TURING

Definíció

A **Turing gép** (továbbiakban sokszor röviden TG) egy $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ rendezett hetes , ahol

- Q az állapotok véges, nemüres halmaza,
- $q_0, q_i, q_n \in Q$, q_0 a kezdő- q_i az elfogadó- és q_n az elutasító állapot,
- Σ és Γ ábécék, a bemenő jelek illetve a szalagszimbólumok ábécéje úgy, hogy $\Sigma \subseteq \Gamma$ és $\sqcup \in \Gamma \backslash \Sigma$.
- $\delta : (Q \backslash \{q_i, q_n\}) \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, S, R\}$ az átmenet függvény. δ az egész $(Q \backslash \{q_i, q_n\}) \times \Gamma$-n értelmezett függvény.

Definíció

Adott egy $k \geqslant 1$ egész szám. A ***k*-szalagos Turing gép** egy olyan $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ rendezett hetes, ahol

- Q az állapotok véges, nemüres halmaza,
- $q_0, q_i, q_n \in Q$, q_0 a kezdő- q_i az elfogadó- és q_n az elutasító állapot,
- Σ és Γ ábécék, a bemenő jelek illetve a szalagszimbólumok ábécéje úgy, hogy $\Sigma \subseteq \Gamma$ és $\sqcup \in \Gamma \backslash \Sigma$,
- $\delta : (Q \backslash \{q_i, q_n\}) \times \Gamma^k \rightarrow Q \times \Gamma^k \times \{L, S, R\}^k$ az átmenet függvény.

δ az egész $(Q \backslash \{q_i, q_n\}) \times \Gamma^k$-n értelmezett függvény.

Nemdeterminisztikus Turing gép (NTG)

Az egyszalagos **nemdeterminisztikus Turing gép** (továbbiakban röviden NTG) egy $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ rendezett hetes, ahol

- Q az állapotok véges, nemüres halmaza,
- $q_0, q_i, q_n \in Q$, q_0 a kezdő- q_i az elfogadó- és q_n az elutasító állapot,
- Σ és Γ ábécék, a bemenő jelek illetve a szalagszimbólumok ábécéje úgy, hogy $\Sigma \subseteq \Gamma$ és $\sqcup \in \Gamma \backslash \Sigma$,
- $\delta : (Q \backslash \{q_i, q_n\}) \times \Gamma \rightarrow \mathcal{P}(Q \times \Gamma \times \{L, S, R\})$.

Definíció

A **lineárisan korlátolt automata** (LKA) olyan **nemdeterminisztikus** TG, melynek Σ bemeneti ábécéje két speciális szimbólumot tartalmaz $\rhd$-et (baloldali végejel/endmarker) és $\lhd$-et (jobboldali végejel/endmarkert). Ezen felül

- a bemenetek $\rhd(\Sigma \setminus \{\rhd, \lhd\})^* \lhd$-beliek,
- $\rhd$ és $\lhd$ nem írhatók felül
- $\rhd$-tól balra illetve $\lhd$-től jobbra nem állhat a fej.
- a fej kezdőpozíciója a $\rhd$ tartalmú cella jobb-szomszédja

Definíció

Az uqv szó az $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ Turing gép egy **konfigurációja** ha $q \in Q$, $u, v \in \Gamma^*$ és $v \neq \varepsilon$.

Definíció

Egy $L \subseteq \Sigma^*$ nyelv **Turing-felismerhető**, ha $L = L(M)$ valamely M TG-re.

Definíció

Az $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ nemdeterminisztikus Turing gép által **felismert nyelv**
$L(M) = \left\{ u \in \Sigma^* \mid q_0 u \sqcup \vdash^* x q_i y \text{ valamely } x, y \in \Gamma^*, y \neq \varepsilon \text{ -ra} \right\}$.

Definíció

Egy $L \subseteq \Sigma^*$ nyelv **eldönthető**, ha létezik olyan M TG, mely minden bemeneten megállási konfigurációba jut és $L(M) = L$.

Definíció

Egy M TG **futási ideje** (időigénye) az u szóra t ($t \geqslant 0$), ha M az u-hoz tartozó kezdőkonfigurációból t lépésben (konfigurációátmenettel) jut el megállási konfigurációba. Ha nincs ilyen szám, akkor M futási ideje az u szóra végtelen.

Definíció

Egy k-szalagos Turing gép **futási ideje** egy u szóra a hozzá tartozó kezdőkonfigurációból egy megállási konfigurációba megtett lépések száma.

Az **időigény** ($f(n)$ időkorlátos TG) definíciója megegyezik az egyszalagos esetnél tárgyalttal.

Definíció

Az M NTG **felismeri** az $L \subseteq \Sigma^*$ nyelvet, ha $L(M) = L$.

Az M NTG **eldönti** az $L \subseteq \Sigma^*$ nyelvet, ha felismeri továbbá minden $u \in \Sigma^*$ input szóhoz tartozó nemdeterminisztikus számítási fa véges és a fa minden levele elfogadó vagy elutasító konfiguráció.

Definíció

Legyen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ egy függvény. Azt mondjuk, hogy M egy $\boldsymbol{f(n)}$ **időkorlátos** gép (vagy M $f(n)$ időigényű), ha minden $u \in \Sigma^*$ input szóra M futási ideje az u szón legfeljebb $f(|u|)$.

Definíció

Az M NTG $\boldsymbol{f(n)}$ **időkorlátos** (időigényű), ha minden $u \in \Sigma^*$ n hosszú szóra u számítási fája legfeljebb $f(n)$ magas.

