2. minta ZH - megoldás

2023. december 2., szombat 20:52

1. $A = (x : \mathbb{N})$ (28 pont)
$B = (x' : \mathbb{N})$
$Q = (x = x')$
$R = (x = x' + 3)$

Bizonyítsd be, hogy a **parbegin** $S_1 \parallel S_2$ **parend** program megoldja a specifikált feladatot, ahol

S_1:

$\{x = x' \lor x = x' + 8\}$
await $x \geq 5$ **then**
$x := x - 5$
ta
$\{x = x' + 3 \lor x = x' - 5\}$

S_2:

$\{x = x' \lor x = x' - 5\}$
$x := x + 8$
$\{x = x' + 3 \lor x = x' + 8\}$

A specifikáció tétele szerint elég belátni, hogy

$$Q \Rightarrow lf(\text{parbegin } S_1 \parallel S_2 \text{ parend}, R)$$

A parbegin $S_1 \parallel S_2$ parend program egy párhuzamos blokk, ezért a levezetési szabálya miatt elég belátni további 5 állítást.

I. Belépési feltétel:

$Q \Rightarrow Q_1 \land Q_2$ ✓

$x = x' \Rightarrow (x = x' \lor x = x' + 8) \land (x = x' \lor x = x' - 5)$

$(\text{igaz} \lor \text{hamis}) \land (\text{igaz} \lor \text{hamis})$

$\text{igaz} \land \text{igaz}$

igaz

II. Kilépési feltétel:

$R_1 \wedge R_2 \Rightarrow R$

$\underbrace{(x = x' + 3 \vee x = x' - 5)} \wedge (x = x' + 3 \vee x = x' + 8) \Rightarrow x = x' + 3$

Mivel ennek igaznak kell lenni, ez csak úgy lehet, ha $x = x' + 3$ vagy $x = x' - 5$.

- $x = x' + 3$:

(igaz ∨ hamis) ∧ (igaz ∨ hamis) ⇒ igaz

$\underbrace{\text{igaz} \wedge \text{igaz}}_{\text{igaz}}$

igaz ⇒ igaz ✓

- $x = x' - 5$

(hamis ∨ igaz) ∧ (hamis ∨ hamis) ⇒ hamis

$\underbrace{\text{hamis} \quad\quad\quad}_{\text{hamis}}$

hamis ⇒ hamis ✓

Az is könnyen látszik, hogy $R_1 \wedge R_2$ csak úgy teljesülhet, ha $x = x' + 3$. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$x = x' + 3 \Rightarrow x = x' + 3 \;\checkmark$$

III. A komponensek önmagukban nézve helyesek:

A) $Q_1 \Rightarrow wp(S_1, R_1)$

S_1:

$\{x = x' \vee x = x' + 8\}$
await $x \geq 5$ **then**
  $x := x - 5$
ta
$\{x = x' + 3 \vee x = x' - 5\}$

S_1 program egy várakozó utasítás, ezért a levezetési szabálya miatt elég belátni további 2 állítást.

1, $Q_1 \Rightarrow \beta \vee \neg\beta$

$$x \geq 5 \vee x < 5 \;\checkmark$$

$x : \mathbb{N}$, bármely természetes számról egyértelműen eldönthető, hogy legalább 5 vagy nem.

2, $\underbrace{(x = x' \vee x = x' + 8)}_{(1)} \wedge \underbrace{x \geq 5}_{(2)} \Rightarrow wp(x := x - 5,\ x = x' + 3 \vee x = x' - 5)$

$$\Big((\ldots x = x' - 5)^{x \leftarrow x - 5} \Big) \wedge x - 5 \in \mathbb{N}$$

$((x=x'+3 \lor x=x'-5)$ $) \land x-5 \in \mathbb{N}$

kell: $x \geq 5$

$(x-5=x'+3 \lor x-5=x'-5) \land \underbrace{x \geq 5}_{(2)}$

$\underbrace{(x=x'+8 \lor x=x')}_{(1)}$

B) $Q_2 \Rightarrow lf(S_2, R_2)$

S_2:

$\{x = x' \lor x = x' - 5\}$
$x := x + 8$
$\{x = x' + 3 \lor x = x' + 8\}$

$\underbrace{x=x' \lor x=x'-5} \Rightarrow \underbrace{lf(x:=x+8,\ x=x'+3 \lor x=x'+8)}$

$((x=x'+3 \lor x=x'+8)^{x \leftarrow x+8}) \land$ igaz

Az $x := x+8$ értékadás biztosan helyes. $(x:\mathbb{N})$

$(x+8=x'+3 \lor x+8=x'+8) \land$ igaz ✓

$\underbrace{(x=x'-5 \lor x=x')}$

IV. $Q_1 \Rightarrow lf(S_1, R_1)$, $Q_2 \Rightarrow lf(S_2, R_2)$ teljes helyességi formulák interferenciamentesek.

S_1:

$\{x = x' \lor x = x' + 8\}$

S_2:

$\{x = x' \lor x = x' - 5\}$

– S_1-ben egy kritikus utasítás

$u_1 \left\{ \begin{array}{l} \textbf{await } x \geq 5 \textbf{ then} \\ \quad x := x - 5 \\ \textbf{ta} \\ \{x = x' + 3 \vee x = x' - 5\} \end{array} \right.$

$u_2 \rightarrow x := x + 8$
$\{x = x' + 3 \vee x = x' + 8\}$

szerpel: u_1.

- $pre(u_1) \wedge R_2 \Rightarrow lf(u_1, R_2)$

  u_1 várakozó utasítás, így elég belátni:

  1) $pre(u_1) \wedge R_2 \Rightarrow \beta \vee \neg\beta$ $\quad \beta = (x \geq 5), \; x : \mathbb{N}$ ✓

  2) $pre(u_1) \wedge R_2 \wedge \beta \Rightarrow \underbrace{lf(x := x-5, R_2)}_{(R_2^{x \leftarrow x-5}) \wedge x \geq 5}$ $\quad R_2 = (x = x' + 3 \vee x = x' + 8)$

$$\underbrace{(x = x' \vee x = x' + 8) \wedge (x = x' + 3 \vee x = x' + 8)}_{\text{Ez csak akkor teljesülhet, ha } \underbrace{x = x' + 8}_{(1)}} \wedge \underbrace{x \geq 5}_{(2)} \Rightarrow$$

$$(x - 5 = x' + 3 \vee x - 5 = x' + 8) ✓ \wedge \underbrace{x \geq 5}_{(2)} ✓$$

$$(x = x' + 8 \vee x = x' + 13)$$

$$(1) \quad \underbrace{\text{igaz} \vee \text{hamis}}_{\text{igaz}}$$

- S_2 egyetlen utasítása u_2. Ellenőrizzük, hogy ennek u_1 nem ronthatja el az előfeltételt.

$$pre(u_1) \wedge pre(u_2) \Rightarrow lf(u_1, pre(u_2))$$

u_1 várakozó utasítás:

1) $pre(u_1) \wedge pre(u_2) \Rightarrow \beta \vee \neg\beta \qquad \beta = (x \geq 5),\ x : \mathbb{N}$ ✓

2) $pre(u_1) \wedge pre(u_2) \wedge \beta \Rightarrow \underbrace{lf(x := x-5,\ pre(u_2))}_{pre(u_2)^{x \leftarrow x-5} \wedge x \geq 5}$

$pre(u_2) = (x = x' \vee x = x'-5)$

$$\underbrace{(x=x' \vee x=x'+8) \wedge (x=x' \vee x=x'-5)}_{(1)\ x=x'} \wedge \underbrace{x \geq 5}_{(2)} \Rightarrow$$

$$(x-5=x' \vee x-5=x'-5) \wedge x \geq 5$$

$$(x=x'+5 \vee x=x') \qquad (2)$$

(1) $\underbrace{\text{hamis} \vee \text{igaz}}_{\text{igaz}}$

- S_2-ben nem szerepel ciklus, így annak termináló függvényét u_1 nem növelheti.

S_1: S_2:

u_1: $\{x = x' \lor x = x' + 8\}$
await $x \geq 5$ **then**
$x := x - 5$
ta
$\{x = x' + 3 \lor x = x' - 5\}$

u_2: $\{x = x' \lor x = x' - 5\}$
$x := x + 8$
$\{x = x' + 3 \lor x = x' + 8\}$

— S_2 egyetlen kritikus utasítása: u_2.

- $pre(u_2) \land R_1 \Rightarrow lf(u_2, R_1)$ $\qquad R_1 = (x = x' + 3 \lor x = x' - 5)$

$$\underbrace{(x=x' \lor x=x'-5) \land (x=x'+3 \lor x=x'-5)}_{x=x'-5} \Rightarrow \underbrace{lf(x:=x+8, R_1)}_{(R_1{}^{x \leftarrow x+8}) \land \text{igaz}}$$

$$x+8 = x'+3 \lor x+8 = x'-5$$

$$\underbrace{x = x'-5}_{\text{igaz}} \lor \underbrace{x = x' \ 3}_{\text{hamis}}$$

igaz

- S_1 egyetlen utasítása: u_1. Ellenőrizzük, hogy ennek az előfeltételét nem ronthatja el u_2.

