Analízis I. gyakorlatok

Programtervező informatikus BSc 2018
A, B és C szakirány

1. gyakorlat

Egyenlőtlenségek

Szükséges ismeretek

- Teljes indukció.
- Egyenletek és egyenlőtlenségek megoldása.

Feladatok

1. Háromszög-egyenlőtlenségek:

Minden a és b valós számra

(a) $|\,a+b\,| \le |\,a\,| + |\,b\,|$,

(b) $\big|\,|a| - |b|\,\big| \le |\,a-b\,|$.

2. A Bernoulli-egyenlőtlenség: Minden $h \ge -1$ valós számra és minden $n \in \mathbb{N}^+$ természetes számra

$$(1+h)^n \ge 1 + nh.$$

3. A számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenség: Legyen $n \ge 2$ tetszőleges természetes szám és $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tetszés szerinti *nemnegatív* valós számok. Ekkor

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Megjegyzés. Az $S_n := \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$, illetve az $M_n := \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}$ számot az $a_1, \ldots, a_n$ számok *számtani közepének*, illetve *mértani közepének* nevezzük.

4. Bizonyítsuk be, hogy minden $a \ge -1/2$ valós számra fennáll az

$$(1-a)^5(1+a)(1+2a)^2 \le 1$$

egyenlőtlenség.

5. Bizonyítsuk be, hogy

$$2\sqrt{n+1} - 2 < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Házi feladatok

1. Bizonyítsa be, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n} - 1 \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

2. Oldja meg $\mathbb{R}$-en a

$$\frac{3x^2+7x-4}{x^2+2x-3} < 2$$

egyenlőtlenséget.

■ Gyakorló feladatok

1. Igazolja, hogy ha az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív valós számok szorzata 1, akkor

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \geq 2^n.$$

Mikor van itt egyenlőség?

2. Mutassa meg, hogy tetszőleges pozitív a, b, c valós számokra fennállnak az alábbi egyenlőtlenségek:

$$8\,abc \leq (a+b)\cdot(b+c)\cdot(a+c) \leq \frac{8}{27}(a+b+c)^3.$$

3. Lássa be, hogy minden a, b, c pozitív valós szám esetén:

(a) $a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc$,

(b) $\dfrac{ab}{c}+\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ca}{b} \geq a+b+c$,

(c) $(a+b+c)\,(ab+bc+ca) \geq 9\,abc$.

4. Bizonyítsa be, hogy ha $n \in \mathbb{N}^+$ és $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tetszőleges pozitív valós számok, akkor

(a) $\dfrac{a_1}{a_2}+\dfrac{a_2}{a_3}+\cdots+\dfrac{a_{n-1}}{a_n}+\dfrac{a_n}{a_1} \geq n$;

(b) $a_1a_2\cdots a_n \leq \dfrac{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_n^n}{n}$.

Mikor van egyenlőség a fenti egyenlőtlenségekben?

5. Bizonyítsa be, hogy

$$2^n > 1+n\sqrt{2^{n-1}} \quad (n=2,3,4,\ldots).$$

■ További feladatok

1. Az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív valós számok **harmonikus közepét** így értelmezzük:

$$H_n := \frac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}} \quad (n \in \mathbb{N}^+).$$

A harmonikus-, a mértani- és a számtani közepek között a

$$H_n \leq M_n \leq S_n \quad (n \in \mathbb{N}^+)$$

egyenlőtlenség teljesül. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha a számok egyenlők egymással.

2. A Cauchy–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség: Legyen $n \geq 1$ egy természetes szám. Ekkor minden $a_1, a_2, \ldots, a_n$ és $b_1, b_2, \ldots, b_n$ valós számra

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.$$

Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha létezik olyan $\lambda \in \mathbb{R}$, hogy $a_1 = \lambda b_1$, $a_2 = \lambda b_2$, …, $a_n = \lambda b_n$ vagy $b_1 = \lambda a_1$, $b_2 = \lambda a_2$, …, $b_n = \lambda a_n$.

Megjegyzés. Az állítás geometriai tartalma $n = 2$ esetén a következő: tekintsük az $\underline{a} = (a_1, a_2)$ és $\underline{b} = (b_1, b_2)$ síkbeli vektorokat. Ezek hossza $|\underline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, $|\underline{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$, skaláris szorzata pedig $\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos\gamma$ (γ az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok által bezárt szög), amit koordinátákkal így fejezhetünk ki: $\underline{a} \cdot \underline{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$. Mivel $|\cos\gamma| \leq 1$, ezért ebből $|\underline{a} \cdot \underline{b}| \leq |\underline{a}| \cdot |\underline{b}|$, azaz

$$\left|a_1 b_1 + a_2 b_2\right| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

következik. A Cauchy–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség tehát ennek általánosítása.

2. gyakorlat

Számhalmaz szuprémuma és infimuma

Szükséges ismeretek

- Számhalmaz maximuma és minimuma.
- Korlátos számhalmazok.
- A szuprémum elv.
- Számhalmaz szuprémuma és infimuma.

Feladatok

1. Fogalmazzuk meg pozitív állítás formájában azt, hogy a nemüres $A \subset \mathbb{R}$ halmaz felülről **nem** korlátos. Mutassuk meg, hogy az

$$A := \left\{ \frac{x^2+2x+3}{x+1} \;\Big|\; x \in [1, +\infty) \right\}$$

halmaz felülről nem korlátos.

2. Bizonyítsuk be, hogy az

$$A := \left\{ 2 - \frac{1}{n} \;\Big|\; n = 1, 2, \ldots \right\}$$

halmaznak **nincs** maximuma.

3. Korlátos-e alulról, illetve felülről a A halmaz, ha

(a) $A := \left\{ \frac{1}{x} \;\Big|\; x \in (0, 1] \right\}$,

(b) $A := \left\{ \frac{x+1}{2x+3} \;\Big|\; x \in [0, +\infty) \right\}$,

(c) $A := \left\{ \frac{2|x|+3}{3|x|+1} \;\Big|\; x \in [-2, +\infty) \right\}$,

(d) $A := \left\{ \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \;\Big|\; 0 \le x \in \mathbb{R} \right\}$?

Határozzuk meg $\sup A$-t és $\inf A$-t. Van-e az A halmaznak legnagyobb, illetve legkisebb eleme?

Házi feladatok

1. Korlátos-e alulról, illetve felülről az A halmaz, ha

(a) $A := \left\{ \frac{1}{x^2} \;\Big|\; 0 < x \le 1 \right\}$,

(b) $A := \left\{ \frac{2n+1}{3n+2} \;\Big|\; n \in \mathbb{N} \right\}$,

(c) $A := \left\{ \dfrac{5x+7}{2x+1} \;\middle|\; x \in [0, +\infty) \right\}$?

Határozza meg $\sup A$-t és $\inf A$-t. Van-e az A halmaznak legnagyobb, illetve legkisebb eleme?

■ Gyakorló feladatok

1. Korlátos-e alulról, illetve felülről az A halmaz, ha

(a) $A := \left\{ \dfrac{|x|-2}{|x|+2} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}$,

(b) $A := \left\{ \dfrac{2x^2+1}{5x^2+2} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}$,

(c) $A := \left\{ \dfrac{n^2+n+2}{3n+1} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$,

(d) $A := \left\{ \dfrac{2m-1}{3n+2} \;\middle|\; m, n \in \mathbb{N}, \quad m \leq n \right\}$,

(e) $A := \left\{ \dfrac{2^{n+2}+9}{3 \cdot 2^n + 2} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$?

Határozza meg $\sup A$-t és $\inf A$-t. Van-e az A halmaznak legnagyobb, illetve legkisebb eleme?

2. Korlátos-e alulról, illetve felülről az

$$A := \left\{ \frac{x}{y} \in \mathbb{R} \;\middle|\; 0 < x < 1, \quad 0 < y < x \right\}$$

halmaz? Ha igen, akkor számítsa ki $\sup A$-t és $\inf A$-t. Van-e az A halmaznak legnagyobb, illetve legkisebb eleme?

■ További feladatok

1. Bizonyítsa be, hogy a valós számok tetszőleges A és B nemüres és korlátos részhalmazaira

(a) $\sup\{a+b \,:\, a \in A \text{ és } b \in B\} = \sup A + \sup B$,
$\inf\{a+b \,:\, a \in A \text{ és } b \in B\} = \inf A + \inf B$;

(b) ha A és B minden eleme pozitív, akkor
$\sup\{a \cdot b \,:\, a \in A \text{ és } b \in B\} = \sup A \cdot \sup B$,
$\inf\{a \cdot b \,:\, a \in A \text{ és } b \in B\} = \inf A \cdot \inf B$.

