5. előadás

VALÓS SOROZATOK 4.

Nevezetes sorozatok 2.

Az e szám bevezetése

1. feladat. *Végezzünk számítógépes kísérleteket az*

$$a_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad (n \in \mathbb{N}^+)$$

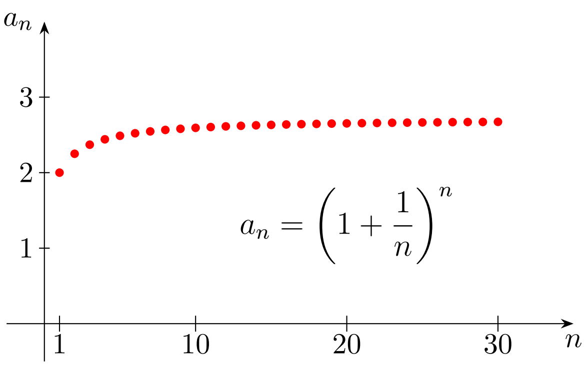
sorozat viselkedésének a megismerésére!

Megoldás. Az eredmények:

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$:

1	2	3	4	5	8	100	1 000	10 000
2	2,25	2,37	2,44	2,49	2,57	2,7048	2,71692	2,71815

A sorozat első néhány tagját szemlélteti az alábbi ábra:



A kísérletekből azt a **sejtést** alakíthatjuk ki, hogy az (a_n) sorozat szigorúan monoton növekedő és felülről korlátos. A következő tétel azt állítja, hogy ez a sejtés igaz. ■

$\boxed{6.}$ **Az e szám értelmezése.** *Az*

$$a_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad (n \in \mathbb{N}^+)$$

sorozat szigorúan monoton növekedő és felülről korlátos, tehát konvergens. Legyen

$$e := \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n .$$

Megjegyzés. Figyeljük meg, hogy „$1^{+\infty}$” típusú kritikus határértékről van szó, ugyanis az 1-hez közeli a_n számok nagy kitevőjű b_n hatványaira az a_n és b_n megválasztásától függően minden eset előfordulhat. Ezt illusztrálják az alábbi példák:

$$\begin{array}{llll}
a_n := \sqrt[n]{c} \to 1 \quad (c>0), & b_n := n \to +\infty, & \Longrightarrow & a_n^{b_n} \to c; \\
a_n := \sqrt[n]{n} \to 1, & b_n := n \to +\infty & \Longrightarrow & a_n^{b_n} \to +\infty; \\
a_n := \begin{cases} 1, & \text{ha } n = 1,3,5,\ldots \\ \sqrt[n]{2}, & \text{ha } n = 2,4,6,\ldots \end{cases} \to 1, & b_n := n \to +\infty, & \Longrightarrow & \nexists \lim \left(a_n^{b_n}\right).
\end{array}$$

A tétel azt állítja, hogy $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ nagy n-ekre közel van az e-vel jelölt számhoz. ■

Bizonyítás. Az állítást a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenség **ötletes** felhasználásaival bizonyítjuk.

- **A monotonitás** igazolásához az egyenlőtlenséget az $(n+1)$ darab

$$1, \quad 1+\frac{1}{n}, \quad 1+\frac{1}{n}, \quad \ldots, \quad 1+\frac{1}{n}$$

számra alkalmazzuk. Mivel ezek nem mind egyenlők, ezért

$$\sqrt[n+1]{1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} < \frac{1+n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1} = \frac{n+2}{n+1} = 1+\frac{1}{n+1}.$$

Mindkét oldalt $(n+1)$-edik hatványra emelve azt kapjuk, hogy

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = a_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}^+),$$

amivel beláttuk, hogy a sorozat szigorúan monoton növekedő.

- **A korlátosság** bizonyításához most az $(n+2)$ darab

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}, \quad 1+\frac{1}{n}, \quad 1+\frac{1}{n}, \quad \ldots, \quad 1+\frac{1}{n}$$

számra alkalmazzuk ismét a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenséget:

$$\sqrt[n+2]{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} < \frac{2\cdot\frac{1}{2}+n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+2} = \frac{n+2}{n+2} = 1.$$

Ebből következik, hogy

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 4 \quad (n \in \mathbb{N}^+),$$

ezért a sorozat felülről korlátos.

