1. feladatsor: Számelmélet

Maradékos osztás, osztási maradék

1. Az alábbi példákban osszuk el maradékosan a-t b-vel és határozzuk meg a hányadost és a maradékot:
a) $a = 20$, $b = 6$ b) $a = -71$, $b = 5$ c) $a = 102$, $b = -7$ d) $a = -68$, $b = -11$
e) $a = 5$, $b = 12$ f) $a = -104$, $b = 8$ g) $a = -327$, $b = -42$ h) $a = -3$, $b = 12$
Megoldás
a) $20 = 3 * 6 + 2$, ezért a hányados 3 és a maradék 2.

2. a) Legyenek a és b egészek, melyekre $a \mod 7 = 3$ és $b \mod 7 = 6$. Határozzuk meg a következőket, igazolva is állításunkat:
i) $a + b \mod 7$ ii) $a - b \mod 7$ iii) $ab \mod 7$

b) Legyenek a, b és $m \neq 0$ egészek. Bizonyítsuk be, hogy
i) $a + b \mod m$ ii) $a - b \mod m$ iii) $ab \mod m$
meghatározható csupán ($a \mod m$) és ($b \mod m$) függvényeként (a és b pontos értékének ismerete nélkül is).
Megoldás a) $a \mod 7 = 3$, $b \mod 7 = 6$
i) $a + b \mod 7 = 3 + 6 \mod 7 = 9 \mod 7 = 2$
ii) $a - b \mod 7 = 3 - 6 \mod 7 = -3 \mod 7 = 4$

3. Határozzuk meg a következőket:
a) $2019^3 \mod 6$ b) $2019^{32} \mod 7$ c) $2019^{288} \mod 7$
d) 1017677^{838} utolsó számjegye (10-es számrendszerben)
Megoldás a) $2019^3 \mod 6 =?$
$2019 \mod 6 = 3$ ezért $2019^3 \mod 6 = 3^3 \mod 6 = 3$.

Számrendszerek

4. Írjuk fel a következő, 10-es alapú számrendszerben megadott számokat
a) 674 b) 1864 c) 376529
i) 2-es alapú (bináris) ii) 3-as alapú iii) 5-ös alapú
számrendszerben.
Megoldás a) $674 = 6 * 10^2 + 7 * 10 + 4$ ez a 674 felirasa 10-es alapú számrendszerben.
2-es számrendszer jegyei: 0, 1
$674 \mod 2 = 0$ ezért az egyesek helyen egy 0 áll.
A kifejtés így kezdődik: $0 + (674/2 \text{ kifejtése}) * 2 = 0 + (337 \mod 2) * 2 + (337 - 1)/2 * 2^2 = ...$
$= 0 + 1 * 2 + 0 * 2^2 + 0 * 2^3 + 0 * 2^4 + 1 * 2^5 + 0 * 2^6 + 1 * 2^7 + 0 * 2^8 + 1 * 2^9 = 2 + 2^5 + 2^7 + 2^9.$
Tehát a 674 2-es alakja: 1010100010

5. Végezzük el a megadott műveleteket az adott számrendszerben:

a) $10011001_{(2)} + 101011010_{(2)}$; b) $1001_{(2)} \cdot 1101_{(2)}$; c) $1221_{(3)} \cdot 2112_{(3)}$;
d) $1234_{(5)} + 4321_{(5)}$; e) $1234_{(5)} \cdot 4321_{(5)}$; f) $1236_{(7)} + 6321_{(7)}$;
g) $10011001_{(2)} : 101_{(2)}$; h) $110110010101101_{(2)} : 101111001_{(2)}$; h) $12011_{(3)} : 201_{(3)}$;

Oszthatósággal kapcsolatos feladatok

Az alábbi, oszthatósággal kapcsolatos feladatoknál használhatjuk a középiskolában tanultakat is:

6. Bizonyítsuk be, hogy 6 osztója az $n(n+1)(2n+1)$-nek, ahol n egész szám.

7. Jelöljön m egész számot. Bizonyítsuk be, hogy $m^5 - m$ osztható 30-cal.

8. Bizonyítsuk be, hogy ha a 4-gyel nem osztható páros szám, akkor $a(a^2-1)(a^2-4)$ osztható 960-nal.

9. Bizonyítsuk be, hogy három egymás után következő egész szám köbének összege osztható

a) a középső szám 3-szorosával; b) 9-cel.

