1. Algoritmusok stabilitása, gépi számok

1.1. Feladat*

Tekintsük a következő határozott integrált:

$$T_n := \int_0^1 \frac{x^n}{x+10}\,\mathrm{d}x \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Az integrál közelítésére két algoritmust is adunk:

$$\begin{array}{llll}
(1) & T_0 := \ln(1.1) & T_k := \dfrac{1}{k} - 10T_{k-1} & (k = 1, \dots, n), \\
(2) & T_{M+1} := 0 & T_k := \dfrac{1}{10}\left(\dfrac{1}{k} - T_{k+1}\right) & (k = M, \dots, n).
\end{array}$$

A fenti rekurziókkal megkapható T_n közelítő értéke. Legyen az (1) algoritmus bemenete T_0, a (2) algoritmusé T_{M+1}, továbbá mindkét algoritmus kimenete T_n. Bizonyítsuk, hogy az (1) algoritmus instabil, a (2) pedig stabil.

A T_k kifejezést átalakítva ellenőrizhető a rekurziók helyessége:

$$\begin{aligned}
T_k &= \int_0^1 \frac{x^{k-1}\cdot x}{x+10}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^{k-1}(x+10-10)}{x+10}\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^1 x^{k-1}\mathrm{d}x - 10\int_0^1 \frac{x^{k-1}}{x+10}\mathrm{d}x = \\
&= \left[\frac{x^k}{k}\right]_0^1 - 10T_{k-1} = \frac{1}{k} - 10T_{k-1},
\end{aligned}$$

melyből leolvasható az (1) algoritmus alakja. A fenti kifejezést átrendezve T_{k-1}-re k helyére $k+1$-et írva kapjuk a (2) rekurziót.

Vizsgáljuk először az (1) algoritmust. Változtassuk meg a bemenetét egy kissé, legyen a megváltoztatott bemenet $\widetilde{T}_0$. A bemenet hibája ekkor

$$|T_0 - \widetilde{T}_0|,$$

a kimenet hibája pedig

$$|T_n - \widetilde{T}_n|.$$

Ha ez utóbbi mennyiség *nem* becsülhető meg felülről $|T_0 - \widetilde{T}_0|$ konstansszorosával, akkor az azt jelenti, hogy az algoritmus instabil. Először vizsgáljuk meg, hogy a rekurzió alapján mit mondhatunk a hiba terjedéséről. Tegyük fel, hogy a $|T_{k-1} - \widetilde{T}_{k-1}|$ értéke ismert, ekkor

$$|T_k - \widetilde{T}_k| = \left| \left(\frac{1}{k} - 10T_{k-1} \right) - \left(\frac{1}{k} - 10\widetilde{T}_{k-1} \right) \right| = 10 \cdot |T_{k-1} - \widetilde{T}_{k-1}|.$$

Ebből egyszerűen látható, hogy

$$|T_n - \widetilde{T}_n| = 10^n \cdot |T_0 - \widetilde{T}_0|,$$

vagyis az algoritmus nem stabil, ugyanis a 10^n nem becsülhető felülről konstanssal (a 10^n sorozat nem korlátos, ez egy plusz végtelenhez tartó divergens geometriai sorozat):

$$\forall K > 0 \;\; \exists n \in \mathbb{N} \; : \; |T_n - \widetilde{T}_n| > K \cdot |T_0 - \widetilde{T}_0|.$$

Teljesen hasonló módon igazolhatjuk, hogy a (2) algoritmus stabil. Legyen a megváltoztatott bemenet most $\widetilde{T}_{M+1}$, és tegyük fel, hogy $|T_{k+1} - \widetilde{T}_{k+1}|$ értéke ismert. Ekkor

$$|T_k - \widetilde{T}_k| = \left| \frac{1}{10} \left(\frac{1}{k} - T_{k+1} \right) - \frac{1}{10} \left(\frac{1}{k} - \widetilde{T}_{k+1} \right) \right| = \frac{1}{10} \cdot |T_{k+1} - \widetilde{T}_{k+1}|.$$

Innen már nyilvánvaló, hogy

$$|T_n - \widetilde{T}_n| = \left(\frac{1}{10} \right)^{M+1-n} |T_{M+1} - \widetilde{T}_{M+1}|.$$

Feltételezésünk szerint $M + 1 - n > 0$, ezért $\left(\frac{1}{10}\right)^{M+1-n} \leq \frac{1}{10}$, ez pedig az algoritmus stabilitását igazolja:

$$|T_n - \widetilde{T}_n| \leq \frac{1}{10} \cdot |T_{M+1} - \widetilde{T}_{M+1}|.$$

Összefoglalva tehát

$$\exists K > 0 \;\; \forall n \in \mathbb{N} \;\; (n \leq M) \; : \; |T_n - \widetilde{T}_n| \leq K \cdot |T_{M+1} - \widetilde{T}_{M+1}|.$$

1.2. Feladat

Tekintsük az $M(6,-10,10)$ gépi számhalmazt!