A monoton sorozatok határértékére vonatkozó tételből következik, hogy a sorozat konvergens. ■

Megjegyzés. Az e szám a matematika egyik legfontosabb állandója, amit *Leonhard Euler* (1707–1783) svájci matematikus vezetett be 1748-ban.

Az $\big((1+1/n)^n\big)$ sorozat határértékére külön szimbólum bevezetésének indoka a következő: Később majd meg fogjuk mutatni, hogy e **irracionális** szám, egy közelítő értéke $e \approx 2,718$. Az is igaz, hogy e ún. **transzcendens szám**. Ez azt jelenti, hogy nincs olyan egész együtthatós polinom, aminek ez a szám gyöke lenne. ($\sqrt{2}$ például irracionális, de nem transzcendens szám, mert $\sqrt{2}$ gyöke az $x^2-2=0$ egyenletnek.) Azokat a valós számokat, amelyek valamely egész együtthatós polinomnak a gyökei **algebrai számnak** nevezzük. ($\sqrt{2}$ tehát algebrai szám.) ■

$\boxed{\textbf{7.}}$ *Ha x tetszőleges racionális szám, akkor*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

Bizonyítás. „$1^{+\infty}$" típusú kritikus határértékről van szó.

1. eset. Ha $\boxed{x=0}$, akkor az állítás nyilvánvaló, hiszen az (1) konstans sorozat határértéke $1=e^0$.

2. eset. Tegyük fel, hogy $\boxed{x=\frac{p}{q}>0}$. Legyen $\alpha_n := \frac{n}{x}$ $(n\in\mathbb{N})$, és vegyük ezen számok $[\alpha_n]$ egészrészét. Ekkor

$$[\alpha_n] \le \alpha_n < [\alpha_n]+1 \quad (n\in\mathbb{N}),$$

továbbá $\lim(\alpha_n) = \lim\big([\alpha_n]\big) = +\infty$. Így

$$\underbrace{\left(1+\frac{1}{[\alpha_n]+1}\right)^{[\alpha_n]+1}}_{=:a_n}\cdot\underbrace{\left(1+\frac{1}{[\alpha_n]+1}\right)^{-1}}_{\to 1} \le \left(1+\frac{1}{\alpha_n}\right)^{\alpha_n} < \underbrace{\left(1+\frac{1}{[\alpha_n]}\right)^{[\alpha_n]}}_{=:b_n}\cdot\underbrace{\left(1+\frac{1}{[\alpha_n]}\right)}_{\to 1}.$$

Könnyen igazolható, hogy az (a_n) és a (b_n) sorzatok határértéke e-vel egyenlő, ezért a közrefogási elv alapján

$$(*)\qquad \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha_n}\right)^{\alpha_n} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}} = e.$$

A fentiekből az is következik, hogy *minden* $(+\infty)$-hez tartó racionális sorozatra is fennáll a

$$(**)\qquad \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\beta_n}\right)^{\beta_n} = e$$

egyenlőség.

Ha $x=\frac{p}{q}>0$ alakú racionális szám, akkor

$$\left(1+\frac{x}{n}\right) = \left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{x}}\right)^{\frac{n}{x}}\right]^x = \left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{x}}\right)^{\frac{n}{x}}\right]^{\frac{p}{q}} \xrightarrow[n\to+\infty]{}$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \text{(a } (*) \text{ és } c_n^{p/q}\to A^{p/q},\ \text{ha } c_n\to A \text{ alapján)} \xrightarrow[n\to+\infty]{}$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{e^p} = e^x.$$

3. eset. Tegyük fel, hogy $\boxed{x = -\frac{p}{q} < 0}$ racionális szám. Először azt mutatjuk meg, hogy *tetszőleges* $(+\infty)$-hez tartó (β_n) racionális sorozatra

$$(\#) \qquad \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{\beta_n}\right)^{\beta_n} = \frac{1}{e} = e^{-1}.$$

Tekintsük ugyanis a következő átalakításokat:

$$\left(1 - \frac{1}{\beta_n}\right)^{\beta_n} = \left(\frac{\beta_n - 1}{\beta_n}\right)^{\beta_n} = \left(1 + \frac{1}{\beta_n - 1}\right)^{-\beta_n} =$$
$$= \left[\left(1 + \frac{1}{\beta_n - 1}\right)^{\beta_n - 1}\right]^{-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{\beta_n - 1}\right)^{-1}.$$

Az első tényező (**) alapján e^{-1}-hez, a második pedig nyilván 1-hez tart, ezért a (#) állítás valóban teljesül.

