4. előadás

VALÓS SOROZATOK 3.

A műveletek és a határérték kapcsolata

$\overline{\mathbb{R}}$ struktúrája

A kibővített valós számok
$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$
halmazában bevezettünk egy **rendezést** is. $\mathbb{R}$ eredeti rendezését megtartva azt mondtuk, hogy legyen
$$-\infty < x < +\infty$$
minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

Állapodjunk meg abban, hogy az $\mathbb{R}$-beli **műveleteket** az alábbiak szerint terjesztjük ki $\overline{\mathbb{R}}$-ra:

1^o^ (i) Minden x valós számra legyen
$$x + (+\infty) := (+\infty) + x := +\infty, \qquad x + (-\infty) := (-\infty) + x := -\infty,$$

(ii) $\quad (+\infty) + (+\infty) := +\infty, \quad (-\infty) + (-\infty) := -\infty.$

2^o^ (i) Minden x pozitív valós számra legyen
$$x \cdot (+\infty) := (+\infty) \cdot x := +\infty, \qquad x \cdot (-\infty) := (-\infty) \cdot x := -\infty.$$

(ii) Minden x negatív valós számra legyen
$$x \cdot (+\infty) := (+\infty) \cdot x := -\infty, \qquad x \cdot (-\infty) := (-\infty) \cdot x := +\infty.$$

(iii) $\quad (+\infty) \cdot (+\infty) := +\infty, \quad (-\infty) \cdot (-\infty) := +\infty,$
$(+\infty) \cdot (-\infty) := (-\infty) \cdot (+\infty) := -\infty.$

3^o^ Minden x valós számra legyen
$$\frac{x}{+\infty} := \frac{x}{-\infty} := 0.$$

4^o^ Ha $x \in \mathbb{R}$ és $y \in \{-\infty, +\infty\}$ vagy $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ és $x \in \overline{\mathbb{R}}$, akkor
$$\frac{x}{y} := x \cdot \frac{1}{y}.$$

Megjegyzések

1. A műveletek és a rendezés definíciói összhangban vannak a végtelenről kialakult szemléletes képünkkel; pl. $x + (+\infty) := +\infty$ azzal, hogy egy valós szám és egy „mindennél nagyobb" szám összege „mindennél nagyobb".

2. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy $\overline{\mathbb{R}}$-on lényegében nem „igazi" műveleteket, azaz nem az $\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$ halmaz**on** értelmezett $\overline{\mathbb{R}}$-beli értékeket felvevő függvényeket értelmeztünk. Bizonyos műveleteket nem definiáltunk. Ilyenek többek között a következők:

$$(+\infty) + (-\infty), \qquad 0 \cdot (\pm\infty), \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \qquad \frac{c}{0} \quad (c \in \overline{\mathbb{R}}).$$

■

Műveletek határértékekkel

A konvergens sorozatoknál láttuk, hogy a három algebrai művelet és a határérték képzés sorrendje felcserélhető. A következő tétel azt állítja, hogy a „legtöbb esetben" ez igaz a tágabb értelemben vett határértékre is.

1. tétel. *Tegyük fel, hogy az (a_n) és a (b_n) sorozatoknak van határértéke, és legyen*

$$\lim (a_n) =: A \in \overline{\mathbb{R}}, \qquad \lim (b_n) =: B \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ekkor

1º *az $(a_n + b_n)$ összeg-sorozatnak is van határértéke, és*

$$\lim (a_n + b_n) = \lim (a_n) + \lim (b_n) = A + B,$$

feltéve, hogy az $A + B \in \overline{\mathbb{R}}$ összeg értelmezve van;

2º *az $(a_n \cdot b_n)$ szorzat-sorozatnak is van határértéke, és*

$$\lim (a_n \cdot b_n) = \lim (a_n) \cdot \lim (b_n) = A \cdot B,$$

feltéve, hogy az $A \cdot B \in \overline{\mathbb{R}}$ szorzat értelmezve van;

3º *ha $b_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N})$, akkor az $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ hányados-sorozatnak is van határértéke, és*

$$\lim \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim (a_n)}{\lim (b_n)} = \frac{A}{B},$$

feltéve, hogy az $\frac{A}{B} \in \overline{\mathbb{R}}$ hányados értelmezve van.