Tétel

Minden $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ $f(n)$ időkorlátos NTG-hez megadható egy ekvivalens, $2^{O(f(n))}$ időkorlátos M' determinisztikus TG.

Definíció

k-szalagos TG **konfigurációja** egy $(q, u_1, v_1, \ldots, u_k, v_k)$ szó, ahol $q \in Q$ és $u_i, v_i \in \Gamma^*, v_i \neq \varepsilon$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$.

Definíció

Az u szóhoz tartozó **kezdőkonfiguráció**: $(q_0, u_1, v_1, \ldots, u_k, v_k)$, ahol $u_i = \varepsilon$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$, $v_1 = u\sqcup$, és $v_i = \sqcup$ $(2 \leqslant i \leqslant k)$.

Definíció

Két TG **ekvivalens**, ha ugyanazt a nyelvet ismerik fel.

Church-Turing tézis

Minden formalizálható probléma, ami megoldható algoritmussal, az megoldható Turing géppel is.

Definíció

A $(q, u_1, v_1, \ldots, u_k, v_k)$ konfiguráció, ahol $q \in Q$ és $u_i, v_i \in \Gamma^*$, $v_i \neq \varepsilon$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$,

- **elfogadó konfiguráció**, ha $q = q_i$,
- **elutasító konfiguráció**, ha $q = q_n$,
- **megállási konfiguráció**, ha $q = q_i$ vagy $q = q_n$.

Tétel

Minden M k-szalagos Turing géphez megadható egy vele ekvivalens M' egyszalagos Turing gép. Továbbá, ha M legalább lineáris időigényű $f(n)$ időkorlátos gép (azaz $f(n) = \Omega(n)$), akkor M' $O(f(n)^2)$ időkorlátos.

Definíció

Az $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n \rangle$ k-szalagos TG által **felismert nyelv**: $L(M) = \{u \in \Sigma^* \mid (q_0, \varepsilon, u\sqcup, \varepsilon, \sqcup, \ldots, \varepsilon, \sqcup) \vdash^* (q_i, x_1, y_1, \ldots x_k, y_k)$, valamely $x_1, y_1 \ldots, x_k, y_k \in \Gamma^*, y_1, \ldots, , y_k \neq \varepsilon$ -ra$\}$.

Tétel

Minden TG-hez megadható vele ekvivalens offline TG.

Definíció

Az **offline Turing gép** (OTG) egy olyan TG, melynek az első szalagja csak olvasható, a többi írható is. Első szalagját bemeneti szalagnak, további szalagjait munkaszalagoknak nevezzük.

Definíció

A **nemdeterminisztikus offline Turing gép** (NOTG) egy nemdeterminisztikusan működő offline Turing gép.

Definíció

A **számító offline Turing gép** olyan legalább 2 szalagos számító Turing gép, amelynek az első szalagja csak olvasható, az utolsó szalagja csak írható. Az első szalagot bemeneti szalagnak, utolsó szalagot kimeneti szalagnak, a többi szalagot munkaszalagnak nevezzük.

Definíció

Egy M Turing-gép **kódja** (jelölése $\langle M \rangle$) a következő:
Legyen $M = (Q, \{0,1\}, \Gamma, \delta, q_0, q_i, q_n)$, ahol

- $Q = \{p_1, \ldots, p_k\}$, $\Gamma = \{X_1, \ldots, X_m\}$, $D_1 = R$, $D_2 = S$, $D_3 = L$
- $k \geqslant 3$, $p_1 = q_0$, $p_{k-1} = q_i$, $p_k = q_n$,
- $m \geqslant 3$, $X_1 = 0$, $X_2 = 1$, $X_3 = \sqcup$.
- Egy $\delta(p_i, X_j) = (p_r, X_s, D_t)$ átmenet kódja $0^i10^j10^r10^s10^t$.
- $\langle M \rangle$ az átmenetek kódjainak felsorolása 11-el elválasztva.

Definíció

Legyen $X = \{x_1 \prec x_2 \prec \cdots \prec x_s\}$ egy rendezett ábécé. Ekkor X^* szavainak **hossz-lexikografikus** (shortlex) rendezése alatt azt a $\prec_{\text{shortlex}}$ rendezést értjük, melyre a következők teljesülnek. Minden $u_1 \cdots u_n, v_1 \cdots v_m \in X^*$-ra
$u_1 \cdots u_n \prec_{\text{shortlex}} v_1 \cdots v_m \Leftrightarrow (n < m) \vee$
$((n = m) \wedge (u_k \prec v_k)$, ahol k a legkisebb olyan i, melyre $u_i \neq v_i$).

Definíció

Egy offline TG **többlet tárigénye** egy adott inputra azon celláknak a száma, amelyeken a működés során valamelyik munkaszalag feje járt.

Egy offline TG $f(n)$ **többlet tárkorlátos**, ha bármely u inputra legfeljebb $f(|u|)$ a többlet tárigénye.

Definíció

Egy nemdeterminisztikus offline TG **többlet tárigénye** egy adott inputra a legnagyobb többlet tárigényű számításának az többlet tárigénye.

Egy nemdeterminisztikus offline TG $f(n)$ **többlet tárkorlátos**, ha bármely u inputra legfeljebb $f(|u|)$ az többlet tárigénye.

Definíció

Egy $L_1 \subseteq \Sigma^*$ nyelv **logaritmikus tárral visszavezethető** egy $L_2 \subseteq \Delta^*$ nyelvre, ha $L_1 \leqslant L_2$ és a visszavezetéshez használt függvény kiszámítható logaritmikus többlet tárkorlátos determinisztikus offline Turing géppel. Jelölése: $L_1 \leqslant_\ell L_2$.