Ha $x = -\frac{p}{q} < 0$, akkor $y = -x > 0$. Így

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{y}{n}\right)^n = \left[\left(1 - \frac{1}{\frac{n}{y}}\right)^{\frac{n}{y}}\right]^y = \left[\left(1 - \frac{1}{\frac{n}{y}}\right)^{\frac{n}{y}}\right]^{\frac{p}{q}}.$$

Az [...]-beli sorozat határértéke (#) alapján e^{-1}, ezért

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \left(e^{-1}\right)^{\frac{p}{q}} = e^{-\frac{p}{q}} = e^x.$$

Az állítást tehát negatív racionális számokra is igazoltuk. ■

Rekurzív sorozatok határértéke

A monoton sorozatok konvergenciájára vonatkozó tétel egyszerű feltételei miatt jól alkalmazható számos, rekurzióval megadott sorozat konvergencia-vizsgálatánál.

A továbbiakban ennek a tételnek a felhasználásával igazoljuk pozitív valós számok m-edik gyökének a létezésére vonatkozó állítást, és egy egyszerű konstruktív eljárást adunk ezek kiszámítására.

Ha $A > 0$ tetszőleges valós szám és $m \geq 2$ természetes szám, akkor az $\sqrt[m]{A}$ szimbólummal jelöljük (és az A szám m**-edik gyökének** nevezzük) azt a pozitív valós számot, amelynek az m-edik hatványa A. A következő tétel azt (is) állítja, hogy adott A és m esetén egyértelműen létezik a szóban forgó szám.

1. tétel: Gyökvonás. *Legyen $A > 0$ valós szám és $m \geq 2$ természetes szám. Ekkor:*

1^o *Pontosan egy olyan α pozitív valós szám létezik, amelyre $\alpha^m = A$ (α-t az A szám m-**edik gyökének nevezzük**, és az $\sqrt[m]{A}$ szimbólummal jelöljük).*

2^o *Ez az α szám az*

$$\begin{cases} a_0 > 0 \text{ tetszőleges valós}, \\ a_{n+1} := \dfrac{1}{m}\left(\dfrac{A}{a_n^{m-1}} + (m-1)a_n\right) \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

rekurzióval értelmezett (a_n) sorozat határértéke, azaz $\lim (a_n) = \alpha = \sqrt[m]{A}$.

Bizonyítás. Az állítást több lépésben igazoljuk.

1. lépés. Az egyértelműség. Mivel $0 < \alpha_1 < \alpha_2 \Longrightarrow \alpha_1^m < \alpha_2^m$, ezért legfeljebb egy olyan pozitív α szám létezik, amelyre $\alpha^m = A$.

2. lépés. Teljes indukcióval igazolható, hogy az (a_n) sorozat „jól definiált" és $a_n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$.

3. lépés. Igazoljuk, hogy az (a_n) sorozat konvergens.

A sorozat alulról korlátos és 0 egy triviális alsó korlát. Szükségünk lesz azonban arra, hogy ennél jobb alsó korlát is megadható. Ehhez **vegyük észre** azt, hogy a rekurzív képlet jobb oldalán álló összeg az m darab

$$x_1 := \frac{A}{a_n^{m-1}}, \quad x_2 := a_n, \quad x_3 := a_n, \quad \ldots, \quad x_{m-1} := a_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

pozitív szám számtani közepe, és ezek mértani közepe

$$\sqrt[m]{\frac{A}{a_n^{m-1}} \cdot \underbrace{a_n \cdot a_n \cdot \ \ldots \ \cdot a_n}_{m-1 \text{ darab}}} = \sqrt[m]{A}.$$

