

1) Szuprémum elv

H halmaz részhalmaza R -nek

H nem üres

H felülről korlátos

$\Rightarrow R$ minden nem üres felülről korlátos részhalmazának felső korlátjai közt van legkisebb

2) Teljes indukció elve

tegyük fel minden n természetes számra adott egy $A(n)$ állítás

$A(0)$ -ra igaz

ha $A(n)$ -re igaz akkor $A(n+1)$ -re is igaz

\Rightarrow mindenre igaz

3) Archimedes tétel

minden $a > 0$ és b valós számra létezik n természetes szám, amire $a \cdot n > b$

4) Cantor-féle közös rész-tétel

$[a_n, b_n]$ részhalmaza R -nek

$[a_{n+1}, b_{n+1}]$ részhalmaza $[a_n, b_n]$ -nek

a plusz végtelenbe menő metszetük nem üreshalmaz

5) Konvergens sorozat határértéke egyértelmű*

A, B eleme R

ha $\lim(a_n) = A$ és $\lim(b_n) = B \Rightarrow A=B$

6) Konvergenca és korlátosság kapcsolata

minden konvergens sorozat korlátos

visszafele nem igaz, a korlátosság szükséges de nem elégséges feltétele a konvergenciának

7) Műveletek nullsorozatokkal

legyen a_n és b_n nullsorozat, c_n korlátos sorozat

$(a_n + b_n)$ is nullsorozat

$(a_n \cdot b_n)$ is nullsorozat

$(a_n \cdot c_n)$ is nullsorozat

8) Konvergens sorozatok szorzatára vonatkozó tétel

tegyük fel a_n és b_n sorozatoknak van határértéke

A, B eleme R felülvonás, $\lim a_n = A$ és $\lim b_n = B$

$\Rightarrow \lim (a_n \cdot b_n) = AB$, amennyiben $A \cdot B$ értelmezve van

9) Konvergens sorozatok hányadosára vonatkozó tétel

tegyük fel a_n és b_n sorozatoknak van határértéke

A, B eleme R felülvonás, $\lim a_n = A$ és $\lim b_n = B$

b_n nem nulla

$\Rightarrow \lim (a_n / b_n) = A/B$, amennyiben A/B értelmezve van

10) A közrefogási elv

legyen a_n, b_n és c_n korlátos sorozatok

ha létezik N természetes szám, amire minden $n > N$: $a_n \leq b_n \leq c_n$

a_n és c_n sorozatoknak van határértéke ÉS $\lim a_n = \lim c_n = A$
akkor $\lim b_n = A$

11) A határérték és a rendezés kapcsolata*

ilyen a közrefogási elv is

legyen $\lim(a_n)=A$ és $\lim(b_n)=B$

ha $A > B \Rightarrow$ létezik n' természetes szám, amire minden $n > n'$: $a_n > b_n$

ha létezik n' természetes szám, amire minden $n > n'$: $a_n \geq b_n \Rightarrow A \geq B$

ezek visszafelé nem biztos hogy igazak

12) Monoton növekvő sorozat határértéke

felülről korlátos monoton növekvő sorozat konvergens és $\lim(a_n) = \sup\{a_n \mid n \text{ term szám}\}$

felülről nem korlátos monoton növekvő sorozat határértéke $+\infty$

13) Minden sorozatnak van monoton részsorozata

legyen a_n valós sorozat és v_n indexsorozat

létezik olyan $(a_{v(n)})$ részsorozat ami monoton csökkenő vagy növekvő

14) Végtelen sorokra vonatkozó összehasonlító kritériumok

legyen a_n és b_n végtelen sorok

minden N természetes számra: $0 \leq a_n \leq b_n$, minden $n > N$

majoráns kritérium: ha b_n konvergens $\Rightarrow a_n$ is konvergens

minoráns kritérium: ha a_n divergens $\Rightarrow b_n$ is divergens

15) A Cauchy-féle gyökkritérium

n -ed gyök alatt $|a_n|$

ha $0 \leq A < 1$ a $\sum a_n$ abszolút konvergens

ha $A > 1$ a $\sum a_n$ divergens

ha $A=1$ a $\sum a_n$ lehet konvergens és divergens is

ez akkor bukik el, ha $A=1$

pl. $a_n=1/n$, $b_n=1/n^2$ és $c_n=(-1)^n/n$

ekkor $\lim(n\text{-ed gyök alatt } |a_n|) = \lim(n\text{-ed gyök alatt } |b_n|) = \lim(n\text{-ed gyök alatt } |c_n|) = 1$

közben a_n divergens, b_n abszolút konvergens, c_n meg konvergens de nem abszolút konvergens