Tétel

Létezik nem Turing-felismerhető nyelv.

Definíció

Azt mondjuk, hogy az $M = \langle Q, \Sigma, \Delta, \delta, q_0, q_i, (q_n)\rangle$ TG **kiszámítja** az $f : \Sigma^* \to \Delta^*$ szófüggvényt, ha minden $u \in \Sigma^*$-beli szóra megáll, és ekkor $f(u) \in \Delta^*$ olvasható az utolsó szalagján.

Definíció

Az $f : \Sigma^* \to \Delta^*$ szófüggvény **kiszámítható**, ha van olyan Turing-gép, ami kiszámítja. [lásd szófüggvényt kiszámító TG]

Definíció

$L_1 \subseteq \Sigma^*$ **visszavezethető** $L_2 \subseteq \Delta^*$-ra, ha van olyan $f : \Sigma^* \to \Delta^*$ kiszámítható szófüggvény, hogy $w \in L_1 \Leftrightarrow f(w) \in L_2$. Jelölés: $L_1 \leqslant L_2$

LOGIKA

konjukció ($\wedge$) **diszjunkció** ($\vee$)

Definíció

Egy $I : \mathrm{Var}(\varphi) \to \{i, h\}$ függvényt φ egy **interpretációjának** (változókiértékelésének) nevezünk.

Ha $\mathcal{F}$ egy formulahalmaz, akkor egy $I : \mathrm{Var}(\mathcal{F}) \to \{i, h\}$ függvényt $\mathcal{F}$ egy **interpretációjának** (változókiértékelésének) nevezünk.

Definíció

Adott **ítéletváltozók** egy előre rögzített megszámlálhatóan végtelen $\mathrm{Var} = \{x_1, x_2, \ldots\}$ halmaza. Az **ítéletlogikai formulák** Form halmaza a legszűkebb halmaz melyre

- Minden $x \in \mathrm{Var}$ esetén $x \in \mathrm{Form}$,
- Ha $\varphi \in \mathrm{Form}$, akkor $\neg\varphi \in \mathrm{Form}$,
- Ha $\varphi, \psi \in \mathrm{Form}$, akkor $(\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \to \psi) \in \mathrm{Form}$.

A formulák igazságértéke

Egy I interpretációban egy $\varphi \in \mathrm{Form}$ formula $\mathcal{B}_I(\varphi)$ **igazságértékét** (helyettesítési értékét, Boole értékét) a következő rekurzióval definiáljuk:

Definíció

- ha $x \in \mathrm{Var}$ akkor $\mathcal{B}_I(x) := I(x)$,
- ha $\varphi \in \mathrm{Form}$ formula, akkor $\mathcal{B}_I(\neg\varphi) := \neg\mathcal{B}_I(\varphi)$,
- ha $\varphi, \psi \in \mathrm{Form}$ formulák, akkor $\mathcal{B}_I(\varphi \circ \psi) := \mathcal{B}_I(\varphi) \circ \mathcal{B}_I(\psi)$, ahol $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$,

ahol a műveletek eredményét az alábbi táblázat definiálja.

$\mathcal{B}_I(\varphi)$	$\mathcal{B}_I(\psi)$	$\mathcal{B}_I(\neg\varphi)$	$\mathcal{B}_I(\varphi \wedge \psi)$	$\mathcal{B}_I(\varphi \vee \psi)$	$\mathcal{B}_I(\varphi \rightarrow \psi)$
i	i	h	i	i	i
i	h	h	h	i	h
h	i	i	h	i	i
h	h	i	h	h	i

Definíció

Egy φ ítéletlogikai formula **ítélettáblája** egy $2^n \times (n+1)$-es táblázat, ahol $n = |\mathrm{Var}(\varphi)|$. A sorok megfelelnek a lehetséges interpretációknak. Az I interpretációnak megfelelő sor az első n oszlopban tartalmazza az ítéletváltozók I szerinti kiértékelését, míg utolsó, $n+1$. oszlopa $\mathcal{B}_I(\varphi)$-t.

Tétel

Legyen $\mathcal{F}$ egy formulahalmaz és φ egy formula. Akkor a következők teljesülnek.

- φ akkor és csak akkor kielégíthetetlen, ha $\neg\varphi$ tautológia.
- $\mathcal{F} \models_0 \varphi$ akkor és csak akkor, ha $\mathcal{F} \cup \{\neg\varphi\}$ kielégíthetetlen.

Definíció

- Egy I interpretáció **kielégít** egy $\mathcal{F}$ formulahalmazt ($I \models_0 \mathcal{F}$), ha a formulahalmaz minden formuláját kielégíti.
- Egy $\mathcal{F}$ formulahalmaz **kielégíthető**, ha legalább egy interpretáció kielégíti.
- Egy $\mathcal{F}$ formulahalmaz **kielégíthetetlen**, ha nincs olyan interpretáció, ami egyszerre minden $\mathcal{F}$-beli formulát kielégít.
- Egy $\mathcal{F}$ formulahalmaznak a φ formula **tautologikus következménye**($\mathcal{F} \models_0 \varphi$), ha minden $\mathcal{F}$-t kielégítő interpretáció kielégíti φ-t is.

Tétel

$\mathcal{S}$ klózhalmaz kielégíthetetlen $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{S}$-ből levezethető $\square$.

Tehát DNF:
$(x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \neg y \wedge z) \vee (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z) \vee (\neg x \wedge \neg y \wedge z)$.