Így a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján

$$a_n = \frac{1}{m}\left(\frac{A}{a_{n-1}^{m-1}} + a_{n-1} + \cdots + a_{n-1}\right) \geq \sqrt[m]{A} \quad \Longrightarrow \quad a_n^m \geq A > 0 \ (n \in \mathbb{N}^+).$$

Most azt mutatjuk meg, hogy az (a_n) sorozat a második tagtól kezdve **monoton csökkenő**, azaz

$$a_{n+1} \leq a_n \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1, \quad \text{ha } n = 1, 2, \ldots .$$

Valóban, a rekurzív képlet és az $a_n^m \geq A$ egyenlőtlenség alapján azt kapjuk, hogy

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{m}\left(\frac{A}{a_n^m} + m - 1\right) \leq \frac{1}{m}\big(1 + m - 1\big) = 1, \quad \text{ha } n = 1, 2, \ldots ,$$

ezért az (a_n) sorozat valóban monoton csökkenő.

Az (a_n) sorozat tehát monoton csökkenő és alulról korlátos, ezért a monoton sorozatok határértékére vonatkozó tétel alaján (a_n) **konvergens**. Legyen

$$\alpha := \lim (a_n).$$

Az eddigiekből az következik, hogy $\alpha \geq 0$. Fontos **észrevétel** azonban az, hogy az

$$\alpha > 0$$

egyenlőtlenség is igaz. Ez az állítás a konvergens sorozatok és a műveletek kapcsolatára vonatkozó tételből, az $a_n^m \geq A$ egyenlőtlenségből, valamint a határérték és a rendezés kapcsolatára vonatkozó tételből következik.

4. lépés. Igazoljuk, hogy $\alpha^m = A$.

Az (a_n) sorozatot megadó rekurzív összefüggésben az $n \to +\infty$ határátmenetet véve az α határértékre egy egyenletet kapunk. Valóban, ha alkalmazzuk a konvergens sorozatok és a műveletek kapcsolatára vonatkozó tételeket (itt használjuk az $\alpha > 0$ egyenlőtlenséget), akkor az adódik, hogy

$$\begin{array}{ccccc} a_{n+1} & = & \dfrac{1}{m}\left(\dfrac{A}{a_n^{m-1}} + (m-1)a_n\right) & & (n \in \mathbb{N}) \\ \downarrow & n \to +\infty & \downarrow & & (\alpha > 0\ !) \\ \alpha & = & \dfrac{1}{m}\left(\dfrac{A}{\alpha^{m-1}} + (m-1)\,\alpha\right). & & \end{array}$$

Innen már egyszerű átrendezéssel azt kapjuk, hogy

$$m\,\alpha^m = A + (m-1)\alpha^m \quad \Longrightarrow \quad \alpha^m = A.$$

Így a tétel minden állítását bebizonyítottuk. ■

Megjegyzések

1. A tételből egy igen egyszerű konstruktív eljárást kapunk **irracionális számok racionális számokkal való megközelítésére**. Ez a helyzet például akkor, ha A és a_0 racionális és $\sqrt[m]{A}$ irracionális.

Alkalmazzuk a közölt iterációt a $\sqrt{2}$ irracionális szám racionális számokkal való megközelítésére. Legyen

$$a_0 := 2 \quad \text{és} \quad a_{n+1} := \frac{1}{a_n} + \frac{a_n}{2} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Világos, hogy $a_n \in \mathbb{Q}$ minden n-re. A tételből következik, hogy (a_n) konvergens és $\sqrt{2}$ a határértéke. Ez azt jelenti, hogy nagy n indexekre a_n közel van $\sqrt{2}$-höz:

$$a_n \approx \sqrt{2} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Az iterációs sorozat első 7 tagja:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 2,\\
a_1 &= 1,5\\
a_2 &= 1,416\,666\ \ldots\\
a_3 &= 1,414\,215\ \ldots\\
a_4 &= 1,414\,213\,562\,374\,689\ \ldots\\
a_5 &= 1,414\,213\,562\,373\,095\,048\,801\,689\,623\ \ldots\\
a_6 &= 1,414\,213\,562\,373\,095\,048\,801\,688\,724\ \ldots
\end{aligned}
$$

Az eredményekből úgy tűnik, hogy a szóban forgó konvergencia elég gyors. Az $a_n \approx \sqrt{2}$ közelítésre az

$$(*) \qquad \left|a_n - \sqrt{2}\right| \leq \frac{3}{2^{2^n}} \quad (n \in \mathbb{N})$$

egyenlőtlenség (az ún. **hibabecslés**) igazolható, és ez bizonyítja is a számítógépes kísérletekből sejthető gyors konvergenciát.

