7. előadás

INTEGRÁLSZÁMÍTÁS 2.

Az integrálfüggvény

A határozott integrál értelmezése szerint a területmérő függvény értékeit úgy kapjuk meg, hogy kiszámítjuk a határozott integrált az induló x_0 pontól a változó x pontig, ahol $x > x_0$. Eredetileg a területmérés nem negatív értékeket felvevő folytonos függvényeknél értelmeztük, de ezek a feltételek nem szükségesek a határozott integrál értelmezéséhez, ezért a területmérés általánosítható bármely zárt intervallumon integrálható függvényre. Ha a függvény negatív értékeket is felvesz, akkor ki kell vonni a pozitív görbeszakaszok alatti területekből a negatív görbeszakaszok feletti területeket. Fontos még megjegyezni, hogy a területmérést „visszafelé" is értelmezhetjük az

$$\int_a^a f := 0, \qquad \text{és} \qquad \int_a^b f := -\int_b^a f, \quad \text{ha } a > b$$

általános értelmezés segítségével. Ezzel ki tudjuk számítani egy határozott integrált az induló x_0 pontól a változó x pontig, ha $x \le x_0$. A területmérő elnevezést ezentúl már nem fogjuk többet alkalmazni.

1. Definíció. *Tegyük fel, hogy $f \in R[a,b]$ és $x_0 \in [a,b]$. Az*

$$F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \qquad \big(x \in [a,b]\big)$$

függvényt **az f függvény x_0 pontban eltűnő integrálfüggvényének** *nevezzük.*

Megjegyzések.

1. F jól értelmezett, hiszen tudjuk, hogy ha $f \in R[a,b]$, akkor $\forall x \in (x_0, b]\colon f \in R[x_0, x]$, illetve $\forall x \in [a, x_0)\colon f \in R[x, x_0]$.
2. Az „x_0 pontban eltűnő" kifejezés arra utal, hogy $F(x_0) = 0$.

1. Tétel (Az integrálfüggvény folytonossága). *Legyen $f \in R[a,b]$, $x_0 \in [a,b]$ és F az f függvény x_0 pontban eltűnő integrálfüggvénye. Ekkor $F \in C[a,b]$.*

Bizonyítás. Mivel f korlátos függvény, hiszen $f \in R[a,b]$, így $\exists K > 0$, hogy

$$\big|f(x)\big| \le K \qquad \big(x \in [a,b]\big).$$

Legyen $x \in [a,b]$ egy tetszőleges pont és $(x_n) : \mathbb{N} \to [a,b]$ olyan sorozat, hogy $\lim(x_n) = x$. Tegyük fel, hogy $x_n \ge x$ $(n \in \mathbb{N})$. Ekkor a határozott integrál tulajdonságai alapján

$$\big|F(x_n) - F(x)\big| = \left|\int_{x_0}^{x_n} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right| = \left|\int_{x}^{x_n} f(t)\,dt\right| \le \int_{x}^{x_n} \big|f(t)\big|\,dt \le \int_{x}^{x_n} K\,dt =$$

$$= K(x_n - x) \to 0, \quad \text{azaz} \quad F(x_n) \to F(x), \quad \text{ha } n \to +\infty.$$

Ezért az átviteli elv szerint F jobbról folytonos az x pontban. Hasonlóan igazolható, hogy F balról folytonos az x pontban.

2. Tétel (Az integrálfüggvény deriválthatósága). *Legyen $f \in R[a,b]$, $x_0 \in [a,b]$ és F az f függvény x_0 pontban eltűnő integrálfüggvénye. Tegyük fel, hogy $x \in (a,b)$ olyan pont, amire $f \in C\{x\}$ teljesül. Ekkor $F \in D\{x\}$ és $F'(x) = f(x)$.*

Bizonyítás. Legyen $h > 0$ olyan szám, amire $x + h < b$ teljesül. Ekkor a határozott integrál tulajdonságai alapján

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int\limits_{x_0}^{x+h} f(t)\,dt - \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right) = \frac{1}{h}\int\limits_{x}^{x+h} f(t)\,dt$$

Másrészt, mivel x egy rögzített szám, így

$$\frac{1}{h}\int\limits_{x}^{x+h} f(x)\,dt = f(x)\cdot\frac{1}{h}\cdot\int\limits_{x}^{x+h} 1\,dt = f(x)\cdot\frac{1}{h}\cdot(x+h-x) = f(x).$$

Ezért az integrál linearitása alapján

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int\limits_{x}^{x+h} f(t)\,dt - f(x) + f(x) = \frac{1}{h}\int\limits_{x}^{x+h} f(t)\,dt - \frac{1}{h}\int\limits_{x}^{x+h} f(x)\,dt + f(x) =$$

$$= \frac{1}{h}\int\limits_{x}^{x+h} \big(f(t) - f(x)\big)\,dt + f(x).$$

Mivel $f \in C\{x\}$, így a definíció szerint

$$\forall\varepsilon > 0\text{-hoz } \exists\delta > 0,\ \forall t \in (x-\delta, x+\delta)\colon \big|f(t) - f(x)\big| < \varepsilon.$$