1. megjegyzés. Figyeljük meg, hogy a konvergens sorozatok és a műveletek kapcsolatára vonatkozó korábbi eredményeinket (figyelembe véve az $\overline{\mathbb{R}}$-beli műveletek definícióit) további 28 állítással egészítettük ki. Ezt szemléltetik az alábbi táblázatok.

$$A = \lim (a_n) \qquad B = \lim (b_n)$$

összeg	$A \in \mathbb{R}$	$A = +\infty$	$A = -\infty$
$B \in \mathbb{R}$	$A + B$	$+\infty$	$-\infty$
$B = +\infty$	$+\infty$	$+\infty$	
$B = -\infty$	$-\infty$		$-\infty$

<table>
<tr><th>szorzat</th><th>$A > 0$</th><th>$A = 0$</th><th>$A < 0$</th><th>$A = +\infty$</th><th>$A = -\infty$</th></tr>
<tr><td>$B > 0$</td><td colspan="3" rowspan="3">$A \cdot B$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td>$B = 0$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$B < 0$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$B = +\infty$</td><td>$+\infty$</td><td></td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td>$B = -\infty$</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr>
</table>

hányados	$A > 0$	$A = 0$	$A < 0$	$A = +\infty$	$A = -\infty$
$B > 0$	A/B	A/B	A/B	$+\infty$	$-\infty$
$B < 0$	A/B	A/B	A/B	$-\infty$	$+\infty$
$B = 0$					
$B = +\infty$	0	0	0		
$B = -\infty$	0	0	0		

■

Bizonyítás. A definíciók alapján. ■

2. megjegyzés: Kritikus határértékekről beszélünk akkor, ha az imént megfogalmazott tétel nem alkalmazható. Ezeket az eseteket a táblázatban üresen hagyott helyek jelölik, és ez azt jelenti, hogy A és B megadott értékei nem határozzák meg az összeg-, a szorzat-, illetve a hányados-sorozat határértékét.

Ha pl. $A = +\infty$ és $B = -\infty$, akkor az $(a_n + b_n)$ összeg-sorozat határértékére (a_n) és (b_n) megválasztásától függően „minden" előfordulhat. Ezt mutatják az alábbi példák:

$$\begin{array}{llcl}
a_n := n + c, & b_n := -n \ (n \in \mathbb{N},\ c \in \mathbb{R}) & \Longrightarrow & \lim (a_n + b_n) = c, \\
a_n := 2n, & b_n := -n \ (n \in \mathbb{N}) & \Longrightarrow & \lim (a_n + b_n) = +\infty, \\
a_n := n, & b_n := -2n \ (n \in \mathbb{N}) & \Longrightarrow & \lim (a_n + b_n) = -\infty, \\
a_n := n + (-1)^n, & b_n := -n \ (n \in \mathbb{N}) & \Longrightarrow & (a_n + b_n)\text{-nek nincs határértéke.}
\end{array}$$

Ezért nem értelmeztük $\overline{\mathbb{R}}$-ben $(+\infty)$-nek és $(-\infty)$-nek az összegét.

Hasonló egyszerű példákat lehet megadni a többi kritikus esetben is. Ekkor röviden

$$(+\infty) + (-\infty) \text{ (vagy } (+\infty) - (+\infty)), \qquad 0 \cdot (\pm\infty), \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \qquad \frac{0}{0}, \quad \frac{c}{0} \ (c \in \overline{\mathbb{R}})$$

típusú határértékekről beszélünk. Ilyenkor a sorozat határértékének a meghatározása során a következő „módszert" követjük: **a kritikus határértéket valamilyen „alkalmas" átalakítással igyekszünk nem kritikus határértékre visszavezetni.** ■

Monoton sorozatok határértéke

A sorozatok egy légyeges osztályát képezik a monoton sorozatok. Látni fogjuk azt, hogy **minden monoton sorozatnak van határértéke**. Ha még azt is feltesszük, hogy a sorozat korlátos, akkor a sorozat konvergens is. Nem korlátos sorozatok határértéke pedig vagy $+\infty$ vagy $-\infty$. Mivel a monotonitást, illetve a korlátosságot egyszerűbb eldönteni, mint a konvergenciát vagy a határértéket, ezért a következő tétel sok esetben jól használható módszert ad a határérték-vizsgálatokhoz.