Figyeljük meg, hogy (*) felhasználásával meg tudnánk határozni olyan $N \in \mathbb{N}$ indexet, amelyre a_N és $\sqrt{2}$ (például) első 37 tizedesjegye megegyezik.

2. Rekurzív módon megadott (a_n) sorozatok konvergenciájának a vizsgálatánál sokszor (de nem mindig!) használható az előző tétel bizonyításában követett eljárás.

Először megmutatjuk azt, hogy (a_n) **konvergens**. „Szerencsés esetekben” a sorozat **monoton** és **korlátos** (ezeket a tulajdonságokat meg lehet sejteni, majd a sejtéseket például teljes indukcóval be lehet bizonyítani), következésképpen (a_n) konvergens.

Ezután a rekurzív képletben vesszük az $n \to +\infty$ határátmenetet. Így a sorozat határértékére egy egyenletet kapunk, majd ennek gyökeiből kiválasztjuk (a_n) határértékét. ■

A Bolzano–Weierstrass-tétel és a Cauchy-kritérium

Most két, elsősorban elméleti szempontból alapvető fontosságú eredményt ismertetünk.

A Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel

2. tétel: A Bolzano–Weierstrass-tétel. *Minden, korlátos valós sorozatnak van konvergens részsorozata.*

Bizonyítás. Először egy önmagában is érdekes, de főleg a következményei miatt fontos állítást igazolunk.

Segédtétel. *Minden $a = (a_n)$ valós sorozatnak létezik* ***monoton részsorozata****, azaz létezik olyan $\nu = (\nu_n)$ indexsorozat, amellyel $a \circ \nu$ monoton növekedő vagy monoton csökkenő.*

A segédtétel bizonyítása. Az állítás igazolásához bevezetjük a szóban forgó (a_n) sorozat csúcsának a fogalmát: Azt mondjuk, hogy $a_{n_0} \in \mathbb{N}$ az (a_n) sorozat **csúcsa** (vagy csúcseleme), ha

$$\forall\, n \geq n_0 \ \text{ indexre } \ a_n \leq a_{n_0}.$$

Két eset lehetséges.

1. eset. A sorozatnak **végtelen** sok csúcsa van. Ez azt jelenti, hogy

$$\exists\, \nu_0 \in \mathbb{N}: \quad a_{\nu_0} \ \text{ csúcselem, azaz } \ \forall\, n \geq \nu_0: \quad a_n \leq a_{\nu_0};$$

$$\exists\, \nu_0 < \nu_1 \in \mathbb{N}: \quad a_{\nu_1} \ \text{ csúcselem, azaz } \ \forall\, n \geq \nu_1: \quad a_n \leq a_{\nu_1} \ (\leq a_{\nu_0})$$

$$\vdots$$

Ezek a lépések folytathatók, mert végtelen sok csúcselem van. Így egy olyan $\nu_0 < \nu_1 < \nu_2 \cdots$ indexsorozatot kapunk, amelyre

$$a_{\nu_0} \geq a_{\nu_1} \geq a_{\nu_2} \geq \cdots,$$

ezért a csúcsok $\left(a_{\nu_n}\right)$ sorozata (a_n)-nek egy monoton csökkenő részsorozata.