2. Igazolja, hogy bármely $A, B \subset \mathbb{R}$ nemüres, korlátos halmazok esetében

(a) $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$,
$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$;

(b) ha $A \cap B \neq \emptyset$, akkor
$\inf(A \cap B) \geq \max\{\inf A, \inf B\}$,
$\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\}$;

(c) ha $A \subset B$, akkor $\inf A \geq \inf B$ és $\sup A \leq \sup B$.

Adjon példát olyan A, B halmazokra, hogy (b)-ben $\leq$ ($\geq$) helyett $<$ ($>$) legyen írható.

3. gyakorlat

Függvények

Szükséges ismeretek

- A függvény definíciója, értelmezési tartománya, értékkészlete.
- Halmaznak függvény által létesített képe, őseképe.
- Függvény invertálhatóságának a fogalma.
- Az inverz függvény definíciója.
- Az összetett függvény fogalma.

Feladatok

1. Határozzuk meg a $C := [-2, 2]$ halmaz

$$f(x) := 3 + 2x - x^2 \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvény által létesített képét!

2. Számítsuk ki a $D := [1, 2]$ halmaz

$$f(x) := |x - 1| - 1 \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvény által létesített őseképét!

3. Bizonyítsuk be, hogy az

$$f(x) := \frac{1}{1 + |x - 1|} \quad \big(x \in \mathbb{R}\big)$$

függvény **nem** invertálható!

4. Mutassuk meg, hogy az

$$f(x) := \left(\frac{x - 1}{x + 1}\right)^2 - 1 \quad \big(x \in (-1, 1)\big)$$

függvény invertálható, és számítsuk ki az inverzét!

5. Határozzuk meg az $f \circ g$ kompozíciót, ha

(a) $f(x) := \sqrt{x + 1} \ \ \big(x \in [-1, +\infty)\big), \quad g(x) := x^2 - 3x + 1 \ \ (x \in \mathbb{R});$

(b) $f(x) := \dfrac{1}{2x + 1} \ \ \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}\big), \quad g(x) := x^2 + 3x + \frac{3}{2} \ \ (x \in \mathbb{R})!$

6. Legyen

$$f(x) := \sqrt{2x + 1} \quad \big(x \in \big[\tfrac{1}{2}, +\infty\big)\big) \quad \text{és} \quad g(x) := \frac{1}{x^2 - 2} \quad \big(x \in (2, +\infty)\big).$$

Határozzuk meg az $f \circ g$ és a $g \circ f$ függvényeket!

■ Házi feladatok

1. Határozza meg az $E := (-1, 3)$ halmaz

$$f(x) := \frac{2x+4}{x+1} \quad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}\big)$$

függvény által létesített képét és ősképét!

2. Mutassa meg, hogy az

$$f(x) := \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \quad \big(x \in [0, +\infty)\big)$$

függvény invertálható, és számítsa ki az inverzét.

3. Írja fel az $f \circ g$ és a $g \circ f$ kompozíciót, ha

$$f(x) := \operatorname{sign}(x) \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad\qquad g(u) := \frac{1}{u} \quad \big(u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big).$$

■ Gyakorló feladatok

1. Határozza meg a $C := [-1, 6]$ halmaz

$$f(x) := x^2 - 6x + 5 \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvény által létesített képét.

2. Legyen

$$f(x) := \sqrt{|5x-2|} \quad (x \in \mathbb{R}) \quad \text{és} \quad D := (-1, 2].$$

Határozza meg az $f^{-1}[D]$ halmazt.

3. Mutassa meg, hogy az

$$f(x) := \begin{cases} 3x+1 & (0 \le x \le 1) \\ \sqrt{18-x} & \text{ha } (1 < x < 2) \end{cases}$$

függvény invertálható, és határozza meg az inverzét.

4. Határozza meg az $f \circ g$ kompozíciót, ha

$$f(x) := \begin{cases} 0 & (-\infty < x \le 0) \\ x & (0 < x < +\infty), \end{cases} \qquad \text{és} \qquad g(x) := \begin{cases} 0 & (-\infty < x \le 0) \\ -x^2 & (0 < x < +\infty). \end{cases}$$

5. Legyen $f(x) := x^2 \ \ (x > 0)$ és $g(x) := x + 1 \ \ (x > 0)$. Mutassa meg, hogy az $f \circ g$ függvény invertálható, és határozza meg az inverzét.

■ További feladatok

1. Az $\alpha \in \mathbb{R}$ paraméter mely értékénél lesz az

$$f(x) := \begin{cases} \alpha x + 1, & \text{ha } 0 \le x \le 1 \\ \alpha - x, & \text{ha } 1 < x \le 2, \end{cases}$$

függvény invertálható? Mi lesz akkor $\mathcal{D}_{f^{-1}}$, $\mathcal{R}_{f^{-1}}$, illetve f^{-1}?

2. Bizonyítsa be, hogy ha az f és a g függvény invertálható, továbbá $\mathcal{R}_g \subset \mathcal{D}_f$, akkor $f \circ g$ is invertálható függvény, és

$$\big(f \circ g\big)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}.$$

3. Legyen $f : A \to B$ tetszőleges függvény. Bizonyítsa be, hogy bármely $D_1, D_2 \subset B$ esetén

(a) $f^{-1}[\emptyset] = \emptyset$, $f^{-1}[\mathcal{R}_f] = \mathcal{D}_f$;

(b) $f^{-1}[D_1 \cup D_2] = f^{-1}[D_1] \cup f^{-1}[D_2]$;

(c) $f^{-1}[D_1 \cap D_2] = f^{-1}[D_1] \cap f^{-1}[D_2]$;

(d) $f^{-1}[D_1 \setminus D_2] = f^{-1}[D_1] \setminus f^{-1}[D_2]$.

4. Igazolja, hogy az $f : A \to B$ függvényre az

$$f[C_1 \cap C_2] = f[C_1] \cap f[C_2]$$

egyenlőség akkor és csak akkor teljesül minden $C_1, C_2 \subset A$ halmazra, ha f invertálható.

5. Igazolja, hogy az $f : A \to B$ függvényre az

$$f[C_1 \setminus C_2] = f[C_1] \setminus f[C_2]$$

egyenlőség akkor és csak akkor teljesül minden $C_1, C_2 \subset A$ halmazra, ha f invertálható.

6. Legyen $f : A \to B$ tetszőleges függvény. Bizonyítsa be, hogy minden $D \subset B$ halmazra $f[f^{-1}[D]] \subset D$. Igazolja azt is, hogy az $f[f^{-1}[D]] = D$ egyenlőség akkor és csak akkor teljesül minden $D \subset B$ halmazra, ha $\mathcal{R}_f = B$.

4. gyakorlat

Valós sorozatok 1.

Szükséges ismeretek

- Sorozat konvergenciájának és határértékének a definíciója.
- $(\pm\infty)$-hez tartó sorozatok.
- A tágabb értelemben vett határérték fogalma.

Feladatok

1. Tekintsük az (a_n) sorozat konvergenciájának a definícióját:

$$\exists\, A \in \mathbb{R}, \quad \forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz} \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall\, n > n_0 : \ |a_n - A| < \varepsilon.$$

Módosítsuk ezt a következőképpen:

$$\exists\, A \in \mathbb{R} \ \text{ és } \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall\, \varepsilon > 0 \ \text{ és } \ \forall\, n > n_0 : \ |a_n - A| < \varepsilon.$$

Az (a_n) sorozat milyen tulajdonságát fejezi ki az utóbbi állítás?

2. A konvergencia definíciója alapján mutassuk meg, hogy

(a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n-3} = \frac{1}{2}$,

(b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{2n^2+n+2} = \frac{1}{2}$,

(c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+3} - \sqrt{n+1}\right) = 0$.

Tetszőleges $\varepsilon > 0$ hibakorláthoz tehát határozzunk meg egy n_0 küszöbindexet!

3. A definíció szerint az (a_n) sorozat $(+\infty)$-hez tart, ha

$$\forall\, P > 0\text{-hoz} \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall\, n > n_0 : \quad a_n > P.$$

Módosítsuk ezt a következőképpen:

$$\exists\, P > 0 \ \text{ és } \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall\, n > n_0 : \quad a_n > P.$$

Az (a_n) sorozat milyen tulajdonságát fejezi ki az utóbbi állítás?

4. A határérték definíciója alapján mutassuk meg, hogy

(a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+3n+1}{n+3} = +\infty$,

(b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2-3n^2}{n+1} = -\infty$.

Tetszőleges P hibakorláthoz tehát határozzunk meg egy n_0 küszöbindexet!

■ Házi feladatok

1. Tegyük fel, hogy az $A \in \mathbb{R}$ szám minden környezete az (a_n) sorozatnak végtelen sok tagját tartalmazza. Következik-e ebből az, hogy az (a_n) sorozat konvergens?

