# 13. előadás

## SPECIÁLIS FÜGGVÉNYEK 2.

### 4. Az $\exp$ és az $\ln$ függvény

**Megjegyzés.** **Hatványok értelmezése.** Az $n$ tényezős $a \cdot \ldots \cdot a$ szorzatot $a^n$-nel jelöltük, és *az $a$ szám $n$-edik hatványának* neveztük. Nyilvánvaló, hogy bármely $a, b$ valós és $x, y$ pozitív egész számra fennállnak a hatványozás alapazonosságai:

$$(*) \qquad (ab)^x = a^x \cdot b^x, \qquad a^{x+y} = a^x \cdot a^y, \qquad (a^x)^y = a^{x \cdot y}.$$

A hatványozás műveletének kiterjesztését egyéb $x, y$ valós kitevőkre úgy célszerű definiálni, hogy a fenti alapazonosságok érvényben maradjanak. **Racionális kitevőkre** a feladat egyszerűen megoldható. Világos például az, hogy $a \neq 0$ esetén az $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ azonosság csak úgy maradhat érvényben, ha $a^0$-t 1-nek, $a^{-n}$-et pedig $1/a^n$-nek értelmezzük minden pozitív egész $n$-re, azaz

$$a^0 := 1 \qquad \text{és} \qquad a^{-n} := \frac{1}{a^n} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Ezeket a definíciókat elfogadva $(*)$ mindhárom azonossága érvényben marad minden $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ és $x, y \in \mathbb{Z}$ esetén. A továbbiakban csak nemnegatív $a$ számok hatványaival foglalkozunk. Viszonylag egyszerűen meg lehet mutatni azt, hogy az imént jelzett célnak megfelelően egy $a > 0$ valós szám $r = p/q$ ($p, q$ relatív prím egészek és $q > 0$) racionális kitevős hatványát így kell definiálnunk:

$$a^{\frac{p}{q}} := \sqrt[q]{a^p}.$$

Az is viszonylag könnyen megmutatható, hogy a $(*)$ azonosságok minden $a, b > 0$ és $x, y \in \mathbb{Q}$ esetén teljesülnek.

**Irracionális kitevőkre** a hatványok *értelmezése* már jóval bonyolultabb feladat. Hogyan értelmezzük egy pozitív $a$ valós szám irracionális kitevőjű hatványát, például $2^{\sqrt{2}}$-őt?

A felvetett kérdés megválaszolására két lehetőség is kínálkozik.

**1. lehetőség.** Felhasználva a valós számok struktúrájának a tulajdonságait, valamint azt, hogy pozitív valós szám racionális ketevőjű hatványait már értelmeztük, megállapodhatnánk a következő definícióban:

*Legyen $x$ egy valós szám.*

- *Ha $a > 1$, akkor* $a^x := \sup\{a^r : r \leq x \text{ és } r \in \mathbf{Q}\}$.
- *Ha $0 < a < 1$, akkor* $a^x := \left(\dfrac{1}{a}\right)^{-x}$.
- *Ha $a = 1$, akkor* $1^x := 1$.

Ezt a definíciót elfogadva már be lehetne bizonyítani a $(*)$ azonosságokat.

**2. lehetőség.** A továbbiakban pozitív valós szám irracionális kitevőjű hatványainak értelmezéséhez mi a következő utat követjük. Az első lépésként az $e$ szám tetszőleges valós kitevőjű hatványait értelmezzük. Ezt korábban az exp függvény bevezetésénél már meg is tettük. Az exp függvény inverzeként vezetjük be a *természetes alapú logaritmusfüggvényt.* Ezek felhasználásával fogjuk definiálni az $a^x$ hatványokat tetszőleges $a > 0$ és $x, y \in \mathbb{R}$ számokra. ∎

Emlékeztetünk arra, hogy az $e$ számot a szigorúan monoton növekedő és felülről korlátos (tehát konvergens)

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad (n \in \mathbb{N}^+)$$

sorozat határértékeként definiáltuk, és akkor megjegyeztük azt, hogy ez a határérték egy irracionális szám. Most bebizonyítjuk ezt az állítást.

