

## Függvények aszimptotikus növekedési üteme

### I. Általános összefüggések

#### A. Definíciók

Legyenek  $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  függvények, ahol  $\mathbb{N}$  a természetes számok,  $\mathbb{R}_0^+$  pedig a nemnegatív valós számok halmaza.

- $f$ -nek  $g$  aszimptotikus felső korlátja (jelölése:  $f(n) = O(g(n))$ ; ejtsd:  $f(n)$  = nagyordó  $g(n)$ ) ha létezik olyan  $c > 0$  konstans és  $N \in \mathbb{N}$  küszöbindex, hogy  $f(n) \leq c \cdot g(n)$  minden  $n \geq N$ -re.
- $f$ -nek  $g$  aszimptotikus alsó korlátja (jelölése:  $f(n) = \Omega(g(n))$ ) ha létezik olyan  $c > 0$  konstans és  $N \in \mathbb{N}$  küszöbindex, hogy  $f(n) \geq c \cdot g(n)$  minden  $n \geq N$ -re.
- $f$ -nek  $g$  aszimptotikus éles korlátja (jelölése:  $f(n) = \Theta(g(n))$ ) ha léteznek olyan  $c_1, c_2 > 0$  konstansok és  $N \in \mathbb{N}$  küszöbindex, hogy  $c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n)$  minden  $n \geq N$ -re.

Megjegyzés: aszimptotikusan nemnegatív (egy küszöbindextől nemnegatív) értékű sorozatokra is kiterjeszthető.

#### B. Tulajdonságok

$O$ ,  $\Omega$ ,  $\Theta$  2-aritású relációnak is tekinthetők a  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  függvényeken (pl.  $(f, g) \in \Theta \Leftrightarrow f = \Theta(g)$ ).

1.  $O$ ,  $\Omega$ ,  $\Theta$  tranzitív (pl.  $f = O(g)$ ,  $g = O(h) \Rightarrow f = O(h)$ )
2.  $O$ ,  $\Omega$ ,  $\Theta$  reflexív
3.  $\Theta$  szimmetrikus
4.  $O$ ,  $\Omega$  fordítottan szimmetrikus ( $f = O(g) \Leftrightarrow g = \Omega(f)$ )
5. (köv.)  $\Theta$  ekvivalenciareláció, a  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  függvények egy osztályozását adja. Az egyes függvényosztályokat általában "legegyszerűbb" tagjukkal reprezentáljuk. Pl. 1 (korlátos függvények),  $n$  (lineáris függvények),  $n^2$  (négyzetes függvények).

6.  $f, g = O(h) \Rightarrow f + g = O(h)$ , hasonlóan  $\Omega$ -ra,  $\Theta$ -ra. (Összeadásra való zártság)
7. Legyen  $c > 0$  konstans  $f = O(g) \Rightarrow c \cdot f = O(g)$ , hasonlóan  $\Omega$ -ra,  $\Theta$ -ra. (Pozitív konstanssal szorzásra való zártság)
8.  $f + g = \Theta(\max\{f, g\})$  (szekvencia tétele). A domináns tag határozza meg egy összeg aszimptotikus nagyságrendjét.

### C. Ha létezik az $f/g$ határérték

- ha  $f(n)/g(n) \rightarrow +\infty \Rightarrow f(n) = \Omega(g(n))$  és  $f(n) \neq O(g(n))$
- ha  $f(n)/g(n) \rightarrow c \ (c > 0) \Rightarrow f(n) = \Theta(g(n))$
- ha  $f(n)/g(n) \rightarrow 0 \Rightarrow f(n) = O(g(n))$  és  $f(n) \neq \Omega(g(n))$

### D. Hibatagok jelölésére

Példa:

$$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + O(n).$$

$$(n+1)^k = n^k + kn^{k-1} + O(n^{k-2}).$$

## II. Konkrét függvények

- (a)  $p(n) = a_k n^k + \dots + a_1 n + a_0 \ (a_k > 0)$ , ekkor  $p(n) = \Theta(n^k)$ ,
- (b) Minden  $p(n)$  polinomra és  $c > 1$  konstansra  $p(n) = O(c^n)$ , de  $p(n) \neq \Omega(c^n)$ ,
- (c) Minden  $c > d > 1$  konstansokra  $d^n = O(c^n)$ , de  $d^n \neq \Omega(c^n)$ ,
- (d) Minden  $a, b > 1$ -re  $\log_a n = \Theta(\log_b n)$ ,
- (e) Minden  $c > 0$  -ra  $\log_2 n = O(n^c)$ , de  $\log_2 n \neq \Omega(n^c)$ .