2. A határérték definíciója alapján mutassa meg, hogy

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\dfrac{n^3+n^2-2n}{n^3+1}} = 1,$

(b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^4+2n^2+1}{n^2+1} = +\infty,$

(c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2+3n-1}-2n\right) = -\infty\,!$

■ Gyakorló feladatok

1. A határérték definíciója alapján mutassa meg, hogy

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n^3+10}{n^3+n^2+n+1} = 2,$

(b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n^2+(-1)^n n}{n^2+2} = 2,$

(c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n-\sqrt{n}-1}{n+\sqrt{n}+1} = 1,$

(d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\dfrac{2n^3-n^2+3n+1}{n^2+\sqrt{n}+2}} = +\infty,$

(e) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{2n+(-1)^n}-\sqrt{2n}\right) = 0,$

(f) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+3}-\sqrt{2n+1}\right) = -\infty\,!$

2. Legyen (a_n) olyan nullasorozat, amelyre $a_n \neq 0$ is teljesül minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Mit lehet mondani az $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ sorozat határértékéről?

3. Igazolja, hogy az

$$a_n := n^{(-1)^n} \qquad \left(n \in \mathbb{N}^+\right)$$

sorozat divergens!

■ További feladatok

1. Tegyük fel, hogy az (a_n) sorozat konvergens. Mutassa meg, hogy az

$$s_n := \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \qquad (n \in \mathbb{N}^+)$$

számtani közepek sorozata is konvergens, és $\lim(a_n) = \lim(s_n)$. Adjon példát olyan (a_n) sorozatra, amely divergens, de a fenti (s_n) sorozat konvergens. Mutassa meg azt is, hogy ha $\lim(a_n) = +\infty$, akkor $\lim(s_n) + \infty$!

2. Legyen $2 \leq k \in \mathbb{N}$. Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat felbontható $(a_n^{(1)})$, $(a_n^{(2)})$,..., $(a_n^{(k)})$ páronként diszjunkt részsorozatokra, ha a részsorozatokhoz tartozó $\nu^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ indexsorozatok értékkészletei egy osztályozása a természetes számok halmazának.

Igazoljuk, hogy ha egy sorozatnak van egy páronként diszjunkt, véges számú részsorozatból álló felbontása, amely felbontásban szereplő sorozatok határértéke azonos, akkor az eredeti sorozat ugyanehhez a számhoz tart!

Igaz-e az előző állítás végtelen számú részsorozatból álló felbontás esetén?

$\boxed{\text{5. gyakorlat}}$

Valós sorozatok 2.

Szükséges ismeretek

- Nevezetes sorozatok határértékei.
- A műveletek és a határérték kapcsolatára vonatkozó tételek.
- A rendezés és a határérték kapcsolatára vonatkozó tételek, a közrefogási elv.
- Monoton sorozatok határértékére vonatkozó tételek.

Feladatok

1. Legyen

$$P(x) := a_r x^r + a_{r-1}x^{r-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (x \in \mathbb{R})$$
$$(a_i \in \mathbb{R},\ i = 0, 1, 2, \ldots, r)$$

egy pontosan r-edfokú polinom (azaz $a_r \neq 0$). Mutassuk meg, hogy

$$\lim_{n\to+\infty} P(n) = \begin{cases} +\infty, & \text{ha } a_r > 0 \\ -\infty, & \text{ha } a_r < 0\,! \end{cases}$$

2. Számítsuk ki az alábbi sorozatok határértékeit:

(a) $a_n := \dfrac{(2-n)^7 + (2+n)^7}{(n^2+n+1)\cdot(2n+1)^5} \quad (n \in \mathbb{N}),$

(b) $a_n := \dfrac{n^4 + n^2 + n + 1}{2n^5 + n - 4} \quad (n \in \mathbb{N}),$

(c) $a_n := \dfrac{n^4 - 2n^3 + n + 1}{n^3 - 4n + 3} \quad (n \in \mathbb{N}),$

(d) $a_n := \dfrac{n^7 + n - 12}{1 - n^2 + 3n} \quad (n \in \mathbb{N})\,!$

3. Mi a határértéke az

$$a_n := n^2 \cdot \left(n - \sqrt{n^2+1}\right) \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatnak?

4. Az $\alpha \in \mathbb{R}$ paramétertől függően határozzuk meg az

$$a_n := \sqrt{n^2+n+1} - \alpha\, n \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat határértékét!

5. A nevezetes sorozatok határértékeiről tanultakat is felhasználva, számítsuk ki az alábbi sorozatok határértékeit:

(a) $a_n := \dfrac{5^{n+1} + 2^n}{3 \cdot 5^n - 5^{-n}} \quad (n \in \mathbb{N}),$

(b) $a_n := \dfrac{n^2 \cdot 3^n + 2^{2n}}{4^{n+1} + 2^n} \quad (n \in \mathbb{N}),$

(c) $a_n := \sqrt{\dfrac{(-5)^n + 7^n}{7^{n+1} + n^7}} \quad (n \in \mathbb{N}),$

(d) $a_n := \dfrac{(-2)^n + n}{n! + 3^n} \quad (n \in \mathbb{N})\,!$

6. Konvergensek-e a következő sorozatok, ha igen, mi a határértékük:

(a) $a_n := \sqrt[n]{3n^5 + 2n + 1} \quad (n \in \mathbb{N}),$

(b) $a_n := \sqrt[n]{\dfrac{n+1}{2n+3}} \quad (n \in \mathbb{N}),$

(c) $a_n := \sqrt[n]{2^n + 3^n} \quad (n \in \mathbb{N}),$

(d) $a_n := \sqrt[n]{\dfrac{3^n}{n!} + 2^n} \quad (n \in \mathbb{N})?$

■ Házi feladatok

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét:

(a) $\left(\dfrac{n^3 - 2n - 1}{-3n^3 + n + 3}\right),$

(b) $\left(\dfrac{(n+1)^3 + (n-1)^3}{n^3 + 1}\right).$

2. Konvergensek-e a következő sorozatok? Ha igen, akkor mi a határértékük?

(a) $\left(\sqrt{n^2 + 3n + 1} - 2n\right);$

(b) $\left(n\left(n - \sqrt{n^2 + 1}\,\right)\right).$

3. Számítsa ki az alábbi határértékeket:

(a) $\lim \left(\dfrac{2^n + 2^{-n}}{2^{-n} + 3^n}\right),$

(b) $\lim \left(\dfrac{n \cdot 2^{n+1} + 3^{2n}}{9^{n-1} + 3^n}\right),$

(c) $\lim \left(\sqrt{\dfrac{(-2)^n + 5^n}{5^{n+1} + n^5}}\right),$

(d) $\lim \left(\dfrac{(-3)^n + n^3}{n! + 5^n}\right),$

(e) $\lim \left(\sqrt[n]{2^n + n^2 + 1}\right),$

(f) $\lim \left(\sqrt[n]{n3^n + n^3 + (-1)^n}\right).$

■ Gyakorló feladatok

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét:

(a) $\left(\dfrac{n^4+n^2+n+1}{2n^5+n-4}\right)$,

(b) $\left(\dfrac{(n-1)^7(2n-1)^3}{1+(n+1)^{10}}\right)$,

(c) $\left(\dfrac{\sqrt{n^4+1}-n^2}{n^2+1}\right)$

(d) $\left(\dfrac{n+1}{\sqrt[3]{n^2+3}}\right)$,

(e) $\left(\sqrt{\dfrac{3n^2+n+1}{n^2+2}}\right)$,

(f) $\left(\dfrac{n-\sqrt{n}-1}{n+\sqrt{n}+1}\right)$,

(g) $\left(\dfrac{\sqrt[3]{n^2+3}}{n+1}\right)$,

(h) $\left(\dfrac{n+\sqrt{n^4+3}}{2n^2+5}\right)$,

(i) $\left(\dfrac{\sqrt{n^4+1}-n^2}{n+1}\right)$,

(j) $\left(n(\sqrt{n^2+4}-n)\right)$,

(k) $\left(\sqrt{n^2+n}-n+1\right)$,

(l) $\left(\sqrt[3]{n^3+n^2}-\sqrt[3]{n^3+1}\right)$,

(m) $\left(\dfrac{5^n-3^{n+2}}{3^n-2^{2n+1}}\right)$,

(n) $\left(\dfrac{2^n+(-1)^n}{2^n-1}\right)$,

(o) $\left(\sqrt[n]{\sqrt{n}+2}\right)$,

(p) $\left(\sqrt[n]{\dfrac{3n+\sqrt{n}+1}{n+1}}\right)$.