**1. tétel.** *Az $e$ szám irracionális.*

**Bizonyítás.** Azt már tudjuk, hogy

$$e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots .$$

Az állítással ellentétben tegyük fel, hogy $e$ racionális, azaz

$$e = \frac{p}{q}, \qquad \text{ahol} \;\; p, q \in \mathbb{N}^+ \;\; \text{és} \;\; q \geq 2$$

(a $q \geq 2$ feltehető, egyébként bővítjük a törtet). Az

$$s_n := 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \qquad (n \in \mathbb{N}^+)$$

sorozat szigorúan monoton növekedő módon tart $e$-hez, ha $n \to +\infty$. Legyen $n > q$ tetszőleges egész. Ekkor

$$\begin{aligned}
0 < q! \cdot (s_n - s_q) &= q! \cdot \left(\frac{1}{(q+1)!} + \frac{1}{(q+2)!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = \\
&= \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \cdots + \frac{1}{(q+1) \cdot \ldots \cdot n} \leq \\
&\leq \frac{1}{q+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(q+1)^{n-q-1}}\right) \leq \\
&\leq \frac{1}{q+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{q+1}} = \frac{1}{q} \leq \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Ebből az $n \to +\infty$ határátmenetet véve és az $e > s_q$ egyenlőtlenséget felhasználva azt kapjuk, hogy

$$(*) \qquad 0 < q! \cdot (e - s_q) \leq \frac{1}{2}.$$

Az indirekt feltételből az következik, hogy

$$0 < q! \cdot (e - s_q) = q! \cdot \left(\frac{p}{q} - s_q\right) = q! \cdot \left(\frac{p}{q} - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \cdots - \frac{1}{q!}\right)$$

egész szám. Ez viszont $(*)$ alapján nem lehetséges. ■

**Megjegyzés.** A bizonyításból következik, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$0 < e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) < \frac{1}{n \cdot n!},$$

és ez (elvben) lehetőséget ad arra, hogy $e$ értékét tetszőlegesen előírt pontossággal kiszámítsuk. Például $n = 6$-ot véve azt kapjuk, hogy

$$2,7180 < e < 2,7183. \ ■$$

Most emlékeztetünk az exp függvény értelmezésére. Láttuk, hogy a $\sum\limits_{n=0} x^n/n!$ $(x \in \mathbb{R})$ hatványsor minden $x \in \mathbb{R}$ pontban konvergens (l. például a hányadoskritériumot). Ennek a hatványsornak az összegfüggvényeként definiáltuk az exp függvényt:

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad (x \in \mathbb{R}),$$

és megállapítottuk számos fontos tulajdonságát. Ezek alapján az $e$ szám hatványait tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ kitevő esetén így *értelmeztük*: legyen

$$e^x := \exp(x) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

ezért az exp függvényt $e$ **alapú exponenciális függvénynek** is nevezzük.

Most felsoroljuk az exp függvény tulajdonságait.

**2. tétel: Az exp függvény tulajdonságai.**

**1°** $e^x := \exp(x) := \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots \quad (x \in \mathbb{R})$;

**2°** • $\exp(0) = 1$,

• $\exp(1) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!} = e$,

• $\exp(x) > 0$ *minden* $x \in \mathbb{R}$ *pontban,*

• $\exp(-x) = \dfrac{1}{e^x} \quad (x \in \mathbb{R})$;

**3°** (i) $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$, (ii) $(e^x)^y = e^{xy} \quad (x, y \in \mathbb{R})$;

**4°** exp $\uparrow$ *és folytonos* $\mathbb{R}$*-en,*

**5°** $\lim\limits_{-\infty} \exp = 0$ *és* $\lim\limits_{+\infty} \exp = +\infty$,

**6°** exp *szigorúan konvex* $\mathbb{R}$*-en,*

**8°** $\mathcal{R}_{\exp} = (0, +\infty)$.

**Bizonyítás.** A $\mathbf{3^o}$ (ii) és a $\mathbf{6^o}$ állítások kivételével mindegyiket már bebizonyítottuk. Ezek igazolásához azonban további meggondolások szükségesek.