2. tétel. *Minden (a_n) monoton sorozatnak van határértéke.*

1º **(a)** *Ha $(a_n) \nearrow$ és felülről korlátos, akkor (a_n) konvergens és*

$$\lim (a_n) = \sup \big\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\big\}.$$

(b) *Ha $(a_n) \searrow$ és alulról korlátos, akkor (a_n) konvergens és*

$$\lim (a_n) = \inf \big\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\big\}.$$

2º **(a)** *Ha $(a_n) \nearrow$ és felülről nem korlátos, akkor*

$$\lim (a_n) = +\infty.$$

(b) *Ha $(a_n) \searrow$ és alulról nem korlátos, akkor*

$$\lim (a_n) = -\infty.$$

Megjegyzés. A tételben elég feltenni azt, hogy a sorozat egy küszöbindextől kezdve monoton, hiszen véges sok tag nem befolyásolja a határértéket. ■

Bizonyítás.

1º **(a)** Tegyük fel, hogy az (a_n) sorozat monoton növekedő és felülről korlátos. Legyen

$$A := \sup \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}.$$

Ez azt jelenti, hogy A a szóban forgó halmaznak a legkisebb felső korlátja, azaz

- $\forall n \in \mathbb{N}: \ a_n \leq A$ és
- $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists n_0 \in \mathbb{N}: \ A - \varepsilon < a_{n_0} \leq A.$

Mivel a feltételezésünk szerint az (a_n) sorozat monoton növekedő, ezért az

$$A - \varepsilon < a_n \leq A$$

becslés is igaz minden $n > n_0$ indexre.

Azt kaptuk tehát, hogy

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ hogy } \forall n > n_0: \ |a_n - A| < \varepsilon.$$

Ez pontosan azt jelenti, hogy az (a_n) sorozat konvergens és $\lim (a_n) = A$.

1^o (b) Értelemszerű módosításokkal bizonyíthatjuk az állítást a monoton fogyó alulról korlátos sorozatokra.

2^o (a) Tegyük fel, hogy az (a_n) sorozat monoton növekedő és felülről nem korlátos. Ekkor

$$\forall\, P \in \mathbb{R}\text{-hez } \exists\, n_0 \in \mathbb{N}: \ a_{n_0} > P.$$

A monotonitás miatt ezért egyúttal az is igaz, hogy

$$\forall\, n > n_0: \ a_n > P,$$

és ez pontosan azt jelenti, hogy $\lim(a_n) = +\infty$.

2^o (b) Értelemszerű módosításokkal bizonyíthatjuk az állítást a monoton fogyó alulról nem korlátos sorozatokra. ■

Nevezetes sorozatok 1.

$\boxed{\textbf{1.}}$ *Legyen $k = 1, 2, \ldots$ egy rögzített természetes szám. Ekkor*

1^o $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^k} = 0,$

2^o $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^k = +\infty,$

3^o $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[k]{n} = +\infty.$

Bizonyítás.

1^o Azt kell megmutatni, hogy

$$\forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \text{ hogy } \forall\, n > n_0: \ \left|\frac{1}{n^k} - 0\right| < \varepsilon.$$

Rögzítsük az $\varepsilon > 0$ számot. Mivel az

$$\left|\frac{1}{n^k} - 0\right| = \frac{1}{n^k} \le \frac{1}{n} < \varepsilon \qquad \left(\Longrightarrow \ \frac{1}{\varepsilon} < n\right)$$

egyenlőtlenség igaz minden $n > n_0 := \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ indexre, ezért $\varepsilon > 0$-hoz n_0 egy „jó” küszöbindex. Ez azt jelenti, hogy $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^k} = 0$.

2^o Most azt kell belátnunk, hogy

$$\forall\, P > 0\text{-hoz } \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \text{ hogy } \forall\, n > n_0: \ n^k > P.$$

Rögzítsük a $P > 0$ számot. Mivel az

$$n^k \ge n > P$$

egyenlőtlenség igaz minden $n > n_0 := [P]$ indexre, ezért P-hez n_0 egy „jó” küszöbindex, így $\lim\limits_{n\to+\infty} n^k = +\infty$.