(a) Számítsuk ki M nevezetes számait ($\varepsilon_0, M_\infty, \varepsilon_1, |M|$)!

(b) Határozzuk meg fl(137) értéket! Mennyi $\Delta_{\mathrm{fl}(137)}$, a számábrázolás hibájából származó abszolút hibakorlát?

(a) ε_0 a lehető legkisebb pozitív gépi szám M-ből. Kiszámításához a lehető legkisebb mantisszát, és a lehető legkisebb karakterisztikát kell választanunk. Mivel a mantissza első tagja mindig 1 (a normalizálás miatt), ezért a keresett mantissza az 100000. Hozzávéve a legkisebb megengedett -10-es karakterisztikát kapjuk az

$$\varepsilon_0 = [100000 \mid -10] = \frac{1}{2} \cdot 2^{-10} = 2^{-11} = \frac{1}{2048}$$

számot. M_∞ a lehető legnagyobb gépi szám M-ből. Az előzőek alapján most a lehető legnagyobb mantisszát kell választanunk a lehető legnagyobb karakterisztikával. A keresett gépi szám így:

$$M_\infty = [111111 \mid 10] = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}\right) \cdot 2^{10} = 1008$$

Az ε_1, úgynevezett gépi epszilon a számábrázolás relatív hibájával kapcsolatos mennyiség. Úgy tudjuk kiszámítani, hogy kivonjuk az 1-et az 1 rákövetkezőjéből. Mivel $1 = [100000 \mid 1]$, illetve a rákövetkező gépi szám $1 = [100001 \mid 1]$, ezért

$$\varepsilon_1 = [100001 \mid 1] - [100000 \mid 1] = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{64}\right) \cdot 2 - 1 = 1 + \frac{1}{32} - 1 = \frac{1}{32}.$$

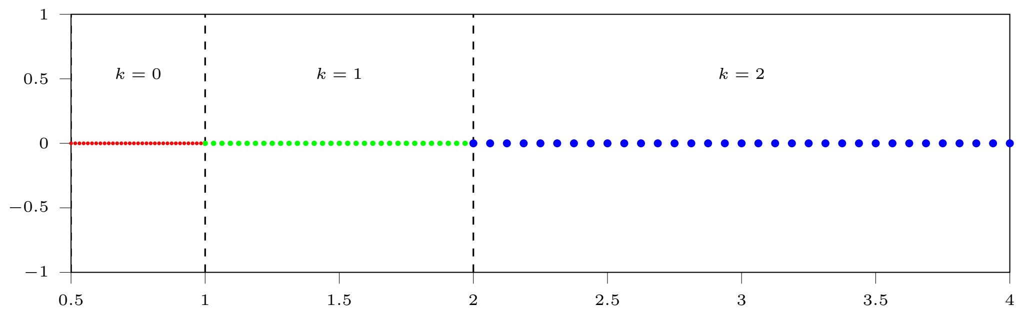
1.1. Megjegyzés

A ε_1 mennyiség éppen a $k = 1$ karakterisztikán ábrázolt szomszédos gépi számok távolsága. Eszerint tetszőleges k karakterisztikán a szomszédos gépi számok távolsága $2^{k-1} \cdot \varepsilon_1$.

Az M gépi szémhalmaz számosságát a következő képpen számolhatjuk ki:

$$|M| = \underbrace{2}_{\text{előjel}} \cdot \underbrace{2^5}_{\text{mantissza}} \cdot \underbrace{(10-(-10)+1)}_{\text{karakterisztika}} + \underbrace{1}_{\{0\}} = 1345.$$

Itt 2 a lehetséges előjelek, 2^5 a mantissza lehetséges szabad tagjainak, 21 a lehetséges karakterisztikáknak a száma, 1 pedig a gépi számhalmazhoz hozzávett $\{0\}$ egyelemű halmaz számosságát jelöli. Az $M(6, -10, 10)$ gépi számhalmaz egy részlete megtekinthető a következő ábrán.



(b) A szokásos, tízes számrendszerbeli egész- vagy törtszámok ábrázolásához meg kell határoznunk a konvertálandó szám kettes számrendszerbeli alakját. A számok egészrészének és törtrészének átváltásakor két különböző algoritmust használunk. Az egészrész átváltásához a következő algoritmus használatos:

- Induljunk ki x-ből. Ismételjük a következőt.
- Minden lépésben maradékosan osszuk el x-et 2-vel és írjuk fel a maradékot.
- Az eljárás leáll, ha $x = 0$.
- Ekkor fordított sorrendben összeolvasva a maradékokat éppen x bináris alakját kapjuk.

