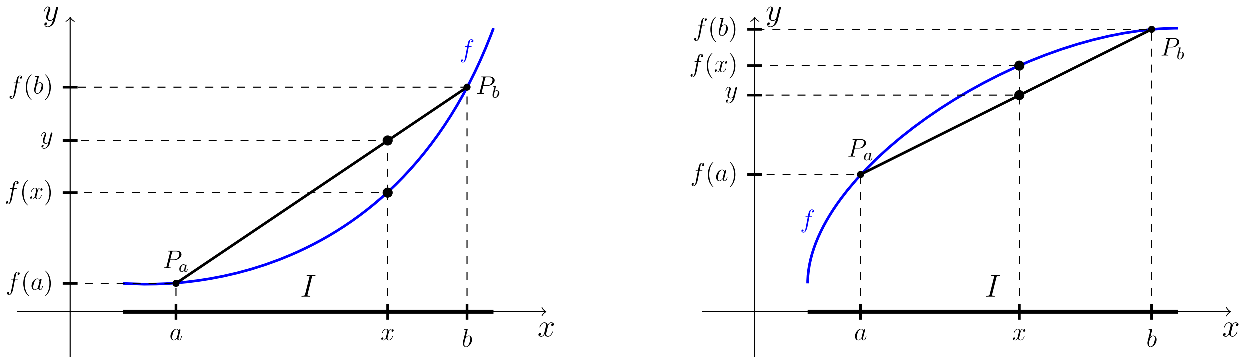
3. előadás

FÜGGVÉNYTULAJDONSÁGOK KAPCSOLATA A DERIVÁLTTAL 2.

Konvex és konkáv függvények

A konvex és konkáv függvények fogalmát már az Analízis I. kurzuson bevezettük. Ezzel az volt a célunk, hogy néhány alapfüggvény konvexitási tulajdonságát vizsgáljuk, és így teljes képet kapjunk ezekről a függvényekről. A hatvány-, a reciprok- és a gyökfüggvények esetében sikerült ezt megvalósítani, azonban a többi speciális függvény esetében azt mondtuk, hogy konvexitásukat a differenciálszámítás eszköztárával jóval egyszerűbben tudjuk igazolni.

Emlékezzünk, hogy egy függvény konvexitása bizonyos „alaki” tulajdonságaival van összefüggésben. Az mondtuk, hogy egy függvény szigorúan konvex (konkáv) egy I intervallumon, ha tetszőleges $a, b \in I$, $a < b$ pontpár esetén a függvény (a, b) intervallumhoz tartozó része az $\big(a, f(a)\big)$ és $\big(b, f(b)\big)$ pontokat összekötő húr alatt (felett) van. Az alábbi ábrák ezt illusztrálják, a bal oldali függvény szigorúan konvex, és a jobb oldali függvény szigorúan konkáv.



A szóban forgó húr egyenesének egyenlete:

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a), \qquad \text{vagy} \qquad y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b) + f(b).$$

A konvex és konkáv függvények pontos fogalma a következő:

1. Definíció. *Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $I \subset \mathcal{D}_f$ egy intervallum. Ha $\forall a, b \in I$, $a < b$ esetén igaz az, hogy*

- *ha $\forall x \in (a, b)\colon f(x) \leq \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény* **konvex az I intervallumon**,
- *ha $\forall x \in (a, b)\colon f(x) \geq \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény* **konkáv az I intervallumon**,

Szigorú egyenlőtlenségek esetén **szigorúan konvex**, *illetve* **szigorúan konkáv** *függvényekről beszélünk.*

Megjegyzés. Mivel a húr egyenesének egyenlete kétféle módon írható fel, így a fenti definícióban szereplő

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a) \qquad \text{kifejezés helyett az} \qquad \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b)+f(b)$$

kifejezés is írható.

