9. előadás

FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA 1.

Ebben a fejezetben valós-valós függvények határértékével és folytonosságával foglalkozunk.

FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE

Ebben a pontban valós-valós függvény pontbeli határértékeinek a fogalmaival ismerkedünk meg.

Egy f függvény valamely a pontbeli határértékével a függvénynek azt a tulajdonságát fogjuk precíz módon megfogalmazni, hogy ha x tetszőlegesen közel van a-hoz (jelben $x \sim a$), akkor az $f(x)$ függvényértékek tetszőlegesen közel vannak valamely A értékhez (jelben $f(x) \sim A$). A szóban forgó tulajdonságot többek között a

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

szimbólummal fogjuk jelölni.

A határérték motivációja

Tekintsük például az

$$f(x) := \frac{\sin x}{x} \qquad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big)$$

függvényt. Mit mondhatunk az $f(x)$ függvényértékekről, ha $x \sim 0$? A szinuszfüggvény definíciójából következik, hogy ha $x \sim 0$, akkor $\sin x \sim 0$ is teljesül, ezért két kicsi szám hányadosáról van szó, és azt már tudjuk, hogy általában az bármi lehet. Hamarosan látni fogjuk azt, hogy $\frac{\sin x}{x} \sim 1$, ha $x \sim 0$, ezért

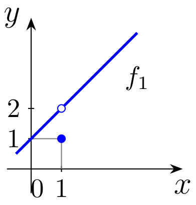
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

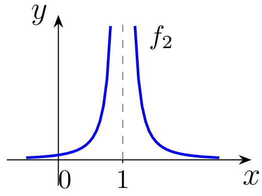
Lássunk néhány további példát!

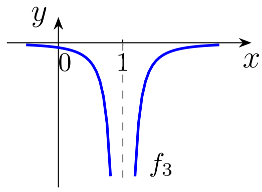
Legyen $\boxed{a=1}$ és tekintsük a következő függvényeket:

$$f_1(x) := \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} = x+1, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ 1, & \text{ha } x = 1; \end{cases}$$

$$f_2(x) := \frac{1}{(x-1)^2}, \text{ ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}; \qquad f_3(x) := -\frac{1}{(x-1)^2}, \text{ ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$



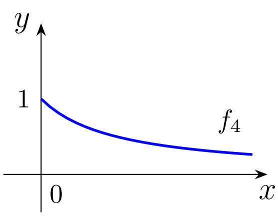


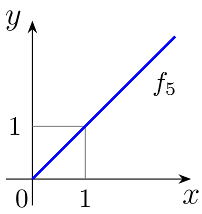


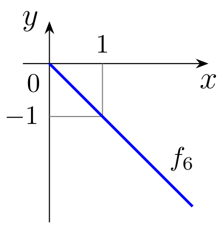
$\boxed{\lim_{x\to 1} f_1(x) = 2}$ $\boxed{\lim_{x\to 1} f_2(x) = +\infty}$ $\boxed{\lim_{x\to 1} f_3(x) = -\infty}$

A függvényértékek viselkedését nagy x értékekre is vizsgálhatjuk. Tekintsük például a következő függvényeket:

$f_4(x) = \frac{1}{x+1} \quad (x \geq 0)$ $f_5(x) = x \quad (x \geq 0)$ $f_6(x) = -x \quad (x \geq 0)$



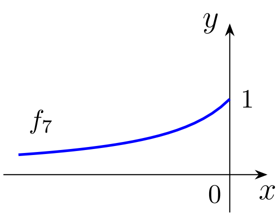


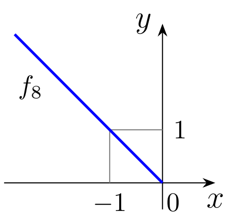


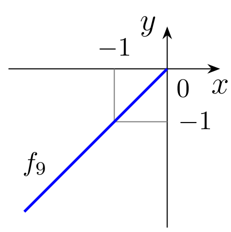
$\boxed{\lim_{x\to +\infty} f_4(x) = 0}$ $\boxed{\lim_{x\to +\infty} f_5(x) = +\infty}$ $\boxed{\lim_{x\to +\infty} f_6(x) = -\infty}$

További példák:

$f_7(x) = \frac{1}{1-x} \quad (x \leq 0)$ $f_8(x) = -x \quad (x \leq 0)$ $f_9(x) = x \quad (x \leq 0)$







$\boxed{\lim_{x\to -\infty} f_7(x) = 0}$ $\boxed{\lim_{x\to -\infty} f_8(x) = +\infty}$ $\boxed{\lim_{x\to -\infty} f_9(x) = -\infty}$

Összefoglalva tehát a következőket mondhatjuk.
Függvény határértékét a következő $a \in \overline{\mathbb{R}}$ pontokban vizsgálhatjuk:

$$\begin{array}{ll} a \in \mathbb{R} & \text{(végesben)} \\ \left.\begin{array}{l} a = +\infty \\ a = -\infty \end{array}\right\} & \text{(végtelenben)} \end{array}$$