3° Mivel $\sqrt[k]{n} > P \iff n > P^k$, ezért $P > 0$-hoz $n_0 := \left[P^k\right]$ egy „jó” küszöbindex, amiből következik, hogy $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[k]{n} = +\infty$. ■

2. *Legyen $m \geq 2$ természetes szám, és tegyük fel, hogy az $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$ sorozat konvergens és $\lim(a_n) =: A \in \mathbb{R}$. Ekkor $A \geq 0$, továbbá az $\left(\sqrt[m]{a_n}, n \in \mathbb{N}\right)$ sorozat is konvergens, és*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{A}.$$

Bizonyítás. Indirekt módon igazolható, hogy $A \geq 0$. Ha $A = 0$, akkor az állítás a definíció közvetlen következménye.

Tegyük fel, hogy $m = 2$ és $A > 0$. Ekkor

$$\sqrt{a_n} - \sqrt{A} = \left(\sqrt{a_n} - \sqrt{A}\right) \cdot \frac{\sqrt{a_n} + \sqrt{A}}{\sqrt{a_n} + \sqrt{A}} = \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{A}} \cdot \left(a_n - A\right),$$

így

$$0 \leq \left|\sqrt{a_n} - \sqrt{A}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{A}} \cdot |a_n - A| \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Mivel $\lim(a_n) = A \implies \lim\left(|a_n - A|\right) = 0$, ezért a közrefogási elvből következik, hogy $\left|\sqrt{a_n} - \sqrt{A}\right| \to 0$, ha $n \to +\infty$, így $\sqrt{a_n} \to \sqrt{A}$, ha $n \to +\infty$.

Az $m > 2$ esetben a bizonyítás hasonló. A gyöktelenítéshez az

$$a_n - A = \left(\sqrt[m]{a_n} - \sqrt[m]{A}\right) \cdot \left(\left(\sqrt[m]{a_n}\right)^{m-1} + \left(\sqrt[m]{a_n}\right)^{m-2} \cdot \sqrt[m]{A} + \cdots + \left(\sqrt[m]{A}\right)^{m-1}\right)$$

azonosságot kell alkalmazni. ■

A geometriai/mértani sorozat

Tetszőlegesen rögzített $q \in \mathbb{R}$ paraméter esetén könnyen alakíthatunk ki **sejtéseket** a $\left(q^n\right)$ geometriai (vagy mértani) sorozat viselkedéséről.

Valóban: ha például $q = 2$, akkor $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$, sőt az is sejthető, hogy minden $q > 1$ esetén is $+\infty$ lesz a $\left(q^n\right)$ sorozat határértéke.

Ha $q = \frac{1}{2}$ vagy $q = -\frac{1}{2}$, akkor

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0.$$

Azt várjuk továbbá, hogy $\left(q^n\right)$ minden $|q| < 1$ esetén nullasorozat.

Ha $q = -1$, akkor a $\left((-1)^n\right)$ sorozat divergens.

A következő tétel azt állítja, hogy ezek a sejtések igazak.

$\boxed{\mathbf{3.}}$ *Minden rögzített $q \in \mathbb{R}$ esetén a (q^n) geometriai sorozat határértékére a következők teljesülnek:*

$$\lim_{n\to+\infty} q^n \begin{cases} = 0, & \text{ha } |q| < 1 \\ = 1, & \text{ha } q = 1 \\ = +\infty, & \text{ha } q > 1 \\ \text{nem létezik}, & \text{ha } q \leq -1. \end{cases}$$

Bizonyítás.

Legyen $q > 1$. Írjuk fel ezt a számot $q = 1 + h$ $(h > 0)$ alakban. A Bernoulli-egyenlőtlenségből következik

$$q^n = (1+h)^n \geq 1 + nh > nh \quad (n \in \mathbb{N}^+).$$

Így tetszőleges $P > 0$ számra, ha $n > n_0 := \left[\frac{P}{h}\right]$, akkor

$$q^n > nh > P,$$

és ez azt jelenti, hogy $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

Ha $q = 1$, akkor az (1) konstans sorozatot kapjuk, ami konvergens, és 1 a határértéke.

