Analízis1ABC, 2. zárthelyi dolgozat , 2014.05.16.
Megoldások

1. *Számítsa ki a következő határértéket :* $\lim\limits_{n\to+\infty}\Big(\dfrac{n^2-9}{n^2+3n}\Big)^n$.

Megoldás :

1. Vegyük észre, hogy a hatvány alapja egyszerűsíthető. Első lépésként tegyük meg ezt :

$$L:=\lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{n^2-9}{n^2+3n}\Big)^n=\lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{(n-3)\cdot(n+3)}{n\cdot(n+3)}\Big)^n=\lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{n-3}{n}\Big)^n=1^{+\infty}=$$

$$=\text{(mivel az alap kisebb mint 1, ezért áttérünk reciprokra)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\Big(\dfrac{n}{n-3}\Big)^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\Big(\dfrac{n-3+3}{n-3}\Big)^n}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\Big(1+\dfrac{3}{n-3}\Big)^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\Big(1+\dfrac{1}{n/3-1}\Big)^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\Big(\Big(1+\dfrac{1}{n/3-1}\Big)^{n/3}\Big)^3}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\Big(\Big(1+\dfrac{1}{n/3-1}\Big)^{n/3-1}\cdot\Big(1+\dfrac{1}{n/3-1}\Big)\Big)^3}=\frac{1}{e^3}.$$

Itt felhasználtuk a határértékek és a műveletekre vonatkozó tételeket, illetve azt az állítást, hogy ha $(x_n):\mathbb{N}\to(0;+\infty)$ és $\lim(x_n)=+\infty$, akkor $\lim\Big(1+\dfrac{1}{x_n}\Big)^{x_n}=e$. Most $x_n:=\dfrac{n}{3}-1\to+\infty\quad(n\to+\infty)$.

Megjegyzés : itt $x_n>0$ "csak" $n=4-$től teljesül, de a tétel használható a "majdnem minden n formában" is.

2. *Adott az* $x_0:=1$ *és* $x_{n+1}:=\sqrt{x_n+\dfrac{n+1}{n+2}}$ $(n\in\mathbb{N})$ *sorozat. Konvergens-e és ha igen, mi a határértéke ?*

Megoldás :

i) Először vegyük észre, hogy a sorozat tagjai pozitív számok, ugyanis (ld. indukció) : $x_0=1>0$ és ha valamely $n\in\mathbb{N}$ index esetén $x_n>0$, akkor $x_{n+1}=\sqrt{x_n+\dfrac{n+1}{n+2}}>0$ is adódik.

Vizsgáljuk meg a sorozatot monotonitás szempontjából : $x_0=1<x_1=\sqrt{1+\dfrac{1}{2}}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

Igazoljuk indukcióval, hogy a sorozat szigorúan monton nő. Az első lépés megvan, tegyük fel, hogy valamely $n\in\mathbb{N}$ indexre teljesül, hogy $(\star):x_n<x_{n+1}$ és kell, hogy : $x_{n+1}<x_{n+2}$.

A rekurzív formula alapján :

$$x_{n+1}=\sqrt{x_n+\frac{n+1}{n+2}}<(\star)<\sqrt{x_{n+1}+\frac{n+1}{n+2}}<(\circ)<\sqrt{x_{n+1}+\frac{n+2}{n+3}}=x_{n+2}.$$

Itt $(\star)$ az indukciós feltevés, ezért elég belátni a $(\circ)$ egyenlőtlenséget, ami ekvivalens az alábbiakkal :

$$\frac{n+1}{n+2}<\frac{n+2}{n+3}\iff(n+1)\cdot(n+3)<(n+2)^2\iff n^2+4n+3<n^2+4n+4\iff 3<4.$$

Tehát a sorozat szigorúan monoton nő , így $\forall n\in\mathbb{N}$ esetén : $x_0=1\le x_n$, azaz a sorozat legkisebb eleme a legnagyobb alsó korlát.

ii) Van-e felső korlát ? Nézzük meg ehhez a lehetséges határértékeket !

Tegyük fel, hogy a sorozat konvergens és $\lim(x_n)=A\in\mathbb{R}$. Ekkor $\lim(x_{n+1})=A$ és a fentiek alapján $A\ge1$ is igaz.

A rekurzió és a konvergens sorozatokkal végzett műveleti szabályok értelmében :

$$\lim(x_{n+1})=\sqrt{\lim(x_n)+\lim\frac{n+1}{n+2}}\iff A=\sqrt{A+1}\iff A^2-A-1=0\Leftrightarrow A_1=\frac{1+\sqrt5}{2}>1;A_2=\frac{1-\sqrt5}{2}<1.$$

Tehát, ha (x_n) konvergens, akkor a határértéke csak A_1 **lehet** .

iii) Belátjuk, hogy A_1 felső korlátja is egyben a sorozatnak !

Indukcióval igazoljuk, hogy $x_n<A_1\quad(\forall n\in\mathbb{N})$.