$pre(u_2) \land pre(u_1) \Rightarrow lf(u_2, pre(u_1))$ $\qquad pre(u_1) = (x = x' \lor x = x' + 8)$

$$(x=x' \lor x=x'-5) \land (x=x' \lor x=x'+8) \Rightarrow lf(x:=x+8, pre(u_1))$$

$\left(pre(u_1)^{x \leftarrow x+8} \right) \wedge$

S_1:

$\{x = x' \vee x = x' + 8\}$
await $x \geq 5$ **then**
  $x := x - 5$
ta
$\{x = x' + 3 \vee x = x' - 5\}$

S_2:

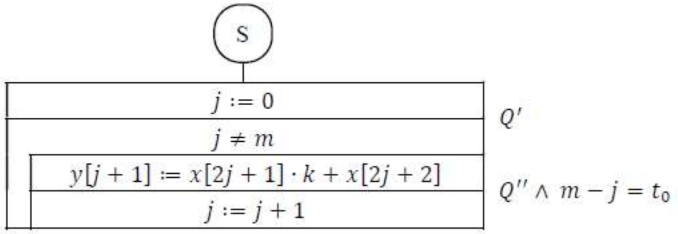
$\{x = x' \vee x = x' - 5\}$
$x := x + 8$
$\{x = x' + 3 \vee x = x' + 8\}$

2. A feladat informálisan: (24 pont)

Adott az x vektor, melynek elemei k-as számrendszerbeli számjegyek. Állítsuk elő az így reprezentált szám k^2-es számrendszerbeli jegyeit az y vektorba (a szám magasabb helyiértékeit a vektor alacsonyabb indexű helyein találjuk).

$A = (x: [0..k-1]^n, y: [0..k^2-1]^m, k: \mathbb{N}^+)$
$B = (x': [0..k-1]^n, k': \mathbb{N}^+)$
$Q = (x = x' \wedge k = k' \wedge k \neq 1 \wedge n = 2m)$
$R = (Q \wedge \forall i \in [1..m]: y[i] = x[2i-1] \cdot k + x[2i])$

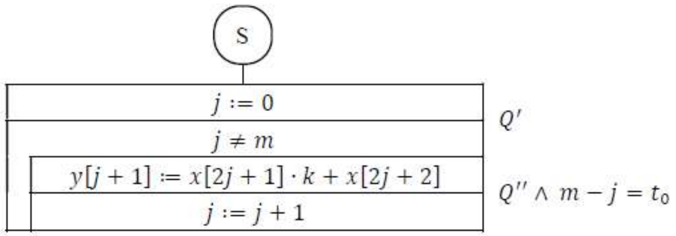
A program állapottere: $(x : [0..k-1]^n, y: [0..k^2-1]^m, k: \mathbb{N}^+, j: \mathbb{N})$



Legyen $Q' = (Q \wedge j = 0)$ a szekvencia közbülső állítása, $t: m - j$ a ciklus terminálófüggvénye, $P = (Q \wedge (\forall i \in [1..j]: y[i] = x[2i-1] \cdot k + x[2i]) \wedge j \in [0..m])$ a ciklus invariánsa.

Legyen a ciklusmagnak mint szekvenciának a közbülső állítása $Q'' \wedge m - j = t_0$, ahol $Q'' = P^{j \leftarrow j+1}$. Mutasd meg, hogy az S program megoldja a specifikált feladatot.

(Az x és y tömböket egytől a hosszukig (n és m) indexeljük.)


S
$j := 0$
Q'
$j \neq m$
$y[j+1] := x[2j+1] \cdot k + x[2j+2]$
$Q'' \wedge m - j = t_0$
$j := j + 1$

$x : [0..k-1]^n, y: [0..k^2-1]^m$

$P = (Q \wedge (\forall i \in [1..j]: y[i] = x[2i-1] \cdot k + x[2i]) \wedge j \in [0..m])$

3. Legyen $A = [1..4]$, és S_0 az alábbi program az A állapottér felett: (8 pont)

$$S_0 = \left\{ \begin{array}{ll} 1 \rightarrow < 1,2 > & \\ 2 \rightarrow < 2,3,4 >, & 2 \rightarrow < 2,1 > \\ 3 \rightarrow < 3,1 >, & 3 \rightarrow < 3,2,4 > \end{array} \right\}$$

$4 \to < 4, 4, 4, \ldots >$

Határozd meg az A állapottér felett a DO-val jelölt (π, S_0) ciklust,
ahol $\pi \in A \to \mathbb{L}$ olyan, hogy $\pi = \{ (1, igaz), (2, igaz), \quad (4, hamis)\}$.