KNF: $(\neg x \vee \neg y \vee z) \wedge (x \vee \neg y \vee z) \wedge (x \vee y \vee z)$.

Definíció

- **Literálnak** nevezünk egy x vagy $\neg x$ alakú formulát, ahol $x \in \mathrm{Var}$. x és $\neg x$ **komplemens literálpár**. Egy literál **alapja** az az ítéletváltozó, amelyik a literálban szerepel.
- **Elemi diszjunkciónak** (vagy röviden **klóznak**) hívunk egy $\ell_1 \vee \cdots \vee \ell_n$ alakú formulát ($n \in \mathbb{N}$), ahol $\ell_1, \ldots \ell_n$ páronként különböző alapú literálok.
- **Konjunktív normálformának** (röviden KNF-nek) nevezünk egy $C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_m$ ($m \geqslant 1$) alakú formulát, ahol minden $1 \leqslant i \leqslant m$-re C_i egy klóz (a KNF egy **tagja**).
- Az **elemi konjunkciót** és a **diszjunktív normálformát** (DNF) ezzel analóg módon definiáljuk $\wedge$ és $\vee$ szerepének felcserélésével.

Definíció

Egy elsőrendű logika szimbólumhalmaza a következőkből áll

- Pred, a **predikátumszimbólumok** véges halmaza,
- Func, a **függvényszimbólumok** véges halmaza,
- Cnst, a **konstansszimbólumok** véges halmaza,
- $\mathrm{Ind} = \{x_1, x_2, \ldots\}$, az **individuumváltozók** megszámlálhatóan végtelen halmaza
- $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \forall, \exists\}$ műveleti jelek és kvantorok. $\forall$ neve **univerzális kvantor**, míg $\exists$ neve **egzisztenciális kvantor**
- **(,)** és **,** (vessző).

Minden $s \in \mathrm{Pred} \cup \mathrm{Func} \cup \mathrm{Cnst}$-hez hozzá van rendelve egy $\mathrm{ar}(s) \in \mathbb{N}$ szám, a szimbólum **aritása** (a konstansokhoz mindig 0).

Definíció

A **termek** Term nyelve az a legszűkebb halmaz, amelyre

- minden $x \in \mathrm{Ind}$ esetén $x \in \mathrm{Term}$
- minden $c \in \mathrm{Cnst}$ esetén $c \in \mathrm{Term}$
- minden $f \in \mathrm{Func}$ és $t_1, \ldots t_{\mathrm{ar}(f)} \in \mathrm{Term}$ esetén $f(t_1, \ldots t_{\mathrm{ar}(f)}) \in \mathrm{Term}$.

SZÁMOSSÁG

Definíció

- A és B halmazoknak **megegyezik a számosságuk**, ha $\exists$ bijekció köztük. Jelölése: $|A| = |B|$.
- A-nak **legalább annyi a számossága**, mint B-nek, ha $\exists$ B-ből injekció A-ba. Jelölése: $|A| \geqslant |B|$.
- A-nak **nagyobb a számossága, mint B-nek**, ha $\exists$ B-ből A-ba injekció, de $\nexists$ bijeckió. Jelölése: $|A| > |B|$.

Cantor-Bernstein-Schröder tétel

Ha $\exists$ injekció A-ból B-be és B-ből A-ba is, akkor $\exists$ bijekció A és B között, azaz ha $|A| \leqslant |B|$ és $|A| \geqslant |B|$, akkor $|A| = |B|$.

Definíció

Egy A halmaz **megszámlálhatóan végtelen számosságú**, ha létezik A és $\mathbb{N}$ között bijekció.

Definíció

Egy A halmaz **continuum számosságú**, ha létezik A és $\mathbb{R}$ között bijekció.

Következmény

A $\{0, 1\}$ feletti nyelvek halmazának számossága nagyobb, mint a $\{0, 1\}$ feletti szavak számossága.

NYELVEK

Definíció

RE=$\{L \mid \exists\, M$ Turing gép, amelyre $L(M) = L\}$.

R=$\{L \mid \exists\, M$ minden inputra megálló Turing gép, melyre $L(M) = L\}$.

Tétel

- Ha $L_1 \leqslant L_2$ és $L_2 \in RE$, akkor $L_1 \in RE$.
- Ha $L_1 \leqslant L_2$ és $L_2 \in R$, akkor $L_1 \in R$.

Tétel

$L_{\text{átló}} := \{w_i \mid w_i \notin L(M_i)\} \notin RE$.

$L_{\text{átló}}$ **Turing-felismerhetetlen**

Univerzális nyelv: $L_u = \{\langle M, w\rangle \mid w \in L(M)\}$.

Tétel

$L_u \in RE$

Tétel

$L_u \notin R$.

Tétel

Ha L és $\bar{L} \in RE$, akkor $L \in R$.

Tétel

Ha $L \in R$, akkor $\bar{L} \in R$.

$L_h = \{\langle M, w\rangle \mid M \text{ megáll a } w \text{ bemeneten}\}$. $L_u \subseteq L_h$

Tétel

$L_h \notin R$.

Tétel

$L_h \in RE$.

Definíció

Tetszőleges $\mathcal{P} \subseteq RE$ halmazt a rekurzívan felsorolható nyelvek egy **tulajdonságának** nevezzük. $\mathcal{P}$ **triviális**, ha $\mathcal{P} = \emptyset$ vagy $\mathcal{P} = RE$.

$L_{\mathcal{P}} = \{\langle M\rangle \mid L(M) \in \mathcal{P}\}$.