Függvény $A \in \overline{\mathbb{R}}$ határértéke lehet:

$$\begin{array}{ll} A \in \mathbb{R} & \text{(véges)} \\ \left.\begin{array}{l} A = +\infty \\ A = -\infty \end{array}\right\} & \text{(végtelen)} \end{array}$$

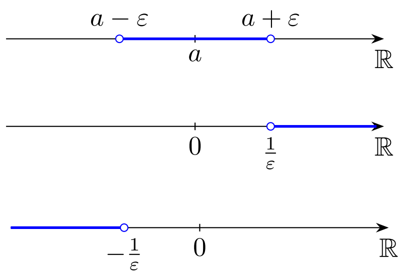
Az $\overline{\mathbb{R}}$-beli környezetek definícióira gondolva „érezhetjük”, hogy az előzőekben jelzett tulajdonságoknak egységes az alapgondolata.

Mivel az a pontbeli határértéknél az a-hoz tetszőlegesen közeli pontokban felvett függvényértékek viselkedését vizsgáljuk, ezért fel fogjuk tenni azt, hogy a függvény az a pont tetszőleges környezetében végtelen sok helyen van értelmezve. Ezzel kapcsolatos a **torlódási pont** fogalma.

Számhalmaz torlódási pontja

Emlékeztetünk arra, hogy az $a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ elem $\varepsilon > 0$ sugarú környezetét így értelmeztük:

$$K_\varepsilon(a) := \begin{cases} (a-\varepsilon, a+\varepsilon), & \text{ha } a \in \mathbb{R} \\ \left(\dfrac{1}{\varepsilon}, +\infty\right), & \text{ha } a = +\infty \\ \left(-\infty, -\dfrac{1}{\varepsilon}\right), & \text{ha } a = -\infty. \end{cases}$$



1. definíció. *Azt mondjuk, hogy a $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ halmaznak $a \in \overline{\mathbb{R}}$* ***torlódási pontja****, ha az $a \in \overline{\mathbb{R}}$ minden környezete végtelen sok H-beli elemet tartalmaz, azaz*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \textit{esetén a} \quad K_\varepsilon(a) \cap H \quad \textit{végtelen halmaz.}$$

A H halmaz torlódási pontjainak a halmazát a $\boxed{H'}$ szimólummal jelöljük.

1. példák.

$$\textbf{(1)}\ \mathbb{N}' = \{+\infty\}, \qquad \textbf{(2)}\ \mathbb{R}' = \overline{\mathbb{R}}, \qquad \textbf{(3)}\ \mathbb{Q}' = \overline{\mathbb{R}}, \qquad \textbf{(4)}\ (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})' = \overline{\mathbb{R}},$$

$$\textbf{(5)}\ (0,1)' = [0,1], \qquad \textbf{(6)}\ \left\{\tfrac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^+\right\}' = \{0\},$$

$$\textbf{(7)}\ \text{ha} \quad H \subset \mathbb{R} \quad \text{véges halmaz, akkor} \quad H' = \emptyset.$$

Fontos megjegyezni, hogy ha $a \in \overline{\mathbb{R}}$ a $H \subset \mathbb{R}$ halmaz torlódási pontja, azaz $\boxed{a \in H'}$, akkor

lehet, hogy $\boxed{a \in H}$ és az is előfordulhat, hogy $\boxed{a \notin H}$.

Például, ha $H = (-1, 1)$ és $a = 0$, akkor $0 \in H'$ és $0 \in H$, de $1 \in H'$ esetén $1 \notin H$.

A következő tétel azt állítja, hogy a torlódási pontokat sorozatok határértékével lehet jellemezni.

1. tétel. *Az $a \in \overline{\mathbb{R}}$ akkor és csak akkor torlódási pontja a $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ halmaznak, ha van olyan $(x_n)\colon \mathbb{N} \to H \setminus \{a\}$ sorozat, amelynek létezik $\overline{\mathbb{R}}$-beli határértéke, és* $\lim (x_n) = a$.

Bizonyítás.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Tegyük fel, hogy $a \in H'$ és $a \in \mathbb{R}$ egy valós szám. Ekkor bármely $n \in \mathbb{N}^+$ esetén van olyan $x_n \in H$, hogy $x_n \in K_{1/n}(a) \setminus \{a\}$. Következésképpen $(x_n)\colon \mathbb{N} \to H \setminus \{a\}$, és

$$\left|x_n - a\right| < \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N}^+).$$

Ez azt jelenti, hogy $\lim (x_n) = a$.