Legyen $|q| < 1$. Ha $q = 0$, akkor az állítás nyilvánvaló. Ha $0 < |q| < 1$, akkor az $\frac{1}{|q|} > 1$ számot írjuk fel az $\frac{1}{|q|} = 1 + h$ $(h > 0)$ alakban. Ismét a Bernoulli-egyenlőtlenséget felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{|q|^n} = \left(\frac{1}{|q|}\right)^n = (1+h)^n > 1 + nh > nh \quad (n \in \mathbb{N}^+),$$

azaz

$$|q|^n < \frac{1}{n\,h} \quad (n \in \mathbb{N}^+).$$

Ha $\varepsilon > 0$ adott valós szám, akkor a

$$0 < |q|^n < \frac{1}{n\,h} < \varepsilon$$

egyenlőtlenség teljesül, ha $n > n_0 := \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, ezért ε-hoz n_0 egy „jó" küszöbindex, ami azt jelenti, hogy $\lim\limits_{n\to+\infty} |q|^n = 0$, következésképpen $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ is igaz.

Ha $q = -1$, akkor azt már láttuk, hogy a $\big((-1)^n\big)$ sorozatnak nincs határértéke.

Ha $q < -1$, akkor a $\big(q^n\big)$ sorozat páros, illetve páratlan indexű részsorozatainak különböző a határértéke (a páros indexű részsorozat határértéke $+\infty$, a páratlan indexű részsorozaté pedig $-\infty$), ezért a (q^n) sorozatnak nincs határértéke. ∎

n-edik gyökös sorozatok

1. feladat. *Végezzünk számítógépes kísérleteket az*

$$\left(\sqrt[n]{a}\right) \quad (a>0) \quad \text{\textit{és az}} \quad \left(\sqrt[n]{n}\right)$$

sorozat viselkedésének a megismerésére!

Megoldás. Használható például

https://www.wolframalpha.com/

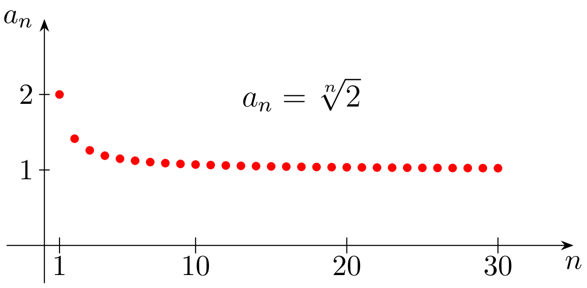
Az eredmények:

Az $(\sqrt[n]{a})$ sorozat, ha $a>0$: Legyen például $a=2$. Ekkor azt kapjuk, hogy

$\sqrt[n]{2}$:

1	2	3	4	5	6	100	1 000	10 000
2	1,414	1,256	1,189	1,149	1,122	1,0069	1,00069	1,000069

A sorozat első néhány tagját szemlélteti az alábbi ábra:



Azt sejthetjük tehát, hogy

$$\sqrt[n]{2} \to 1, \quad \text{ha } n \to +\infty.$$

Ha ez igaz, akkor

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2}} \to 1, \quad \text{ha } n \to +\infty$$

is igaz.

Az $a=2$ paraméter helyett más $a>1$ értékeket véve alakíthatjuk ki azt a sejtést, hogy

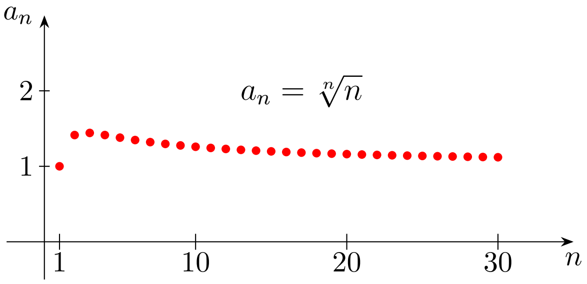
$$\forall\, a>0 \quad \text{esetén} \quad \sqrt[n]{a} \to 1, \quad \text{ha } n \to +\infty.$$

Az $(\sqrt[n]{n})$ sorozat:

$\sqrt[n]{n}$:

1	2	3	4	5	6	100	1 000	10 000
1	1,414	1,442	1,414	1,379	1,348	1,047	1,00693	1,00092

A sorozat első néhány tagját szemlélteti az alábbi ábra:



A sejtés itt is az, hogy $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

A következő tétel azt állítja, hogy ezek a sejtések igazak. ■

4. **1°** *Minden* $a > 0$ *valós szánra az* $\left(\sqrt[n]{a}\right)$ *sorozat konvergens, és*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

2° *Az* $\left(\sqrt[n]{n}\right)$ *sorozat konvergens, és*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

3° *Tegyük fel, hogy az* $(x_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$ *sorozat konvergens, és* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = A > 0$. *Ekkor az* $\left(\sqrt[n]{x_n}\right)$ *sorozat is konvergens, és*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = 1.$$

Bizonyítás.