Ha $n=0$, akkor $x_0=1<\dfrac{1+\sqrt5}{2}\iff 1<\sqrt5$, ami igaz.

Tegyük fel, hogy valamely $n\in\mathbb{N}$-re : $x_n<\dfrac{1+\sqrt5}{2}$. Be kell látni, hogy : $x_{n+1}<\dfrac{1+\sqrt5}{2}$ is igaz.

A rekurzió és az indukciós feltevés alapján : $x_{n+1}=\sqrt{x_n+\dfrac{n+1}{n+2}}<\sqrt{\dfrac{1+\sqrt5}{2}+1}$.

Elég igazolnunk azt, hogy :

$$\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \iff \frac{3+\sqrt{5}}{2} \leq \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}; \text{ ami igaz.}$$

Tehát a sorozat korlátos, monoton $\Rightarrow$ konvergens és $\lim(x_n) = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

3. Döntse el, hogy az alábbi sorok konvergensek vagy divergensek (a válaszát indokolja) :

$$\text{i)} \sum_{n=1} \frac{\sqrt{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}}{(1+\sqrt{1})\cdot(1+\sqrt{2})\cdot(1+\sqrt{3})\cdot \ldots \cdot (1+\sqrt{n})}; \qquad \text{ii)} \sum_{n=1} \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{2^n}.$$

Megoldás :

i) Alkalmazzuk a hányados−kritériumot :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n+1)}}{(1+\sqrt{1})\cdot(1+\sqrt{2})\cdot(1+\sqrt{3})\cdot \ldots \cdot (1+\sqrt{n+1})} \cdot \frac{(1+\sqrt{1})\cdot(1+\sqrt{2})\cdot(1+\sqrt{3})\cdot \ldots \cdot (1+\sqrt{n})}{\sqrt{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2n+1}}{1+\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2+\frac{1}{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \sqrt{2}.$$

A kapott határérték $\sqrt{2} > 1$, ezért a hányados−kritérium értelmében a megadott sor **divergens**.

ii) **1. megoldás :** Legyen $x_n := \dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{2^n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Alkalmazzuk a gyök−kritériumot :

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{2^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}}{2} = \frac{1}{2}\cdot \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}.$$

Ez utóbbi határértéket számoljuk ki közrefogással úgy, hogy az összeg minden tagját növeljük 1−re, az alsó becsléshez pedig csak az első tagot tartjuk meg :

$$\sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}} \leq \sqrt[n]{n\cdot 1} = \sqrt[n]{n} \quad (\forall\, 2 \leq n \in \mathbb{N}).$$

Mivel a közrefogó sorozatok 1−hez konvergálnak, így a közrefogás értelmében : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}} = 1$.

Tehát $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = \dfrac{1}{2} < 1 \Longrightarrow$ a sor (abszolút) **konvergens**.

2. megoldás : Vezessük be az $s_n := 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ $(1 \leq n \in \mathbb{N})$ jelölést és alkalmazzuk most a hányados−kritériumot :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}}{2\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{s_n+\frac{1}{n+1}}{2\cdot s_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot(n+1)\cdot s_n}\right) = \frac{1}{2}.$$

Itt felhasználtuk, hogy $\lim(s_n) = +\infty$. Mivel a kapott határérték $\dfrac{1}{2} < 1 \Longrightarrow$ a sor (abszolút) **konvergens**.

3. megoldás : Végül használjuk az összehasonlító kritériumot, a sor tagjait növelve az alábbi módon :

$$0 < x_n := \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{2^n} < \frac{n\cdot 1}{2^n} = \frac{n}{2^n} \quad (1 \leq n \in \mathbb{N}).$$

Mivel a majoráló $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{n}{2^n}$ sor konvergens $\left(\text{lásd gyök−kritérium} : \lim\left(\sqrt[n]{\frac{n}{2^n}}\right) = \lim\left(\frac{\sqrt[n]{n}}{2}\right) = \frac{1}{2} < 1\right)$, ezért az eredeti sor is **konvergens**.

4. Tekintsük a $\sum\limits_{n=0} \dfrac{n}{2n^2+1}\cdot(1-2x)^n$ $(x \in \mathbb{R})$ hatványsort. Adja meg a hatványsor középpontját. Milyen $x \in \mathbb{R}$ számok mellett konvergens a sor ?

