Név: ...., *NEPTUN-kód* ....

Csoport, gyak.vez.: ....

Pontszám: ....

Programtervező informatikus szak I. évfolyam
Matematikai alapok (keresztfélév) 2. zárthelyi
2019. április 11.

Minden feladathoz indoklást, levezetést kérünk.
A 6. feladat (tételkimondás és bizonyítás) megoldását csak e feladatlap hátoldalára írva fogadjuk el.

1. *(7 pont)* Igazoljuk teljes indukcióval:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^+ : \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

2. a) *(7 pont)* Tekintsük a $z_1 = 1 + 3i$, $z_2 = -3 - 2i$, $z_3 = 2 - i$ komplex számokat. Számítsuk ki az alábbi kifejezés értékét (az eredményt algebrai alakban kérjük):

$$\frac{z_1^2 - \overline{z_2}}{z_3}$$

   b) *(5 pont)* Oldjuk meg az $x^3 + 6x^2 + 25x = 0$ egyenletet a komplex számok halmazán.

3. *(7 pont)* Legyen $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$

   Határozzuk meg: $(A + B) \cdot ((A^T B)^{-1})$.

4. a) *(5 pont)* Altér-e $\mathbb{R}^5$-ben az alábbi részhalmaz?

$$S := \{x = (x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4,\, x_5) \mid x_1 \cdot x_5 \le 0\}$$

   b) *(4 pont)* Adjunk meg véges generátorrendszert $\mathbb{R}^4$ alábbi alterében:

$$W := \{(2x - y + 3z,\; x - y,\; 3y - z,\; x + 3y + z) \mid x, y, z \in \mathbb{R},\; x - y + z = 0\}$$

5. *(7 pont)* Döntsük el, hogy a következő vektorrendszer bázist alkot-e $\mathbb{R}^4$-ben:

$$x_1 = (2,\, 0,\, 2,\, 0), \quad x_2 = (2,\, 1,\, 1,\, 3), \quad x_3 = (1,\, 3,\, 1,\, 3), \quad x_4 = (-2,\, 0,\, -1,\, -2)$$

6. *(8 pont) Tételkimondás és bizonyítás (a megoldást kérjük e feladatlap hátoldalára írni):* A generált altérről (W^*) szóló tétel. (W^* definícióját is kérjük megadni.)