1° Legyen $a > 1$.

(i) A számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján

$$1 \leq \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1} < \quad (n-1 \text{ darab 1-es}) < \frac{a+n-1}{n} = 1 + \frac{a-1}{n}.$$

A jobb oldalon szereplő sorozat határértéke 1, ezért a közrefogási elv szerint $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

(ii) Ha $a = 1$, akkor az állítás nyilvánvaló.

(iii) Ha $0 < a < 1$, akkor $\frac{1}{a} > 1$, ezért (i) és a konvergens sorozatok éa a műveletek kapcsolatára vonatkozó tétel alapján

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{\frac{1}{\frac{1}{a}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} \to \frac{1}{1} = 1, \text{ ha } n \to +\infty.$$

2° Ismét a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenséget alkalmazzuk:

$$1 \leq \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot 1 \ldots \cdot 1} < \quad (n-2 \text{ darab 1-es}) < \frac{2\sqrt{n}+n-2}{n} = 1 - \frac{2}{n} + \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

A jobb oldalon szereplő sorozat határértéke 1, ezért a közrefogási elv szerint $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

3° $\lim_{n\to+\infty} x_n = A > 0 \Longrightarrow$ az $\varepsilon := A/2 > 0$-hoz $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, hogy

$$\frac{A}{2} < x_n < \frac{3\,A}{2} \quad (\forall\, n > n_0 \text{ indexre}).$$

Ezért

$$\sqrt[n]{\frac{A}{2}} < \sqrt[n]{x_n} < \sqrt[n]{\frac{3\,A}{2}}, \qquad \text{ha } n > n_0.$$

Az **1°** állítás szerint a két szélső sorozat határértéke 1, ezért a közrefogási elvből következik, hogy $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = 1$.

Így a tétel minden állítását bebizonyítottuk. ■

Sorozatok nagyságrendje

2. feladat. *Melyik szám nagyobb*

$$1{,}0001^n \quad \textit{vagy} \quad n^{1000}, \quad \textit{ha } n \textit{ elég nagy?}$$

A válaszhoz végezzünk ismét számítógépes kísérleteket. Ezekből azt a meglepő sejtést alakíthatnánk ki, hogy

$$1{,}0001^n \quad \text{nagyobb, mint} \quad n^{1000} \quad \text{ha } n \text{ elég nagy.}$$

Tovább kísérletezve vizsgálhatnánk az

$$\frac{n^{1000}}{1{,}0001^n} \quad \left(n \in \mathbb{N}^+\right)$$

hányados-sorozatot. Azt kapnánk, hogy n nagy értékeire a tört 0-hoz közeli értékeket vesz fel. Ezt most már úgy is megfogalmazhatjuk, hogy

$$\frac{n^{1000}}{1{,}0001^n} \to 0, \quad \text{ha } n \to +\infty.$$

Az $1{,}0001$ alap és az 1000 kitevő helyett más értékeket véve alakíthatjuk ki azt a **sejtést**, hogy minden rögzített $k = 1, 2, \ldots$ és $a > 1$ esetén

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0.$$

A következő tétel (többek között) azt állítja, hogy ez a sejtés igaz.

$\boxed{\textbf{5.}}$ **1°** *Ha k rögzített természetes szám és $a > 1$ rögzített valós szám, akkor*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0.$$

2° *Minden $a \in \mathbb{R}$ esetén*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

3°

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

Bizonyítás. Az állítás bizonyításához először a 0-hoz tartásra egy igen hasznos elégséges feltételt mutatunk meg.

Segédtétel. *Tegyük fel, hogy az* $(x_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ *egy olyan sorozat, amelyre az* $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)$ *sorozat konvergens és*

$$0 \le \lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1.$$

Ekkor (x_n) *egy nullasorozat.*

A segédtétel bizonyítása. Legyen $A := \lim\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) < 1$. Vegyünk egy $(A, 1)$ intervallumba eső q valós számot.

