① $x=(-3,4,1,5,2)$
$y=(2,0,4,-3,-1)$
$z=(7,-1,0,2,3)$

$$A=\begin{bmatrix}5 & 1 & -4 & -2 & 1\\ 0 & 2 & 4 & -3 & -1\end{bmatrix}$$

$$x+y=\begin{pmatrix}-3\\4\\1\\5\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\0\\4\\-3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3+2\\4+0\\1+4\\5-3\\2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\4\\5\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$y-z=\begin{pmatrix}2\\0\\4\\-3\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}7\\-1\\0\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-7\\0+1\\4-0\\-3-2\\-1-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\1\\4\\-5\\-4\end{pmatrix}$$

$$4x=4\cdot\begin{pmatrix}-3\\4\\1\\5\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\cdot(-3)\\4\cdot4\\4\cdot1\\4\cdot5\\4\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12\\16\\4\\20\\8\end{pmatrix}$$

$$x+3y-2z=\begin{pmatrix}-3\\4\\1\\5\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6\\0\\12\\-9\\-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}14\\-2\\0\\4\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3+6-14\\4+0+2\\1+12-0\\5-9-4\\2-3-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11\\6\\13\\-8\\-7\end{pmatrix}$$

$$A\cdot x=\begin{bmatrix}5 & 1 & -4 & -2 & 1\\ 0 & 2 & 4 & -3 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\4\\1\\5\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5(-3)+1\cdot4+(-4)\cdot1+(-2)5+1\cdot2\\0(-3)+2\cdot4+4\cdot1+(-3)5+(-1)2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-15+4-4-10+2\\0+8+4-15-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-23\\-5\end{pmatrix}$$

②

$K:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$ ← origó középpontú egységkör pontjai

$N:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq0, y\geq0\}$ ← első síknegyed pontjai

$\underline{K}$ | nem tartalmaz nullvektort

$0^2+0^2\neq1$

· nem zárt se szorzásra se összeadásra $\Rightarrow$ nem altér

$(1,0)$ $(0,1)$ $(1,0)+(0,1)=(1,1)\notin K$

$2\cdot(1,0)=(2,0)\notin K$

$\underline{N}$ | · tartalmaz nullvektort

· zárt az összeadásra

· nem zárt a szorzásra

$(-1)(1,0)=(-1,0)\notin N$ ← $(-1)\not\geq0$

3

c) $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$

↳ origó középpontú egység gömb pontjai

$(0,0,0) \notin S_1 \Rightarrow$ nem altér

b) $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$

↳ első térnyolcad pontjai

$(1,0,0) \in S_2$ DE $(-1)(1,0,0) = (-1,0,0) \notin S_2$

c) $S_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x-3y+z=0\}$

↳ normálvektorú sík egyenlete

(1) $(x_1,y_1,z_1) \in S_3 \Rightarrow 2x_1-3y_1+z_1=0 \Rightarrow \lambda(2x_1-3y_1+z_1)=0 \Rightarrow 2(\lambda x_1)-3(\lambda y_1)+(\lambda z_1)=0 \Rightarrow (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1) \in S_3 \Rightarrow \lambda(x_1,y_1,z_1) \in S_3$ $\Leftarrow$ zárt számmal való szorzásra

(2) $2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 0 = 0$ $\Leftarrow$ van nullvektora

(3) $(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2) \in S_3 \Rightarrow 2x_1-3y_1+z_1=0 \wedge 2x_2-3y_2+z_2=0 \Rightarrow (2x_1-3y_1+z_1)+(2x_2-3y_2+z_2)=0 \Rightarrow 2(x_1+x_2)-3(y_1+y_2)+(z_1+z_2)=0 \Rightarrow (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2) \in S_3 \Rightarrow (x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2) \in S_3$ $\Leftarrow$ zárt az összeadásra is

(1) + (2) + (3) $\Rightarrow$ S_3 altere

d) $S_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x-3y+z=5\}$

- nincs nullvektor
- nem zárt se szorzásra, se összeadásra $\Leftarrow$ nem altér

e) $S_5 = \{(x-y, 3x, 2x+y) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y \in \mathbb{R}\}$

↳ $\begin{pmatrix} x-y \\ 3x \\ 2x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 3x \\ 2x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y \\ 0 \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(1) ha $x=y=0$ $(0-0, 3\cdot 0, 2\cdot 0+0) = (0,0,0)$ $\Leftarrow$ van nullvektor

$v_1 = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ és $v_2 = x_2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + y_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2) $\lambda v_1 = \lambda\left[x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + y_1\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = (\lambda x_1)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + (\lambda y_1)\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\Leftarrow$ szorzásra zárt

(3) $v_1 + v_2 = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + y_1\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + y_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (x_1+x_2)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + (y_1+y_2)\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\Leftarrow$ zárt összeadásra

(1) + (2) + (3) $\Rightarrow$ S5 altere