A következő táblázatban a függőleges vonaltól balra találhatók a maradékos osztások eredményei, a jobb oldalon pedig a maradékok.

137	
68	1
34	0
17	0
8	1
4	0
2	0
1	0
0	1

A táblázat jobb oldalát lentről felfelé olvasva kapjuk tehát a 137 szám kettes számrendszerbeli alakját:

$$137_{10} = 10001001_2.$$

A tízes számrendszerhez hasonlóan, kettes számrendszerben is az egyes számjegyek a rendszer alapszáma hatványainak szorzótényezőit jelentik. Azaz a legjobboldalibb 1-es számjegy a 2^0 szorzója, az azt követő 0 a 2^1 szorzója és így tovább. Ellenőrzésképpen visszaválthatjuk 10-es számrendszerbe a bináris számunkat:

$$10001001_2 = 2^0 + 2^3 + 2^7 = 1 + 8 + 128 = 137_{10}.$$

Ha nem okoz félreértést, akkor a továbbiakban nem tüntetjük fel alsó indexben, hogy 10-es, vagy 2-es számrendszerbeli számról beszélünk.

Az fl(137) meghatározásához keresnünk kell két olyan gépi számot, melyek közrefogják a 137-et. Ezt könnyen megtehetjük a kettes számrendszerbeli alak alapján.

1.2. Megjegyzés

Tegyük fel, hogy x egész szám, melyre $\varepsilon_0 \leq |x| \leq M_\infty$. Ekkor

- $\mathrm{fl}(x)$ mantisszája a bináris alak első t bitje (kerekítéssel),
- karakterisztikája pedig az x bináris jegyeinek száma.

A 137 bináris jegyeinek száma 8, ezért fl(137) karakterisztikája 8, mantisszája pedig 100010, azaz

$$\mathrm{fl}(137) = [100010 \mid 8]$$

Az fl függvény definíciója szerint a legközelebbi gépi számot rendeli a 137-hez. Honnan tudjuk, hogy a fenti gépi számnál nincs közelebbi a számhalmazban? A válasz az, hogy a bináris átváltás és a kerekítési szabály helyes alkalmazása miatt biztosak lehetünk benne, hogy a fenti gépi szám a legközelebbi. Tekintsük a következő magyarázatot. A 137 bináris alakja 8 számjegyű, viszont az $M(6, -10, 10)$ gépi számhalmaz számainak értékes jegyeinek maximális száma 6. Tehát a bináris alak első 6 értékes jegyét tarthatjuk meg, ezért kerekítenünk kell. A kerekítés irányát (akárcsak a tízes számrendszerben) egy t-jegyű szám esetén a $(t+1)$-edik számjegy határozza meg. Ha a $(t+1)$-edik számjegy 1, felfelé, ha 0, lefelé kerekítünk. Esetünkben $t + 1 = 7$, a 7. biz pedig 0, ezért lefelé kerekítünk:

$$\underline{100010}\boxed{0}1 \approx \underline{100010}00.$$

Az aláhúzott bitsorozat a szám mantisszája. Győződjünk meg róla, hogy tényleg ez van a 137-hez a legközelebb. Számítsuk ki a gépi szám értékét!

$$[100010 \mid 8] = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{32}\right) \cdot 2^8 = 2^7 + 2^3 = 136 \leq 137.$$

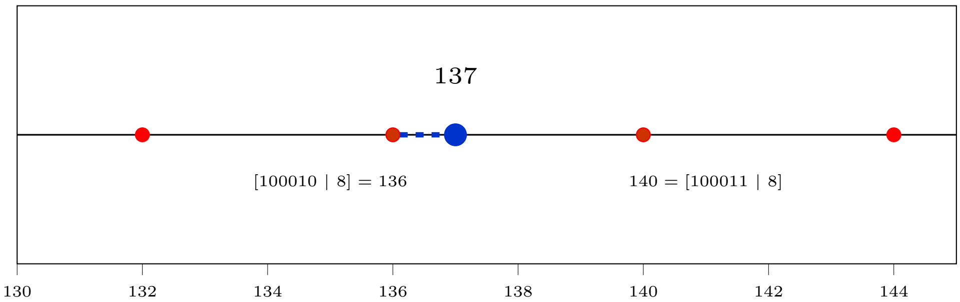
A fenti szám a lefele kerekítés miatt kisebb, mint a 137. Nézzük meg, hogy mi a következő, eggyel nagyobb gépi szám értéke:

$$[100011 \mid 8] = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}\right) \cdot 2^8 = 2^7 + 2^3 + 2^2 = 140 \geq 137$$

Megkerestük tehát azt a két egymást követő gépi számot, amelyek közrefogják az ábrázolandó számot:

$$[100010 \mid 8] = 136 \leq 137 \leq 140 = [100011 \mid 8].$$

Minthogy a 137 a bal oldalihoz esik közelebb, $\mathrm{fl}(137) = [100010 \mid 8]$.