Most tegyük fel, hogy az f függvény konvex az I nyílt intervallumon, és $x \in I$ egy tetszőleges pont. Legyen továbbá $u, v \in I$, $u < x < v$ két tetszőleges pont. Ekkor a fenti megjegyzés miatt egyszerre igaz, hogy

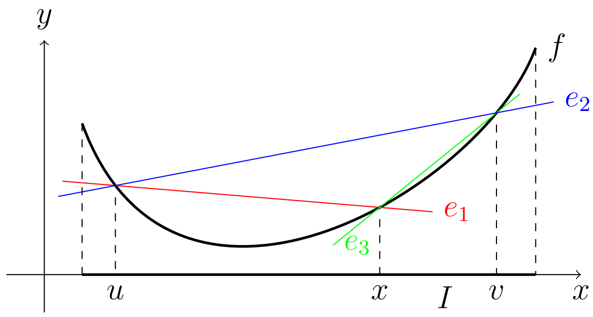
$$f(x) \le \frac{f(v)-f(u)}{v-u}(x-u)+f(u) \qquad \text{és} \qquad f(x) \le \frac{f(v)-f(u)}{v-u}(x-v)+f(v),$$

ami egyszerű ekvivalens átalakításokkal a következő módon írható át

$$(*) \qquad \frac{f(x)-f(u)}{x-u} \le \frac{f(v)-f(u)}{v-u} \le \frac{f(x)-f(v)}{x-v}.$$

Ha a függvény konkáv, szigorúan konvex vagy szigorúan konkáv I-n, akkor a $(*)$-ban szereplő relációk irányán és élességén kell megfelelően változtatni.

Az ábra szemlélteti $(*)$ geometriai jelentését. Látható, hogy az e_1, az e_2 és az e_3 húrok meredekségei rendre a $(*)$-ban szereplő különbséghányadosok, és ezek nagysága megfelelnek a $(*)$-ban szereplő egyenlőtlenségeknek.



Legyen $a \in I$ rögzített és

$$F_a(x) := \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad \big(x \in I \setminus \{a\}\big).$$

Nem nehéz igazolni, hogy f akkor és csak akkor konvex I-n, ha $\forall x, y \in I \setminus \{a\}$, $x < y$ esetén

$$F_a(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \le \frac{f(y)-f(a)}{y-a} = F_a(y),$$

azaz ha az F_a különbséghányados-függvény monoton növekvő az $I \setminus \{a\}$ halmazon. Ehhez elegendő a $(*)$ egyenlőtlenségeket alkalmazni az alábbi

$$x < y < a, \qquad x < a < y, \qquad a < x < y$$

esetekben. Hasonlóan igazolható, hogy f akkor is csak akkor konkáv, szigorúan konvex vagy szigorúan konkáv, ha F_a rendre monoton csökkenő, szigorúan monoton növekvő vagy szigorúan monoton csökkenő az $I \setminus \{a\}$ halmazon.

1. Tétel (A konvexitás és a kétszeres derivált kapcsolata). *Legyen $(a,b) \subset \mathbb{R}$ egy nyílt intervallum. Tegyük fel, hogy $f \in D^2(a,b)$. Ekkor*

1. *f konvex [illetve f konkáv] (a,b)-n $\iff$ $f'' \ge 0$ [illetve $f'' \le 0$] (a,b)-n;*
2. *ha $f'' > 0$ [illetve $f'' < 0$] (a,b)-n $\implies$ f szigorúan konvex [illetve f szigorúan konkáv] (a,b)-n.*

Bizonyítás. Igazolható, hogy

- f konvex (a,b)-n $\iff$ $f' \nearrow (a,b)$-n,
- f szigorúan konvex (a,b)-n $\iff$ $f' \uparrow (a,b)$-n,
- f konkáv (a,b)-n $\iff$ $f' \searrow (a,b)$-n,
- f szigorúan konkáv (a,b)-n $\iff$ $f' \downarrow (a,b)$-n.

Ekkor a tétel állítása a monotonitás és a derivált kapcsolatáról szóló tételből következik, ha a tételt alkalmazzuk az f' függvényre, hiszen $f'' = (f')'$.