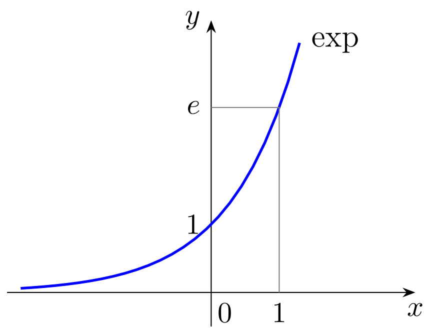
Az

$$\left(e^x\right)^y = e^{xy} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

azonosság $x, y$ racionális kitevőkre az $e^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{e^p}$ felhasználásával egyszerűen bizonyítható. Irracionális kitevőkre való kiterjesztéshez fel kell használni egyrészt azt, hogy minden irracionális számhoz van hozzá konvergáló racionális sorozat; másrészt alkalmazni kell az exp függvény folytonosságát, valamint az összetett függvény határértékére vonatkozó tételt.

A $\mathbf{6^o}$ állítás (vagyis az, hogy az exp függvény szigorúan konvex $\mathbb{R}$-en) is bebizonyítható az eddigi ismereteink alapján. A részleteket itt nem ismertetjük, mert később (a differenciálszámítás eszköztárának a felhasználásával) ezt az állítást jóval egyszerűbben fogjuk igazolni. ■

Az exp függvény garfikonja:




A **logaritmusfüggvényt** az exponenciális függvény inverzeként definiáljuk.

**1. definíció.** *Mivel az* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvény* $\uparrow$ $\mathbb{R}$*-en, ezért* $\exists$ *inverze. Legyen*

$$\ln := \log := \exp^{-1}$$

*a (természetes alapú vagy* $e$ *alapú)* ***logaritmusfüggvény****.*

A definíció közvetlen következményei az alábbi állítások:

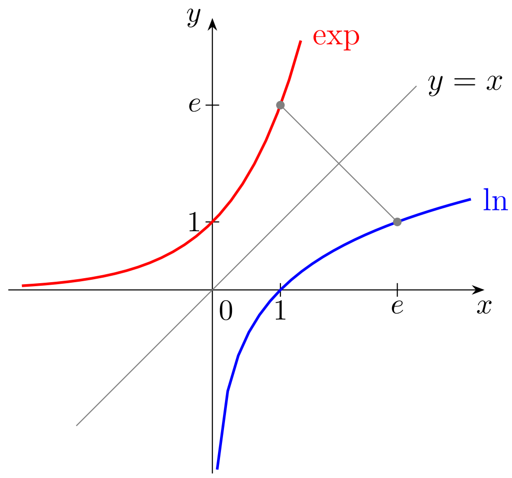
- $\mathcal{D}_{\ln} = \mathcal{R}_{\exp} = (0, +\infty)$ és $\mathcal{R}_{\ln} = \mathcal{D}_{\exp} = \mathbb{R}$.
- Ha $x > 0$, akkor

$$\ln x := \ln(x) = y \quad \Longleftrightarrow \quad e^y = x \quad \Longleftrightarrow \quad e^{\ln x} = x.$$

$\ln x$ tehát az a kitevő, amire az alapot (vagyis az $e$ számot) emelve $x$-et kapunk. Ez azt jelenti, hogy a fenti módon értelmezett logaritmus a középiskolai definícióval egyezik meg.