Megoldás :

i) Alakítsuk az adott sort a szokásos hatványsor alakra, azaz emeljünk ki a zárójelből −2−t :

$$\sum_{n=0} \frac{n}{2n^2+1} \cdot (1-2x)^n = \sum_{n=0} \frac{n \cdot (-2)^n}{2n^2+1} \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)^n \quad (x \in \mathbb{R})$$

Így már leolvasható az együtthatósorozat $a_n := \dfrac{n \cdot (-2)^n}{2n^2+1}$, $(n \in \mathbb{N})$ és a hatványsor középpontja : $a = \dfrac{1}{2}$.

ii) Alkalmazva a Cauchy−Hadamard tételt a konvergencia sugárra kapjuk, hogy :

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\dfrac{n \cdot (-2)^n}{2n^2+1}\right|}} = \frac{1}{2 \cdot \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n}{2n^2+1}}} = \frac{1}{2}.$$

A fenti határértéknél felhasználtuk, hogy (ld. közrefogás) : $1 \le \sqrt[n]{2n^2+1} \le \sqrt[n]{2n^2+n^2} = \sqrt[n]{3n^2} = \sqrt[n]{3} \cdot (\sqrt[n]{n})^2$ $(1 \le n \in \mathbb{N})$, és a közrefogó sorozatokra : $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt[n]{3} \cdot (\sqrt[n]{n})^2) = 1 = \lim\limits_{n\to+\infty} (1)$.

Ekkor tehát : $R = \dfrac{1}{2}$ és $a = \dfrac{1}{2}$, ezért a Cauchy−Hadamard tétel szerint a sor abszolút konvergens (így konvergens is), ha $x \in (a-R; a+R) = (0;1)$.

Azt is tudjuk a tételből, hogy ha $x \in (-\infty;0) \cup (1;+\infty)$, akkor a hatványsor divergens.

Ha $x = 0$, akkor kapjuk a $\sum\limits_{n=0} \dfrac{n}{2n^2+1}$ divergens sort, ugyanis az összehasonlító kritérium értelmében a kapott sor tagjai alulról becsülhetőek tagonként $\dfrac{n}{3n^2} = \dfrac{1}{3n}$−nel és ez utóbbiakból képzett $\dfrac{1}{3} \cdot \sum\limits_{n=1} \dfrac{1}{n}$ sor divergens.

Ha pedig $x = 1$, akkor kapjuk a $\sum\limits_{n=0} (-1)^n \cdot \dfrac{n}{2n^2+1} =: \sum\limits_{n=0} (-1)^n \cdot a_n$ sort. Mivel $0 < a_{n+1} \le a_n \quad (1 \le n \in \mathbb{N}) \iff$

$\iff \dfrac{n+1}{2(n+1)^2+1} \le \dfrac{n}{2n^2+1} \iff 1 \le 2n^2 + 2n$ ami igaz minden legalább 1 természetes n mellett és $\lim \left(\dfrac{n}{2n^2+1}\right) = 0$, ezért a kapott sor egy konvergens Leibniz sor.

Összefoglalva tehát, a hatványsor konvergencia halmaza a $(0;1]$ intervallum.

5. Adjon meg olyan $R > 0$ valós számot és (a_n) sorozatot, amelyekkel : $\dfrac{x+3}{x+2} - \dfrac{x}{x-3} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot x^n \quad (x \in (-R,+R))$.

i) Mennyi a_{2014} ?

ii) Számítsa ki a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ sorösszeget !

Megoldás :

Az összegben szereplő két törtben osszunk le a nevezővel. Ekkor, ha tehát $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2;3\}$, akkor :

$$f(x) := \frac{x+3}{x+2} - \frac{x}{x-3} = \frac{x+2+1}{x+2} - \frac{x-3+3}{x-3} = 1 + \frac{1}{x+2} - 1 - \frac{3}{x-3} = \frac{1}{x+2} - 3 \cdot \frac{1}{x-3}.$$

A kapott két törtet tagonként hatványsorba fejtve (ld. geometriai sor összegzése) :

$$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{x}{2}\right)} = \left(\text{ha } \left|-\frac{x}{2}\right| < 1 \iff |x| < 2\right) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \cdot x^n, \quad \text{ha } x \in (-2;2), \text{ illetve}$$

$$\frac{1}{x-3} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{3}} = \left(\text{ha } \left|\frac{x}{3}\right| < 1 \iff |x| < 3\right) = -\frac{1}{3} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{1}{3^{n+1}} \cdot x^n, \quad \text{ha } x \in (-3;3).$$

Ezeket beírva a közös konvergencia halmazon tehát, ha $x \in (-2;2) \cap (-3;3) = (-2;2)$ és felhasználva a konvergens sorokra vonatkozó műveleteket kapjuk, hogy :

$$f(x) = \frac{1}{x+2} - 3 \cdot \frac{1}{x-3} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \cdot x^n + 3 \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^{n+1}} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n}{2^{n+1}} + \frac{1}{3^n}\right) \cdot x^n.$$

Tehát a keresett konvergencia sugár $R = 2$ és $a_n = \dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}} + \dfrac{1}{3^n}$ $(n \in \mathbb{N})$.

i) Tehát $a_{2014} = \dfrac{(-1)^{2014}}{2^{2014+1}} + \dfrac{1}{3^{2014}} = \dfrac{1}{2^{2015}} + \dfrac{1}{3^{2014}}$.

ii) Vegyük észre, hogy $x = 1 \in (-2;2)$ ezért $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot 1^n = f(1) = \dfrac{1+3}{1+2} - \dfrac{1}{1-3} = \dfrac{4}{3} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{11}{6}$.