Rice tétele

Ha $\mathcal{P} \subseteq RE$ egy nem triviális tulajdonság, akkor $L_{\mathcal{P}} \notin R$.

Post Megfelelkezési Probléma (PMP):

$L_{\text{PMP}} = \{\langle D\rangle \mid D\text{-nek van megoldása}\}$.

Tétel

$L_{\text{PMP}} \in RE$.

Tétel

$L_{\text{PMP}} \notin R$.

$L_{\text{MPMP}} = \{\langle D, d\rangle \mid d \in D \wedge D\text{-nek van } d\text{-vel kezdődő megoldása}\}$.

$L_{\text{ECF}} := \{\langle G\rangle \mid G \text{ egyértelmű CF grammatika}\}$.

Tétel

$L_{\text{ECF}} \notin R$

Definíció

$\textsc{ValidityPred} := \{\langle\varphi\rangle \mid \varphi$ logikailag igaz elsőrendű formula$\}$.
$\textsc{UnsatPred} := \{\langle\varphi\rangle \mid \varphi$ kielégíthetetlen elsőrendű formula$\}$.
$\textsc{SatPred} := \{\langle\varphi\rangle \mid \varphi$ kielégíthető elsőrendű formula$\}$.
$\textsc{EqivPred} := \{\langle\varphi, \psi\rangle \mid \varphi, \psi$ elsőrendű formulák, melyekre $\varphi \sim \psi\}$.
$\textsc{ConsPred} := \{\langle\mathcal{F}, \varphi\rangle \mid \mathcal{F}$ véges elsőrendű formulahalmaz, φ elsőrendű formula, $\mathcal{F} \models \varphi\}$.

Tétel

$\textsc{ValidityPred} \notin \mathrm{R}$

Következmény

$\textsc{UnsatPred}$, $\textsc{SatPred}$, $\textsc{EquivPred}$, $\textsc{ConsPred} \notin \mathrm{R}$

Tétel

$\textsc{UnsatPred} \in \mathrm{RE}$.

Következmény

$\textsc{SatPred} \notin \mathrm{RE}$

RANDOM

Tétel

Eldönthetetlenek az alábbi, G_1 és G_2 környezetfüggetlen grammatikákkal kapcsolatos kérdések.

(1) $L(G_1) \cap L(G_2) \stackrel{?}{=} \varnothing$

(2) $L(G_1) \stackrel{?}{=} L(G_2)$

(3) $L(G_1) \stackrel{?}{=} \Gamma^*$ valamely Γ ábécére

(4) $L(G_1) \stackrel{?}{\subseteq} L(G_2)$

Tétel

Minden G grammatikához megadható egy $L(G)$-t felismerő NTG.

Definíció

Legyen Σ egy ábécé és legyenek $u_1, \dots, u_n, v_1 \dots, v_n \in \Sigma^+$ $(n \geqslant 1)$. A $D = \left\{ \frac{u_1}{v_1}, \dots, \frac{u_n}{v_n} \right\}$ halmazt **dominókészletnek** nevezzük.

Definíció

Az $\frac{u_{i_1}}{v_{i_1}} \cdots \frac{u_{i_m}}{v_{i_m}}$ dominósorozat $(m \geqslant 1, 1 \leqslant i_1, \dots, i_m \leqslant n)$ a $D = \{ \frac{u_1}{v_1}, \dots, \frac{u_n}{v_n} \}$ dominókészlet egy **megoldása**, ha $u_{i_1} \cdots u_{i_m} = v_{i_1} \cdots v_{i_m}$.

Tétel

(1) Minden G 1-es típusú grammatikához megadható egy A LKA, melyre $L(A) = L(G)$.

(2) Minden A LKA-hoz megadható egy G 1-es típusú grammatika, melyre $L(G) = L(A)$.

Tétel

Ha A LKA, akkor $L(A)$ eldönthető.

$\mathcal{L}_3$	3-típusú grammatika determinisztikus véges automata nemdeterminisztikus véges automata reguláris kifejezés
	determinisztikus veremautomata
$\mathcal{L}_2$	2-típusú grammatika verematomata
$\mathcal{L}_1$	1-típusú grammatika lineárisan korlátolt automata
R	minden inputra megálló Turing gép
RE = $\mathcal{L}_0$	Turing gép nemdeterminisztikus Turing gép 0-típusú grammatika

Tétel

$\mathcal{L}_1 \subset \mathrm{R}$.

Definíció

- $\mathrm{TIME}\,(f(n)) =$
  $\{L \mid L$ eldönthető $O(f(n))$ időkorlátos determinisztikus TG-pel$\}$
- $\mathrm{NTIME}\,(f(n)) =$
  $\{L \mid L$ eldönthető $O(f(n))$ időkorlátos NTG-pel$\}$
- $\mathrm{P}=\bigcup_{k\geqslant 1}\mathrm{TIME}\,(n^k)$.
- $\mathrm{NP}=\bigcup_{k\geqslant 1}\mathrm{NTIME}\,(n^k)$.

Definíció

Az $f : \Sigma^* \to \Delta^*$ szófüggvény **polinom időben kiszámítható**, ha van olyan polinom időkorlátos Turing gép, amelyik kiszámítja.

Definíció

$L_1 \subseteq \Sigma^*$ **polinom időben visszavezethető** $L_2 \subseteq \Delta^*$-ra, ha van olyan $f : \Sigma^* \to \Delta^*$ polinom időben kiszámítható szófüggvény, hogy $w \in L_1 \Leftrightarrow f(w) \in L_2$. Jelölés: $L_1 \leqslant_p L_2$.

