1. Feladat. Legyen

$$H = \left\{ \frac{2x^2+5}{x^2+2} \in \mathbb{R} \;\middle|\; x > -1 \right\}.$$

Határozza meg sup H-t és inf H-t! Van-e a H halmaznak legnagyobb, illetve legkisebb eleme?

1

$$H = \left\{ \frac{2x^2+5}{x^2+2} \in \mathbb{R} \;\middle|\; x > -1 \right\}$$

$$\frac{2x^2+5}{x^2+2} = \frac{2(x^2+2)+1}{x^2+2} = 2 + \frac{1}{x^2+2}$$

alulról korlátos

$$\frac{1}{x^2+2} > 0 \Rightarrow 2 + \frac{1}{x^2+2} > 2 \quad (\Leftarrow x > -1)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists x > -1 : H \ni 2 + \frac{1}{x^2+2} < 2 + \varepsilon$$

$$\frac{1}{x^2+2} < \varepsilon$$

$$x^2 < \frac{1}{\varepsilon} - 2$$

$$\hookrightarrow \quad x > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \Rightarrow x^2 > \frac{1}{\varepsilon} > \frac{1}{\varepsilon} - 2$$

$$\underline{\inf H = 2}$$

felülről korlátos

$$\frac{2x^2+5}{x^2+2} = 2 + \frac{1}{x^2+2} \le 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \quad (\Leftarrow x > -1)$$

$$\underline{\sup H = \max H = \frac{5}{2}}$$

2. Feladat. Legyen

$$f(x) = \sqrt{x+3} \quad (x \geq 1) \qquad \text{és} \qquad g(x) = x^2 - 4x + 1 \quad (x < 1).$$

Határozza meg az $f \circ g$ függvényt! Számítsa ki továbbá a $[-1, 2]$ halmaz f által létesített ősképét!

2

$f(x) = \sqrt{x+3} \quad (x \geq 1)$

$g(x) = x^2 - 4x + 1 \quad (x < 1)$

$f \circ g = ?$

$[-1, 2]$ ősképe f-re

$D_f = [1, +\infty)$

$D_g = (-\infty, 1)$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in (-\infty, 1) \mid x^2 - 4x + 1 \in [1, +\infty)\}$$
$$= \{x \in (-\infty, 1) \mid x^2 - 4x + 1 \geq 1\}$$

$x^2 - 4x + 1 \geq 1$

$x^2 - 4x \geq 0$

$x(x-4) \geq 0$

$x \leq 0 \qquad x \geq 4$

$\Rightarrow D_{f \circ g} = \{x \in (-\infty, 1) \mid x \leq 0 \lor x \geq 4\} = (-\infty, 0]$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 4x + 1) = \sqrt{(x^2 - 4x + 1) + 3}$$
$$= \sqrt{x^2 - 4x + 4}$$
$$= \sqrt{(x-2)^2}$$
$$= |x - 2| \qquad !\, x \in (-\infty, 0]$$
$$= 2 - x$$

$C := [-1, 2]$

$$f^{-1}[C] = \{x \in D_f \mid f(x) \in C\} = \{x \in [1, +\infty) \mid \sqrt{x+3} \in [-1, 2]\}$$

$$= \{x \in [1, +\infty) \mid -1 \leq \sqrt{x+3} \leq 2\}$$

$\sqrt{x+3} \geq 0 \implies -1 \leq \sqrt{x+3}$ igaz

$$\sqrt{x+3} \leq 2$$

$$0 \leq x+3 \leq 4$$

$$-3 \leq x \leq 1$$

$$f^{-1}[C] = \{x \in [1, +\infty) \mid -3 \leq x \leq 1\} = \{1\}$$

3. Feladat. A definíció alapján igazolja, hogy

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^2 + 4n + 1}{3n^2 + 6n + 5} = \frac{1}{3}!$$

③

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+4n+1}{3n^2+6n+5} = \frac{1}{3}$$

$$\forall_\varepsilon\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0 : \left| \frac{n^2+4n+1}{3n^2+6n+5} - \frac{1}{3} \right| < \varepsilon$$