A számábrázolásból eredő hibakorlát meghatározásához azt kell meggondolnunk, mekkora a hibát követünk el *legfeljebb*, amikor az fl függvényt alkalmazzuk, azaz mivel becsülhető felülről $|\mathrm{fl}(137) - 137|$?

Általánosan, az fl függvény definíciója szerint x az $\mathrm{fl}(x)$ és egy azzal szomszédos gépi szám közé esik. A legnagyobb hiba, amit elkövethetünk tehát, az $\mathrm{fl}(x)$ és alsó/felső szomszédjának *távolságának a fele*. Vegyük észre, hogy ez csak a szám ábrázolásakor használt karakterisztikától függ! A ε_1 definíciója szerint éppen a $k = 1$ karakterisztikán ábrázolt szomszédos számok távolságát jelenti. Ezért tetszőleges k karakterisztika esetén ez a távolság a 2^{k-1}-szeresére nyúlik/zsugorodik, vagyis:

$$|\mathrm{fl}(x) - x| \leq \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_1 \cdot 2^{k-1} = 2^{-1} \cdot 2^{1-t} \cdot 2^{k-1} = \frac{1}{2} \cdot 2^{k-t} =: \Delta_{\mathrm{fl}(x)}.$$

Esetünkben tehát a következő becslés adható:

$$|\mathrm{fl}(137) - 137| \leq \frac{1}{2} \cdot 2^{8-6} = 2.$$

1.3. Feladat

Tekintsük az $M(8,-5,5)$ gépi számhalmazt!

(a) Számítsuk ki M nevezetes számait $(\varepsilon_0, M_\infty, \varepsilon_1, |M|)$!

(b) Próbáljuk meghatározni az $\mathrm{fl}(1/6)$ gépi számot a 0.17 és 0.167 decimális közelítés alapján! Határozzuk meg a gépi számot az $1/6$ pontos értékének használatával is!

(c) Számísuk ki $\mathrm{fl}(3.14)$ értékét is, majd végezzük el az $\mathrm{fl}(3.14)+\mathrm{fl}(1/6)$ gépi összeadást! Adjunk abszolút hibakorlátot az eredmény *számábrázolásból* eredő hibájára!

(a) Számítsuk ki a nevezetes számokat az előbbiek szerint!

$$\varepsilon_0 = [10000000 \mid -5] = \frac{1}{2} \cdot 2^{-5} = \frac{1}{64}$$
$$M_\infty = [11111111 \mid 5] = \left(1 - 2^{-8}\right) \cdot 2^5 = \frac{255}{8}$$
$$\varepsilon_1 = [10000001 \mid 1] - [10000000 \mid 1] = 2^{1-8} = \frac{1}{128}$$
$$|M| = 2^8 \cdot \left(5 - (-5) + 1\right) + 1 = 2817$$

(b) Ahogy azt korábban említettük, a számok törtrészének és egészrészének két külön algoritmussal keressük meg a kettes számrendszerbeli alakját. A törtrész esetén a következőképpen járunk el. Tegyük fel, hogy $\varepsilon_0 < x < 1$ tetszőleges (tizedes) törtszám.

- Induljunk ki x-ből. Ismételjük a következőt.
- Minden lépésben szorozzuk meg x-et 2-vel. Ha az így kapott szám 1-nél nagyobb (túlcsordul), vonjunk le x-ből 1-et, majd jegyezzünk fel egy 1-est. Ha x nem csordul túl, jegyezzünk fel egy 0-t.
- Az eljárást véges számú lépés után leállítjuk.
- Sorrendben összeolvasva a túlcsordulásokat éppen x bináris alakját kapjuk.

A fenti algoritmussal egy szám kettedespont utáni számjegyeit határozhatjuk meg. Ha x nem írható fel 2-hatványok összegeként, akkor a bináris alakja nem véges, ezért a fenti algoritmust manuálisan állítjuk le, amikor elegendő értékes bitet határoztunk meg az ábrázolandó számból. Az első 1-est követő $t+1$ bitre van szükségünk, a t

bit alkotja a mantisszát, a $(t+1)$-edik bit pedig a kerekítés irányát határozza meg. A (részleges) bináris alak ismeretében most is egyszerűen meghatározható $\mathrm{fl}(x)$.