- Ha $x \in \mathbb{R}$, akkor $\ln e^x = x$.

Az ln függvény grafikonja az exp függvény grafikonjának az $y = x$ egyenletű egyenesre vonatkozó tükörképe.




**3. tétel.** *Az* $\ln\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ *logaritmusfüggvény folytonos, szigorúan monoton növekedő és szigorúan konkáv a* $(0,+\infty)$ *intervallumon, továbbá*

$$\lim_{0+0} \ln = -\infty \quad \textit{és} \quad \lim_{+\infty} \ln = +\infty.$$

**Megjegyzés.** Az $\exp x$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén (elvileg) tetszőleges pontossággal számolható, mert $\exp x$ egy végtelen sor összege. Az $\ln x$ minden $x > 0$ számra értelmezve van, de az értéke (bizonyos speciális értékektől eltekintve) így nem számolható. A differenciálszámítás alkalmazásainál mutatjuk majd meg, hogy az ln függvény helyettesítési értékeit (elvileg) tetszőleges pontossággal hogyan lehet kiszámolni. ■

## 5. Az $\exp_a$ és a $\log_a$ függvény

Először tetszőleges $0 < a \in \mathbb{R}$ alap és tetszőleges $b \in \mathbb{R}$ kitevő esetén értelmezzük az $a^b$ hatványt. Ha $b$ racionális, akkor $a^b$-t már definiáltuk, és ekkor a hatványozás „megszokott" tulajdonságai érvényben maradnak.

Az $e$ szám tetszőleges $b \in \mathbb{R}$ kitevőjű hatványait, valamint pozitív szám logaritmusát már értelmeztük. Az $a^b$ értelmezéséhez abból indulunk ki, hogy az $a > 0$ valós számot felírhatjuk $e$ hatványaként: $a = e^{\ln a}$. A hatvány hatványozására vonatkozó azonosság csak úgy marad érvényben, ha $a^b$-t így definiáljuk:

$$a^b = \left(e^{\ln a}\right)^b = e^{b \cdot \ln a}.$$

**2. definíció.** *Legyen* $a > 0$ *valós szám. Tetszőleges* $b \in \mathbb{R}$ *esetén az* $a$ ***szám*** $b$***-edik hatványát*** *így értelmezzük:*

$$a^b := e^{b \cdot \ln a}.$$

Jegyezzük meg, hogy ha $b$ racionális, akkor a fenti definíció által adott érték megegyezik a korábbi definícióból kapott számmal.

Most definiáljuk az $\exp_a$ függvényt:

**3. definíció.** *Legyen $a > 0$ valós szám. Az $a$* ***alapú exponenciális függvényt*** *így értelmezzük:*

$$\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \exp_a(x) := \exp(x \cdot \ln a) = a^x \quad (\forall\, x \in \mathbb{R}).$$

Világos, hogy $\exp_e = \exp$. Az exp, illetve az ln függvény tulajdonságati is figyelembe véve kapjuk a következő állításokat.

**4. tétel: Az $\exp_a$ függvény tulajdonságai.**

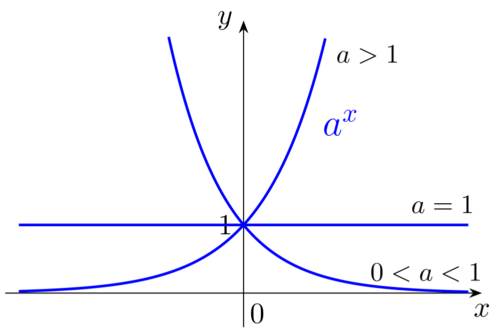
**1°** *Ha $a > 1$ valós, akkor az $\exp_a$ függvény pozitív, szigorúan monoton növekedő, folytonos és szigorúan konvex $\mathbb{R}$-en, továbbá*

$$\lim_{-\infty} \exp_a = 0 \quad \textit{és} \quad \lim_{+\infty} \exp_a = +\infty.$$

**2°** *Ha $0 < a < 1$ valós, akkor az $\exp_a$ függvény pozitív, szigorúan monoton csökkenő, folytonos és szigorúan konvex $\mathbb{R}$-en, továbbá*

$$\lim_{-\infty} \exp_a = +\infty \quad \textit{és} \quad \lim_{+\infty} \exp_a = 0.$$

Az $\exp_a$ függvény grafikonja:




Most a $\log_a$ függvényt értelmezzük.

