographer at a wedding arrange six people in a row, including the bride and groom, if

- a) the bride must be next to the groom?
- b) the bride is not next to the groom?
- c) the bride is positioned somewhere to the left of the groom?

Exercise 6.

How many bit strings of length 10 either begin with three 0s or end with two 0s?

Exercise 7.

How many bit strings of length 10 contain either five consecutive 0s or five consecutive 1s?

Exercise 8.

Suppose that a password for a computer system must have at least 8, but no more than 12, characters, where each character in the password is a lowercase English letter, an uppercase English letter, a digit, or one of the six special characters *, >, <, !, +, and =.

- a) How many different passwords are available for this computer system?
- b) How many of these passwords contain at least one occurrence of at least one of the six special characters?
- c) Using your answer to part (a), determine how long it takes a hacker to try every possible password, assuming that it takes one nanosecond for a hacker to check each possible password.

Exercise 9.

A bowl contains 10 red balls and 10 blue balls. A woman selects balls at random without looking at them.

- a) How many balls must she select to be sure of having at least three balls of the same color? 5
- b) How many balls must she select to be sure of having at least three blue balls? 13

Exercise 10.

Show that among any 4 numbers one can find 2 numbers so that their difference is divisible by 3.

Exercise 11.

A coin is flipped 10 times where each flip comes up either heads or tails. How many possible outcomes

- a) are there in total? 2^5
b) contain exactly two heads?
c) contain at most three tails?
d) contain the same number of heads and tails?

Exercise 12.

- a) How many bit strings of length 10 have an even number of 1s?
b) How many bit strings of length 10 have the number of 1s equals the number of 0s?

Exercise 13.

How many ways are there for eight men and five women to stand in a line so that no two women stand next to each other? [Hint: First position the men and then consider possible positions for the women.]

Exercise 14.

A bagel shop has onion bagels, poppy seed bagels, egg bagels, salty bagels, pumpernickel bagels, sesame seed bagels, raisin bagels, and plain bagels. How many ways are there to choose

- a) six bagels? C_6^8
b) a dozen bagels?
c) two dozen bagels?
d) a dozen bagels with at least one of each kind?
e) a dozen bagels with at least three egg bagels and no more than two salty bagels?

Exercise 15.

Suppose that a large family has 14 children, including two sets of identical triplets, three sets of identical twins, and two individual children. How many ways are there to seat these children in a row of chairs if the identical triplets or twins cannot be distinguished from one another?

Exercise 16.

How many ways are there to distribute five balls into three boxes if each box must have at least one ball in it if

- a) both the balls and boxes are labeled?
b) the balls are labeled, but the boxes are unlabeled?

Exercise 17.

How many strings of four decimal digits

- a) do not contain the same digit twice?
b) end with an even digit?
c) have exactly three digits that are 9s?

Exercise 18.

A student has three mangos, two papayas, and two kiwi fruits. If the student eats one piece of fruit each day, and only the type of fruit matters, in how many different ways can these fruits be consumed?

Exercise 19.

- a) How many solutions are there to the equation $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$, where x_1, x_2, x_3 are nonnegative integers with $x_1 \geq 6, x_2 \geq 3, x_3 \geq 9$ và $x_4 \geq -2$?
b) How many solutions are there to the inequation $x_1 + x_2 + x_3 \leq 11$, where x_1, x_2, x_3 are nonnegative integers?