Ha $a = +\infty \in H'$, akkor tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ számhoz létezik olyan $x_n \in H$, amelyre $x_n > n$. Ha $P > 0$ tetszőleges és az $N \in \mathbb{N}$ indexre $N > P$, akkor minden $n \in \mathbb{N}$, $n > N$ mellet $x_n > n > N > P$, azaz $x_n > P$. Ezért $\lim (x_n) = +\infty$.

Hasonló módon következik az $a = -\infty \in H'$ esetben olyan $(x_n)\colon \mathbb{N} \to H$ sorozat létezése, amelyre $\lim (x_n) = -\infty$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Tegyük fel, hogy valamilyen $(x_n)\colon \mathbb{N} \to H \setminus \{a\}$ sorozatra $\lim (x_n) = a$. Ekkor bármely $K(a)$ környezetet véve egy k_0 küszöbindextől kezdve $x_k \in K(a)$ $(k > k_0)$ és $x_k \neq a$. Ez pedig azt jelenti, hogy $a \in H'$. ■

Függvény határértékének a definíciója. Alaptételek

Egy f valós-valós függvény határértékét a $\mathcal{D}_f$ értelmezési tartományának az a torlódási pontjaiban, vagyis az $a \in \mathcal{D}_f'$ pontokban fogjuk értelmezni. Ekkor $a \in \mathcal{D}_f$ és $a \notin \mathcal{D}_f$ is lehetséges. **Ezért a határérték szempontjából érdektelen, hogy a függvény értelmezve van-e a-ban, és ha igen, akkor ott mi a függvény helyettesítési értéke.** Így $a \in \mathcal{D}_f'$ lehet véges (vagyis $a \in \mathbb{R}$), de lehet $\pm\infty$ is. A függvény határértéke is lehet véges (ha $A \in \mathbb{R}$), de ez is lehet $\pm\infty$ is.

Először **környezetek** segítségével adjuk meg a határérték egységes definícióját.

A határérték egységes definíciója

2. definíció. *Azt mondjuk, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in \mathcal{D}'_f$ pontban* ***van határértéke****, ha*

$$\exists\, A \in \overline{\mathbb{R}}, \quad \forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz} \;\; \exists\, \delta > 0, \quad \forall\, x \in \big(K_\delta(a) \setminus \{a\}\big) \cap \mathcal{D}_f : \quad f(x) \in K_\varepsilon(A).$$

Ekkor A-t a függvény $a \in \mathcal{D}'_f$-beli ***határértékének*** *nevezzük, és az alábbi szimbólumok valamelyikével jelöljük:*

$$\lim_a f = A, \qquad \lim_{x \to a} f(x) = A, \qquad f(x) \to A, \quad \text{ha} \;\; x \to a.$$

Megjegyzések

1. A $\lim\limits_a f = A$ egyenlőség azt fejezi ki, hogy „az a-hoz közeli x pontokban felvett függvényértékek közel vannak A-hoz”.

2. Tekintsük az $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ speciális esetet, azaz legyen f egy valós sorozat. Ekkor $\mathcal{D}'_f = \mathbb{N}' = \{+\infty\}$. Gondoljuk meg, hogy a 2. definícióból adódó $\lim\limits_{+\infty} f = A \in \overline{\mathbb{R}}$ tulajdonság megegyezik sorozatok határértékének a korábbi definíciójával. ■

Alaptételek

2. tétel: A határérték egyértelmű. *Ha az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in \mathcal{D}'_f$ pontban van határértéke, akkor a 2. definícióban szereplő $A \in \overline{\mathbb{R}}$ egyértelműen létezik.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy valamilyen $B \in \overline{\mathbb{R}}$ is eleget tesz a definíció feltételeinek és $A \neq B$. Ekkor

$$\exists\, \varepsilon > 0 : \quad K_\varepsilon(A) \cap K_\varepsilon(B) = \emptyset.$$

Egy ilyen ε-hoz a határérték definíciója szerint

$$\begin{aligned} &\exists\, \delta_1 > 0 : \;\; \forall\, x \in \big(K_{\delta_1}(a) \setminus \{a\}\big) \cap \mathcal{D}_f : \quad f(x) \in K_\varepsilon(A), \\ &\exists\, \delta_2 > 0 : \;\; \forall\, x \in \big(K_{\delta_2}(a) \setminus \{a\}\big) \cap \mathcal{D}_f : \quad f(x) \in K_\varepsilon(B). \end{aligned}$$

Legyen $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Ekkor

$$\forall\, x \in \big(K_\delta(a) \setminus \{a\}\big) \cap \mathcal{D}_f : \quad f(x) \in K_\varepsilon(A) \cap K_\varepsilon(B) = \emptyset.$$

Ellentmondásra jutottunk, és ezzel a határérték egyértelműségét igazoltuk. ■

A következő tétel azt állítja, hogy a határérték sorozatok határértékével jellemezhető.