Legyen $0 < h < \delta$. Ekkor $x \le t < x + h \implies t \in (x-\delta, x+\delta) \implies \big|f(t) - f(x)\big| < \varepsilon$. Így a fentiek és az integrál tulajdonságai szerint

$$\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x)\right| = \left|\frac{1}{h}\int\limits_{x}^{x+h} \big(f(t) - f(x)\big)\,dt\right| \le \frac{1}{h}\int\limits_{x}^{x+h} \big|f(t) - f(x)\big|\,dt <$$

$$< \frac{1}{h}\int\limits_{x}^{x+h} \varepsilon\,dt = \frac{1}{h}\cdot\varepsilon\cdot(x+h-x) = \varepsilon \qquad\implies\qquad \lim_{h\to 0+0}\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x)\right| = 0.$$

Így

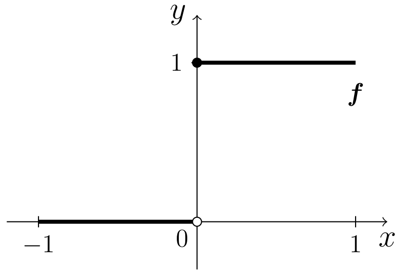
$$\lim_{h\to 0+0}\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x) \qquad\implies\qquad \exists F'_+(x) = f(x).$$

Hasonlóan igazolható, hogy létezik F bal oldali deriváltja az x pontban, és $F'_-(x) = f(x)$. Így $\exists F'(x) = f(x)$.

Megjegyzések.

1. Az előző két tétel állítását így foglalhatjuk össze: az integrálfüggvény minden pontban folytonos, és olyan pontokban differenciálható, ahol az eredeti függvény folytonos. Ezekben a pontokban az integrálfüggvény deriváltja az eredeti függvény értékével egyenlő.

2. Következmény: minden nyílt intervallumon értelmezett folytonos függvénynek van primitív függvénye.

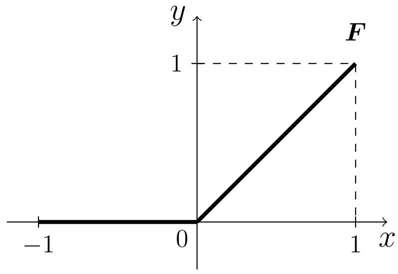


Példa. Ha $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} 0 & (-1 \le x < 0) \\ 1 & (0 \le x \le 1), \end{cases}$$

akkor az $x_0 = 0$ pontban eltűnő integrálfüggvény

$$F(x) := \begin{cases} 0 & (-1 \le x < 0) \\ x & (0 \le x \le 1). \end{cases}$$



A határozott integrál kiszámítása

Az előzőek szerint, ha $f \in C[a,b]$, akkor tetszőleges $x_0 \in [a,b]$ pontban eltűnő F integrálfüggvényre igaz, hogy $F \in C[a,b]$, $F \in D(a,b)$ és $F'(x) = f(x)$ minden $x \in (a,b)$ esetén. Az ilyen függvényekre érdemes külön elnevezést bevezetni.

2. Definíció. *Legyen $[a,b] \subset \mathbb{R}$ korlátos és zárt intervallum. A $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény egy* **primitív függvénye az $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ intervallumon***, ha*

- $F \in C[a,b]$,
- $F \in D(a,b)$ *és* $F'(x) = f(x)$ $\big(x \in (a,b)\big)$.

A következő rendkívül fontos tételt a kalkulus alaptételének is nevezik.

3. Tétel (Newton–Leibniz-formula). *Tegyük fel, hogy*

- $f \in R[a,b]$ *és*
- *az f függvénynek van primitív függvénye az $[a,b]$ intervallumon.*

Ekkor

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) =: \Big[F(x)\Big]_a^b,$$

ahol F az f függvény egy primitív függvénye.

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, és tekintsük az $[a, b]$ intervallum egy tetszőlegesen megválasztott $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ felosztását. A Lagrange-féle középértéktétel szerint minden $i = 0, 1, \ldots, n-1$ indexre van olyan $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$ pont, amelyre

$$F(x_{i+1}) - F(x_i) = F'(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) = f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

teljesül. Ha ezeket az egyenlőségeket összeadjuk minden $i = 0, 1, \ldots, n-1$ indexre, akkor a bal oldalon minden tag kiesik, kivéve az $F(x_n) = F(b)$ és az $F(x_0) = F(a)$ tagokat. Így azt kapjuk, hogy

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i).$$

Mivel $\inf\limits_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) \leq f(\xi_i) \leq \sup\limits_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)$ ha $i = 0, 1, \ldots, n-1$, ezért a

$$s(f, \tau) \leq F(b) - F(a) \leq S(f, \tau)$$

egyenlőtlenség minden $\tau \in \mathcal{F}[a, b]$ felosztásra teljesül. Következésképpen

$$I_*(f) = \sup_{\tau \in \mathcal{F}[a,b]} s(f, \tau) \leq F(b) - F(a) \leq \inf_{\tau \in \mathcal{F}[a,b]} S(f, \tau) = I^*(f).$$

Az $f \in R[a, b]$ (azaz az $I_*(f) = I^*(f)$) feltételünkből így az következik, hogy

$$F(b) - F(a) = I_*(f) = I^*(f) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Megjegyzések.