A négy állításból csak az elsőt fogjuk igazolni. A többi hasonlóan igazolható. Tegyük fel, hogy f konvex (a,b)-n, és $u, v \in (a,b)$, $u < v$ két tetszőleges pont. Tudjuk, hogy F_u és F_v monoton növekvő függvények az (u,v) intervallumon. Ekkor határátmenettel:

$$(**)\qquad \begin{aligned} f'(u) &= f'_+(u) = \lim_{x\to u+0} \frac{f(x)-f(u)}{x-u} = \lim_{x\to u+0} F_u(x) \le F_u(v), \\ f'(v) &= f'_-(v) = \lim_{x\to v-0} \frac{f(x)-f(v)}{x-v} = \lim_{x\to v-0} F_v(x) \ge F_v(u), \end{aligned}$$

hiszen a fenti határértékekben $u < x < v$. Vegyük észre, hogy

$$F_u(v) = \frac{f(v)-f(u)}{v-u} = \frac{f(u)-f(v)}{u-v} = F_v(u).$$

Így $(**)$ miatt $f'(u) \le f'(v)$ teljesül, azaz f' monoton növekvő az (a,b) intervallumon.

Fordítva, tegyük fel, hogy az f' derivált függvény monoton növekvő az (a,b) intervallumon és vegyük az $a < u < x < v < b$ tetszőleges pontokat. Ekkor a Lagrange-féle középértéktétel szerint létezik egy $u < \xi_1 < x$ és egy $x < \xi_2 < v$ szám, hogy

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x)-f(u)}{x-u}, \qquad f'(\xi_2) = \frac{f(v)-f(x)}{v-x}.$$

A monotonitás miatt $f'(\xi_1) \le f'(\xi_2)$, azaz

$$\frac{f(x)-f(u)}{x-u} \le \frac{f(v)-f(x)}{v-x},$$

ami a következő módon alakítható át:

$$\begin{aligned} \big(f(x)-f(u)\big)(v-x) &\le \big(f(v)-f(x)\big)(x-u) \\ f(x)\big((v-x)+(x-u)\big) &\le f(u)(v-x) + f(v)(x-u) \\ f(x)(v-u) &\le f(u)\big((v-u)-(x-u)\big) + f(v)(x-u) \\ f(x)(v-u) &\le (f(v)-f(u))(x-u) + f(u)(v-u) \\ f(x) &\le \frac{f(v)-f(u)}{v-u}(x-u) + f(u). \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy f konvex függvény.

Megjegyzés. Az előző tétel értelmében az exponenciális függvény szigorúan konvex $\mathbb{R}$-n azért, mert $\forall x \in \mathbb{R}\colon (\exp)''(x) = \exp(x) > 0$.

2. Definíció. *Legyen $(a,b) \subset \mathbb{R}$ egy nyílt intervallum, és tegyük fel, hogy $f \in D(a,b)$. Ekkor azt mondjuk, hogy a $c \in (a,b)$ pont az f függvénynek* **inflexiós pontja***, ha*

$$\exists \delta > 0\colon f \text{ konvex } (c-\delta, c]\text{-n} \quad \text{és} \quad \text{konkáv } [c, c+\delta)\text{-n},$$

vagy fordítva.

Megjegyzések.

1. A konvexitás és a derivált függvény monotonitása között fennálló kapcsolat értelmében (lásd az 1. Tétel bizonyítását), ha $c \in (a,b)$ inflexiós pont, akkor az f' függvény monotonitása megváltozik a c pontban, azaz c az f' függvény lokális szélsőértékhelye. Ezért, ha $f \in D^2\{c\}$, akkor $f''(c) = 0$. Ezt hívjuk ***az inflexiós pontra vonatkozó másodrendű szükséges feltételnek***.

2. Igazolható, hogy a függvény inflexiós pontjain az érintő „átszeli" a függvény grafikonját szigorú konvexitási váltás mellet. Pontosabban, ha e jelöli az f függvény érintőjét a c pontban, akkor a $\varphi := f - e$ függvénynek előjelváltása van a c pontban. Ez a jelenség könnyen megfigyelhető az $f(x) := x^3$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény esetén a $c = 0$ pontban, ahol a függvénynek inflexiós pontja van, és ott az érintő egyenlete $e(x) = 0$ $(x \in \mathbb{R})$.

1. Feladat. *Vizsgáljuk meg konvexitás szempontjából a következő függvényt*

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2} \qquad (x \neq 0),$$

és határozzuk megy az inflexiós pontjait!