### III. Feladatok

1. Mutassunk példát olyan  $f$  és  $g$  fv-ekre, melyekre

(a)  $f = O(g)$ , de  $f \neq \Omega(g)$ ,

(b)  $f = \Omega(g)$ , de  $f \neq O(g)$ ,

(c)  $f = \Theta(g)$

Igazoljuk állításainkat közvetlenül a definíciók felhasználásával!

2. Igazoljuk  $O$  tranzitivitását!

3. Igazoljuk  $\Theta$  szimmetrikusságát!

4. Igazoljuk a **C** pont állítását!

5. Igazoljuk a **II** pont állításait!

6. Mit mondhatunk arról az  $f$  függvényről, melyre  $f(1) = 1$ ,  $f(2) = 10$ , és  $f(3) = 100$ ?

(1)  $f(n) = O(10^n)$ ,

(2)  $f(n) = 10^{O(n)}$ ,

(3) Egyik fenti állítás sem igaz minden esetben.

7. Milyenek a  $\Theta(1)$  függvények? Igaz-e, hogy minden  $\Theta(n)$  függvény elsőfokú polinom?

8. Hasonlítsuk össze az alábbi 2 függvényt aszimptotikus növekedésük szerint!  $f(n) = 5 \cdot 2^n + n^3$ ,  $g(n) = 3^n + 2 \cdot n$ .

9. Lássuk be, hogy  $n \geq 6$ -ra

$$\left(\frac{n}{3}\right)^n < n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

10. Lássuk be, hogy  $\log_2(n!) = \Theta(n \log n)$ .

11. Rendezzük aszimptotikus nagyságrendjük szerint az alábbi függvényeket!

$$\log_3(n!),$$

$$(2/3)^n,$$

$$4 \log_{17}(n+5),$$

$$n^{1,01} + 3\sqrt{n},$$

$$100n^{100} + 3^n,$$

$$n!,$$

$$n^{0,03} + 2 \ln n,$$

$$3^n + 2^n,$$

$$n^{3/2}.$$

#### IV. Megoldások

1. (a)  $f(n) = 3n + 4, g(n) = 2n^2 + 1$

$n \geq 1$ -re  $f(n) = 3n + 4 \leq 3n^2 + 4 < 8n^2 + 4 = 4g(n)$ . Tehát  $N = 1, c = 4$  például jó.

Ha  $2n^2 + 1 \leq c(3n + 4)$  igaz lenne valamely  $c > 0$ -ra és  $n > N$ -re akkor  $(2n^2 + 1)/(3n + 4) \leq c$  teljesülne. Azonban a baloldalon álló tört nem korlátos ( $+\infty$  a határértéke).

- (b)  $f(n) = 2n^2 + 1$  és  $g(n) = 3n + 4$  jó.

- (c)  $f(n) = 3n + 4, g(n) = 5n + 1$ . Ekkor minden  $n$ -re  $f(n) = 3n + 4 \leq 20n + 4 = 5g(n)$  és  $g(n) = 5n + 1 \leq 6n + 8 = 2f(n)$ . Tehát például  $N = 0, c_1 = 1/2$  és  $c_2 = 5$  jó választás.

2.  $f = O(g)$ :  $\exists c_1 > 0, N_1 \in \mathbb{N}$ , hogy  $\forall n \geq N_1 : f(n) \leq c_1 g(n)$

$g = O(h)$ :  $\exists c_2 > 0, N_2 \in \mathbb{N}$ , hogy  $\forall n \geq N_2 : g(n) \leq c_2 h(n)$

Így  $\forall n \geq \max\{N_1, N_2\} : f(n) \leq c_1 g(n) \leq c_1 c_2 h(n)$ . Mivel  $c_1, c_2 > 0$ , ezért  $c_1 c_2 > 0$ . Tehát  $f = O(h)$ .