1. A Newton–Leinbiz-formula feltételei közül egyik sem hagyható el. Belátható, hogy ezek egymástól függetlenek (egyikből sem következik a másik): létezik ui. olyan integrálható függvény, amelynek nincs primitív függvénye (ilyen pl. a szignum függvény a $[-1, 1]$ intervallumon). Jóval nehezebb annak a megmutatása, hogy van olyan nem integrálható függvény, amelynek van primitív függvénye.

2. Minden $f \in C[a, b]$ folytonos függvény teljesíti a Newton–Leibniz-formula feltételeit. De akkor sem biztos, hogy tudjuk a formulát alkalmazni, mert ehhez ismerni kell a primitív függvényeit, azaz a határozatlan integrálját. Láttuk, hogy ennek kiszámítása nagyon nehéz feladat lehet, a legrosszabb esetben nem elemi függvény.

Példa. Számítsuk ki a

$$\int_0^\pi \sin x\, dx$$

határozott integrált! Világos, hogy a $\sin x \; \big(x \in [0, \pi]\big)$ függvényre teljesülnek a Newton–Leibniz-formula feltételei, és $F(x) = -\cos x \; \big(x \in [0, \pi]\big)$ a sin függvény egy primitív függvénye $[0, \pi]$-n. Így

$$\int_0^\pi \sin x\, dx = \Big[-\cos x\Big]_0^\pi = \big(-\cos \pi\big) - \big(-\cos 0\big) = 1 - (-1) = 2.$$

Ezzel megkaptuk a $\sin|_{[0,\pi]}$, függvény grafikonja alatti síkidom területét.

A HATÁROZOTT INTEGRÁL NÉHÁNY ALKALMAZÁSA

Ebben a pontban a határozott integrál néhány geometriai alkalmazását mutatjuk be.

Síkidom területe

Emlékeztetünk arra, hogy ha a korlátos $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény Riemann-integrálható az $[a, b]$ intervallumon, és $f(x) \geq 0$ $(x \in [a, b])$, akkor az f grafikonja alatti

$$A := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\right\}$$

síkidom területét így *értelmeztük:*

$$T(A) := \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

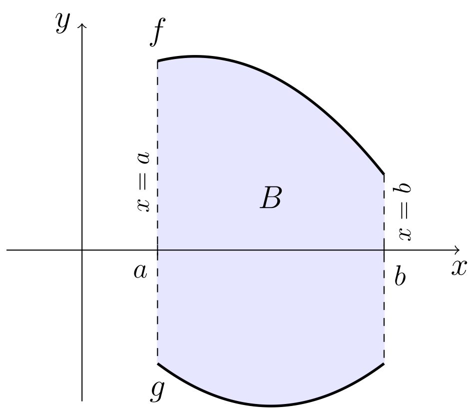
Két $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos és Riemann-integrálható függvény esetében, ha $g(x) \leq f(x)$ minden $x \in [a, b]$ esetén, akkor a függvények az $x = a$ és $x = b$ egyenesekkel által közrezárt

$$B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; a \leq x \leq b,\ g(x) \leq y \leq f(x)\right\}$$

síkidom területét a

$$T(B) = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,dx$$

határozott integrállal célszerű értelmezni.



Ez könnyen látható, ha $g \geq 0$, hiszen ekkor az f függvény grafikonja alatti A_f síkidom tartalmazza a g függvény grafikonja alatti A_g síkidomot, azaz $A_g \subset A_f$, és így

$$T(B) = T(A_f \setminus A_g) = T(A_f) - T(A_g) = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,dx.$$

Ha a $g \geq 0$ feltétel nem teljesül, akkor a függvény korlátossága miatt $\exists c > 0$ szám, hogy $f(x) + c \geq g(x) + c \geq 0$ minden $x \in [a, b]$ esetén. Ezzel feltoltuk a B síkidomot az x tengely fölé, amit az $f + c, g + c$ függvények az $x = a$ és $x = b$ egyenesekkel zárnak közre. Ezért területe

$$T(B) = \int_a^b \big(f(x) + c - (g(x) + c)\big)\,dx = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,dx.$$

Példa (<u>A kör területe</u>). Helyezzük el az $R > 0$ sugarú körlapot a koordináta-rendszerben úgy, hogy az origó legyen a körlap középpontja. Ekkor a körvonal egyenlete $x^2 + y^2 = R^2$. Világos, hogy elég a felső félsíkba eső félkörlap területét meghatározni. A körvonal felső félsíkba eső része az

$$f(x) := \sqrt{R^2 - x^2} \qquad \big(x \in [-R, R]\big)$$

függvény grafikonja.