(q) $\left(\sqrt[n]{n^4+4n+1}\right)$,

(r) $\left(\sqrt[n]{3^n+(-1)^n n}\right)$.

2. Igaz-e, hogy ha

(a) (a_n) konvergens, (b_n) divergens $\Rightarrow$ (a_n+b_n) divergens;

(b) (a_n) divergens, (b_n) divergens $\Rightarrow$ (a_n+b_n) divergens.

3. Az α valós paraméter milyen értékei mellett konvergens az

$$a_n := \frac{(1-\alpha)n^2+n+1}{3n^2+2} \qquad (n\in\mathbb{N})$$

sorozat? Mi ekkor a határértéke?

4. Határozza meg az $a,b,c\in\mathbb{R}$ paramétereket úgy, hogy

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(an-\sqrt{cn^2+bn-2}\right)=1$$

legyen.

■ További feladatok

1. Igazolja, hogy ha $\alpha := \lim\,(x_n) \Longrightarrow |\alpha| = \lim\left(|x_n|\right)$. Igaz-e az állítás megfordítása?

2. Tegyük fel, hogy adottak az $r, s \in \mathbb{N}$, $a_0, \ldots, a_r \in \mathbb{R}$, $a_r \neq 0$, $b_0, \ldots, b_s \in \mathbb{R}$, $b_s \neq 0$ számok, és legyen

$$R_n := \frac{a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \cdots + a_r n^r}{b_0 + b_1 n + b_2 n^2 + \cdots + b_s n^s}$$

olyan $n \in \mathbb{N}$ indexekre, amelyekre a nevező nem nulla.

Bizonyítsa be, hogy

$$\lim_{n\to+\infty} R_n = \begin{cases} \dfrac{a_r}{b_s}, & \text{ha } r = s \\ 0, & \text{ha } r < s \\ +\infty, & \text{ha } r > s \text{ és } a_r/b_s > 0 \\ -\infty, & \text{ha } r > s \text{ és } a_r/b_s < 0. \end{cases}$$

3. Mutassa meg, hogy az $\left(\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}\right)$ sorozat az e számhoz konvergál:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

4. Tegyük fel, hogy az $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$ sorozatra

(a) $\lim(a_n) = +\infty$,

(b) $\lim(a_n) = 0$

teljesül. Vizsgálja meg határérték szempontjából az $\left(\sqrt[n]{a_n}\right)$ sorozatot.

5. Legyen (a_n) egy olyan konvergens sorozat, amelynek egyik tagja sem 0. Konvergencia szempontjából mit tud mondani az $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ sorozatról?

$\boxed{\text{6. gyakorlat}}$

Valós sorozatok 3.

■ Szükséges ismeretek

- Az e szám értelmezése.
- Pozitív valós szám m-edik gyökének a létezésére és közelítő értékeinek a kiszámítására vonatkozó tétel. Rekurzív módon megadott sorozatok határértékének a vizsgálata.

■ Feladatok

1. Számítsuk ki a következő sorozatok határértékét:

(a) $a_n := \left(\dfrac{6n-7}{6n+4}\right)^{3n+2} \qquad (n \in \mathbb{N}),$

(b) $a_n := \left(\dfrac{4n+3}{5n}\right)^{5n} \qquad (n \in \mathbb{N}^+),$

(c) $a_n := \left(\dfrac{3n+1}{n+2}\right)^{2n+3} \qquad (n \in \mathbb{N})!$

2. Mutassuk meg, hogy az

$$a_0 := \sqrt{2}, \qquad a_{n+1} := \sqrt{2+a_n} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

sorozat konvergens és számítsuk ki a határértékét!

3. Az $\alpha > 0$ valós paraméter mely értékeire konvergens az

$$a_0 := \sqrt{\alpha}, \qquad a_{n+1} := \sqrt{\alpha + a_n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat, és ekkor mi a határértéke?

4. Legyen $\alpha \geq 0$ valós paraméter. Vizsgáljuk meg határérték szempontjából az

$$a_0 := 0, \qquad a_{n+1} := \alpha + a_n^2 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatot!

5. Mutassuk meg, hogy az

$$a_0 := 0, \qquad a_{n+1} := \frac{2}{1+a_n} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

sorozat konvergens és számítsuk ki a határértékét!

■ Házi feladatok

1. Számítsa ki a következő sorozatok határértékét:

(a) $a_n := \left(\dfrac{3n+1}{3n+2}\right)^{6n+5} \qquad (n \in \mathbb{N}),$

(b) $a_n := \left(\dfrac{2n+3}{3n+1}\right)^{n-5} \qquad (n \in \mathbb{N}),$

(c) $a_n := \left(\dfrac{3n+3}{2n-1}\right)^{5n+1} \qquad (n \in \mathbb{N})!$

2. Legyen

$$a_0 := \sqrt{3}, \qquad a_{n+1} := \sqrt{3 + 2\,a_n} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Mutassa meg, hogy a sorozat konvergens és számítsa ki a határértékét!

3. Bizonyítsa be, hogy ha $\alpha \in [0, 1]$, akkor az

$$a_0 := \frac{\alpha}{2}, \quad a_{n+1} := \frac{a_n^2 + \alpha}{2} \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat konvergens, és számítsa ki a határértékét!

■ Gyakorló feladatok

1. Számítsa ki a következő sorozatok határértékét:

(a) $\left(\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}\right)$, (b) $\left(\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{n}\right)$,

(c) $\left(\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)^{n}\right)$, (d) $\left(\left(\dfrac{2n+2}{2n+5}\right)^{3n+1}\right)$,

(e) $\left(\left(\dfrac{n+3}{2n+2}\right)^{2n-3}\right)$, (f) $\left(\left(\dfrac{5n+2}{4n-1}\right)^{n+2}\right)!$

2. Számítsa ki a következő sorozatok határértékét:

(a) $\left(\left(\dfrac{n^3-3}{n^3+2}\right)^{n^3}\right)$, (b) $\left(\left(\dfrac{4n+3}{5n}\right)^{5n^2}\right)$, (c) $\left(\left(\dfrac{n^2+2}{3n^2-1}\right)^{n+1}\right)!$

3. Számítsa ki az

$$a_0 := 6, \quad a_{n+1} := 5 - \frac{6}{a_n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat határértékét!

4. Számítsa ki az

$$a_0 := 12, \quad a_{n+1} := \frac{a_n}{4} + 3 \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat határértékét!

5. Konvergens-e az

$$0 \le a_0 \le 1, \quad a_{n+1} := 1 - \sqrt{1 - a_n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat? Ha igen, akkor mi a határértéke?

■ További feladatok

1. A nemnegatív $\alpha < \beta$ valós számokból kiindulva a következőképpen képezzük az (a_n) és a (b_n) sorozatot:

$$a_0 := \alpha, \quad b_0 := \beta \text{ és } a_{n+1} := \sqrt{a_n b_n}, \quad b_{n+1} := \frac{a_n + b_n}{2} \ (n \in \mathbb{N}).$$

Igazolja, hogy a sorozatok konvergensek, és a határértékük egyenlő! Lényeges-e az $\alpha < \beta$ feltétel? (C. F. Gauss nyomán ezt a közös értéket az α és a β számok **számtani-mértani közepének** nevezzük.)

2. Vizsgálja meg határérték szempontjából az

$$a_0 := 0, \qquad a_{n+1} := \alpha + a_n^2 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatot, ha $\alpha < 0$ valós paraméter!

7. gyakorlat

Végtelen sorok 1.

Szükséges ismeretek

- A végtelen sor fogalma, konvergenciája és összege.
- Nevezetes sorok.
- Végtelen sorok lináris kombinációi.
- Sorok konvergenciájának egy szükséges feltétele.
- A sorokra vonatkozó Cauchy-féle konvergenciakritérium.
- Összehasonlító kritériumok.

Feladatok

1. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi végtelen sorok konvergensek, és számítsuk ki az összegüket:

(a) $\sum\limits_{n=2} \frac{(-5)^n}{3^{2n}}$, (b) $\sum\limits_{n=0} \frac{\big((-1)^n + 2^n\big)^2}{5^{n+2}}$,

(c) $\sum\limits_{n=1} \frac{1}{4n^2 - 1}$, (d) $\sum\limits_{n=0} \frac{n^2 + 3n}{(n+2)!}$!

2. Számítsuk ki a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\, q^n$$

sorösszeget, ha $q \in (-1, 1)$!

3. Konvergencia szempontjából vizsgáljuk meg az alábbi sorokat:

(a) $\sum\limits_{n=1} \sqrt[n]{0,1}$, (b) $\sum\limits_{n=1} \frac{n}{2n-1}$,

(c) $\sum\limits_{n=1} \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$, (d) $\sum\limits_{n=1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+2}$!