**4. definíció.** *Ha $a > 0$ valós szám és $a \neq 1$, akkor az $\exp_a$ szigorúan monoton $\mathbb{R}$-en, ezért van inverze, amelyet a* ***alapú logaritmusfüggvénynek*** *nevezünk és $\log_a$-val jelölünk, azaz*

$$\log_a := (\exp_a)^{-1}, \quad \textit{ha } a > 0 \textit{ és } a \neq 1.$$

Világos, hogy $\log_e = \ln$, ezért szokás az ln függvényt a log szimbólummal is jelölni.

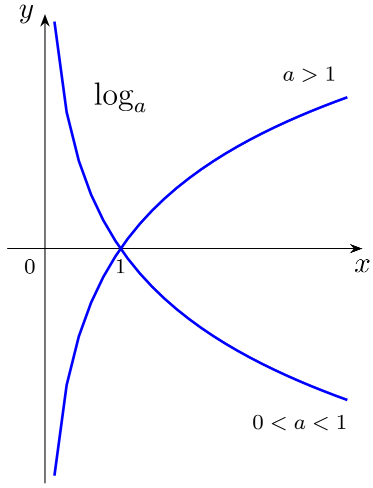
A definíció közvetlen következményei az alábbi állítások:

- $\mathcal{D}_{\log_a} = \mathcal{R}_{\exp_a} = (0, +\infty)$ és $\mathcal{R}_{\log_a} = \mathcal{D}_{\exp_a} = \mathbb{R}$.
- Ha $x \in (0, +\infty)$, akkor

$$\log_a x := \log_a(x) = y \quad \Longleftrightarrow \quad \exp_a y = a^y = x,$$

azaz $\log_a x$ tehát az a kitevő, amire az alapot (vagyis az $a$ számot) emelve $x$-et kapunk.

A $\log_a$ függvény grafikonja:




**5. tétel: A $\log_a$ függvény tulajdonságai.**

**1°** *Ha $a > 1$, akkor $\log_a$ szigorúan monoton növő folytonos, szigorúan konkáv függvény a $(0, +\infty)$ intervallumon és*

$$\lim_{0+0} \log_a = -\infty, \qquad \lim_{+\infty} \log_a = +\infty.$$

**2°** *Ha $0 < a < 1$, akkor $\log_a$ szigorúan monoton fogyó folytonos, szigorúan konvex függvény a $(0, +\infty)$ intervallumon és*

$$\lim_{0+0} \log_a = +\infty, \qquad \lim_{+\infty} \log_a = -\infty.$$

**3°** *Logaritmusazonosságok: Legyen $0 < a \neq 1$. Ekkor*

- $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \quad (x, y > 0)$;
- $\log_a \left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y \quad (x, y > 0)$;
- $\log_a (x^y) = y \log_a x \quad (x > 0,\ y \in \mathbb{R})$,
- $\log_a x = \dfrac{\log_c x}{\log_c a} \quad (a, c > 0,\ a, c \neq 1, \quad x > 0)$.

## 6. Általános hatványfüggvények

Ha az $a^b$ hatványban az alapot rögzítettnek, a kitevőt pedig változónak tekintjük, akkor megkapjuk az **exponenciális függvényeket**. Ha a kitevőt tekintjük rögzítettnek és az alapot változónak, akkor megkapjuk a **hatványfüggvényeket**. Ez utóbbi függvényeket csak a $(0, +\infty)$ intervallumon fogjuk tekinteni. Az előzőek alapján már tetszőges $b$ valós kitevő és $a > 0$ esetén értelmezni tudjuk az $a^b$ hatványt.