Mivel az f függvény folytonos, ezért Riemann-integrálható az $[a,b]$ intervallumon, következésképpen a szóban forgó félkörlapnak *van* területe, és az egyenlő a következő határozott integrállal:

$$\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\, dx.$$

A Newton–Leibniz-tétel szerint először az integrandus egy primitív függvényét kell meghatározni. Ez létezik, mert a szóban forgó függvény folytonos.

Mivel

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\cdot \arcsin x + \frac{1}{2}\cdot x\sqrt{1-x^2} + c \qquad \big(x \in (-1,1)\big),$$

ezért lineáris helyettesítéssel

$$\int \sqrt{R^2-x^2}\, dx = R\int \sqrt{1-\left(\frac{x}{R}\right)^2}\, dx = R\cdot \frac{1}{\frac{1}{R}}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{x}{R} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{R}\sqrt{1-\left(\frac{x}{R}\right)^2}\right) + c =$$

$$= \frac{R^2}{2}\cdot \arcsin\frac{x}{R} + \frac{Rx}{2}\sqrt{1-\left(\frac{x}{R}\right)^2} + c \qquad \big(x\in(-R,R)\big).$$

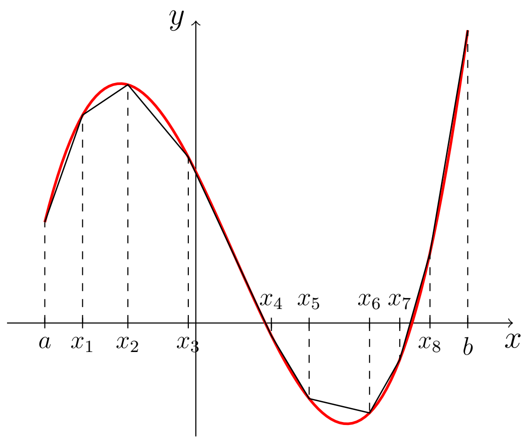
Így a Newton–Leibniz-tétel szerint

$$\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2-x^2}\, dx = \left[\frac{R^2}{2}\cdot\arcsin\frac{x}{R} + \frac{Rx}{2}\sqrt{1-\left(\frac{x}{R}\right)^2}\right]_{-R}^{R} =$$

$$= \frac{R^2}{2}\cdot \arcsin 1 - \frac{R^2}{2}\cdot\arcsin(-1) = \frac{R^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{R^2}{2}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{R^2\pi}{2},$$

vagyis az R sugarú félkörlap területe $R^2\pi/2$. Ezzel megkaptuk az R sugarú körlap területének ismert képletét: $R^2\pi$.

Síkbeli görbe ívhossza



Az ívhossz problémájánál a terület definíciója során megismert gondolatmenetet követjük. A görbét egy felosztáshoz tartozó törtvonallal közelítjük. A szemléletre hivatkozva azt várjuk, hogy egy „elég finom” beírt törtvonal annyira megközelíti a görbét, hogy a hosszúsága is közel lesz a görbe hosszához. Mindezekből azt szűrhetjük le, hogy a görbe ívhossza egyenlő az összes beírt törtvonal hosszának a szuprémumával. Ezt a megállapítást fogjuk definícióként elfogadni.

A definíciót csak függvénygrafikonokra fogalmazzuk meg. Legyen valamilyen korlátos és zárt $[a,b]$ intervallum esetén adott az $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ függvény. Emlékeztetünk arra, hogy a

$$\Gamma_f := \left\{\big(x, f(x)\big)\ \middle|\ x\in[a,b]\right\}$$

síkbeli halmazt (görbét) neveztük f grafikonjának.

Tetszőleges $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\} \in \mathcal{F}[a,b]$ felosztás esetén (alkalmas $n \in \mathbb{N}^+$ mellett) tekintsük az

$$\big(x_0, f(x_0)\big),\ \big(x_1, f(x_1)\big),\ \ldots,\ \big(x_n, f(x_n)\big)$$

pontokat összekötő szakaszokat; ezt nevezzük az f függvénygrafikon τ felosztáshoz tartozó ***beírt törtvonalának***. Világos, hogy ennek hossza a következő összeg:

$$\ell_f(\tau) = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\big(x_{i+1} - x_i\big)^2 + \big(f(x_{i+1}) - f(x_i)\big)^2}.$$

Az előzőek alapján elég természetes a következő definíció.