2. eset. A sorozatnak **véges** sok csúcsa van. Ez pedig azt jelenti, hogy

$$\exists\, N \in \mathbb{N}, \quad \forall\, n \geq N \text{ esetén } \ a_n \ \text{ már nem csúcs.}$$

Így a csúcs definíciója szerint

$$\exists\, \nu_0 > N: \quad a_{\nu_0} > a_N.$$

Mivel a_{ν_0} sem csúcselem, ezért

$$\exists\, \nu_1 > \nu_0: \quad a_{\nu_1} > a_{\nu_0} \ (> a_N).$$

Az eljárást folytatva most olyan $N < \nu_0 < \nu_1 < \nu_2 < \cdots$ indexsorozatot kapunk, amelyre

$$a_N < a_{\nu_0} < a_{\nu_1} < a_{\nu_2} < \cdots.$$

Ebben az esetben tehát $\left(a_{\nu_n}\right)$ sorozat (a_n)-nek egy (szigorúan) monoton növekedő részsorozata. ■

A tétel bizonyításának a befejezése. Ha a sorozat korlátos, akkor minden részsorozata is korlátos. A segédtételből következik, hogy minden korlátos sorozatnak van monoton részsorozata; és a monoton sorozatok konvergencájára vonatkozó tételünk alapján ez a részsorozat konvergens. ■

Megjegyzés. Az ismertetett gondolatmenethez hasonló módon bizonyíthatók az alábbi állítások:

> *Ha egy sorozat felülről nem korlátos, akkor van $(+\infty)$-hez tartó monoton növekedő részsorozata; ha alulról nem korlátos, akkor pedig van $(-\infty)$-hez tartó monoton csökkenő részsorozata.* ■

Cauchy-sorozatok és a Cauchy-féle konvergenciakritérium

Előzetes megjegyzések. A számsorozatokkal kapcsolatos vizsgálatok egyik központi kérdése annak eldöntése, hogy a szóban forgó sorozat konvergens-e. Ennek a definíciójában azonban szerepel egy, a sorozat tagjain „kívüli” dolog is, nevezetesen: a sorozat határértéke, és ennek meghatározása igen sok esetben nem egyszerű feladat.

Néhány, már megismert eredmény azonban egyszerűsíti a helyzetet. Például, ha egy sorozat nem korlátos, akkor nem konvergens. Ennél lényegesebb a monoton és korlátos sorozatokra vonatkozó tétel. Ebben az esetben tehát akkor is eldönthető egy sorozat konvergenciája, ha nem ismerjük a határértékét. A szóban forgó tétel azonban nem egyenértékű a konvergenciával, annak „csak” egy **elégséges** feltétele. Ezért alapvető jelentőségű az a tény, hogy a konvergenciára megadható egy olyan **szükséges és elégséges** feltétel is, amely kizárólag a sorozat tagjainak a segítségével dönt a sorozat konvergens vagy divergens voltáról.

A konvergenciát illetően könnyen juthatunk egy **szükséges** feltételhez. Tegyük fel ui., hogy az (a_n) sorozat konvergens, és legyen $A := \lim (a_n)$. Ekkor

$$\forall\,\varepsilon > 0\text{-hoz}\ \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \ \forall\, n > n_0 : \quad |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2},$$

következésképpen tetszőleges $m, n > n_0$ index mellett

$$\big|a_n - a_m\big| = \big|(a_n - A) + (A - a_m)\big| \le |a_n - A| + |a_m - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Meg fogjuk mutatni, hogy ez **elégséges** feltétele is a konvergenciának. ■

Az elmondottak motiválják az alábbi fogalom bevezetését.

Definíció. *Az (a_n) valós sorozatot **Cauchy-sorozatnak** nevezzük, ha*

$$\forall\,\varepsilon > 0\text{-}hoz\ \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \ \forall\, m, n > n_0\ \ indexre\ \ |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Megjegyzés. Pongyolán, de szemléletesen fogalmazva: „(a_n) akkor Cauchy-sorozat, ha az elég nagy indexű tagjai tetszőlegesen közel vannak egymáshoz”.

A fentiek szerint tehát, ha egy sorozat konvergens, akkor az szükségképpen Cauchy-sorozat is. ■

Példák

1° Az $a_n := \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ harmonikus sorozat Cauchy-sorozat, mert tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén

$$\left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| = \frac{|m-n|}{m} \cdot \frac{1}{n} < \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

ha $m, n > n_0 := \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$.

2° $\big((-1)^n\big)$ nem Cauchy-sorozat. Valóban, ha (például) $\varepsilon = 1$, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $|a_n - a_{n+1}| = |(-1)^n - (-1)^{n+1}| = 2 > \varepsilon$.