3. tétel: A határértékre vonatkozó átviteli elv. *Tegyük fel, hogy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}_f'$ és $A \in \overline{\mathbb{R}}$. Ekkor*

$$\lim_a f = A \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \forall\, (x_n)\colon \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f \setminus \{a\}, \ \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a \text{ esetén} \\ \qquad \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = A. \end{cases}$$

Bizonyítás.

$\boxed{\Longrightarrow}$ $\lim\limits_a f = A \implies \forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists\, \delta > 0, \ \forall\, x \in \big(K_\delta(a) \setminus \{a\}\big) \cap \mathcal{D}_f : \ f(x) \in K_\varepsilon(A).$

Legyen (x_n) egy, a tételben szereplő sorozat és $\varepsilon > 0$ egy rögzített érték. Ekkor a $K_\delta(a)$ környezethez $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall\, n > n_0 : \ x_n \in K_\delta(a)$. Így $f(x_n) \in K_\varepsilon(A)$ telejesül minden $n > n_0$ indexre, és ez azt jelenti, hogy az $\big(f(x_n)\big)$ sorozatnak van határértéke, és $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = A$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Tegyük fel, hogy $\forall\, (x_n)\colon \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f \setminus \{a\}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ esetén $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = A$. Megmutatjuk, hogy $\lim\limits_a f = A$.

Az állítással ellentétben tegyük fel, hogy a $\lim\limits_a f = A$ egyenlőség nem igaz. Ez részletesen azt jelenti, hogy

$$\exists\, \varepsilon > 0, \quad \forall\, \delta > 0\text{-hoz } \ \exists\, x_\delta \in \big(K_\delta(a) \setminus \{a\}\big) \cap \mathcal{D}_f : \quad f(x_\delta) \notin K_\varepsilon(A).$$

A $\delta = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ választással ez azt jelenti, hogy

$$\exists\, \varepsilon > 0, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^+\text{-hoz } \ \exists\, x_n \in \big(K_{1/n}(a) \setminus \{a\}\big) \cap \mathcal{D}_f : \quad f(x_n) \notin K_\varepsilon(A).$$

Ez az (x_n) sorozat nyilván a-hoz tart (hiszen $x_n \in K_{1/n}(a)$), de a függvényértékek $\big(f(x_n)\big)$ sorozata nem tart A-hoz (hiszen $f(x_n) \notin K_\varepsilon(A)$), ami ellentmond a feltételünknek. ■

Az átviteli elv és a sorozatokra vonatkozó közrefogási elv közvetlen következménye az alábbi állítás.

4. tétel: A közrefogási elv. *Tegyük fel, hogy $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$, $f, g, h\colon H \to \mathbb{R}$, $a \in H'$ és*

$$\exists\, K(a) : \quad f(x) \le h(x) \le g(x) \quad \forall\, x \in \big(K(a) \setminus \{a\}\big) \cap H.$$

Ha

$$\exists \lim_a f, \quad \exists \lim_a g \quad \text{és} \quad \lim_a f = \lim_a g = A \in \overline{\mathbb{R}},$$

akkor

$$\exists \lim_a h \quad \text{és} \quad \lim_a h = A.$$

A sorozatoknál láttuk, hogy a három algebrai művelet és a határérték képzés sorrendje a „legtöbb esetben” felcserélhető. A következő tétel azt állítja, hogy ez igaz függvények határértékre is.

5. tétel: A határérték és a műveletek kapcsolata. *Tegyük fel, hogy* $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \big(\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g\big)'$ *és léteznek az* $A := \lim\limits_a f \in \overline{\mathbb{R}}$, $B := \lim\limits_a g \in \overline{\mathbb{R}}$ *határértékek. Ekkor*

1° *az* $f + g$ *összegfüggvénynek is van határértéke* a*-ban és*

$$\lim_a (f+g) = \lim_a f + \lim_a g = A + B,$$

feltéve, hogy az $A + B \in \overline{\mathbb{R}}$ *összeg értelmezve van;*

2° *az* $f \cdot g$ *szorzatfüggvénynek is van határértéke* a*-ban és*

$$\lim_a (f \cdot g) = \lim_a f \cdot \lim_a g = A \cdot B,$$

feltéve, hogy az $A \cdot B \in \overline{\mathbb{R}}$ *szorzat értelmezve van;*

3° *az* $\dfrac{f}{g}$ *hányadosfüggvénynek is van határértéke* a*-ban és*

$$\lim_a \frac{f}{g} = \frac{\lim\limits_a f}{\lim\limits_a g} = \frac{A}{B},$$

feltéve, hogy az $\dfrac{A}{B} \in \overline{\mathbb{R}}$ *hányados értelmezve van.*

Bizonyítás. Az átviteli elv és a sorozatokra vonatkozó analóg állítás közvetlen következménye. ■