3. Definíció. *Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ adott függvény. Azt mondjuk, hogy a*

$$\Gamma_f := \Big\{\big(x, f(x)\big) \;\Big|\; x \in [a,b]\Big\}$$

függvénygrafikon **rektifikálható** *(vagy más szóval* **van ívhossza***), ha*

$$\ell\big(\Gamma_f\big) := \sup\Big\{\ell_f(\tau) \;\Big|\; \tau \in \mathcal{F}[a,b]\Big\} < +\infty.$$

Ezt a valós számot a szóban forgó függvénygrafikon **ívhosszának** *nevezzük.*

A terület problémájához hasonlóan a következő kérdéseket is felvetjük:

1. Milyen Γ_f görbének van ívhossza?
2. Hogyan lehet ℓ_f-et kiszámolni?

A válaszok motiválásához az egyszerűség kedvéért tegyük fel azt, hogy az *f függvény folytonosan deriválható* az $[a,b]$ intervallumon (röviden $f \in C^1[a,b]$), és tekintsük az $\ell_f(\tau)$ összeg i-edik tagját:

$$\ell_i = \sqrt{\big(x_{i+1} - x_i\big)^2 + \big(f(x_{i+1}) - f(x_i)\big)^2} = (x_{i+1} - x_i)\sqrt{1 + \left(\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}\right)^2}.$$

A Lagrange-féle középértéktétel szerint van olyan $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$ pont, amelyre

$$f(x_{i+1}) - f(x_i) = f'(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

teljesül, ezért

$$\ell_i = (x_{i+1} - x_i)\sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}.$$

Így az f függvény grafikonjához közel eső törtvonal hossza

$$\sum_{i=0}^{n-1} \ell_i = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \cdot (x_{i+1} - x_i).$$

Vegyük észre, hogy a jobb oldal a $\varphi(x) := \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ $(x \in [a,b])$ függvény egy integrálközelítő összege. Várható tehát az, hogy a szóban forgó görbének van ívhossza, és az egyenlő az $\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$ határozott integrállal.

A részletek mellőzésével itt csak azt jegyezzük meg, hogy az imént vázolt gondolatmenet precíz formában is „végigvihető”, ezért igaz a következő állítás.

4. Tétel. *Legyen $a, b \in \mathbb{R}$ $a < b$ és tegyük fel, hogy $f \in C^1[a, b]$. Ekkor az f függvény*

$$\Gamma_f := \Big\{\big(x, f(x)\big) \;\Big|\; x \in [a, b]\Big\}$$

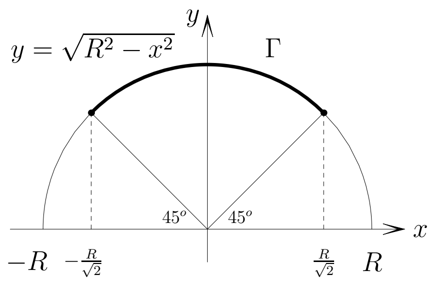
grafikonjának van ívhossza, és az egyenlő az

$$\ell\big(\Gamma_f\big) = \int\limits_a^b \sqrt{1 + \big[f'(x)\big]^2}\, dx$$

határozott integrállal.

Példa (<u>A kör kerülete</u>). Az alábbi ábrán jelzett negyedkör ívhosszát fogjuk kiszámolni. Legyen

$$f(x) := \sqrt{R^2 - x^2} \qquad \Big(|x| \le \tfrac{R}{\sqrt{2}}\Big).$$



Világos, hogy $f \in C^1\Big[-\frac{R}{\sqrt{2}}, \frac{R}{\sqrt{2}}\Big]$ és

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{R^2 - x^2}} \cdot (-2x) \quad \Big(|x| \le \tfrac{R}{\sqrt{2}}\Big).$$

Így

$$\sqrt{1 + \big[f'(x)\big]^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2}}.$$

Az előző tétel szerint a Γ görbének van ívhossza és

$$\ell(\Gamma) = \int\limits_{-R/\sqrt{2}}^{R/\sqrt{2}} \sqrt{1 + \big[f'(x)\big]^2}\, dx = \int\limits_{-R/\sqrt{2}}^{R/\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2}} = \Big[R \arcsin \frac{x}{R}\Big]_{-R/\sqrt{2}}^{R/\sqrt{2}} =$$

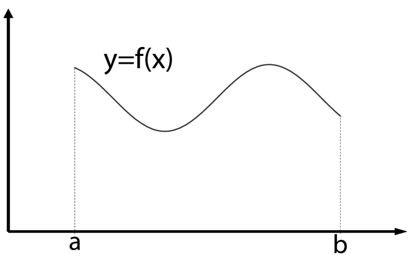
$$= R\left(\arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} - \arcsin\Big(-\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)\right) = R\left(\frac{\pi}{4} - \Big(-\frac{\pi}{4}\Big)\right) = R \cdot \frac{\pi}{2}.$$

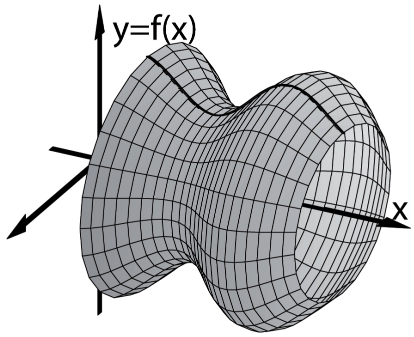
Az R sugarú kör kerülete tehát $4 \cdot R \cdot \dfrac{\pi}{2} = 2R\pi$.