4. Konvergencia szempontjából vizsgáljuk meg az alábbi sorokat:

(a) $\sum\limits_{n=1} \frac{1}{2n+1}$, (b) $\sum\limits_{n=1} \frac{1}{n^2 - n + 1}$,

(c) $\sum\limits_{n=1} \frac{1}{\sqrt{n\,(n+1)}}$, (d) $\sum\limits_{n=1} \frac{1}{\sqrt{n\,(n^2+1)}}$!

Házi feladatok

1. Igazolja, hogy az alábbi végtelen sorok konvergensek, és határozza meg az összegüket:

(a) $\sum\limits_{n=3} \left(\frac{5}{2^n} + \frac{1}{3^{2n}}\right)$, (b) $\sum\limits_{n=1} \frac{1}{n^2 + 4n + 3}$!

2. Konvergencia szempontjából vizsgálja meg az alábbi sorokat:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{n^2-1}{3n^2+1}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1} \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n-1}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{n^2+n-1}{\sqrt{n^4+1}-n^3+n^5}$, (d) $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$!

■ Gyakorló feladatok

1. Határozza meg a következő sorok összegét, ha konvergensek

(a) $\displaystyle\sum_{n=0} \frac{1+2^{2n+1}}{5^n}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=2} \frac{(-1)^{n+1}+3^n}{4^{n-1}}$, (c) $\displaystyle\sum_{n=3} \frac{1}{n^2-1}$,

(d) $\displaystyle\sum_{n=2} \frac{1}{n^2+5n+4}$, (e) $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$, (f) $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$!

2. Számítsa ki az alábbi sorok összegét:

(a) $\displaystyle\sum_{n=2} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})\sqrt{n(n+1)}}$!

3. Legyen $q \in \mathbb{R}$, $|q| < 1$. Határozza meg a következő sor összegét:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 q^n!$$

4. Konvergencia szempontjából vizsgálja meg az alábbi sorokat:

(a) $\displaystyle\sum_{n=2} \frac{1}{\sqrt[n]{2^n+1}}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1} \left(1+\frac{3}{n+1}\right)^n$, (c) $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{3n-2}{n^2+1}$,

(d) $\displaystyle\sum_{n=2} \frac{2n+1}{n^3-3n+1}$, (e) $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$, (f) $\displaystyle\sum_{n=1} \left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)$!

5. Igazolja, hogy a páratlan számok reciprokaiból álló sor divergens!

■ További feladatok

1. Konvergens-e a $\sum a_n$ sor, ha a

$$\lim_{n\to+\infty} (a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}) = 0$$

egyenlőség minden $p = 1, 2, 3, \ldots$ számra teljesül?

2. Tekintsük azokat a természetes számokat, amelyek tízes számrendszerbeli alakjában nem fordul elő a 7 számjegy. Igazolja, hogy ezen számok reciprokainak az összege véges! Mutassa meg, hogy az összeg kisebb 80-nál!

3. **Cauchy-féle kondenzációs elv:** Igazolja, hogy ha (a_n) egy nem negatív tagokból álló, monoton csökkenő sorozat, akkor $\sum a_n$ és $\sum 2^n a_{2^n}$ ekvikonvergens sorok (egyszerre lehetnek konvergensek vagy divergensek)!

4. A Cauchy-féle kondenzációs elv segítségével igazolja a hiperharmonikus sor konvergenciájára vonatkozó tételt!

5. Vezessük be a következő jelöléseket. Adott a $\sum a_n$ sor legyen

$$a_n^+ := \begin{cases} a_n, & \text{ha } a_n > 0, \\ 0, & \text{ha } a_n \leq 0, \end{cases} \qquad a_n^- := \begin{cases} 0, & \text{ha } a_n > 0, \\ -a_n, & \text{ha } a_n \leq 0. \end{cases}$$

minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Majd képezzük a $\sum a_n^+$ és $\sum a_n^-$ pozitív tagú sorokat! Igazolja, hogy $\sum a_n$ akkor és csak akkor abszolút konvergens, ha a $\sum a_n^+$ és $\sum a_n^-$ sorok konvergensek! Mit tud mondani a $\sum a_n^+$ és $\sum a_n^-$ sorokról, ha $\sum a_n$ feltételesen konvergens sor?

$\boxed{\text{8. gyakorlat}}$

Végtelen sorok 2.

■ Szükséges ismeretek

- A sorokra vonatkozó Cauchy-féle gyök- és d'Alembert-féle hányadoskritérium.
- Összehasonlító kritériumok.
- Nevezetes sorok.
- Leibniz-típusú sorok.
- A p-adikus törtek.
- Sorok Cauchy-szorzata.
- Sorok átrendezése és zárójelezése.

■ Feladatok

1. Az alábbi sorok közül melyek konvergensek

(a) $\displaystyle\sum_{n=0} \frac{(-1)^n \cdot n!}{3n+2}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n$, (c) $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$,

(d) $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{n^2}{2^n+3^n}$, (e) $\displaystyle\sum_{n=0} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2+n+1}$, (f) $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{2n+1}{(-3)^n}$?

2. Milyen $x \geq 0$ valós szám esetén konvergens a

$$\sum_{n=0} \left(\frac{\sqrt{x}}{2}-1\right)^n$$

sor, és akkor mi az összege?

3. Az x valós szám milyen értéke mellett konvergens a

$$\sum_{n=1} \frac{x^{2n}}{1+x^{4n}}$$

végtelen sor?

4. Az $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ paraméter milyen értékei mellett konvergens a

$$\sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \cdot \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$$

végtelen sor?

5. Adjuk meg az

(a) $\dfrac{1}{7}$, (b) $0,1\dot{4}_{(6)}$

számok diadikus tört alakját!

6. A $\sum\limits_{n=0} q^n$ geometriai sor önmagával vett Cauchy-szorzatának a felhasználásával igazoljuk, hogy minden $|q| < 1$ valós számra

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, q^n = \frac{1}{(1-q)^2}!$$

Házi feladatok

1. Az alábbi sorok közül melyek konvergensek

(a) $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{100^n}{n!}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{n^2}{2^n}$, (c) $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$,

(d) $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{3^n \cdot (n+2)!}{(n+1)^n}$, (e) $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{(-1)^n n}{n^2+1}$, (f) $\displaystyle\sum_{n=1} \left(\frac{1-n}{n^2+n}\right)^n$?

2. Adja meg a következő számok diadikus tört alakját

a) $\dfrac{3}{8}$, b) $0,\dot{2}\dot{3}_{(5)}$!

3. A $\sum\limits_{n=0} q^n$ és $\sum\limits_{n=0} nq^n$ sorok Cauchy-szorzatával igazolja, hogy ha $|q| < 1$, akkor

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 q^n = \frac{q(q+1)}{(1-q)^3}!$$

Gyakorló feladatok

1. Az alábbi sorok közül melyek konvergensek

(a) $\displaystyle\sum_{n=2} \frac{(n+1)2^n}{n!}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{n!}{3^n}$, (c) $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{n!}{n^n}$,

(d) $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$, (e) $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$, (f) $\displaystyle\sum_{n=1} \left(\frac{2n+1}{n+2}\right)^n$?

2. Adja meg a következő számok diadikus tört alakját

(a) $\dfrac{2}{11}$, (b) $0,7\dot{1}_{(8)}$!

3. Mutassa meg, hogy a

(a) $\displaystyle\sum_{n=0} \frac{(-1)^n}{n+1}$ sor önmagával vett Cauchy-szorzata konvergens,

(b) $\displaystyle\sum_{n=0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ sor önmagával vett Cauchy-szorzata divergens.

■ További feladatok

1. **A gyök- és a hányadoskritérium alkalmazása.** Bizonyítsa be, hogy a gyökkritérium „erősebb", mint a hányadoskritérium. Ez a következőket jelenti.

(a) Minden olyan esetben, amikor a hányadoskritérium alkalmazható, akkor a gyökkritérium is alkalmazható. Másként fogalmazva: legyen (a_n) egy pozitív tagú számsorozat. Ekkor

$$\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A \in \overline{\mathbb{R}} \quad \Longrightarrow \quad \exists \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} \text{ és ez } = A.$$

(b) Van olyan végtelen sor, amelyik a gyökkritérium alapján konvergens, de a hányadoskritérium nem alkalmazható. Tekintse például a

$$\sum_{n=0} \frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \cdots$$

végtelen sort.

Útmutatás.

(a) Legyen $0 < A < +\infty$. Ekkor

$$(*) \qquad \forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \ \forall\, n > n_0: \quad A - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < A + \varepsilon.$$

Válasszunk egy $\varepsilon > 0$, $A - \varepsilon > 0$ számot. Tekintsük a hozzá tartozó n_0 küszöbindexet, valamint egy $n > n_0$ számot. A (*) alapján $n_0 + 1, \ldots, n$-re kapott egyenlőtlenségeket szorozzuk össze, majd alkalmazzuk a közrefogási elvet.