Kritikus határértékekről beszélünk akkor, ha az 5. tétel nem alkalmazható. A sorozatokhoz hasonlóan ilyenek például a

$$(+\infty) + (-\infty) \text{ (vagy } (+\infty) - (+\infty)), \qquad 0 \cdot (\pm\infty), \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \qquad \frac{0}{0}, \quad \frac{c}{0} \; (c \in \overline{\mathbb{R}})$$

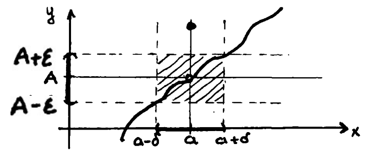
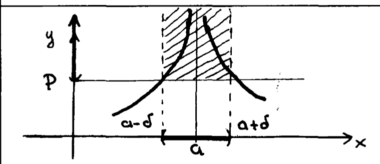
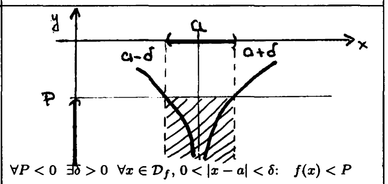
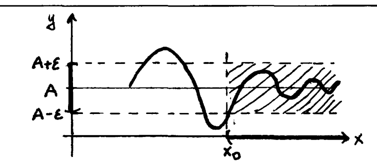
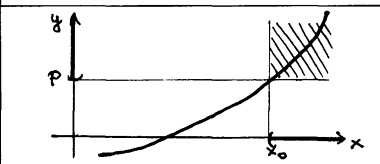
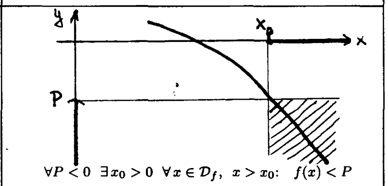
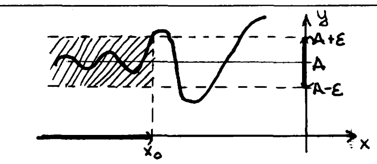
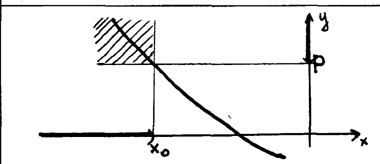
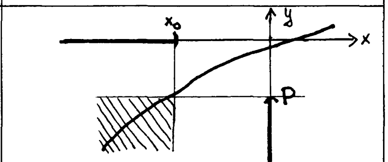
típusú kritikus határértékek.

A határérték definíciójának speciális esetei

A $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ egyenlőségre a-tól, illetve A-tól függően a következő szóhasználatokat vezetjük be.

- **Végesben vett véges határérték**, ha $a \in \mathbb{R}$ és $A \in \mathbb{R}$.
- **Végesben vett végtelen határérték**, ha $a \in \mathbb{R}$ és $A = \pm\infty$.
- **Végtelenben vett véges határérték**, ha $a = \pm\infty$ és $A \in \mathbb{R}$.
- **Végtelenben vett végtelen határérték**, ha $a = \pm\infty$ és $A = \pm\infty$.

Fontos megjegyezni, hogy a $\lim\limits_{a} f = A$-ra a **környezetekkel** megadott egységes definíciót a speciális esetekben **egyenlőtlenségekkel** is megfogalmazhatjuk.

	$A \in \mathbb{R}$	$A = +\infty$	$A = -\infty$
$a \in \mathbb{R}$	 $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in\mathcal{D}_f,\ 0<\lvert x-a\rvert<\delta:\ \lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$	 $\forall P>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in\mathcal{D}_f,\ 0<\lvert x-a\rvert<\delta:\ f(x)>P$	 $\forall P<0\ \exists\delta>0\ \forall x\in\mathcal{D}_f,\ 0<\lvert x-a\rvert<\delta:\ f(x)<P$
$a = +\infty$	 $\forall\varepsilon>0\ \exists x_0>0\ \forall x\in\mathcal{D}_f,\ x>x_0:\ \lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$	 $\forall P>0\ \exists x_0>0\ \forall x\in\mathcal{D}_f,\ x>x_0:\ f(x)>P$	 $\forall P<0\ \exists x_0>0\ \forall x\in\mathcal{D}_f,\ x>x_0:\ f(x)<P$
$a = -\infty$	 $\forall\varepsilon>0\ \exists x_0<0\ \forall x\in\mathcal{D}_f,\ x<x_0:\ \lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$	 $\forall P>0\ \exists x_0<0\ \forall x\in\mathcal{D}_f,\ x<x_0:\ f(x)>P$	 $\forall P<0\ \exists x_0<0\ \forall x\in\mathcal{D}_f,\ x<x_0:\ f(x)<P$