Megjegyzés. A középiskolában a π számot az egységsugarú kör kerületének a felével értelmeztük. Az Analízis I. kurzuson a (hatványsor összegfüggvényeként bevezetett) cos függvény első pozitív zérushelyének a kétszeresével definiáltuk a π számot. A fentiek alapján a két definíció ekvivalens. Ebből az is következik, hogy a középiskolában bevezetett sin, illetve cos függvény valóban egyenlő az Analízis I. kurzuson definiált sin, illetve cos függvénnyel.

Forgástest térfogata

A Riemann-integrál eszköztárát a térfogat problémájának a vizsgálatánál is felhasználhatjuk. A továbbiakban csak *forgástesteket* (vagyis olyan térrészt amelyet egy függvénygrafikon alatti tartomány x tengely körüli megforgatásával kapunk) fogunk vizsgálni. A terület és az ívhossz problémájánál alkalmazott gondolatmenetet követjük: a forgástestet beírt és körülírt hengerekkel (ezek térfogatát ismertnek tekintjük) közelítjük.





Tekintsünk egy nemnegatív f függvényt a korlátos és zárt $[a, b]$ intervallumon. Ekkor az

$$A_f := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; a \le x \le b,\ y^2 + z^2 \le f^2(x)\right\}$$

halmazt az f függvény által meghatározott **forgástestnek** nevezzük.

Ha $n \in \mathbb{N}$ és $\tau = \left\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\right\}$ az $[a, b]$ intervallum egy felosztása, akkor legyen

$$r_i := \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) \quad \text{és} \quad R_i := \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1).$$

A

$$h_i = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_i \le x \le x_{i+1},\ y^2 + z^2 \le r_i^2\right\}$$

beírt hengerekre, illetve a

$$H_i = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_i \le x \le x_{i+1},\ y^2 + z^2 \le R_i^2\right\}$$

körülírt hengerekre nyilvánvalóan fennáll, hogy

$$\bigcup_{i=0}^{n-1} h_i \subset A_f \subset \bigcup_{i=0}^{n-1} H_i.$$

Jelöljük $V(B)$-vel a $B \subset \mathbb{R}^3$ test térfogatát. Az r alapsugarú és m magasságú henger térfogata $\pi r^2 m$, ezért

$$V\left(\bigcup_{i=0}^{n-1} h_i\right) = \pi \sum_{i=0}^{n-1} r_i^2 (x_{i+1} - x_i) = \pi s(f^2, \tau),$$

illetve

$$V\left(\bigcup_{i=0}^{n-1} H_i\right) = \pi \sum_{i=0}^{n-1} R_i^2 (x_{i+1} - x_i) = \pi S(f^2, \tau).$$

Ha tehát az A_f forgástestnek is akarunk a $V(A_f)$-fel jelölt térfogatot tulajdonítani, akkor fenn kell állnia az alábbi egyenlőtlenségeknek:

$$\pi \cdot s(f^2, \tau) \le V(A_f) \le \pi \cdot S(f^2, \tau) \qquad (\tau \in \mathcal{F}[a, b])$$

Abban az esetben, ha f Riemann-integrálható az $[a, b]$ intervallumon, akkor $f^2 \in R[a, b]$ is teljesül, azaz

$$I_*(f^2) = \sup_{\tau \in \mathcal{F}[a,b]} s(f^2, \tau) = \inf_{\tau \in \mathcal{F}[a,b]} S(f^2, \tau) = I^*(f^2) \qquad \left(= \int_a^b f^2\right).$$

Az előzőek alapján kézenfekvő az alábbi értelmezés.

4. Definíció. *Legyen* $0 \le f \in R[a,b]$*. Ekkor* f *grafikonjának az* x *tengely körüli megforgatásával adódó*

$$A_f := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; a \le x \le b,\ y^2 + z^2 \le f^2(x) \right\}$$

forgástestnek van térfogata, és az egyenlő a

$$\pi \int_a^b f^2(x)\, dx$$

integrállal.

Példa (A gömb térfogata). Tekintsük valamilyen $R > 0$ mellett az

$$f(x) := \sqrt{R^2 - x^2} \qquad \big(x \in [-R, R]\big)$$

függvényt. Mivel f folytonos, ezért Riemann-integrálható $[-R, R]$-en. Az A_f forgástest egy R sugarú gömb. A fenti definíció szerint ennek van térfogata, és a Newton–Leibniz-formula felhasználásával a térfogata

$$\pi \int_a^b f^2(x)\, dx = \pi \int_{-R}^{R} \left(R^2 - x^2\right) dx = \pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{R} =$$

$$= \pi \left(\left(R^2 \cdot R - \frac{R^3}{3} \right) - \left(R^2 \cdot (-R) - \frac{(-R)^3}{3} \right) \right) = \pi \left(\frac{2R^3}{3} - \left(-\frac{2R^3}{3} \right) \right) = \frac{4R^3\pi}{3}.$$

Az R sugarú gömb térfogata tehát $4R^3\pi/3$, és ez megegyezik a korábbi tanulmányokban gyakran használt képlettel.