Definíció

Legyen $\mathcal{C}$ egy bonyolultsági osztály. Egy L nyelv **$\mathcal{C}$-nehéz** (a polinom idejű visszavezetésre nézve), ha minden $L' \in \mathcal{C}$ esetén $L' \leqslant_p L$.

Definíció

Legyen $\mathcal{C}$ egy bonyolultsági osztály. Egy L nyelv **$\mathcal{C}$-teljes**, ha $L \in \mathcal{C}$ és L $\mathcal{C}$-nehéz.

NP-teljes nyelv

Egy L nyelv **NP-teljes** (a polinom idejű visszavezetésre nézve), ha

- $L \in \mathrm{NP}$
- L NP-nehéz, azaz minden $L' \in \mathrm{NP}$ esetén $L' \leqslant_p L$.

Tétel

Legyen L egy NP-teljes probléma. Ha $L \in$ P, akkor P = NP.

Definíció

$\mathrm{SAT} := \{\langle\varphi\rangle \mid \varphi$ kielégíthető nulladrendű KNF$\}$

Cook-Levin tétel

SAT NP-teljes.

Tétel

Ha L NP-teljes, $L \leqslant_p L'$ és $L' \in$ NP, akkor L' NP-teljes.

Definíció

***k*KNF**-nek nevezünk egy olyan KNF-t, ahol minden klóz pontosan k darab páronként különböző alapú literál diszjunkciója.

Példák 4KNF:

$(\neg x_1 \vee x_3 \vee x_5 \vee \neg x_6) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4 \vee \neg x_6) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_4 \vee \neg x_6)$.

2KNF: $(\neg x_1 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_2 \vee x_3)$.

Definíció:

kSAT$=\{\langle\varphi\rangle \mid \varphi$ kielégíthető kKNF$\}$

Tétel

3SAT NP-teljes.

Tétel

$2\mathrm{SAT} \in$ P.

Definíció

Horn formula: olyan KNF, amelynek minden tagja legfeljebb egy pozitív (azaz negálatlan) literált tartalmaz.

Definíció

$\mathrm{HORNSAT}=\{\langle\varphi\rangle \mid \varphi$ kielégíthető Horn formula$\}$

Tétel

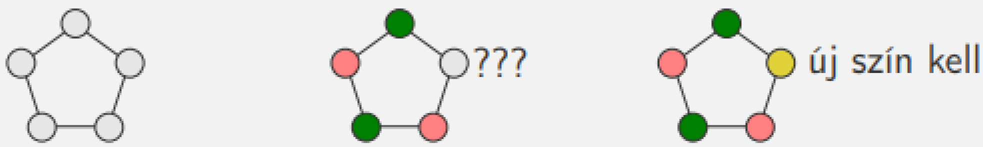
$\mathrm{HORNSAT} \in$ P.

Definíció

Legyen $k \geqslant 1$ egész szám. Egy (irányítatlan) gráf *k-színezhető*, ha kiszínezhetők a csúcsai k színnel úgy, hogy bármely két szomszédos csúcsnak a színe különböző.

Formálisan: $G = (V, E)$ k-színezhető, ha $\exists\, f : V \to \{1, \ldots, k\}$ leképezés, melyre $\forall x, y \in V : f(x) = f(y) \Rightarrow \{x, y\} \notin E$.

kSZÍNEZÉS:$=\{\langle G \rangle \mid G$ k-színezhető$\}$

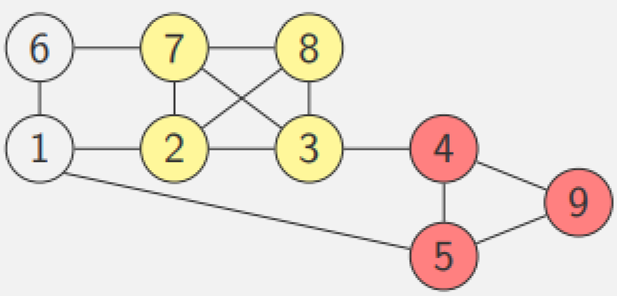


Definíció

Egy G egyszerű, irányítatlan gráf egy teljes részgráfját **klikknek** nevezzük.

KLIKK:$= \{\langle G, k \rangle \mid G$-nek van k méretű klikkje$\}$

Példa:



$\{2, 3, 7, 8\}$ és $\{4, 5, 9\}$ klikk. $\{1, 2, 6, 7\}$ nem klikk.

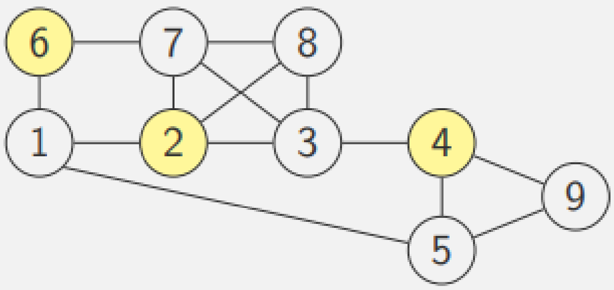
Definíció

Egy G egyszerű, irányítatlan gráf egy üres részgráfját **független ponthalmaznak** mondjuk.

FÜGGETLEN PONTHALMAZ:=

$$\{\langle G, k\rangle \mid G\text{-nek van } k \text{ méretű független ponthalmaza}\}$$

Példa:



$\{2, 6, 4\}$ független. $\{1, 7, 3, 9\}$ nem független a $\{3, 7\}$ él miatt.