16) A D'Alembert-féle hányadoskritérium

$|a_{n+1}|/|a_n|$

ha $0 \leq A < 1$ $\sum a_n$ abszolút konvergens

ha $A > 1$ a $\sum a_n$ divergens

ha $A=1$ a $\sum a_n$ lehet konvergens és divergens is

ez akkor bukik el, ha $A=1$

pl. $a_n=1/n$, $b_n=1/n^2$ és $c_n=(-1)^n/n$

ekkor $\lim(|a_{n+1}|/|a_n|) = \lim(|b_{n+1}|/|b_n|) = \lim(|c_{n+1}|/|c_n|) = 1$

közben a_n divergens, b_n abszolút konvergens, c_n meg konvergens de nem abszolút konvergens

- 17) Abszolút konvergencia sorok átrendezése
abszolút konvergencia sor átrendezése is absz konv és összege ugyanaz, mint az eredeti soré
- 18) Hatványsorok konvergencia halmaza intervallum
 $(-1,1)$ re SUM, ahol $n=0$ x^n
 $(-1,1)$ re SUM, ahol $n=0$ $(-1)^n \cdot x^n / n$
 $[-1,1)$ re SUM, ahol $n=0$ x^n/n
 $[-1,1)$ re SUM, ahol $n=0$ x^n/n^2
- 19) A Cauchy-Hadamard tétel == Hatványsorok konvergenciahalmaza
SUM, ahol $n=0$ $a_n(x-a)^n$, ahol x valós szám
a konvergencia halmaz az alábbi egymást kizáró esetek közül az egyik
1)) létezik $R > 0$ valós szám, hogy a hatványsor x valós szám esetén absz konv ha $|x-a| < R$ és div ha $|x-a| > R$
2)) a hatványsor csak az $x=a$ pontban konvergens $\Rightarrow R = 0$
3)) a hatványsor minden x valós szám esetén konvergens $\Rightarrow R = +\infty$
 \Rightarrow a konvergenciasugár tehát: $0 \leq R \leq +\infty$
- 20) Sorok téglány szorzata
legyen SUM a_n , ahol $n=0$ és SUM b_n , ahol $n=0$ konv végtelen sorok téglányszorzata SUM t_n , ahol $n=0$
 $t_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ ($n=0,1,2,3..$)
- 21) Függvények határértékének egyértelműsége*
legyen f megy valósból valósba
 $A, B \in \mathbb{R}$
ha $\lim_{x \rightarrow A} f(x) = A$ és $\lim_{x \rightarrow B} f(x) = B \Rightarrow A=B$
- 22) A határértékre vonatkozó átviteli elv
legyen f \mathbb{R} valósból \mathbb{R} valósba képez, $a \in \mathbb{R}$ és $A \in \mathbb{R}$ felülvonás
 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, minden x_n természetesből megy $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ -ba és $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$
 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$
- 23) Monoton függvények határértéke
 f monoton növekvő (α, β) -n:
 $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = \inf\{f(x) \mid x \in (\alpha, \beta), x > \alpha\}$
 $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = \sup\{f(x) \mid x \in (\alpha, \beta), x < \beta\}$
monoton csökkenő (α, β) -n:
 $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = \sup\{f(x) \mid x \in (\alpha, \beta), x > \alpha\}$
 $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = \inf\{f(x) \mid x \in (\alpha, \beta), x < \beta\}$
- 24) Az összetett függvény folytonossága
 f, g megy valósból valósba
 $a \in \mathbb{R}$ és $f(a) \in \mathbb{R} \Rightarrow g \in \mathbb{R}$
 \Rightarrow az összetett fg örökli a belső és a külső fg folytonosságát
- 25) Korlátos és zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény korlátos

ha f folytonos $[a,b]$ -n akkor ott f korlátos

26) Weierstrass tétele

legyen $-\infty < a < b < +\infty$

ha f meg $[a,b]$ -ből valósba és folytonos az $[a,b]$ -n, akkor f -nek létezik abszolút maximum és abszolút minimumhelye

\Rightarrow létezik $\alpha, \beta \in [a,b]$: $f(\beta) \leq f(x) \leq f(\alpha)$

27) A Bolzano-tétel

legyen f meg $[a,b]$ -ből valósba folytonos f

ha f a két végpontban különböző értéket vesz fel $f(a) \cdot f(b) < 0$

\Rightarrow létezik $\epsilon \in (a,b)$, amire $f(\epsilon) = 0$