Forgástest felszíne

Felületek felszínének a problémája (még forgásfelület esetén is) jóval bonyolultabb, mint a terület vagy a térfogat problémája. A továbbiakban azonban az alkalmazások szempontjából jól használható eredményt fogunk ismertetni.

Legyen f a korlátos és zárt $[a, b]$ intervallumon értelmezett nemnegatív függvény. Jelöljük $\mathcal{A}_f$-fel f grafikonjának az x tengely körüli megfogatásával kapott halmazt:

$$\mathcal{A}_f := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; a \le x \le b,\ y^2 + z^2 = f^2(x) \right\},$$

amit az f függvény által meghatározott *forgásfelületnek* nevezünk.

Kézenfekvő az a feltételezés, hogy $\mathcal{A}_f$ felszínét megközelítik az f grafikonjába beírt törtvonalak megforgatásával kapott halmazok (ezek *csonkakúp palástok* egyesítései) felszínei.

Tekintsük az $[a, b]$ intervallum egy τ felosztását, és jelöljük Φ_τ-val a szóban forgó csonkakúp palástok felszíneinek (ezt ismertnek tekintjük) az összegét. Mivel f grafikonjának ívhossza (ha létezik) egyenlő kell hogy legyen a beírt törtvonalak ívhosszai halmazának a szuprémumával, ezért első gondolatunk az lehetne, hogy az $\mathcal{A}_f$ halmaz felszíne egyenlő kell hogy legyen a Φ_τ értékek ($\tau \in \mathcal{F}[a, b]$) szuprémumával. Ez azonban már egészen egyszerű függvények esetében sem igaz. Tekintsük például az $|x|$ függvényt a $[-1, 1]$ intervallumon. Ekkor $\mathcal{A}_f$ két egybevágó kúppalást egyesítése, ezért a felszíne $2 \cdot (2\pi \cdot \sqrt{2}/2) = 2\sqrt{2}\,\pi$. Ha azonban a τ felosztás csupán a -1 és 1 osztópontokból áll, akkor $\Phi_\tau = 2\pi \cdot 2 = 4\pi$, ami nagyobb, mint $\mathcal{A}_f$ felszíne.

Ez a példa a helyes definíciót is sugallja. A technikai nehézségeket elkerülendő azt az egyszerűbb utat választjuk, hogy az imént jelzett okoskodás végeredményeképpen kapott integrállal definiáljuk a felszínt.

5. Definíció. *Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és tegyük fel, hogy $0 \leq f \in C^1[a,b]$. Ekkor f grafikonjának az x-tengely körüli forgatásával adódó*

$$\mathcal{A}_f = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\Big|\; a \leq x \leq b,\ y^2 + z^2 = f^2(x)\Big\}$$

forgásfelületnek van felszíne, és értéke

$$2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + \big[f'(x)\big]^2}\, dx.$$

Példa (A gömb felszíne). Az origó középpontú és R sugarú gömbfelületet az

$$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2} \qquad \big(x \in [-R, R]\big)$$

függvény grafikonjának az x tengely körüli megforgatásával kapjuk. Legyen $0 < r < R$ és tekintsük az

$$f_r(x) = \sqrt{R^2 - x^2} \qquad \big(x \in [-r, r]\big).$$

Ekkor $f_r \in C^1[-r, r]$ és

$$f_r'(x) = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \qquad \big(x \in [-r, r]\big),$$

továbbá

$$1 + \big[f_r'(x)\big]^2 = 1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2} = \frac{R^2}{R^2 - x^2} \qquad \big(x \in [-r, r]\big).$$

Ezért az f_r által a fentiekben meghatározott és $\mathcal{A}_r$-rel jelölt forgásfelület felszíne

$$F_r := 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2}}\, dx = 2\pi R \int_{-r}^{r} 1\, dx = 4Rr\pi.$$

A „szemlélet alapján” könnyen elfogadható (az egzakt meggondolásokat nem részletezve), hogy az $r \to R$ határátmenettel $\mathcal{A}_r \to \mathcal{A}_R$, ahol $\mathcal{A}_R$ az R sugarú gömb felszíne. Ugyanakkor

$$\lim_{r \to R} F_r = \lim_{r \to R} 4Rr\pi = 4R^2\pi,$$

ami valóban nem más, mint az R sugarú gömb felszíne.

Improprius integrálok

A Riemann-integrál értelmezésénél a kiindulópontunk az volt, hogy csak olyan f függvényeket tekintettünk, amelyekre a következő két feltétel teljesül:

a) f értelmezési tartománya egy ***korlátos és zárt $[a, b]$ intervallum***,

b) az ***f függvény korlátos*** $[a, b]$-n.

Felvethető az a ***probléma***, hogy ezeket a feltételeket nem kielégítő függvényekre vajon értelmezhető-e az integrál fogalma. Egyfajta kiterjesztést tesznek lehetővé az ún. **improprius integrálok**.