3° Az (n) sorozat sem Cauchy-sorozat, mert pl. $\varepsilon = 1$ esetén minden n indexre $|a_{n+2} - a_n| = = 2 > \varepsilon$.

A következő tétel azt állítja, hogy a Cauchy-sorozat tulajdonság szükséges és elégséges feltétele a sorozat konvergenciájának.

3. tétel: A Cauchy-kritérium. *Legyen (a_n) egy valós sorozat. Ekkor*

$$(a_n) \ \textit{konvergens} \quad \iff \quad (a_n) \ \textit{Cauchy-sorozat.}$$

Bizonyítás.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Tegyük fel, hogy (a_n) konvergens, és $A := \lim (a_n)$ a határértéke. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges valós szám. A konvergencia definíciója szerint van olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\, n > n_0$ indexre $|a_n - A| < \varepsilon/2$. Így $\forall\, m, n > n_0$ index esetén

$$\big|a_n - a_m\big| = \big|\big(a_n - A\big) + \big(A - a_m\big)\big| \le |a_n - A| + |a_m - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

és ez azt jelenti, hogy (a_n) Cauchy-sorozat.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Tegyük fel, hogy (a_n) Cauchy-sorozat. Több lépésen keresztül látjuk be, hogy (a_n) konvergens.

1. lépés. Igazoljuk, hogy (a_n) korlátos sorozat. Valóban: A Cauchy-sorozat definíciójában $\varepsilon = 1$-hez van olyan $n_1 \in \mathbb{N}$ index, hogy

$$\forall\, m, n > n_1 : \quad |a_n - a_m| < 1.$$

Így minden $n > n_1$ esetén

$$\begin{aligned} |a_n| = \big|\big(a_n - a_{n_1+1} + a_{n_1+1}\big)\big| &\le \\ \le \big|a_n - a_{n_1+1}\big| + \big|a_{n_1+1}\big| &< 1 + \big|a_{n_1+1}\big|. \end{aligned}$$

Következésképpen az

$$|a_n| \le \max\big\{\big|a_0\big|,\ \big|a_1\big|,\ \ldots \big|a_{n_1}\big|,\ 1 + \big|a_{n_1+1}\big|\big\}$$

egyenlőtlenség már minden $n \in \mathbb{N}$ számra igaz, azaz a sorozat valóban korlátos.

2. lépés. A Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tételből következik, hogy (a_n)-nek létezik egy $\left(a_{\nu_n}\right)$ konvergens részsorozata. Legyen

$$A := \lim\left(a_{\nu_n}\right) \in \mathbb{R}.$$

3. lépés. Belátjuk, hogy $\lim(a_n) = A$ is igaz. Valóban: Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor A definíciójából következik, hogy

$$\exists\, n_2 \in \mathbb{N}, \quad n > n_2 : \quad \left|a_{\nu_n} - A\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Az (a_n) Cauchy-sorozat, ezért $\varepsilon/2$-höz

$$\exists\, n_3 \in \mathbb{N}, \quad \forall\, n, m > n_3 : \quad |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mivel $(\nu_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ indexsorozat (vagyis (ν_n) szigorúan monoton növekedő), ezért $\nu_n \geq n$ $(n \in \mathbb{N})$.

Ha tehát $n > n_0 := \max\{n_2, n_3\}$, akkor

$$|a_n - A| = |(a_n - a_{\nu_n}) + (a_{\nu_n} - A)| \leq |a_n - a_{\nu_n}| + |a_{\nu_n} - A)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

és ez azt jelenti, hogy az (a_n) sorozat valóban konvergens (és $\lim(a_n) = A$). ■

Megjegyzés. Fontos megjegyezni, hogy az iménti tétel **konvergens** (tehát véges határértékű) sorozatokról szól. Végtelen határértékekre az analóg állítás nem igaz: például az (n) sorozatnak a határértéke $+\infty$, de ez nem Cauchy-sorozat. A sok hasonlóság mellett ez az egyik leglényegesebb különbség a konvergens, ill. a $\pm\infty$-hez tartó sorozatok között. ■