**5. definíció.** *Tetszőleges $\alpha \in \mathbb{R}$ szám esetén az $\alpha$ **kitevőjű hatványfüggvényt** így értelmezzük:*

$$h_\alpha : (0, +\infty) \ni x \mapsto x^\alpha := e^{\alpha \ln x}.$$

Ha $\alpha$ racionális, akkor a fenti definíció megegyezik hatványfüggvényekre megadott korábbi definíciókkal.

Ha $\alpha = 0$, illetve $\alpha = 1$, akkor a

$$h_0(x) = 1, \quad \text{illetve a} \quad h_1(x) = x \quad \big(x \in (0, +\infty)\big)$$

függvényeket kapjuk. Egyéb $\alpha$ kitevőkre az alábbi állítások érvényesek:

**6. tétel: A hatványfüggvények tulajdonságai.**

**$1^o$** *Ha $\alpha > 0$, akkor a $h_\alpha$ hatványfüggvény pozitív, szigorúan monoton növekedő és folytonos a $(0, +\infty)$ intervallumon, továbbá*

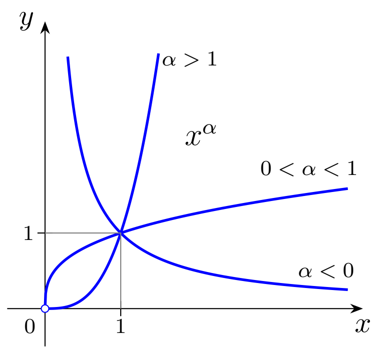
$$\lim_{0+0} h_\alpha = 0 \quad \textit{és} \quad \lim_{+\infty} h_\alpha = +\infty.$$

*A $h_\alpha$ függvény szigorúan konvex a $(0, +\infty)$ intervallumon, ha $\alpha > 1$ és szigorúan konkáv $(0, +\infty)$-n, ha $0 < \alpha < 1$.*

**$2^o$** *Ha $\alpha < 0$, akkor a $h_\alpha$ hatványfüggvény pozitív, szigorúan monoton csökkenő, folytonos és szigorúan konvex a $(0, +\infty)$ intervallumon, valamint*

$$\lim_{0+0} h_\alpha = +\infty \quad \textit{és} \quad \lim_{+\infty} h_\alpha = 0.$$

A $h_\alpha$ függvények grafikonjai:



## 7. A $\sin$ és a $\cos$ függvények

Emlékeztetünk arra, hogy a szinusz- és a koszinuszfüggvényt az egész $\mathbb{R}$-en konvergens hatványsor összegfüggvényeként értelmeztük:

$$\sin x := \sin(x) := x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\cos x := \cos(x) := 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Most összefoglaljuk azokat az állításokat, amelyeket korábban már megismertünk:

$\boxed{\mathbf{1^o}}$ A $\sin$ függvény páratlan, azaz $\sin(-x) = -\sin x \quad (x \in \mathbb{R})$,
a $\cos$ függvény páros, vagyis $\cos(-x) = \cos x \quad (x \in \mathbb{R})$.