1.3. Megjegyzés

Tegyük fel, hogy x olyan szám, melyre $\varepsilon_0 \leq |x| < 1$. Ekkor

- $\mathrm{fl}(x)$ mantisszája a bináris alak első t értékes bitje (kerekítéssel),
- karakterisztikája pedig a kettedes pont és az első 1-es számjegy közötti nullák számának -1-szerese.

Határozzuk meg először az $\frac{1}{6}$ két tizedesjegy pontosságú decimális közelítésének megfelelő gépi számot!

$$\begin{array}{c|l} & 17 \\ \hline 0 & 34 \\ 0 & 68 \\ 1 & 36 \\ 0 & 72 \\ 1 & 44 \\ 0 & 88 \\ 1 & 76 \\ 1 & 52 \\ 1 & 04 \\ 0 & 08 \\ 0 & 16 \\ \vdots & \vdots \end{array} \qquad \begin{aligned} 0.17 &= 0.00\underline{10101110}\boxed{0}\ldots \approx \\ &\approx 0.00\underline{10101110}0 = \\ &= [10101110 \mid -2] \\ &\Downarrow \\ \mathrm{fl}(0.17) &= [10101110 \mid -2] \end{aligned}$$

Fontos megjegyezni, hogy a fenti szám a 0.17-hez legközelebbi gépi szám, de nem biztos, hogy az $\frac{1}{6}$-hoz is ez van legközelebb!

Lássuk most a három decimális jeggyel való közelítéshez tartozó gépi számot!

$$
\begin{array}{c|l}
 & 167 \\ \hline
0 & 334 \\
0 & 668 \\
1 & 336 \\
0 & 672 \\
1 & 344 \\
0 & 688 \\
1 & 376 \\
0 & 752 \\
1 & 504 \\
1 & 008 \\
0 & 016 \\
\vdots & \vdots
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
0.167 = & 0.00\underline{10101011}\boxed{0}\ldots \approx \\
\approx & 0.00\underline{10101011}0 = \\
= & [10101011 \mid -2] \\
\Downarrow & \\
\mathrm{fl}(0.167) = & [10101011 \mid -2]
\end{array}
$$

Vegyük észre, hogy fl(0.167) és fl(0.17) még csak nem is szomszédos gépi számok! Keressük most meg, hogy melyik az $\frac{1}{6}$-hoz legközelebbi gépi szám, induljunk ki az fl(0.167) számból:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{fl}(0.167) = [10101011 \mid -2] &= \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\frac{1}{128}+\frac{1}{256}\right)\cdot 2^{-2} = \\
&= \frac{128+32+8+2+1}{1024} = \frac{171}{1024} = \frac{513}{3072} > \frac{512}{3072} = \frac{1}{6}.
\end{aligned}
$$

Ahhoz, hogy eldöntsük az fl(1/6) értékét, meg kell találnunk azt a két szomszédos gépi számot, amely közrefogja az $\frac{1}{6}$-ot. Mivel a fentiek szerint $\mathrm{fl}(0.167) > \frac{1}{6}$, vizsgáljuk meg fl(0.167) alsó szomszédját. Az fl(0.167) számot az utolsó bitnek megfelelő értékkel kell csökkentenünk:

$$[10101010 \mid -2] = \frac{171}{1024} - \frac{1}{1024} = \frac{170}{1024}.$$

Ez a szám már valóban kisebb, mint $\frac{1}{6}$, ugyanis

$$[10101010 \mid -2] = \frac{170}{1024} = \frac{510}{3072} < \frac{512}{3072} = \frac{1}{6}.$$

Összefoglalva, találtunk két *szomszédos* gépi számot, melyek közrefogják az $\frac{1}{6}$-ot:

$$[10101010 \mid -2] \le \frac{1}{6} \le [10101011 \mid -2].$$

Az előzőek alapján az is világos, hogy a nagyobbik szám van közelebb $\frac{1}{6}$-hoz, hiszen

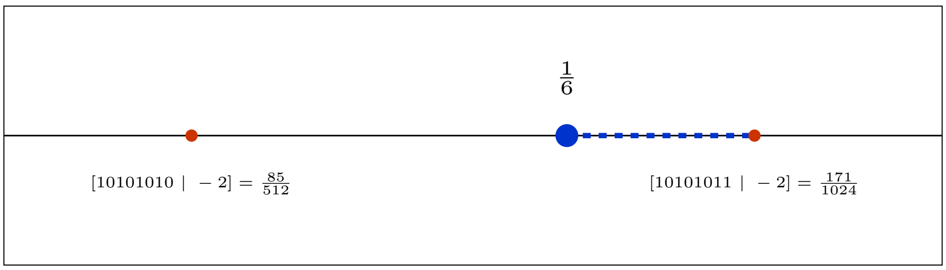
$$\left|\frac{1}{6} - [10101010 \mid -2]\right| = \frac{2}{3072},$$
$$\left|\frac{1}{6} - [10101011 \mid -2]\right| = \frac{1}{3072}.$$