Egyoldali határértékek

3. definíció. *Legyen* $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Tegyük fel, hogy* $a \in \mathbb{R}$ *és* $a \in \big(\mathcal{D}_f \cap (a, +\infty)\big)'$. *Azt mondjuk, hogy az* f *függvénynek az* a *helyen (vagy* a*-ban)* ***van jobb oldali határértéke****, ha*

$$\exists\, A \in \overline{\mathbb{R}},\quad \forall\, \varepsilon > 0\text{-}hoz\ \ \exists\, \delta > 0,\quad \forall\, x \in \mathcal{D}_f,\ a < x < a+\delta:\quad f(x) \in K_\varepsilon(A).$$

Ekkor A *egyértelmű, és ezt az* f *függvény* a*-ban vett* ***jobb oldali határértékének*** *nevezzük, és az alábbi szimbólumok valamelyikével jelöljük:*

$$\lim_{a+0} f = A, \qquad \lim_{x \to a+0} f(x) = A, \qquad f(a+0) = A.$$

4. definíció. *Legyen* $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Tegyük fel, hogy* $a \in \mathbb{R}$ *és* $a \in \big(\mathcal{D}_f \cap (-\infty, a)\big)'$. *Azt mondjuk, hogy az* f *függvénynek az* a *helyen (vagy* a*-ban)* ***van bal oldali határértéke****, ha*

$$\exists\, A \in \overline{\mathbb{R}},\quad \forall\, \varepsilon > 0\text{-}hoz\ \ \exists\, \delta > 0,\quad \forall\, x \in \mathcal{D}_f,\ a-\delta < x < a:\quad f(x) \in K_\varepsilon(A).$$

Ekkor A *egyértelmű, és ezt az* f *függvény* a*-ban vett* ***bal oldali határértékének*** *nevezzük, és az alábbi szimbólumok valamelyikével jelöljük:*

$$\lim_{a-0} f = A, \qquad \lim_{x \to a-0} f(x) = A, \qquad f(a-0) = A.$$

A következő tétel nyilvánvaló a definíciókból.

6. tétel. *Tegyük fel, hogy* $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *és* $a \in \mathcal{D}_f'$. *Ekkor*

$$\exists \lim_a f \iff \exists \lim_{a-0} f,\ \exists \lim_{a+0} f \ \ \textit{és}\ \ \lim_{a-0} f = \lim_{a+0} f \ \left(= \lim_a f\right).$$

A határértékre vonatkozó alaptételek az egyoldali határértékekre is érvényesek.

2. példák.

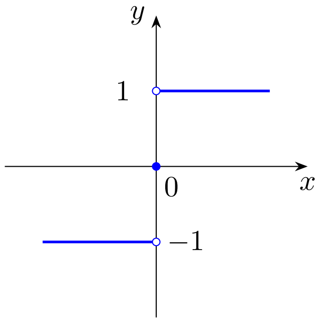
(1) $\displaystyle \lim_{x\to 0+0} \frac{1}{x} = +\infty$ és $\displaystyle \lim_{x\to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty \implies \nexists \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}.$

(2) $\displaystyle \lim_{x\to 0+0} \operatorname{sign}(x) = 1$ és $\displaystyle \lim_{x\to 0-0} \operatorname{sign}(x) = -1 \implies \nexists \lim_{x\to 0} \operatorname{sign}(x).$

Nevezetes határértékek 1.

1. **Az előjelfüggvény** (vagy **szignumfüggvény**.)

$$\operatorname{sign}(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in (0, +\infty) \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ -1, & \text{ha } x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$



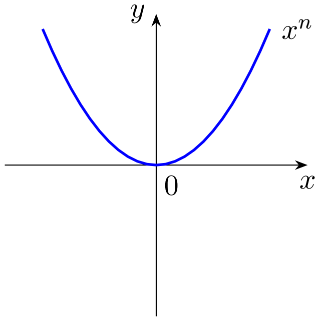
$$\lim_{0+0} \operatorname{sign} = 1$$

$$\lim_{0-0} \operatorname{sign} = -1$$

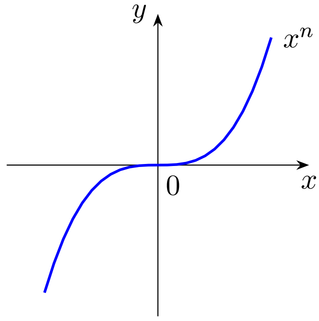
$$\nexists \lim_{0} \operatorname{sign}$$

2. **Hatványfüggvények.** $f(x) := x^n \ (x \in \mathbb{R})$, $n = 1, 2, \ldots$.

n páros



n páratlan



Mivel $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \Longrightarrow \mathcal{D}_f' = \mathbb{R}' = \overline{\mathbb{R}}$, ezért a határérték minden $a \in \overline{\mathbb{R}}$ helyen vizsgálható.