Megoldás. Előjelvizsgálatot fogunk végezni a függvény második deriváltjával, amelyet már kiszámoltunk egy korábbi előadásban:

$$f''(x) = \frac{2x+6}{x^4}, \qquad (x \neq 0).$$

Ennek egyetlen zérushelye az $x = -3$. Ekkor a monotonitáshoz hasonló táblázatot készítünk, de ennek első sorában f'' szerepel. A $\smile$ szimbólummal jelöljük azt, hogy a függvény konvex, a $\frown$ szimbólummal pedig azt, hogy a függvény konkáv az adott intervallumon.

	$x < -3$	-3	$-3 < x < 0$	$x > 0$
f''	$-$	0	$+$	$+$
f	$\frown$	$-2/9$	$\smile$	$\smile$
		infl.		

A táblázatból rögtön leolvasható, mely intervallumokon lesz konvex vagy konkáv a függvény, illetve az, hogy f-nek inflexiós pontja van az $x = -3$ helyen, ahol a függvény értéke $f(-3) = -2/9$.

Aszimptoták

Ha egy függvény grafikonja nem korlátos, akkor úgy kell ábrázolni, hogy érzékelhető legyen az a tendencia, amit a függvény követ, amikor „elhagyja" a rajzterületet. Ehhez a függvény határérték nagyon fontos segítséget nyújt. Előfordul, hogy a grafikon pontjai tetszőleges közelségbe kerülnek egy adott egyeneshez, ún. ***aszimptotához***. A legegyszerűbb ilyen eset, amikor a függvénynek egy a pontban van bal vagy jobb oldali határértéke, és ez $-\infty$ vagy $+\infty$. Ekkor az $x = a$ egyenletű egyenes egy függőleges aszimptotája lesz a függvénynek.

Ha a függvény értelmezési tartománya nem korlátos, akkor lehet vízszintes aszimptotája is. Ez akkor fordul elő, amikor létezik a függvény határértéke a $-\infty$-ben vagy a $+\infty$-ben, és ez egy B számmal egyenlő. Ekkor $y = B$ az aszimptota egyenlete. De előfordulnak más esetek is.

3. Definíció. *Legyen $a \in \mathbb{R}$ és $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek* **van aszimptotája** $(+\infty)$**-ben**, *ha*

$$\exists\ l(x) = Ax + B \qquad (x \in \mathbb{R})$$

elsőfokú függvény, amelyre

$$\lim_{x\to+\infty} \Big(f(x) - l(x)\Big) = 0.$$

Ekkor az $y = Ax + B$ egyenletű egyenes az f függvény **aszimptotája** $(+\infty)$**-ben**.

A függvény $(-\infty)$**-beli aszimptotáját** *is hasonló módon értelmezzük.*

2. Tétel. *Legyen $a \in \mathbb{R}$. Az $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ függvénynek akkor és csak akkor van aszimptotája $(+\infty)$-ben, ha léteznek és végesek a következő határértékek:*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} =: A \in \mathbb{R} \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to+\infty} \Big(f(x) - Ax\Big) =: B \in \mathbb{R}.$$

Ekkor az

$$l(x) = Ax + B \qquad (x \in \mathbb{R})$$

egyenes az f függvény aszimptotája $(+\infty)$-ben.

Bizonyítás. A tétel könnyen igazolható a határérték alaptulajdonságai alapján.

Ha $l(x) = Ax + B$ a függvény aszimptotája a $(+\infty)$-ben, akkor

$$\lim_{x\to+\infty} \Big(f(x) - Ax - B\Big) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x) - Ax - B}{x} = \frac{0}{+\infty} = 0.$$

Így

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x) - Ax - B}{x} + \lim_{x\to+\infty} \frac{Ax + B}{x} = 0 + A = A.$$

Másrészt

$$\lim_{x\to+\infty} \Big(f(x) - Ax - B\Big) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{x\to+\infty} \Big(f(x) - Ax\Big) = B.$$

Megjegyzés. Hasonló állítás érvényes a $(-\infty)$-beli aszimptoták meghatározására.

A L'Hospital-szabály

Ebben a fejezetben láttuk, hogy a differenciálszámítás eszköztárával milyen hatékonyan tudunk meghatározni több függvénytulajdonságot. Az aszimptoták kivételnek tűnnek, mert ehhez határértékszámítás szükséges. Most megmutatjuk, hogy a differenciálszámítás is remek módon alkalmazható függvények határértékének kiszámításában.