Ezért

$$\mathrm{fl}(1/6) = [10101011 \mid -2].$$

Végül megjegyezzük, hogy az algoritmusunk akkor is működik, ha közönséges tört alakkal dolgozunk, így az $\frac{1}{6}$ a szokásos kerekítési szabályok alkalmazásával egyetlen lépésben konvertálható a gépi számhalmazba.

$$\begin{array}{c|c} & 1/6 \\ \hline 0 & 1/3 \\ 0 & 2/3 \\ 1 & 1/3 \\ 0 & 2/3 \\ 1 & 1/3 \\ 0 & 2/3 \\ 1 & 1/3 \\ 0 & 2/3 \\ 1 & 1/3 \\ 0 & 2/3 \\ 1 & 1/3 \\ \vdots & \vdots \end{array} \qquad \begin{aligned} 1/6 &= 0.00\underline{10101010}\boxed{1}\ldots \approx \\ &\approx 0.00\underline{10101011}0 = \\ &= [10101011 \mid -2] \\ &\Downarrow \\ \mathrm{fl}(1/6) &= [10101011 \mid -2] \end{aligned}$$



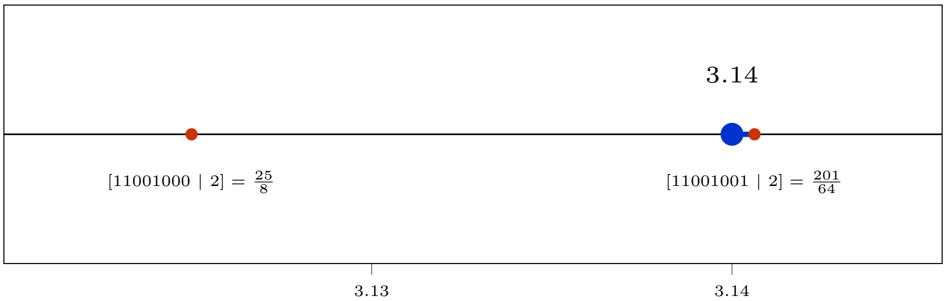
(c) Ha az ábrázolandó szám egészrészt és törtrészt is tartalmaz, akkor a két részt különkülön konvertáljuk bináris számmá. Ugyanúgy, ahogy a decimális számok esetében is, a kettedespont az egészrész és a törtrész közé kerül.

$$
\begin{array}{c|c}
3 & \\ \hline
1 & 1 \\
0 & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|c}
 & 14 \\ \hline
0 & 28 \\
0 & 56 \\
1 & 12 \\
0 & 24 \\
0 & 48 \\
0 & 96 \\
1 & 92 \\
\vdots & \vdots
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
3.14 = & 11.001000\boxed{1}\ldots \approx \\
\approx & 11.0010010 = \\
= & [11001001 \mid 2] \\
\Downarrow & \\
\mathrm{fl}(3.14) = & [11001001 \mid 2]
\end{array}
$$

1.4. Megjegyzés

Tegyük fel, hogy $x \in \mathbb{R}$ olyan szám, melyre $\varepsilon_0 \leq |x| \leq M_\infty$. Ekkor

- $\mathrm{fl}(x)$ mantisszája a bináris alak első t értékes bitje (kerekítéssel),
- karakterisztikája pedig a kettedespont és az első értékes bit ,,előjeles távolsága" (azaz hányszor kell jobbra vagy balra mozgatni a kettedespontot, hogy az közvetlenül az első értékes bit elé kerüljön).



Végezzük el az $\mathrm{fl}(3.14) + \mathrm{fl}(1/6)$ gépi összeadást! Az összeget csak úgy tudjuk kiszámítani, ha a számok azonos karakterisztikájúak, azonban ez most nem igaz. Ilyen esetben mindig a nagyobb karakterisztika lesz a közös, hiszen így minimalizálhatjuk a művelet során elkövetett hibát. A legegyszerűbb az, ha először bináris alakban adjuk össze a számokat, ezután a kapott bináris számot ábrázoljuk gépi számként.