3.  $f = \Theta(g)$ :  $\exists c_1, c_2 > 0, N \in \mathbb{N}$ , hogy  $\forall n \geq N : c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n)$ .

Ekkor

$$\forall n \geq N : \frac{1}{c_2} \cdot f(n) \leq g(n) \leq \frac{1}{c_1} \cdot f(n).$$

4. Mivel  $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  függvények, ezért

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f}{g} = \begin{cases} 0 & \text{1. eset} \\ c(> 0) & \text{2. eset} \\ +\infty & \text{3. eset} \end{cases}$$

1. eset:  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : f(n)/g(n) \leq \varepsilon$ , tehát pl.  $\varepsilon = 5$ -tel:  $\forall n \geq N : f(n) \leq 5 \cdot g(n)$ .

2. eset:  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : c - \varepsilon \leq f(n)/g(n) \leq c + \varepsilon$ . Pl.  $\varepsilon = c/2$ -vel:  $(c/2)g(n) \leq f(n) \leq (3c/2)g(n)$

3. eset:  $\forall K > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : f(n)/g(n) \geq K$ , így pl.  $K = 77$  esetén  $\forall n \geq N$ -re  $f(n)/g(n) \geq 77$ , azaz  $f(n) \geq 77 \cdot g(n)$ .

5. (a) ha  $a_k > 0$ , akkor

$$\frac{p(n)}{n^k} = \frac{a_k n^k + \dots + a_1 n + a_0}{n^k} = a_k + a_{k-1} \frac{1}{n} + \dots + a_0 \frac{1}{n^k} \rightarrow a_k > 0$$

Tehát a  $\mathbf{C}$  szerint  $p(n) = \Theta(n^k)$ .

- (b) •  $x > 1$ -re  $x \leq 2^x$

Teljes indukcióval könnyen bizonyítható, hogy  $n+1 \leq 2^n$ . Létezik  $n \in \mathbb{N} : n \leq x \leq n+1$ .  $x \leq n+1 \leq 2^n \leq 2^x$ .

- Ha  $c > 1$ , akkor  $\exists n_1, n > n_1 : c^n \geq 2$ .

$\varepsilon := c - 1 > 0$ .  $c^n = (1 + \varepsilon)^n = \binom{n}{0} 1^n \varepsilon^0 + \binom{n}{1} 1^{n-1} \varepsilon^1 + \dots = 1 + n\varepsilon + \delta$ , ahol  $\delta \geq 0$ .

- Ha  $c > 1$  és  $k \in \mathbb{N}$  akkor  $n^k = O(c^n)$ .

Legyen  $n_1$  az előző küszöb.  $n > n_1 k$  esetén

$$n^k = n_1^k k^k \left( \frac{n}{n_1 k} \right)^k \leq n_1^k k^k 2^{\frac{n}{n_1 k} \cdot k} \leq n_1^k k^k c^{\frac{n}{n_1}} = n_1^k k^k c^n.$$

- $p(n) = O(n^k)$ , ahol  $k$   $p(n)$  foka.  $n^k = O(c^n)$ , tehát a tranzitivitás miatt  $p(n) = O(c^n)$ .

- Indirekt, tegyük fel, hogy létezik  $d_1 > 0$  és  $N_1 \in \mathbb{N}$ , hogy  $n \geq N_1$ -re  $c^n \leq d_1 p(n)$ . Legyen  $c_1$  olyan, hogy  $1 < c_1 < c$ . Ekkor létezik  $d_2 > 0$  és  $N_2 \in \mathbb{N}$ , hogy  $n \geq N_2$ -re  $p(n) \leq d_2 c_1^n$ . Tehát  $n \geq \max N_1, N_2$ -re  $c^n \leq d_1 p(n) \leq d_1 d_2 c_1^n$ . Azaz  $(\frac{c}{c_1})^n \leq d_1 d_2$ , ami ellentmondás.

- (c) ha  $c > d > 1$ , akkor  $c^n/d^n = (c/d)^n \rightarrow +\infty$ , így  $\mathbf{C}$  szerint  $d^n = O(c^n)$ , de  $d^n \neq \Omega(c^n)$ .