$\boxed{\mathbf{2^o}}$ **Addíciós képletek**: minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y,$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y.$$

$\boxed{\mathbf{3^o}}$ Érdemes megjegyezni azt a tényt, hogy *két szinusz, illetve koszinusz összege és különbsége szorzattá alakítható.* A következő azonosságok az addíciós képletek egyszerű következményei. Tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sin x + \sin y = 2 \cdot \sin\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2}, \qquad \sin x - \sin y = 2 \cdot \sin\frac{x-y}{2} \cdot \cos\frac{x+y}{2},$$
$$\cos x + \cos y = 2 \cdot \cos\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2}, \qquad \cos x - \cos y = -2 \cdot \sin\frac{x+y}{2} \cdot \sin\frac{x-y}{2}.$$

Az igazolásukhoz legyen $\alpha := \dfrac{x+y}{2}$ és $\beta := \dfrac{x-y}{2}$. Ekkor $x = \alpha + \beta$ és $y = \alpha - \beta$.
Az első esetben azt kapjuk, hogy

$$\sin x + \sin y = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\,\sin\alpha \cdot \cos\beta = 2 \cdot \sin\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2}.$$

A többi azonosság hasonlóan látható be.

$\boxed{\mathbf{4^o}}$ Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sin(2x) = 2\,\sin x \cdot \cos x, \qquad \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

$\boxed{\mathbf{5^o}}$ **Négyzetes összefüggés**:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

$\boxed{\mathbf{6^o}}$ A $\sin$ és a $\cos$ függvény folytonos $\mathbb{R}$-en.

Most a $\sin$ és a $\cos$ függvények hatványsoros definícióiból kiindulva, bevezetjük az egész matematika egyik fontos állandóját, a $\pi$ **számot.**

**7. tétel: A $\pi$ szám értelmezése.** *A* cos *függvénynek a* $[0,2]$ *intervallumban pontosan egy zérushelye van, azaz* $[0,2]$*-nek pontosan egy* $\xi$ *pontjában áll fenn a* $\cos\xi = 0$ *egyenlőség. Ennek a* $\xi$ *számnak a kétszereseként **értelmezzük a*** $\pi$ ***számot:***

$$\pi := 2\xi.$$

**Bizonyítás.** A Bolzano-tételt alkalmazzuk. Világos, hogy $\cos \in C[0,2]$ és $\cos 0 = 1$. Másrészt

$$\cos 2 = 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!} + \frac{2^8}{8!} - \frac{2^{10}}{10!} + \frac{2^{12}}{12!} - \cdots =$$
$$= 1 - 2 + \frac{2}{3} - \frac{2^6}{6!} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{2^2}{7 \cdot 8}\right)}_{>0} - \frac{2^{10}}{10!} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{2^2}{11 \cdot 12}\right)}_{>0} - \cdots < -\frac{1}{3} < 0.$$

A Bolzano-tétel feltételei tehát teljesülnek, ezért $\exists\, \xi \in [0,2]$: $\cos\xi = 0$.

A $\xi$ pont egyértelműsége következik abból, hogy $\cos \downarrow$ a $[0,2]$ intervallumban, azaz

$$(*) \qquad \text{ha} \quad 0 \le x < y \le 2, \quad \text{akkor} \quad \cos x > \cos y.$$

Az eddigiekből következik, hogy

$$\cos x > \cos y \iff \cos x - \cos y = -2 \cdot \sin\frac{x+y}{2} \cdot \sin\frac{x-y}{2} = 2 \cdot \sin\frac{x+y}{2} \cdot \sin\frac{y-x}{2} > 0.$$

Mivel $0 \le x < y \le 2 \implies 0 < \frac{x+y}{2} < 2$ és $0 < \frac{y-x}{2} \le 2$, ezért a $(*)$ állítás a

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots = z \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{z^2}{2 \cdot 3}\right)}_{>0} + \frac{z^5}{5!} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{z^2}{6 \cdot 7}\right)}_{>0} + \cdots > 0 \quad \big(z \in (0,2)\big)$$

egyenlőtlenség következménye. ■

## Megjegyzések

**1.** A Bolzano-tétel bizonyításánal alkalmazott *Bolzano-féle felezési eljárással* $\pi$ közelítő értékei meghatározhatók. Világos, hogy $0 < \pi < 4$. Az is megmutatható, hogy $3,141 < \pi < 3,142$, ezért használhatjuk a $\boxed{\pi \approx 3.14}$ közelítést.