Először lássuk hogyan számítjuk a következő határértéket az eddigi ismereteink alapján:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^8+3x^5-2x^2-2}{x^4-6x^2+5x}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x^7+x^6+x^5+4x^4+4x^3+4x^2+2x+2)}{\cancel{(x-1)}(x^3+x^2-5x)}=-\frac{19}{3}.$$

Egy $0/0$ típusú kritikus határértékről van szó. A számlálóból és a nevezőből kiemeltük az $x-1$ tényezőt, és egyszerűsítés után kiértékeltük $x=1$-re a fennmaradó kifejezést. Itt a problémát a kiemelés jelenti, amire több módszer ismert, de ezek általában sok számítással járnak. Most megpróbálkozunk valami mással. Legyen $a=1$, illetve

$$f(x):=x^8+3x^5-2x^2-2\quad (x\in\mathbb{R})\qquad \text{és}\qquad g(x):=x^4-6x^2+5x\quad (x\in\mathbb{R}).$$

Tudjuk, hogy f és g differenciálható függvények,

$$f'(x)=8x^7+15x^4-4x\quad (x\in\mathbb{R})\qquad \text{és}\qquad g'(x)=4x^3-12x+5\quad (x\in\mathbb{R}).$$

Mivel $f,g\in D\{a\}$, $f(a)=g(a)=0$ és $g'(a)\neq 0$, így

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}}=\frac{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}}=\frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Ha az $f'(a)=f'(1)=19$ és a $g'(a)=g'(1)=-3$ értékeket egymással elosztjuk, akkor megkapjuk a már ismert végeredményt. A határérték kiszámításához „csak" külön kellett deriválni a számlálót és a nevezőt, és az így kapott hányadost kiértékelni az $x=a$ pontban.

A most bemutatott módszer csak a fent megadott feltételek mellett alkalmazható. Több olyan eset van, amikor az $\overline{\mathbb{R}}$-beli műveletek és a határérték kapcsolatára vonatkozó tételek nem alkalmazhatók, ezek az ún. ***kritikus határértékek***. Ilyenek például a következők:

$$(+\infty)+(-\infty),\quad 0\cdot(\pm\infty),\quad \frac{0}{0},\quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\quad 0^0.$$

Szerencsére a bemutatott módszer csak egy speciális esete egy jóval általánosabb állításnak, amit L'Hospital-szabálynak nevezünk.

3. Tétel (L'Hospital-szabály a 0/0 esetben). *Legyen* $-\infty\le a<b<+\infty$, *illetve* $f,g\in\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. *Ekkor*

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ f,g\in D(a,b),\\ \bullet\ \forall x\in(a,b)\colon g'(x)\neq 0,\\ \bullet\ \lim\limits_{a+0}f=\lim\limits_{a+0}g=0,\\ \bullet\ \exists\lim\limits_{a+0}\dfrac{f'}{g'}\in\overline{\mathbb{R}}.\end{array}\right\}\quad\Longrightarrow\quad \exists\lim_{a+0}\frac{f}{g}\quad \textit{és}\quad \lim_{a+0}\frac{f}{g}=\lim_{a+0}\frac{f'}{g'}.$$

Bizonyítás. Először vegyük észre, hogy a Rolle-tétel alapján, ha $g' \neq 0$ (a,b)-n, akkor g-nek legfeljebb egy zérushelye van (a,b)-n. Ekkor választhatunk olyan $b > a$ számot, hogy $g \neq 0$ (a,b)-n.

Két esetet fogunk megkülönböztetni

1. $\boxed{a > -\infty \text{ (véges).}}$ Legyen $A := \lim\limits_{a+0} \dfrac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}$. Azt kell igazolni, hogy $\lim\limits_{a+0} \dfrac{f}{g} = A$, azaz

$$(\#) \qquad \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0,\ \forall x \in (a, a+\delta) \subset (a,b)\colon \frac{f(x)}{g(x)} \in K_\varepsilon(A).$$

Az $A = \lim\limits_{a+0} \dfrac{f'}{g'}$ feltétel azt jelenti, hogy

$$(\#\#) \qquad \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta^* > 0,\ \forall y \in (a, a+\delta^*) \subset (a,b)\colon \frac{f'(y)}{g'(y)} \in K_\varepsilon(A).$$

Értelmezzük az f és a g függvényt az a pontban úgy, hogy

$$f(a) := 0 \quad \text{és} \quad g(a) := 0.$$

A $\lim\limits_{a+0} f = \lim\limits_{a+0} g = 0$ feltételből következik, hogy ekkor $f, g \in C[a,b)$.