Az állítás bizonyítása az $A = 0$, $A = +\infty$ esetekben hasonló.

(b) Legyen $a_n := \dfrac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}$ $(n \in \mathbb{N})$ és

$$b_n := \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3+(-1)^{n+1}}{3+(-1)^n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor $b_{2n} = \frac{1}{4}$ és $b_{2n+1} = 1$ $(n \in \mathbb{N})$, ezért a (b_n) sorozatnak nincs határértéke, így a hányadoskritérium nem alkalmazható. Ugyanakkor

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{2}} \cdot \sqrt[n]{3 + \tfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2},$$

ezért a gyökkritérium szerint a $\sum a_n$ sor konvergens. ■

2. Igazolja, hogy ha egy konvergens sort úgy rendezünk át, hogy minden páratlan indexű tag a nála nagyobb szomszédos taggal helyet cserél, akkor az átrendezett sor is konvergens, és összege az eredeti sorral megegyezik!

3. A $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ feltételesen konvergens sornak adjon meg egy olyan átrendezését, amelynek összege

(a) 12, (b) $+\infty$!

4. Az 1. (a) feladat állítását felhasználva mutassa meg, hogy

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty.$$

9. gyakorlat

Végtelen sorok 3.

Szükséges ismeretek

- A hatványsor fogalma. A hatványsor konvergenciahalmaza és konvergenciasugara.
- Cauchy–Hadamard-tétel. A konvergenciasugár hányadoson alapuló kiszámítása.
- A hatványsorok összegfüggvénye.
- Műveletek hatványsorokkal.
- Az exponenciális függvény fogalma és tulajdonságai.
- A szinusz- és koszinuszfüggvény fogalma és tulajdonságai.

Feladatok

1. Határozzuk meg a

$$\text{(a)}\quad \sum_{n=1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n x^n, \qquad \text{(b)}\quad \sum_{n=1}\frac{2^{n-1}}{2n-1}(3x-1)^n, \qquad \text{(c)}\quad \sum_{n=0}\frac{(n!)^2}{(2n)!}(x+2)^n$$

hatványsorok konvergenciasugarát és konvergenciahalmazát a valós számok halmazán.

2. Az alábbi f függvényeket (vagy egy alkalmas leszűkítésüket) állítsuk elő nulla középpontú hatványsor összegeként:

$$\text{(a)}\quad f(x)=\frac{1-x}{1-x^2} \qquad (x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}),$$

$$\text{(b)}\quad f(x)=\frac{1}{1+x^2} \qquad (x\in\mathbb{R}),$$

$$\text{(c)}\quad f(x)=\frac{x}{x^2-5x+6} \qquad (x\in\mathbb{R}\setminus\{2,3\}).$$

3. Állítsuk elő az

$$\text{(a)}\quad f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (x\in\mathbb{R}), \qquad \text{(b)}\quad f(x)=\sin^2 x \quad (x\in\mathbb{R})$$

függvényeket nulla középpontú hatványsor összegeként.

Házi feladat

1. Határozza meg az alábbi hatványsorok konvergenciasugarát és konvergenciahalmazát a valós számok halmazán

$$\text{(a)}\quad \sum_{n=0}\frac{3^n+(-2)^n}{n+1}x^n, \qquad \text{(b)}\quad \sum_{n=2}\frac{2^n+1}{n^2-1}(x-2)^n.$$

2. Az alábbi f függvényeket (vagy egy alkalmas leszűkítésüket) állítsa elő nulla középpontú hatványsor összegeként:

$$\text{(a)}\quad f(x) = \frac{x+3}{5x^2+9x-2} \qquad \left(x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-2, \tfrac{1}{5}\right\}\right),$$

$$\text{(b)}\quad f(x) = \sin(2x) \cdot \cos(2x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Gyakorló feladatok

1. Határozza meg az alábbi hatványsorok konvergenciasugarát és konvergenciahalmazát a valós számok halmazán

$$\text{(a)}\ \sum_{n=1} \frac{x^n}{n^\alpha} \quad (\alpha \in \mathbb{R}), \qquad \text{(b)}\ \sum_{n=1} \frac{(x-3)^n}{n^3}, \qquad \text{(c)}\ \sum_{n=0} (-1)^n n^2 (2x+3)^n,$$

$$\text{(d)}\ \sum_{n=1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} x^n, \qquad \text{(e)}\ \sum_{n=1} \frac{2^n+1}{n!} x^n, \qquad \text{(f)}\ \sum_{n=0} \frac{x^n}{2^n+3^n},$$

$$\text{(g)}\ \sum_{n=2} \frac{(x+1)^n}{2^{n^2}}, \qquad \text{(h)}\ \sum_{n=0} \frac{n!}{n^n} x^n, \qquad \text{(i)}\ \sum_{n=0} \frac{n!}{\alpha^{n^2}} x^n \quad (\alpha > 1).$$

2. Az alábbi f függvényeket (vagy egy alkalmas leszűkítésüket) állítsa elő nulla középpontú hatványsor összegeként:

$$\text{(a)}\quad f(x) = \frac{1+x}{3x-2} \qquad \left(x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\tfrac{2}{3}\right\}\right),$$

$$\text{(b)}\quad f(x) = \frac{x}{(1-x)^2} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}),$$

$$\text{(c)}\quad f(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}),$$

$$\text{(d)}\quad f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\text{(e)}\quad f(x) = \frac{1}{e^{x^3}} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\text{(f)}\quad f(x) = \sin(2x) \cdot \cos(x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

További feladatok

1. Határozza meg az alábbi hatványsorok konvergenciasugarát és konvergenciahalmazát a valós számok halmazán:

$$\text{(a)}\ \sum_{n=0} \frac{n}{2^n} x^{4n}, \qquad \text{(b)}\ \sum_{n=1} n^n x^{n^2}, \qquad \text{(c)}\ \sum_{n=1} n! x^{n^2}.$$

2. Tegyük fel, hogy a $\sum_{n=0} c_n x^n$ hatványsor konvergenciasugara 2, a $\sum_{n=0} d_n x^n$ hatványsor konvergenciasugara pedig 3. Mennyi lesz a $\sum_{n=0} (c_n + d_n) x^n$ sor konvergenciasugara?

3. Az alábbi f függvényeket (vagy egy alkalmas leszűkítésüket) állítsa elő egy megadott a középpontú hatványsor összegeként:

$$\text{(a)} \quad f(x) = \frac{2x-5}{x^2-5x+6} \qquad (a=1,\ x \in \mathbb{R} \setminus \{2,3\}),$$

$$\text{(b)} \quad f(x) = e^x \qquad (a=2,\ x \in \mathbb{R}).$$

4. Tekintsük az

$$a_0 := 0, \quad a_1 := 1 \ \text{ és } \ a_n := a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n \in \mathbb{N},\ n \geq 2)$$

Fibonacci sorozatot. Mutassuk meg, hogy a $\sum\limits_{n=0} a_n\, x^n$ hatványsor konvergenciasugara legalább $1/2$. Határozzuk meg a sor összegfüggvényét a $(-1/2, 1/2)$ intervallumon. Ezt felhasználva adjunk explicit képletet az (a_n) sorozatra.

10. gyakorlat

Függvények határértéke és folytonossága 1.

■ Szükséges ismeretek

- Számhalmaz torlódási pontja.
- A határérték egységes definíciója.
- A határérték egyértelmű.
- A határértékre vonatkozó átviteli elv.
- A közrefogási elv.
- A határérték és a műveletek kapcsolata.
- A határérték definícójának speciális esetei egyenlőtlenségekkel.
- Egyoldali határértékek.
- Nevezetes határértékek: az előjelfüggvény, hatványfüggvények, reciprokfüggvények, gyökfüggvények, polinomfüggvények, racionális törtfüggvények.

■ Feladatok

1. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Fogalmazzuk meg környezetekkel és egyenlőtlenségekkel is az alábbi állításokat:

(a) $\lim\limits_{-2} f = 7$, (b) $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = -\infty$.

2. A definíció alapján bizonyítsuk be, hogy

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{1+x} = 1$, (b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2} = -8$,

(c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2-1}{2x^2+1} = \dfrac{1}{2}$, (d) $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{2x+5} = 3$.

3. A nevezetes határértékek és a műveleti tételek felhasználásával számítsuk ki a következő határértékeket:

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+x+1}{x^3+x+2}$, (b) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+x-3}{x^2+2x+1}$,

(c) $\lim\limits_{x\to 2+0} \dfrac{x^2+2x-7}{x^2-5x+6}$, (d) $\lim\limits_{x\to 2-0} \dfrac{x^2+2x-7}{x^2-5x+6}$.