**2.** Igazolható, hogy $\pi$ **irracionális** és **transzcendens** szám.

**3.** Az addíciós képletek, valamint a négyzetes összefüggés felhasználásával a sin és a cos függvény számos helyen vett helyettesítési értékeit pontosan ki tudjuk számolni. Például: $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\cos\pi = -1$, $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

**4.** Az integrálszámítás alkalmazásainál értelmezni fogjuk a körív hosszát, és megmutatjuk, hogy az egységsugarú kör kerülete $2\pi$. Ez azt jelenti, hogy az előző tételben definiált $\pi$ szám valóban megegyezik a korábbi tanulmányainkban megismert $\pi$ számmal. ■

A trigonometrikus függvényekkel kapcsolatos alapvető fogalom a következő: Az $f$ valós-valós függvény **periodikus**, ha van olyan $p > 0$ valós szám, hogy minden $x \in \mathcal{D}_f$ elemre $x \pm p \in \mathcal{D}_f$ és

$$f(x+p) = f(x).$$

A $p$ számot $f$ **periódusának**, az $f$ függvényt pedig $p$ **szerint periodikus** függvénynek nevezzük.

Ha az $f$ függvény $p$ szerint periodikus, akkor bármely $x \in \mathcal{D}_f$, $k \in \mathbb{Z}$ esetén $x \pm kp \in \mathcal{D}_f$ és

$$f(x+kp) = f(x).$$

Vagyis, ha $p$ az $f$ függvénynek periódusa, akkor minden $k = 1, 2, \ldots$ esetén $kp$ is periódusa $f$-nek. Egy függvény periódusának megadásán általában a legkisebb (pozitív) periódus megadását értjük, amennyiben ilyen létezik.

Nem minden periodikus függvénynek van legkisebb periódusa. Az

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 1, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Dirichlet-függvénynek minden *racionális* szám periódusa, és ezek között nyilván nincs legkisebb pozitív szám.

A szinusz- és a koszinuszfüggvény fontos tulajdonságát fejezi ki a következő állítás:

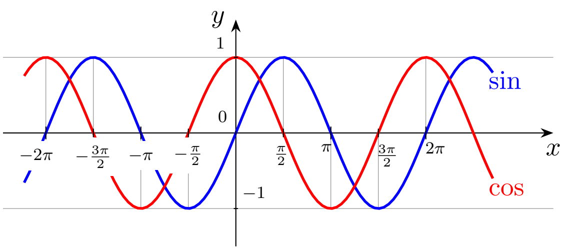
**8. tétel.** *A* $\sin$ *és a* $\cos$ *függvény* $2\pi$ *szerint periodikus, azaz*

$$\sin(x+2\pi) = \sin x, \qquad \cos(x+2\pi) = \cos x \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

*és* $2\pi$ *mindegyik függvénynek a legkisebb periódusa.*

**Bizonyítás.** Meggondolható. ■

A sin és a cos függvények monotonitási és konvexitási/konkávitási tulajdonságainak a vizsgálatához a differenciálszámítás eszköztárára lesz szükségünk. Ezeket az ismereteket megelőlegezve most az alábbi ábrán szemléltetjük a sin és a cos függvények „jól ismert” grafikonjait:




A sin és a cos függvények grafikonjai a

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad \text{illetve a} \quad \sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \quad (x \in \mathbb{R})$$

azonosságok alapján egymásból eltolással származtathatók.

**Megjegyzés.** Emlékeztetünk arra, hogy ha $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ és $f(x) := g(x+a)$ $(x \in \mathcal{D}_g)$, akkor az $f$ függvény grafikonját $g$ grafikonjának $x$ tengely irányú eltolásával kapjuk meg úgy, hogy $a > 0$ esetén az eltolást $a$ egységgel „balra", $a < 0$ esetén pedig $a$ egységgel „jobbra" végezzük. ■