- (d)  $\log_a n = \log_a b \cdot \log_b n$ . Itt  $\log_a b$  konstans, így  $\log_a n = \Theta(\log_b n)$ .

- (e) ha  $m = \log_2 n$ , akkor  $\log_2 n = m^1$  ( $m$  polinomja) és  $n^c = (2^m)^m$  ( $m$  exponenciális függvénye), alkalmazzuk a (b) pontot.

6. (3) a helyes, nem mondhatunk semmit egy függvény viselkedéséről nagy  $n$ -ekre a kezdőértékek alapján.

7. Ha  $f(n) = \Theta(1)$ , akkor vannak olyan  $0 < K_1 < K_2$  konstansok és  $N \geq 0$ , hogy minden  $n \geq N$ -re  $K_1 < f(n) < K_2$ , azaz felülről korlátosak, de 0-hoz se tarthatnak. Például a  $g(n) = n + \log_2 n$  függvényre  $n \leq g(n) < 2n$  teljesül  $n \geq 1$ -re, így  $g(n) = \Theta(n)$ .

8.  $f(n) = 5 \cdot 2^n + n^3$ ,  $g(n) = 3^n + 2 \cdot n$ .

$f(n) = 5; 11; 28; 67 \dots$   $g(n) = 1; 5; 13; 33; \dots$

#### 1. megoldás

- $5 \cdot 2^n + n^3 = \Theta(2^n)$ , valóban:  $\frac{5 \cdot 2^n + n^3}{2^n} = 5 + \frac{n^3}{2^n} \rightarrow 5$ , ebből **C** miatt következik
- $3^n + 2 \cdot n = \Theta(3^n)$ , valóban:  $\frac{3^n + 2 \cdot n}{3^n} = 1 + \frac{2n}{3^n} \rightarrow 1$ , ebből **C** miatt következik
- $\Theta$  tranzitivitása miatt elég a  $2^n$  és  $3^n$  függvényeket aszimptotikusan összehasonlítani. Ezekről viszont tudjuk, hogy a 2.-nak nagyobb az aszimptotikus nagyságrendje.

#### 2. megoldás

Közvetlenül is kiszámíthatjuk a határértéket:

$$\frac{5 \cdot 2^n + n^3}{3^n + 2 \cdot n} = \frac{5 \cdot (2/3)^n + n^3/3^n}{1 + 2 \cdot n/3^n} \rightarrow \frac{0}{1} = 0$$

A számláló 0-hoz tart, mivel két 0-hoz tartó tag összege. A nevező 1-hez tart, mivel a 2. tag 0-hoz tart. Tehát a határérték  $0/1=0$ . Ebből **C** miatt következik, hogy a 2. függvénynek nagyobb az aszimptotikus nagyságrendje.

9.  $n \geq 6$ -ra teljes indukcióval belátható. Felhasználva, hogy  $(1 + 1/n)^n \rightarrow e$  alulról és  $(1 - 1/n)^n \rightarrow 1/e$  felülről.

10.  $n \geq 6$ -ra  $(n/3)^n < n! < (n/2)^n$ . Tehát  $n(\log_2 n - \log_2 3) < \log_2(n!) < n(\log_2 n - \log_2 2)$ . Így

$$1 - \frac{\log_2 3}{\log_2 n} < \frac{\log_2(n!)}{n \log_2 n} < 1 - \frac{\log_2 2}{\log_2 n},$$

amiből  $\log_2(n!)/(n \log_2 n) \rightarrow 1$ , **C** miatt következik az állítás.

11. legkisebb az (1):

- |                              |                            |                          |
|------------------------------|----------------------------|--------------------------|
| (4) $\log_3(n!)$ ,           | (1) $(2/3)^n$ ,            | (2) $4 \log_{17}(n+5)$ , |
| (5) $n^{1,01} + 3\sqrt{n}$ , | (7-8) $100n^{100} + 3^n$ , | (9) $n!$ ,               |
| (3) $n^{0,03} + 2 \ln n$ ,   | (7-8) $3^n + 2^n$ ,        | (6) $n^{3/2}$ .          |