Legyen $\varepsilon > 0$ egy tetszőleges rögzített szám, és $\delta^* > 0$ a $(\#\#)$-ben szereplő szám. Legyen $\delta := \delta^*$, és $x \in (a, a+\delta)$ egy tetszőleges pont. A Cauchy-féle középértéktétel feltételei az f és a g függvényre az $[a,x]$ intervallumon teljesülnek. Ez azt jelenti, hogy $\exists \xi_x \in (a,x) \subset (a, a+\delta^*)$, amire:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} \ \text{(és ez } (\#\#) \text{ miatt)} \quad \in K_\varepsilon(A).$$

A $(\#)$ állítást tehát bebizonyítottuk. A $\lim\limits_{a+0} \dfrac{f}{g}$ határérték létezik, és $\lim\limits_{a+0} \dfrac{f}{g} = A$.

2. $\boxed{a = -\infty.}$ Legyen $-\infty < c < \min\{0, b\}$, $d := -1/c$ és

$$F(x) := f(-1/x), \quad G(x) := g(-1/x) \qquad \big(x \in (0,d)\big).$$

Ekkor F és G kielégítik a $0/0$ esetre vonatkozó L'Hospital-szabály feltételeit $(0,d)$-n, illetve az összetett függvény deriváltja szerint

$$F'(x) := f'(-1/x) \cdot \frac{1}{x^2}, \quad G(x) := g'(-1/x) \cdot \frac{1}{x^2} \qquad \big(x \in (0,d)\big).$$

Így az $x = -1/y$ helyettesítéssel

$$\lim_{y \to -\infty} \frac{f(y)}{g(y)} = \lim_{x \to 0+0} \frac{F(x)}{G(x)} = \text{(L'Hospital)} = \lim_{x \to 0+0} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x \to 0+0} \frac{\frac{1}{x^2} f'(-1/x)}{\frac{1}{x^2} g'(-1/x)} =$$

$$= \lim_{x \to 0+0} \frac{f'(-1/x)}{g'(-1/x)} = \lim_{y \to -\infty} \frac{f'(y)}{g'(y)}.$$

Most megfogalmazzuk a $(+\infty)/(+\infty)$ kritikus határértékre vonatkozó L'Hospital-szabályt.

4. Tétel (L'Hospital-szabály a $(+\infty)/(+\infty)$ esetben). *Legyen $-\infty \leq a < b < +\infty$, illetve $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ekkor*

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f, g \in D(a,b), \\ \bullet\ \forall x \in (a,b)\colon g'(x) \neq 0, \\ \bullet\ \lim\limits_{a+0} f = \lim\limits_{a+0} g = +\infty, \\ \bullet\ \exists \lim\limits_{a+0} \dfrac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}. \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \exists \lim_{a+0} \frac{f}{g} \quad \text{és} \quad \lim_{a+0} \frac{f}{g} = \lim_{a+0} \frac{f'}{g'}.$$

Bizonyítás. Nem bizonyítjuk.

Megjegyzések.

1. Ha $-\infty < a < b \leq +\infty$, akkor a L'Hospital-szabály minkét esete átfogalmazható a ***b pontbeli bal oldali határértékre*** (így tehát $+\infty$-ben vett határértékekre is). Ehhez elegendő az $y = -x$ helyettesítést elvégezni. Így a L'Hospital-szabály könnyen kétoldali határértékekre is átfogalmazható.

2. A $(+\infty)/(+\infty)$ esetre vonatkozó L'Hospital-szabály alkalmazható a $(+\infty)/(-\infty)$, a $(-\infty)/(+\infty)$ és a $(-\infty)/(-\infty)$ típusú esetekre is.