Definíció

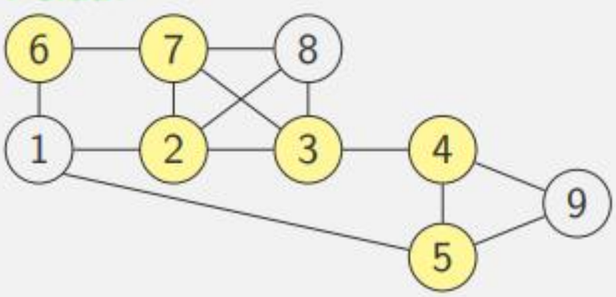
Legyen $S \subseteq V(G)$ és $E \in E(G)$. Ha $S \cap E \neq \emptyset$, akkor a csúcshalmaz **lefogja** E-t. Ha S minden $E \in E(G)$ élt lefog, akkor S egy **lefogó ponthalmaz**.

Megjegyzés: A fenti fogalom **csúcsfedés** néven is ismeretes.

LEFOGÓ PONTHALMAZ:=

$$\{\langle G, k\rangle \mid G\text{-nek van } k \text{ méretű lefogó ponthalmaza}\}$$

Példa:



$\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ lefogó ponthalmaz.

Tétel

KLIKK, FÜGGETLEN PONTHALMAZ, LEFOGÓ PONTHALMAZ NP-teljes.

Definíció

$\mathcal{S}$ egy **hipergráf** (vagy halmazrendszer), ha $\mathcal{S} = \{A_1, \ldots, A_n\}$, ahol $A_i \subseteq U$, $(1 \leqslant i \leqslant n)$ valamely U alaphalmazra. $H \subseteq U$ egy **hipergráf lefogó ponthalmaz**, ha $\forall 1 \leqslant i \leqslant n : H \cap A_i \neq \emptyset$.

HIPERGRÁF LEFOGÓ PONTHALMAZ:=
$\{\langle \mathcal{S}, k \rangle \,|\, \mathcal{S}$ egy hipergráf és van k elemű $\mathcal{S}$-et lefogó ponthalmaz$\}$.

Tétel

HIPERGRÁF LEFOGÓ PONTHALMAZ NP-teljes.

Definíció

Adott egy G gráf. Egy a G összes csúcsát pontosan egyszer tartalmazó utat **Hamilton útnak**, egy a G összes csúcsát pontosan egyszer tartalmazó kört **Hamilton körnek** nevezünk. Ha a gráf irányított, a Hamilton útnak/körnek irányítottnak kell lennie.

HÚ=$\{\langle G, s, t \rangle \,|$ van a G irányított gráfban s-ből t-be H-út$\}$.

IHÚ=$\{\langle G, s, t \rangle \,|$ van a G irányítatlan gráfban s és t végpontokkal H-út$\}$.

IHK=$\{\langle G \rangle \,|$ van a G irányítatlan gráfban H-kör$\}$.

Tétel

HÚ NP-teljes

Tétel

IHÚ NP-teljes

Tétel

IHK NP-teljes

Eldöntési verzió:
TSP=$\{\langle G, K \rangle \,|\, G$-ben van $\leqslant K$ súlyú H-kör$\}$.

Tétel

TSP NP-teljes

Diophantoszi egyenlőtlenségrendszer=
$\{\langle \mathbf{A}, \mathbf{b} \rangle \mid \mathbf{Ax} \leqslant \mathbf{b}$ egészegyütthatós egyenlőtlenségrendszernek van egész megoldása$\}$.

Tétel

Diophantoszi egyenlőtlenségrendszer NP-nehéz.

Részletösszeg:= $\{\langle S, K \rangle \mid S$ egész számok egy halmaza, $K \in \mathbb{Z}$, van S-nek egy olyan S' részhalmaza, hogy az S'-beli számok összege $K\}$.

Példa: $S = \{5, 8, 9, 13, 17\}, K = 27$
Ekkor $\langle S, K \rangle \in$Részletösszeg, mivel 5+9+13=27.

Tétel

Részletösszeg NP-teljes.

A Hátizsák nyelv olyan $a_1, \ldots, a_n, b, p_1, \ldots p_n, k$ rendezett $(2n+2)$-esekből áll, ahol ezen számok mindegyike nemnegatív és van egy olyan $I \subseteq \{1, \ldots n\}$ halmaz, amelyre $\sum_{i \in I} a_i \leqslant b$ és $\sum_{i \in I} p_i \geqslant k$.

Tétel

Hátizsák NP-teljes.

Partíció:=$\{\langle B \rangle \mid B$ olyan pozitív számok multihalmaza, amely két egyenlő összegű részre particionálható$\}$.

Példa: A 2,2,2,3,3,4 multihalmaz ilyen, hiszen pl. 2+2+4=2+3+3.

Tétel

Partíció NP-teljes.

Ládapakolás:=$\{\langle s_1, \ldots, s_n, k \rangle \mid s_i \in \mathbb{Q}^+ (1 \leqslant i \leqslant n)$ súlyok particionálhatók $k \in \mathbb{N}^+$ részre úgy, hogy minden particióban a súlyok összege $\leqslant 1\}$.

Tétel

Ládapakolás NP-teljes.

Definíció

L **NP-köztes**, ha $L \in \mathrm{NP}$, $L \notin \mathrm{P}$ és L nem NP-teljes.

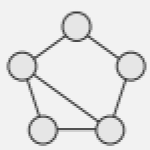
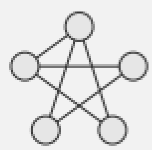
Ladner tétele

Ha $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$, akkor létezik NP-köztes nyelv.