10. Bizonyítsuk be, hogy ha a tizes számrendszerben ábrázolt bármelyik háromjegyű természetes számot kétszer egymás mellé írjuk, akkor az így kapott hatjegyű szám osztható 7-tel, 11-gyel és 13-mal.

11. Lássuk be, hogy két páratlan szám négyzetének különbsége mindig osztható 8-cal.

12. Melyek igazak az alábbi állítások közül? Bizonyítsuk is állításunkat az oszthatság definíciója, illetve ellenpélda segítségével:

a) $c \mid a+b \Rightarrow c \mid a \,\wedge\, c \mid b$; b) $c \mid a+b \,\wedge\, c \mid a \Rightarrow c \mid b$; c) $c \mid a+b \,\wedge\, c \mid a-b \Rightarrow c \mid a \,\wedge\, c \mid b$;
d) $c \mid a \,\wedge\, d \mid a \Rightarrow cd \mid a$ e) $c \mid ab \Rightarrow c \mid a \,\vee\, c \mid b$; f) $c \mid a \,\wedge\, d \mid b \Rightarrow cd \mid ab$;
g) $c \mid 2a+5b \,\wedge\, c \mid 3a+7b \Rightarrow c \mid a \,\wedge\, c \mid b$.

További feladatok

13. Tegyük fel, hogy az (a, b, c számjegyekből álló) $\overline{abc}$ háromjegyű szám osztató 37-tel. Igazoljuk, hogy ekkor a $\overline{bca}$ szám is osztható 37-tel.

14. Bizonyítsuk be, hogy ha $5a + 9b$ osztható 23-mal, akkor $3a + 10b$ is osztható 23-mal.

15. Mely c egészekre lesz $(c^6 - 3)/(c^2 + 2)$ is egész szám?

16. Igazoljuk, hogy minden n természetes számra $133 \mid 11^{n+2} + 12^{2n+1}$.

17. Létezik-e olyan szám, amelyben csak az 1 és 2 számjegyek fordulnak elő, és amely osztható 2^{1000}-nel?

18. Adjunk szabályt annak eldöntésére, hogy egy szám osztható-e az alábbiakkal és bizonyítsuk is be azt:

a) 7-tel; b) 11-gyel; c) 13-mal; d) 17-tel; e) 19-cel.

19. A szultán 100 cellájában száz rab raboskodik. A szultán leküldi egymás után 100 emberét. A k-adik alkalommal leküldött ember minden k-adik cella zárján állít egyet, ha nyitva volt, bezárja, ha zárva volt, akkor kinyitja. Kezdetben minden cella zárva volt. Mely sorszámú cellák lesznek a végén nyitva?

20. Bizonyítsuk be, hogy öt egymást követő szám négyzetének összege sosem lesz négyzetszám.

21. Bebizonyítható, hogy tetszőleges $b < -1$ egész esetén bármely a egész felírható b alapú számrendszerben, azaz $a = \Sigma_{i=0}^{k} a_i b^i$ alakban, ahol $\forall\ 0 \le i \le k$-ra: $0 \le a_i \le |b| - 1$. Írjuk fel az alábbi számokat -5 alapú számrendszerben: a) -121 b) 127 c) 2636

22. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $b < -1$ egész esetén bármely a egész felírható b alapú számrendszerben, azaz $a = \Sigma_{i=0}^{k} a_i b^i$ alakban, ahol $\forall\ 0 \le i \le k$-ra: $0 \le a_i \le |b| - 1$.