3. Mivel az $a < b$ értékeket úgy választhatjuk, hogy egymáshoz tetszőleges közelségben legyenek, így a $\forall x \in (a,b)\colon g'(x) \neq 0$ feltétel szinte mindig előfordul a gyakorlatban.

4. A L'Hospital-szabály alkalmazása előtt győződjünk meg, hogy a határérték teljesíti a szabály alkalmazásához szükséges feltételeket. Például, ha

$$f(x) := \cos x, \quad \text{és} \quad g(x) := x + 1 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor

$$\lim_0 \frac{f}{g} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{x+1} = \frac{1}{0+1} = 1, \quad \text{de} \quad \lim_0 \frac{f'}{g'} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{1} = 0 \neq \lim_0 \frac{f}{g}.$$

5. A L'Hospital-szabály többször egymás után is alkalmazható, ha szükséges. Például

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}.$$

Azonban előfordul, hogy ez soha nem vezet eredményhez. Például

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x},$$

és ha még egyszer alkalmazzuk a L'Hospital-szabályt, akkor az induló kifejezést kapjuk.

6. A L'Hospital-szabály nem fordítható meg abban az értelemben, hogy ha elvégzése után a kapott határérték nem létezik, akkor attól még lehet, hogy a keresett határérték létezik. Például

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\cos x}{1} \ \nexists, \text{ de } \lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right) = 1.$$

Ha $a > 1$ és $n \in \mathbb{N}^+$, akkor a L'Hospital-szabály n-szeri alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^n} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln a)\cdot a^x}{n\cdot x^{n-1}} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln a)^2\cdot a^x}{n\cdot(n-1)\cdot x^{n-2}} = \cdots =$$

$$= \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln a)^{n-1}\cdot a^x}{n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln a)^n\cdot a^x}{n!} = +\infty.$$

Ezt úgy is kifejezhetjük, hogy ha $a > 1$, akkor $x \to +\infty$ esetén az a^x $(x \in \mathbb{R})$ függvény gyorsabban tart $(+\infty)$-hez, mint x bármelyik pozitív kitevőjű hatványa, és ezt szokás így is jelölni:

$$x^n \ll a^x, \quad \text{ha} \quad x \;\text{ elég nagy.}$$

Hasonlóan, ha $m, n \in \mathbb{N}^+$, akkor a L'Hospital-szabály n-szeri alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^n x}{x^m} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{n\cdot\ln^{n-1} x}{m\cdot x^m} = \cdots = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{n!}{m^n\cdot x^m} = 0,$$

azaz x bármely pozitív kitevőjű hatványa gyorsabban tart $(+\infty)$-hez $x \to +\infty$ esetén, mint $\ln x$ bármely pozitív kitevőjű hatványa. Röviden: minden $n, m \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\big(\ln x\big)^n \ll x^m, \quad \text{ha} \quad x \;\text{ elég nagy.}$$

A többi kritikus határértéktípust gyakran vissza lehet vezetni $0/0$ vagy $(+\infty)/(+\infty)$ típusú határértékre, és így megpróbálhatjuk alkalmazni a L'Hospital-szabályt.

Példák.

1. $$\lim_{x\to0+0} x\ln x = \Big(0\cdot(-\infty)\Big) = \lim_{x\to0+0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{-\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to0+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to0+0}(-x) = 0.$$

2. $$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = (?) = \lim_{x\to0} \frac{x-\sin x}{x\,\sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{\sin x + x\,\cos x} =$$
$$= \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to0} \frac{\sin x}{\cos x + \cos x - x\,\sin x} = \frac{0}{1+1-0} = 0.$$

3. $$\lim_{x\to0+0} x^x = \big(0^0\big) = \lim_{x\to0+0}\big(e^{\ln x}\big)^x = \lim_{x\to0+0} e^{x\ln x} = \exp\Big(\lim_{x\to0+0} x\ln x\Big) = \exp(0) = 1,$$

   hiszen exp folytonos függvény, és már igazoltuk, hogy $\lim\limits_{x\to0+0} x\ln x = 0$.