Mivel

$$\text{fl}(3.14) = 11.001001,$$
$$\text{fl}(1/6) = 0.0010101011,$$

így

$$\begin{array}{cccccccccccc} & 1 & 1. & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & & & \\ + & & 0. & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1. & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1. \end{array}$$

Az eredményt gépi számmá konvertálva a következőt kapjuk:

$$\underline{11.010011}\boxed{1}011 \approx \underline{11.010100} = [11010100 \mid 2].$$

1.5. Megjegyzés

Megjegyezzük, hogy a bináris összeadás ugyanolyan elven végezhető, mint a decimális összeadás. Számjegyenként adunk össze (jobbról balra), ha a művelet eredménye nem ábrázolható egy számjeggyel, akkor maradékot képzünk. Azaz pl. "$1 + 1$ egyenlő 0, maradt az 1".

Látható, hogy az fl(1/6) utolsó 4 jegyéből elegendő lett egyet meghagyni a kerekítés irányának helyes meghatározásához. Éppen ezért eljárhatunk a következőképpen is. Írjuk fel az fl(1/6)-nak megfelelő számot a nagyobbik $k = 2$ karakterisztikával:

$$\begin{aligned} \text{fl}(1/6) &= [10101011 \mid -2] = \\ &= (0.\underline{10101011}_2) \cdot 2^{-2} = \\ &= (0.\underline{01010101}\boxed{1}_2) \cdot 2^{-1} = \\ &= (0.\underline{00101010}\boxed{1}1_2) \cdot 2^{0} = \\ &= (0.\underline{00010101}\boxed{0}11_2) \cdot 2^{1} = \\ &= (0.\underline{00001010}\boxed{1}011_2) \cdot 2^{2} \approx \\ & (0.\underline{00001011}\ 0\ 000_2) \cdot 2^{2} = [00001011 \mid 2]. \end{aligned}$$

Ha tehát a karakterisztikát eggyel növeljük, miközben a mantissza jegyeit eggyel jobbra toljuk (shifteljük), akkor a szám értéke (elvileg) változatlan (gyakorlatilag a kerekítés miatt megváltozhaz). Hasonló a helyzet, ha a karakterisztikát eggyel csökkentjük miközben a mantissza jegyeit eggyel balra toljuk. A 2-vel való szorzás/osztás (karakterisztika növelése/csökkentése) tehát kiváltható a bitek eltolásával (bitshift). Az így kapott szám ugyan nem normalizált, de műveletet tudunk vele végezni. A művelet elvégzése után kapott számot később normalizáljuk.

Tekintsük meg így is a gépi összeadást:

$$\begin{array}{rl} & [11001001 \mid 2] \\ + & [00001011 \mid 2] \\ \hline & [11010100 \mid 2]. \end{array}$$

Látható, hogy ezzel a módszerrel is ugyanazt kaptuk, mint korábban. Becsüljük most az operandusok és az eredmény számábrázolásából származó hibáját:

$$\Delta_{\mathrm{fl}(1/6)} = \frac{1}{2} \cdot 2^{-2-8} = 2^{-11} = \frac{1}{2048},$$
$$\Delta_{\mathrm{fl}(3.14)} = \Delta_{\mathrm{fl}(3.14)+\mathrm{fl}(1/6)} = \frac{1}{2} \cdot 2^{2-8} = 2^{-7} = \frac{1}{128}.$$

1.4. Feladat*

Tekinstük az $M(6,-4,4)$ gépi számhalmazt, legyen továbbá $a = \text{fl}(8)$, valamint $b = \text{fl}(1/16)$.

(a) Mennyi az $(a+b)+b$ értéke?

(b) Mennyi az $a+(b+b)$ művelet eredménye?

(c) Mennyi az $a+a$ művelet eredménye?

(a) Mivel a és b is 2-hatvány, könnyen ábrázolhatóak a gépi számhalmazban:

$$\begin{aligned} a &= \text{fl}(8) = 2^3 = \frac{1}{2}\cdot 2^4 = [100000 \mid 4], \\ b &= \text{fl}(1/16) = 2^{-4} = \frac{1}{2}\cdot 2^{-3} = [100000 \mid -3]. \end{aligned}$$

A két számot a közös, nagyobb karakterisztikára kell hoznunk, hogy összeadhatók legyenek, ezért hozzuk b-t a 4-es karakterisztikára:

$$\begin{aligned} b = [100000 \mid -3] &= (0.1_2)\cdot 2^{-3} = \\ &= (0.01)\cdot 2^{-2} = \cdots = \\ &= (0.\underline{000000}\boxed{0}1_2)\cdot 2^4 \approx [000000 \mid 4]. \end{aligned}$$

Tehát

$$\begin{array}{rr} & [100000 \mid 4] \\ + & [000000 \mid 4] \\ \hline & [100000 \mid 4]. \end{array}$$