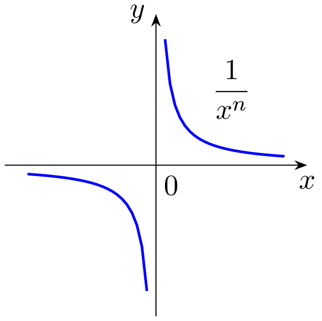
Az átviteli elvből következnek az alábbi állítások:

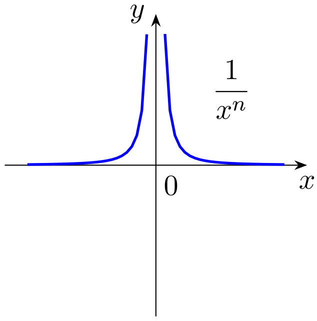
2. (a) $$\boxed{\lim_{x \to a} x^n = a^n, \quad \forall\, a \in \mathbb{R} \ \text{ és } \ \forall\, n = 1, 2, \ldots}$$

2. (b) $$\boxed{\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty, \qquad \forall\, n = 1, 2, \ldots}$$

2. (c) $$\boxed{\lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & \text{ha } n = 2, 4, 6, \ldots \\ -\infty, & \text{ha } n = 1, 3, 5, \ldots \end{cases}}$$

3. Reciprokfüggvények. $\quad f(x) := \dfrac{1}{x^n} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}),\ n = 1, 2, \ldots.$





Mivel $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} \implies \mathcal{D}'_f = \big(\mathbb{R} \setminus \{0\}\big)' = \overline{\mathbb{R}}$, ezért a határérték minden $a \in \overline{\mathbb{R}}$ helyen vizsgálható.

Az átviteli elvből következnek az alábbi állítások:

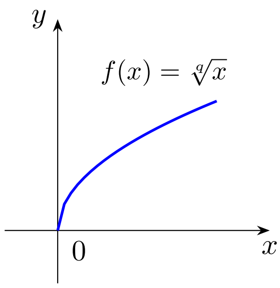
3. (a) $$\boxed{\lim_{x \to a} \frac{1}{x^n} = \frac{1}{a^n}, \quad \forall\, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \ \text{ és } \ n = 1, 2, \ldots}$$

3. (b) $$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad \forall\, n = 1, 2, \ldots}$$

3. (c) $$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^n} \begin{cases} = +\infty, & \text{ha } n = 2, 4, 6, \ldots \\ \nexists, & \text{ha } n = 1, 3, 5, \ldots \end{cases}}$$

Ha n páratlan, akkor
$$\lim_{x \to 0-0} \frac{1}{x^n} = -\infty \quad \text{és} \quad \lim_{x \to 0+0} \frac{1}{x^n} = +\infty$$

4. Gyökfüggvények. $\quad f(x) := \sqrt[q]{x} = x^{\frac{1}{q}} \ \big(x \in [0, +\infty)\big),\ q = 2, 3, \ldots.$



Mivel $\mathcal{D}_f = [0, +\infty)$, ezért $\mathcal{D}'_f = [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$. Az átviteli elvből következnek az alábbi állítások:

4. (a) $$\boxed{\lim_{x \to a} \sqrt[q]{x} = \sqrt[q]{a} \quad \big(\forall\, a \in [0, +\infty),\ \forall\, q = 2, 3, \ldots\big)},$$

4. (b) $$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \sqrt[q]{x} = +\infty \quad \big(\forall\, q = 2, 3, \ldots\big)}.$$

$\boxed{5.}$ **Polinomfüggvények.** Legyen

$$P(x) := \alpha_r\, x^r + \alpha_{r-1}\, x^{r-1} + \cdots \alpha_1\, x + \alpha_0 \quad (x \in \mathbb{R})$$
$$\big(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R},\ 1 \le r \in \mathbb{N}\big)$$

egy pontosan r-edfokú polinom (azaz $\alpha_r \neq 0$). Mivel $\mathcal{D}_P = \mathbb{R} \Longrightarrow \mathcal{D}'_P = \mathbb{R}' = \overline{\mathbb{R}}$, ezért a határértéket $\forall\, a \in \overline{\mathbb{R}}$ helyen vizsgálhatjuk.

4. (a) $$\boxed{\lim_{x\to a} P(x) = P(a) \quad \forall\, a \in \mathbb{R}},$$

4. (b) $$\boxed{\lim_{x\to +\infty} P(x) = \operatorname{sign}(\alpha_r) \cdot (+\infty)},$$

4. (c) $$\boxed{\lim_{x\to -\infty} P(x) = (-1)^r \cdot \operatorname{sign}(\alpha_r) \cdot (+\infty)}.$$

$\boxed{6.}$ **Racionális törtfüggvénynek** nevezzük az $R := \dfrac{P}{Q}$ alakú függvényeket, ahol P, Q polinomok. Feltesszük, hogy Q legalább elsőfokú. Az R függvény ott van értelmezve, ahol a nevező nem nulla, tehát véges sok pont kivételével mindenütt.