Teljes függvényvizsgálat

Adott f valós-valós függvény ***teljes függvényvizsgálatán*** f analitikus és geometriai tulajdonságainak a megállapítását értjük. Ennek során a következőket kell meghatározni:

$\boxed{1.}$ Kezdeti vizsgálatok. (Deriválhatóság, zérushelyek, előjelvizsgálat, paritás, periodicitás megállapítása.)

$\boxed{2.}$ Lokális szélsőértékek és monotonitási intervallumok.

$\boxed{3.}$ Konvexitási intervallumok és inflexiós pontok.

$\boxed{4.}$ Határértékek és aszimptoták.

$\boxed{5.}$ A függvény grafikonjának felrajzolása.

2. Feladat. *Teljes függvényvizsgálat végzése után vázolja az*

$$f(x) := x - 1 - \frac{4x}{1+x^2} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény grafikonját!

Megoldás.

$\boxed{1.}$ ***Kezdeti vizsgálatok***. A deriválási szabályok alapján az f függvény minden $x \in \mathbb{R}$ pontban akárhányszor deriválható. Mivel

$$f(x) = x - 1 - \frac{4x}{x^2+1} = \frac{x^3 - x^2 - 3x - 1}{x^2+1} = \frac{(x+1)(x^2-2x-1)}{x^2+1},$$

így $f(x) = 0 \iff x = -1$ vagy $x^2 - 2x - 1 = 0$, azaz

$$x = -1, \qquad x = x_1 := 1 - \sqrt{2} \approx -0,414 \qquad \text{vagy} \qquad x = x_2 := 1 + \sqrt{2} \approx 2,414.$$

Előjelvizsgálat

	$x < -1$	-1	$-1 < x < x_1$	x_1	$x_1 < x < x_2$	x_2	$x > x_2$
f	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

A függvény nem páros, páratlan vagy periodikus.

$\boxed{2.}$ ***Monotonitás***. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f'(x) = 1 - \frac{4 \cdot (x^2+1) - 4x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4 + 6x^2 - 3}{(x^2+1)^2},$$

ezért

$$f'(x) = 0 \qquad \iff \qquad x^4 + 6x^2 - 3 = 0.$$

A $t = x^2$ helyettesítéssel

$$t^2 + 6t - 3 = 0 \qquad \iff \qquad t = -3 - 2\sqrt{3} < 0, \quad \text{vagy} \quad t = -3 + 2\sqrt{3} > 0.$$

Ezért $x^2 = 2\sqrt{3} - 3 \iff$

$$x = x_3 := \sqrt{2\sqrt{3} - 3} \approx 0,681 \quad \text{vagy} \quad x = -x_3 := -\sqrt{2\sqrt{3} - 3} \approx -0,681$$

	$x < -x_3$	$-x_3$	$-x_3 < x < x_3$	x_3	$x > x_3$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\uparrow$	$0,18$	$\downarrow$	$-2,18$	$\uparrow$
lok.		max		min	

$\boxed{3.}$ ***Konvexitás***. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f''(x) = \frac{(4x^3+12x)(x^2+1)^2 - (x^4+6x^2-3)\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{8x(3-x^2)}{(x^2+1)^3},$$

ezért $f''(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0, \quad x = -\sqrt{3} \approx -1,73, \quad \text{vagy} \quad x = \sqrt{3} \approx 1,73.$

	$x < -\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3} < x < 0$	0	$0 < x\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$x > \sqrt{3}$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\smile$	-1	$\frown$	-1	$\smile$	-1	$\frown$
		infl.		infl.		infl.	

$\boxed{4.}$ ***Határértékek és aszimptoták***. Mivel

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x}{1+x^2} = \left(\frac{\pm\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4}{2x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{x} = 0,$$

ezért

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(x - 1 - \frac{4x}{1+x^2}\right) = \pm\infty - 1 - 0 = \pm\infty.$$

Továbbá

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{4}{1+x^2}\right) = 1 =: A$$

és

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - 1\cdot x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(-1 - \frac{4x}{1+x^2}\right) = -1 =: B.$$

Ez azt jelenti, hogy az $y = Ax+B$, azaz az $y = x-1$ egyenletű egyenes az f függvény aszimptotája $(+\infty)$-ben és $(+\infty)$-ben is.

$\boxed{5.}$ ***Ábrázolás***.