4. Határozzuk meg az alábbi határértékeket:

(a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(-3x^2+2x+7\right)$, (b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(x^3-x+2\right)$.

5. A „kiemelés/leosztás technikájával” határozzuk meg az alábbi határértékeket:

(a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^3+3x^2+23}{-3x^3-5x^2+31x+1}$, (b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2-3x+2}{x^3-7x^2+5x-1}$,

(c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^3+2x^2+11x+2}{x^2+3x+2}$.

6. A „szorzatra bontás technikájával” vizsgáljuk meg a következő határértékeket:

(a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}$, (b) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}$.

■ Házi feladatok

1. A definíció alapján bizonyítsa be, hogy

(a) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2+2x-3}{x^3+3x^2+x+3} = -\dfrac{2}{5}$, (b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3+x-4}{x^2+1} = +\infty$.

2. Számítsa ki az következő határértékeket:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^5+3x^2-x}{2x^4-x^3+x}$, (b) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x^2+7x+5}{x^3+1}$,

(c) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{3}{x^3-1}\right)$, (d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^n-1}{x^m-1}$ $(m, n = 1, 2, \ldots)$.

■ Gyakorló feladatok

1. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Fogalmazza meg környezetekkel és egyenlőtlenségekkel is az alábbi állításokat:

(a) $\lim\limits_{1} f = +\infty$, (b) $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$, (c) $\lim\limits_{x\to -1+0} f(x) = 3$.

2. A definíció alapján bizonyítsa be, hogy

(a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{x^2-2x-3} = -\dfrac{3}{4}$, (b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+6x-7}{x^3-x^2+x-1} = 4$,

(c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x^2+x}{1-x^2} = -2$, (d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x-3}{x^2+3x-4} = 0$,

(e) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x}{1+\sqrt{1-x}} = -\infty$, (f) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[3]{2x-1} = -1$.

3. Számítsa ki az következő határértékeket:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^8-3x^4+2x^2}{4x^5-3x^4-x^3+3x^2}$, (b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x^2-7x+2}{x^2+x-6}$,

(c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x^2+2x-1}{3-2x^3}$, (d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^6+3x^5-2x^2-x-1}{x^3-1}$,

(e) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{x^3-1}\right)$, (f) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{n}{1-x^n} - \dfrac{m}{1-x^m}\right)$ $(m, n = 1, 2, \ldots)$.

■ További feladatok

1. Mutassa meg, hogy ha $f\colon R \to \mathbb{R}$ nem állandó, periodikus függvény, akkor a $\lim\limits_{-\infty} f$ és a $\lim\limits_{+\infty} f$ határértékek nem léteznek.

2. Legyen $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_1 x + a_0$ egy olyan polinom, amire $a_n > 0$ teljesül. Igazolja, hogy ekkor $\exists\, K > 0$, $\forall x > K$: $p(x) > 0$.

3. Legyen $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_1 x + a_0$ egy olyan polinom, amire $n > 0$, $a_n > 0$ teljesül. Igazolja, hogy ekkor $\exists\, K > 0$, hogy p szigorúan monoton növekvő a $(K, +\infty)$ intervallumon.

11. gyakorlat

Függvények határértéke és folytonossága 2.

Szükséges ismeretek

- Az exp, a sin és a cos függvény hatványsoros definíciója.
- Hatványsor összegfüggvényének a határértéke.
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$
- A pontbeli folytonosság fogalma.
- Szakadási helyek és osztályozásuk.
- Hatványsor összegfüggvényének folytonossága.
- Az algebrai műveletek és a folytonosság kapcsolata.
- A folytonosságra vonatkozó átviteli elv.
- Az összetett függvény folytonossága.
- Az összetett függvény határértéke.

Feladatok

1. A „gyöktelenítés technikájával" számítsuk ki az alábbi határértékeket:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$, (b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x}-1}$,

(c) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$.

2. Mutassuk meg, hogy létezik a

$$\lim_{x\to 0}\left(x\left[\frac{1}{x}\right]\right)$$

határérték, ahol $[\alpha]$ jelöli az $\alpha\in\mathbb{R}$ szám egész részét. Mivel egyenlő ez a limesz?

3. A $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ felhasználásával számítsuk ki az alábbi határértékeket:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}\ (a,b\in\mathbb{R}\setminus\{0\})$, (b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$,

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}$, (d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\cdot\sin x}-\sqrt{\cos x}}$.

4. A hatványsor összegfüggvényének a határértékére vonatkozó tétel alapján számítsuk ki a következő határértékeket:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$, (b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

5. Legyen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ és $a\in\mathcal{D}_f$. Tegyük fel, hogy

$$\exists\,\delta>0,\ \text{hogy}\ \forall\,\varepsilon>0\ \text{és}\ \forall\,x\in\mathcal{D}_f,\ |x-a|<\delta\ \text{esetén}\ |f(x)-f(a)|<\varepsilon.$$

Az f függvény milyen tulajdonságát fejezi ki ez az állítás?

6. Határozzuk meg az alábbi függvények folytonossági és szakadási helyeit, valamint a szakadási helyek típusait:

(a) $f(x) := \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0, & \text{ha } x = 0; \end{cases}$

(b) $\operatorname{sign}(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in (0, +\infty) \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ -1, & \text{ha } x \in (-\infty, 0) \end{cases}$

(az **előjelfüggvény**);

(c) $g(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

(a **Dirichlet-függvény**);

(d) $h(x) := \begin{cases} x, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

(**Dirichlet-típusú függvény**);

(e) $r(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{q}, & \text{ha } x = \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^+,\ (p,q) = 1 \\ 1, & \text{ha } x = 0 \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

(**a Riemann-függvény** vagy **a Thomae-függvény**).

■ Házi feladatok

1. Számítsa ki az következő határértékeket:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1} \right)$,

(b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(x - \sqrt{\frac{4x^3+3x^2}{4x-3}} \right)$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}$,

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{\sin(3-x)}{\sin(4x-12)}$,

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x} - e^{5x}}{2x}$,

(f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos\sqrt{x} - \dfrac{1}{1-x}}{x + \sin 2x}$.

2. Határozza meg az alábbi függvény folytonossági és szakadási helyeit, valamint a szakadási helyek típusait:

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{ha } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 - |x|, & \text{ha } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

■ Gyakorló feladatok

1. Számítsa ki az következő határértékeket:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$, (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$,

(c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3-\sqrt{x+7}}{x^2-4}$, (d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x+\sqrt{x+3}}{2-\sqrt{x^2+1}}$,

(e) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\cdot\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$, (f) $\lim\limits_{x\to -\infty} (\sqrt{x^2+x}+x)$.

2. Számítsa ki az következő határértékeket:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2}$, (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^3 4x}{x^3}$,

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x\cos 2x}{1-\cos x}$, (d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^3 x+\sin^2 2x}{2x^2-\sin^2 x}$,

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{7x}-e^{4x}}{x\cos 2x+\sin 3x}$, (f) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

3. Legyen $\alpha\in\mathbb{R}$. Számítsa ki a

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sqrt{1+\alpha x}-x-1}$, (b) $\lim\limits_{x\to \alpha} \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x-\alpha}-\sqrt{\alpha}}{\sqrt{x^2-\alpha^2}}$

határértékeket, amennyiben azok léteznek!

4. Milyen $a,b\in\mathbb{R}$ mellett igaz az, hogy $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-(ax+b)\right)=0$?

5. Legyen $a,b\in\mathbb{R}$. Számítsa ki a

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$$

határértékeket!

6. Vizsgálja meg, hogy az alábbi függvényeknek az értelmezési tartományuk melyik torlódási pontjában van határértéke:

(a) $\mathbb{R}\ni x\mapsto \{x\}$, ahol $\{x\}:=x-[x]$ az x valós szám tört része,

(b) $\mathbb{R}\ni x\mapsto x-\{x\}$.

7. Indokolja meg miért nem léteznek a következő határértékek!

(a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{|1-x^2|}{1+x}$, (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{|x|}$.

8. Határozzuk meg az alábbi függvények folytonossági és szakadási helyeit, valamint a szakadási helyek típusait:

(a) $f(x)=\operatorname{sign}^2 x \quad (x\in\mathbb{R})$, (b) $f(x)=|x|\operatorname{sign} x \quad (x\in\mathbb{R})$,

(c) $f(x)=\operatorname{sign}(x^2-x)+\operatorname{sign} x \quad (x\in\mathbb{R})$, (d) $f(x)=x[x] \quad (x\in\mathbb{R})$.