HA $\varepsilon > 0$

$$\left| \frac{n^2+4n+1}{3n^2+6n+5} - \frac{1}{3} \right| = \left| \frac{3n^2+12n+3-(3n^2+6n+5)}{3(3n^2+6n+5)} \right|$$

$$= \frac{6n-2}{9n^2+18n+15} < \frac{6n}{9n^2+18+15} < \frac{6n}{9n^2} = \frac{2}{3n} < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

teljesül HA

$n > \frac{1}{\varepsilon}$

$$n_0 = \max\left\{1, \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]\right\}$$

$\Rightarrow \forall n > n_0$

$$\left| \frac{n^2+4n+1}{3n^2+6n+5} \right| < \varepsilon$$

4. Feladat. Számítsa ki az alábbi határértékeket:

$$(a)\ \lim_{n\to+\infty} \frac{n\cdot(-2)^n + 2^{2n+1}}{4^n + 3^{n+1}},$$

$$(b)\ \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2\cdot 3^n + 3\cdot 5^n + n},$$

$$(a)\ \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2n+5}{2n+3}\right)^{4n+5}!$$

(4)

a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n(-2)^n + 2^{2n+1}}{4^n + 3^{n+1}} = \frac{n(-2)^n + 2\cdot 4^n}{4^n + 3^n\cdot 3}$$

$$= \frac{\overbrace{n\left(-\frac{1}{2}\right)^n}^{0} + 2}{1 + \underbrace{3\left(\frac{3}{4}\right)^n}_{\to 0}} \to \frac{2}{1} = 2$$

b) $$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2\cdot 3^n + 3\cdot 5^n + n} =$$

$$= \sqrt[n]{5^n\left(2\left(\frac{3}{5}\right)^n + 3 + n\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)}$$

$$= 5\sqrt{2\,\frac{3^n}{5^n} + 3 + \frac{n}{5^n}}$$

$$\lim\left(\sqrt[n]{x_n}\right) = 1$$

$$\Rightarrow 5\cdot\sqrt[n]{x_n} \to 5\cdot 1 = 5$$

c) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+5}{2n+3}\right)^{4n+5}=\left(\frac{1+\frac{5}{2n}}{1+\frac{3}{2n}}\right)^{4n+5}$$

$$=\left(\left(\frac{1+\frac{5}{2n}}{1+\frac{3}{2n}}\right)^{n}\right)^{4}\cdot\left(\frac{1+\frac{5}{2n}}{1+\frac{3}{2n}}\right)^{5}$$

$$=\left(\frac{\left(1+\frac{5/2}{n}\right)^{n}}{\left(1+\frac{3/2}{n}\right)^{n}}\right)^{4}\cdot\left(\frac{1+\overbrace{\frac{5}{2n}}^{\to 0}}{1+\underbrace{\frac{3}{2n}}_{\to 0}}\right)^{5}$$

$$=\left(\frac{e^{5/2}}{e^{3/2}}\right)^{4}\cdot\frac{1}{1}=e^{4}$$

5. Feladat. Mutassa meg, hogy az

$$a_0=0,\qquad a_{n+1}=\frac{a_n^2+3}{4}\quad (n\in\mathbb{N})$$

sorozat konvergens és számítsa ki a határértékét!

5. $a_0 = 0 \qquad a_{n+1} = \dfrac{a_n^2+3}{4}$

$n=0 \Rightarrow a_0 = 0 < 1$ igaz

$a_n < 1$

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2+3}{4} < \frac{1^2+3}{4} = 1$$ igaz

$\Rightarrow a_n < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n$ felülről korlátos

$n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n^2+3}{4} - a_n = \frac{a_n^2 - 4a_n + 3}{4} = \frac{\overset{<0}{(a_n-1)}\overset{<0}{(a_n-3)}}{4} > 0$$

$\Rightarrow a_n$ szig mon nő

felülről korlátos ÉS monoton nő

$\Rightarrow$ konvergens sorozat

$$A = \lim(a_n)$$

$$A \leftarrow a_{n+1} = \frac{a_n^2+3}{4} \to \frac{A^2+3}{4}$$

$$A = \frac{A^2+3}{4}$$

$$A^2 - 4A + 3 = 0$$

$$\Delta_A = 16 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 2^2$$

$$A_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$

$a_n < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n$ határértéke $A = 1$

$\hookrightarrow \lim(a_n) = 1$