6. Definíció. *Legyen* $-\infty \leq a < b < +\infty$ *és* $f : (a,b] \to \mathbb{R}$*. Tegyük fel, hogy* $f \in R[x,b]$ *minden* $x \in (a,b)$ *esetén. Vezessük be a*

$$G(x) := \int_x^b f(t)\,dt \qquad \big(x \in (a,b)\big)$$

függvényt. Azt mondjuk, hogy az f *függvény* **impropriusan integrálható***, ha* $\exists \lim_a G \in \mathbb{R}$ *véges határérték. Ekkor az*

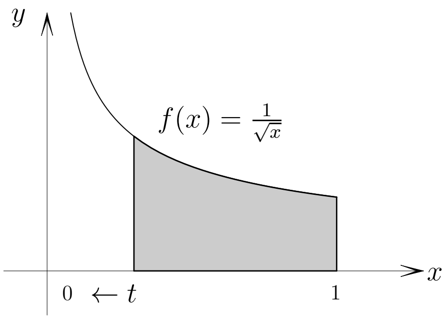
$$\int\limits_a^b f := \lim_{x \to a} G(x)$$

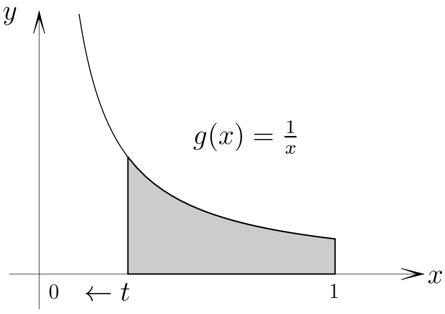
számot az f **improprius integráljának** *nevezzük.*

Példa. Legyen

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \big(x \in (0,1]\big) \qquad \text{és} \qquad g(x) := \frac{1}{x} \quad \big(x \in (0,1]\big).$$

Tekintsük a következő ábrákat:





Ekkor

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{t \to 0+0} \int\limits_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{t \to 0+0} \Big[2\sqrt{x}\Big]_t^1 = \lim_{t \to 0+0} \Big(2 - 2\sqrt{t}\Big) = 2,$$

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t \to 0+0} \int\limits_t^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t \to 0+0} \Big[\ln x\Big]_t^1 = \lim_{t \to 0+0} \Big(\ln 1 - \ln t\Big) = +\infty.$$

Megjegyzések.

1. Vigyázat! Az improprius integrál jelöléseiből nem derül ki, hogy nem a szokásos határozott integrálról van szó.

2. Nem nehéz meggondolni, hogy ha $f \in R[a,b]$ akkor az improprius integrál megegyezik a szokásos határozott integrállal. Ennek oka, hogy ekkor az integrálfüggvény tulajdonságai szerint G folytonos lesz az a pontban.

3. Az improprius integrállal bizonyos nem korlátos síkidomok területét is értelmezhetjük.

Analóg módon értelmezhető $-\infty < a < b \leq +\infty$ esetén az $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ függvény improprius integrálja az

$$\int\limits_a^b f := \lim_{x \to b} G(x), \qquad G(x) := \int_a^x f(t)\,dt \qquad \big(x \in (a,b)\big)$$

összefüggéssel.

Példa. Legyen

$$f(x) := \frac{1}{x^2} \qquad \big(x \in [1, +\infty)\big).$$

Ekkor

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^t = \lim_{t\to+\infty} \left(-\frac{1}{t} - (-1)\right) = 1.$$

Még egy harmadik eset marad, ahol szükséges értelmezni az improprius integrált.

7. Definíció. *Legyen* $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ *és* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$*. Tegyük fel, hogy* $f \in R[x,y]$ *minden* $a < x < y < b$ *esetén. Azt mondjuk, hogy az* f *függvény* **impropriusan integrálható***, ha minden* $c \in (a,b)$ *esetén* $f_{|(a,c]}$ *és* $f_{|[c,b)]}$ *impropriusan integrálható. Ekkor*

$$\int_a^b f := \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Megjegyzés. Nem nehéz meggondolni, hogy a c értéke nem befolyásolja az $\int_a^b f$ eredményét.

Példa. Legyen

$$f(x) := \frac{1}{1+x^2} \qquad \big(x \in (-\infty, +\infty)\big).$$

Igaz, hogy

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_0^t \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \big[\operatorname{arc\,tg} x\big]_0^t = \lim_{t\to+\infty} (\operatorname{arc\,tg} t - 0) = \frac{\pi}{2}.$$

Hasonlóan

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^0 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to-\infty} \big[\operatorname{arc\,tg} x\big]_t^0 = \lim_{t\to-\infty} (0 - \operatorname{arc\,tg} t) = \frac{\pi}{2}.$$

Ezért

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Az egyik legfontosabb eredmény az improprius integrálok körében az, hogy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi},$$

ami a valószínűségszámításban játszik fontos szerepet. Mivel $\int e^{-x^2}\,dx$ nem elemi függvényekből áll, így nem tudjuk a Newton–Leibniz-formulával kiszámítani a fenti improprius integrál értékét. Egy későbbi előadáson, teljesen más eszközökkel megmutatjuk ennek az állításnak a bizonyítását.