Válasszunk egy olyan $\varepsilon > 0$-t, amelyre a

$$0 < A - \varepsilon \quad \text{és} \quad A + \varepsilon < q$$

egyenlőtlenségek teljesülnek. (Világos, hogy van ilyen ε.) Tekintsük az A pont ε sugarú környezetét. Mivel $\lim\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = A$, ezért ehhez az ε számhoz létezik olyan $n_0 \in \mathbb{N}$ index, amelyre

$$0 < \frac{x_{n+1}}{x_n} < q \qquad (\forall\, n > n_0,\ n \in \mathbb{N}).$$

Így

$$\frac{x_{n_0+2}}{x_{n_0+1}} < q, \quad \frac{x_{n_0+3}}{x_{n_0+2}} < q, \quad \ldots, \quad \frac{x_{n+1}}{x_n} < q \quad (n \ge n_0).$$

Ezeket az egyenlőtlenséget összeszorozva azt kapjuk, hogy

$$0 < x_{n+1} < \frac{x_{n_0+1}}{q^{n_0+1}} q^n \qquad (\forall\, n > n_0,\ n \in \mathbb{N}).$$

Mivel $0 < q < 1$, ezért $\lim(q^n) = 0$. A közrefogási elvből következik, hogy $\lim(x_n) = 0$. $\square$

Az $\boxed{5.}$ állítás bizonyítása.

1° Az 5. tételt az $x_n := \frac{n^k}{a^n}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ sorozatra alkalmazva kapjuk, hogy

$$0 < \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\dfrac{(n+1)^k}{a^{n+1}}}{\dfrac{n^k}{a^n}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^k \cdot \frac{1}{a} =$$
$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \cdot \frac{1}{a} \to \frac{1}{a} < 1, \quad \text{ha } n \to +\infty,$$

ezért $\lim(x_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$.

2° Ha $a = 0$, akkor az állítás nyilván igaz. Ha $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, akkor az 5. tételt most az $x_n := \frac{|a|^n}{n!}$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozatra alkalmazva kapjuk, hogy

$$0 < \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\dfrac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{|a|^n}{n!}} = \frac{|a|}{n+1} \to 0 < 1 \ \text{ ha } n \to +\infty,$$

azaz $\lim(x_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|a|^n}{n!} = 0$, de akkor $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ is teljesül.

3^o Ha $\mathbb{N} \ni n \geq 2$, akkor

$$0 < \frac{n!}{n^n} = \frac{2}{n} \cdot \frac{3}{n} \cdots \frac{n}{n} \cdot \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Mivel $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, ezért a közrefogási szerint $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$. ■

Megjegyzés. Tekintsük például az $\left(\frac{n^3}{2^n}\right)$ sorozatot. Mivel $\lim{(n^3)} = \lim{(2^n)} = +\infty$ (n^3 és 2^n is „akármilyen nagy" lehet, ha n „elég nagy"), ezért a hányados határértékére vonatkozó tétel erre a sorozatra nem alkalmazható („kritikus határérték"). A tétel **1^o** állításából azonban az következik, hogy

$$\frac{n^3}{2^n} \to 0, \quad \text{ha } n \to +\infty$$

ami azt jelenti, hogy a $\frac{n^3}{2^n}$ tört „akármilyen kicsi" lehet, ha n „elég nagy", azaz 2^n „sokkal nagyobb", mint n^3, ha n „elég nagy". Röviden azt mondjuk, hogy a (2^n) sorozat *erősebben tart* $+\infty$-hez, mint az (n^3) sorozat.

Általában: ha az (a_n) és a (b_n) sorozatnak is $+\infty$ a határértéke, akkor azt mondjuk, hogy (b_n) **erősebben** (vagy **sokkal gyorsabban**) **tart $+\infty$-hez**, mint (a_n), ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

Ebben az esetben azt is mondjuk, hogy b_n **sokkal nagyobb**, mint a_n, ha n elég nagy; és ezt így jelöljük:

$$a_n \ll b_n, \quad \text{ha } n \text{ elég nagy}.$$

A most bevezetett jelöléssel a feladat állításait így fejezhetjük ki: ha $a > 1$ rögzített valós és k rögzített pozitív természetes szám, akkor

$$n^k \ll a^n \ll n! \ll n^n, \quad \text{ha } n \text{ elég nagy}.$$

■