Mivel $\mathcal{D}'_R = \overline{\mathbb{R}}$, ezért R határértékét $\forall\, a \in \overline{\mathbb{R}}$ helyen vizsgálhatjuk. Az alábbi eseteket fogjuk megkülönböztetni.

<u>1^o eset:</u> $\boxed{Q(a) \neq 0.}$ Ekkor $\boxed{5.}$ és a műveleti tételek alapján azt kapjuk, hogy

$$\underline{\underline{\lim_a R}} = \lim_a \frac{P}{Q} = \frac{\lim_a P}{\lim_a Q} = \underline{\underline{\frac{P(a)}{Q(a)} = R(a)}}\,.$$

<u>2^o eset:</u> $\boxed{a = +\infty}$ vagy $\boxed{a = -\infty}$. Ekkor $\boxed{5.}$ szerint $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ típusú kritikus határértékről van szó, amelyet a sorozatoknál megismert technikák segítségével vissza lehet vezetni nem kritikus határértékre. Könnyű megmutatni, hogy a szóban forgó **határértékek mindegyike létezik**. Például, ha $a = +\infty$, akkor

(a) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+1}{3x^2-2x+5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\frac{1}{x^2}}{3-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}} = \frac{2}{3},$$

(b) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-2x+1}{x^3+100} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{100}{x^3}} = \frac{0}{1} = 0,$$

(c) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^3-1}{x^2+2} = \lim_{x\to+\infty} x \cdot \frac{3-\frac{1}{x^3}}{1+\frac{2}{x^2}} = (+\infty)\cdot 3 = +\infty,$$

(d) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^3-1}{2-x^2} = \lim_{x\to+\infty} x \cdot \frac{3-\frac{1}{x^3}}{\frac{2}{x^2}-1} = (+\infty)\cdot(-3) = -\infty.$$

Hasonló a helyzet, ha $a = -\infty$.

3^o eset: $Q(a) = 0$. Ekkor két eset lehetséges: $P(a) \neq 0$ vagy $P(a) = 0$.

3^o (a) eset: Legyen $\boxed{P(a) \neq 0}$ és $\boxed{Q(a) = 0}$. A Q polinomot felírhatjuk a

$$(*) \qquad Q(x) = (x-a)^m \cdot q(x)$$

alakban, ahol $m = 1, 2, \ldots$ és q olyan polinom, amelyre $q(a) \neq 0$.

Ha $\boxed{m = 2k}$ páros, akkor

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{(x-a)^{2k}} = +\infty,$$

ezért a műveleti tételek alapján

$$\underline{\underline{\lim_a R}} = \lim_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to a} \left(\frac{P(x)}{q(x)} \cdot \frac{1}{(x-a)^{2k}} \right) =$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{P(x)}{q(x)} \cdot \lim_{x \to a} \frac{1}{(x-a)^{2k}} = \underline{\underline{\operatorname{sign}\left(\frac{P(a)}{q(a)} \right) \cdot (+\infty)}}\,.$$

Ha $\boxed{m = 2k+1}$ páratlan, akkor

$$\lim_{x \to a-0} \frac{1}{(x-a)^{2k+1}} = -\infty \quad \text{és} \quad \lim_{x \to a+0} \frac{1}{(x-a)^{2k+1}} = +\infty.$$

Mivel

$$\lim_{x \to a} \frac{P(x)}{q(x)} = \lim_{x \to a-0} \frac{P(x)}{q(x)} = \lim_{x \to a+0} \frac{P(x)}{q(x)} =: A \in \mathbb{R},$$

ezért

$$\lim_{x \to a-0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to a-0} \left(\frac{P(x)}{q(x)} \cdot \frac{1}{(x-a)^{2k+1}} \right) = \operatorname{sign}(A) \cdot (-\infty) \quad \text{és}$$

$$\lim_{x \to a+0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to a+0} \frac{P(x)}{q(x)} \cdot \frac{1}{(x-a)^{2k+1}} = \operatorname{sign}(A) \cdot (+\infty), \quad \text{ezért}$$

$$\underline{\underline{\nexists \lim_a R = \lim_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)}}}\,.$$

3^o (b) eset: Legyen $\boxed{P(a) = 0}$ és $\boxed{Q(a) = 0}$. Tekintsük a Q polinom (*) alakját! A P polinom is felírható a

$$(*) \qquad P(x) = (x-a)^s \cdot p(x)$$

alakban, ahol $s = 1, 2, \ldots$ és p olyan polinom, amelyre $p(a) \neq 0$. Így

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{p(x)}{q(x)} \cdot (x-a)^{s-m}.$$

Mivel

$$\lim_{x \to a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)} \in \mathbb{R},$$

ezért a $\lim\limits_a R$ határérték az s és az m kitevőktől függően az előzőekhez hasonlóan kezelhető.