■ További feladatok

1. Legyen $A \subseteq \mathbb{R}$, $a \in A$, és $f, g\colon A \to \mathbb{R}$. Igazoljua, hogy ha f folytonos az a pontban, $f(a) = 0$ és g korlátos, akkor az fg függvény folytonos az a pontban.

2. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in D_f$. Igazolja, hogy ha f folytonos az a pontban akkor $|f|$ is folytonos az a pontban. Igaz-e az állítás megfordítása?

3. Legyen $A \subseteq \mathbb{R}$, $a \in A$, és $f, g\colon A \to \mathbb{R}$. Igazolja, hogy ha az f és g függvények folytonosak az a pontban, akkor az $F, G\colon A \to \mathbb{R}$,

$$F(x) := \max\{f(x), g(x)\}, \qquad G(x) := \min\{f(x), g(x)\}$$

függvények is folytonosak az a pontban.

4. Igazolja, hogy ha az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek minden pontjában nulla a határértéke, akkor $\exists\, a \in \mathbb{R}$: $f(a) = 0$.

5. Adjon meg olyan $f\colon [0,1] \to [0,1]$ függvényt, amely monoton és végtelen sok szakadási helye van.

6. Adjon meg olyan $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeket, amelyekre

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} g(x) = 0, \qquad \text{de} \qquad \lim_{x \to 0} f(g(x)) = 1$$

teljesül.

12. gyakorlat

Függvények határértéke és folytonossága 3.

Szükséges ismeretek

- A pontbeli folytonosság és határérték közötti kapcsolat.
- Hatványsor összegfüggvényének folytonossága.
- Az algebrai műveletek és a folytonosság kapcsolata.
- Az összetett függvény folytonossága.
- Szakadási helyek és osztályozásuk.
- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
- Az összetett függvény határértéke.
- A Bolzano tétele.
- A Bolzano–Darboux-tétel
- A Weierstrass tétele.

Feladatok

1. Határozzuk meg az

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4x+3}{x^2-3x+2}, & \text{ha } x < 1 \\ \sqrt{x+3}, & \text{ha } 1 \le x \le 6 \\ \dfrac{\sin(2x-12)}{x-6}, & \text{ha } x > 6 \end{cases}$$

függvény folytonossági, illetve szakadási helyeit, valamint a szakadási helyek típusait.

2. Az $\alpha \in \mathbb{R}$ paraméter mely értékei esetén lesznek mindenütt folytonosak a következő függvény?

(a) $f(x) := \begin{cases} \alpha x^2 + 4x - 1, & \text{ha } x \le 1, \\ -x+3, & \text{ha } 1 < x, \end{cases}$ (b) $f(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{e^{x+\frac{1}{x}}}, & \text{ha } x > 0, \\ -2x+\alpha, & \text{ha } x \le 0. \end{cases}$

3. Az $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ paraméterektől függően határozzuk meg az

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{\sin^2 \alpha x}{x^2}, & \text{ha } x < 0, \\ \alpha - \beta x^3, & \text{ha } 0 \le x \le 1, \\ \dfrac{\alpha x + \beta}{x^2-1}, & \text{ha } x > 1, \end{cases}$$

függvény folytonossági, illetve szakadási helyeit, valamint a szakadási helyek típusait!

4. Igazoljuk, hogy az alábbi egyenleteknek van megoldása a jelzett I intervallumon!

(a) $x^5 - x^2 + 2x + 3 = 0, \quad I := \mathbb{R}$, (b) $e^x = 2 - x, \quad I := \mathbb{R}$,

(c) $x = \cos x, \quad I := (0,1)$, (d) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-2} = e^{x^2}, \quad I := (0,2)$.

5. Lássuk be, hogy minden páratlan fokszámú, valós együtthatós polinomnak van valós gyöke! Lényeges-e a polinom fokszámára tett feltétel?

6. Igazoljuk, hogy az $x^3 + x - 1$ polinomnak pontosan egy valós gyöke van, és számítsa ki ezt a gyököt 10^{-1} pontossággal.

7. Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény folytonos,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Mutassuk meg, hogy ekkor f-nek létezik abszolút minimuma.

■ Házi feladatok

1. Az $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ paraméterektől függően határozza meg az

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{x^2+5x+4}{x^2+3x+2}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,-2\} \\ \alpha, & \text{ha } x = -1 \\ \beta, & \text{ha } x = -2 \end{cases}$$

függvény folytonossági, illetve szakadási helyeit, valamint a szakadási helyek típusait!

2. Igazolja, hogy az alábbi egyenleteknek van megoldása a valós számok halmazán!

(a) $x^4 + x^2 - 2 = x,$ (b) $e^x = x^2 + 3.$

■ Gyakorló feladatok

1. Az $\alpha \in \mathbb{R}$ paraméter mely értékei esetén lesz mindenütt folytonos a következő függvény?

(a) $f(x) := \begin{cases} x^2 - \alpha^2, & \text{ha } x < 4, \\ \alpha x + 20, & \text{ha } x \geq 4, \end{cases}$ (b) $f(x) := \begin{cases} x^3 + x, & \text{ha } x \leq \alpha, \\ x^2, & \text{ha } x > \alpha. \end{cases}$

(c) $f(x) := \begin{cases} \alpha x + 1, & \text{ha } x \leq 2, \\ \dfrac{x^2-4}{x-2}, & \text{ha } x > 2, \end{cases}$ (d) $f(x) := \begin{cases} x^2 + \alpha x - 1, & \text{ha } x < 1, \\ \dfrac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1}, & \text{ha } x \geq 1. \end{cases}$

2. Az $\alpha \in \mathbb{R}$ paramétertől függően határozza meg az alábbi függvények folytonossági, illetve szakadási helyeit, valamint a szakadási helyek típusát!

(a) $f(x) := \begin{cases} \dfrac{x-7}{|x-7|}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{7\} \\ \alpha, & \text{ha } x = 7; \end{cases}$ (b) $f(x) := \begin{cases} \dfrac{x^2+64}{x+4}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{-4\} \\ \alpha, & \text{ha } x = -4; \end{cases}$

(c) $f(x) := \begin{cases} \dfrac{3-\sqrt{x}}{9-x}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{9\} \\ \alpha, & \text{ha } x = 9; \end{cases}$ (d) $f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \alpha, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$

(e) $f(x) := \begin{cases} \dfrac{\sin x}{|x|}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \alpha, & \text{ha } x = 0; \end{cases}$ (f) $f(x) := \begin{cases} \dfrac{\sin(2x-4)}{x-2}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{2\} \\ \alpha, & \text{ha } x = 2. \end{cases}$

3. Az $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ paraméterektől függően határozza meg az

$$f(x) := \begin{cases} \alpha e^{\frac{2}{x-1}} + \beta, & \text{ha } x < 1, \\ \beta\sqrt{\alpha^2x^2 - 2\alpha x + 1}, & \text{ha } 1 \leq x \leq 3, \\ \dfrac{\alpha}{(x-3)^2}, & \text{ha } x > 3, \end{cases}$$

függvény folytonossági, illetve szakadási helyeit, valamint a szakadási helyek típusait!

4. Igazolja, hogy az alábbi egyenleteknek van megoldása a jelzett I intervallumon:

(a) $\dfrac{1}{x+1} = x^3 + 2x - 4$, $I := (-1, +\infty)$;

(b) $e^x x^2 = 2$, $I := (0, +\infty)$;

(c) $\sin x = 1 - x$, $I := (0, 1)$;

(d) $\dfrac{x^2+1}{x-1} + \dfrac{x^6+1}{x-2} = 0$, $I := (1, 2)$;

(e) $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x-3} = 0$, $I := (1, 2), I := (2, 3)$.

5. Igazolja, hogy az $x^3 + 2x^2 + 4x - 3$ polinomnak pontosan egy pozitív valós gyöke van, és számítsa ki ezt a gyököt 10^{-2} pontossággal.

6. Készítsen folyamatábrát a függvények zérushelyének keresésére vonatkozó intervallumfelezési eljárásnak!

7. Legyen $a \in \mathbb{R}$, $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, és tegyük fel, hogy $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \in \mathbb{R}$. Igazolja, hogy f korlátos függvény!

■ További feladatok

1. Igazolja, hogy ha $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ egy monoton függvény, amely minden $f(a)$ és $f(b)$ közé eső értéket felvesz, akkor f folytonos függvény!

2. Igazolja, hogy ha $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ egy folytonos függvény, akkor minden $x_k \in [a,b]$, $k = 1, 2, \dots n$ $(n \in \mathbb{N})$ esetén létezik olyan $\xi \in [a,b]$, hogy

$$f(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k).$$

3. Igazolja, hogy ha $f\colon [a,b] \to [a,b]$ egy folytonos függvény, akkor létezik olyan $\xi \in [a,b]$, hogy $f(\xi) = \xi$!