Definíció

A $G_i = (V_i, E_i)$ $(i = 1, 2)$ irányítatlan gráfok **izomorfak**, ha van olyan $f : V_1 \to V_2$ bijekció, hogy $\forall u, v \in V_1$ esetén $\{u, v\} \in E_1 \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E_2$.

Gráfizomorfizmus $= \{\langle G_1, G_2\rangle \mid$ G_1 és G_2 irányítatlan izomorf gráfok$\}$.

Példa:  és  izomorfak.

Tétel: Gráfizomorfizmus $\in$ QP, ahol

$$\mathrm{QP} = \bigcup_{c \in \mathbb{N}} \mathrm{TIME}(2^{(\log n)^c})$$

a „kvázipolinom időben” megoldható problémák osztálya.

Részgráfizomorfizmus $= \{\langle G_1, G_2\rangle \mid$ G_1 és G_2 irányítatlan gráfok és G_1 izomorf G_2 egy részgráfjával$\}$.

Tétel

Részgráfizomorfizmus NP-teljes.

Prímfaktorizáció $=$ $\{\langle n, k\rangle \mid n\text{-nek van } k\text{-nál kisebb prímtényezője}\}$

Definíció

Ha $\mathcal{C}$ egy bonyolultsági osztály co$\mathcal{C} := \{L \mid \bar{L} \in \mathcal{C}\}$.

Definíció

$\mathcal{C}$ **zárt a polinomidejű visszavezetésre nézve**, ha minden esetben ha $L_2 \in \mathcal{C}$ és $L_1 \leqslant_p L_2$ teljesül következik, hogy $L_1 \in \mathcal{C}$.

Tétel

Ha $\mathcal{C}$ zárt a polinomidejű visszavezetésre nézve, akkor co$\mathcal{C}$ is.

Következmény

coNP zárt a polinom idejű visszavezetésre nézve. P $=$ coP NP$\neq$coNP

Tétel

L $\mathcal{C}$-teljes $\iff$ $\overline{L}$ co$\mathcal{C}$-teljes.

$\textsc{Unsat} := \{\langle\varphi\rangle \mid \varphi$ kielégíthetetlen nulladrendű formula$\}$.

$\textsc{Taut} := \{\langle\varphi\rangle \mid$ a φ nulladrendű formula tautológia$\}$.

Tétel

$\textsc{Unsat}$ és $\textsc{Taut}$ coNP-teljesek.

Tétel

Ha L coNP-teljes és $L \in$ NP, akkor NP $=$ coNP.

- SPACE $(f(n)) := \{L \mid L$ eldönthető $O(f(n))$ többlet tárkorlátos determinisztikus offline TG-pel$\}$
- NSPACE $(f(n)) := \{L \mid L$ eldönthető $O(f(n))$ többlet tárkorlátos nemdeterminisztikus offline TG-pel$\}$
- PSPACE$:=\bigcup_{k\geqslant 1}$SPACE (n^k).
- NPSPACE$:=\bigcup_{k\geqslant 1}$NSPACE (n^k).
- L$:=$SPACE $(\log n)$.
- NL$:=$NSPACE $(\log n)$.

$\textsc{Elér} = \{\langle G, s, t\rangle \mid \text{A } G \text{ irányított gráfban van } s\text{-ből } t\text{-be út}\}$.

Tétel

$\textsc{Elér} \in \mathrm{TIME}(n^2)$.

Tétel

$\textsc{Elér} \in \mathrm{SPACE}(\log^2 n)$.

Definíció

Egy M NTG G_M **konfigurációs gráfjának** csúcsai M konfigurációi és $(C, C') \in E(G_M) \Leftrightarrow C \vdash_M C'$.

Savitch tétele

Ha $f(n) \geqslant \log n$, akkor $\mathrm{NSPACE}(f(n)) \subseteq \mathrm{SPACE}(f^2(n))$.

Következmény

PSPACE = NPSPACE

Tétel

$\mathrm{NL} \subseteq \mathrm{P}$

Tétel

$\textsc{Elér} \in \mathrm{NL}$

Definíció

Egy $L_1 \subseteq \Sigma^*$ nyelv **logaritmikus tárral visszavezethető** egy $L_2 \subseteq \Delta^*$ nyelvre, ha $L_1 \leqslant L_2$ és a visszavezetéshez használt függvény kiszámítható logaritmikus többlet tárkorlátos determinisztikus offline Turing géppel. Jelölése: $L_1 \leqslant_\ell L_2$.

Definíció

Egy L nyelv **NL-nehéz** (a log. táras visszavezetésre nézve), ha minden $L' \in \mathrm{NL}$ nyelvre, $L' \leqslant_\ell L$. Ha ezen felül $L \in \mathrm{NL}$ is teljesül, akkor L **NL-teljes** (a log. táras visszavezetésre nézve)

Tétel

Az L osztály zárt a logaritmikus tárral való visszavezetésre nézve.

Tétel

ELÉR NL-teljes a logaritmikus tárral történő visszavezetésre nézve.

Immerman-Szelepcsényi tétel

NL = coNL

EXPTIME:=$\bigcup_{k\in\mathbb{N}}$TIME(2^{n^k}).

Hierarchia tétel

(I) NL $\subset$ PSPACE és P $\subset$ EXPTIME.

(II) L $\subseteq$ NL=coNL $\subseteq$ P $\subseteq$ NP $\subseteq$ NPSPACE=PSPACE $\subseteq$ EXPTIME