Vagyis

$$(a+b) = a \quad \Longrightarrow \quad (a+b)+b = a+b = a = [100000|4].$$

(b) A b szám önmagával könnyen összeadható, hiszen az operandusok (b és b) karakterisztikája megegyezik:

$$\begin{array}{rr} & [100000 \mid -3] \\ + & [100000 \mid -3] \\ \hline & (\underline{1.00000}0)_2 \cdot 2^{-3} = [100000 \mid -2]. \end{array}$$

A fenti példában a mantisszák legelső jegyének összeadásakor maradék keletkezett, melyet eggyel nagyobb helyiértékre kellett átvinnünk (túlcsordulás). Ezért az eredmény már nem ábrázolható az eredeti karakterisztikán. Ilyen esetben az eredmény első t bitjét tartjuk meg, a karakterisztikát pedig eggyel növeljük. Az előzőek alapján látható, hogy a gépi összeadáshoz az (akár különböző karakterisztikájú) operandusok mantisszájának összesen $2t$ bitjén kívül 2 további bit szükséges (1 a kerekítéshez, 1 a túlcsordulás jelzésére).

Megjegyezzük, hogy mivel $b+b=2b$, az eredményt megkaphattuk volna egyszerűen úgy is, ha b karakterisztikáját eggyel növeljük:

$$b+b=2b=[100000|-3+1]=[100000|-2].$$

Adjuk most össze a $b+b$ összeget a-val. Először is ábrázoljuk $(b+b)$-t a 4-es karakterisztikán:

$$\begin{aligned} b+b=[100000 \mid -2] &= (0.1_2)\cdot 2^{-2} = \\ &= (0.\underline{000000}\boxed{1}_2)\cdot 2^4 \approx [000001 \mid 4]. \end{aligned}$$

Így $a+(b+b)$-re:

$$\begin{array}{rl} & [100000 \mid 4] \\ + & [000001 \mid 4] \\ \hline & [100001 \mid 4]. \end{array}$$

Ez az előbbi eredményünkkel együtt azt jelenti, hogy a gépi összeadás nem asszociatív, mivel

$$a+(b+b)=[100001|4]\neq[100000|4]=(a+b)+b.$$

Ez nem meglepő, azok után, hogy a nullelem sem egyértelmű. Ezt jelenti ugyanis korábbi eredményünk:

$$a+b=a \quad \not\Rightarrow \quad b=0.$$

A gépi összeadás viszont kommutatív, vagyis

$$a+b=b+a$$

mindig teljesül.

(c) Az $a+a$ értéke nem ábrázolható a számhalmazban, mivel

$$a+a=2a=2\cdot[100000|4]=[100000|5]\notin M,$$

és $5>k^+=4$. Ez a már korábban megismert túlcsordulás (overflow) jelensége, a művelet eredménye ekkor nem ábrázolható. Egy szabványos (IEEE 754) lebegőpontos aritmetikát megvalósító rendszerben egy ehhez hasonló művelet eredménye egy, a $+\infty$-nek megfelelő extremális érték. Az így kapott végtelennel akár további is műveleteket végezhetünk (ahogy azt analízisből tanultuk), pl.

$$(+\infty)+3=+\infty, \qquad (+\infty)\cdot(-1)=-\infty.$$

(d) A $b \cdot b$ művelet eredménye:

$$b \cdot b = \left(2^{-4}\right)^2 = 2^{-8} = \frac{1}{2} \cdot 2^{-7} = [100000| - 7] \approx 0,$$

mivel $-7 < k^- = -4$. Ez a jelenség pedig az alulcsordulás (underflow), a számot ekkor nullára kerekítjük. Egy szabványos (IEEE 754) lebegőpontos aritmetikát megvalósító rendszer ugyan tartalmaz úgynevezett denormalizált számokat (ezek esetében a mantissza első bitje 0), melyek használatával a 0-hoz igen közeli számok is ábrázolhatók, az alulcsordulás jelensége viszont ezzel a módosítással sem kerülhető meg. Az alulcsordult számot nullára kerekítjük, annak viszont előjelét megtartjuk, így egy szabványos gépi számhalmaznak eleme a $+0$ és a -0 is. Ezek segítségével szintén analízisből ismerős műveleteket vezethetünk be, pl:

$$1/(+0) := +\infty, \qquad 1/(-0) := -\infty.$$

Az előzőekben említett $\pm\infty$ és ± 0 szimbólumokon kívül a szokásos gépi számhalmazokban még egy extremális szimbólum használatos, a "nem szám" (*not a number* = NaN). Ezt olyan műveletek esetében használjuk, melyhez nem tudunk értéket rendelni:

$$(+\infty) + (-\infty) := \text{NaN}, \qquad 0 \cdot (+\infty) := \text{NaN}.$$