Analízis1ABC, 2. zárthelyi dolgozat , 2015.05.15.
Megoldások

1. *Adott az* $x_0 := 0$ *és* $x_{n+1} := \frac{1}{8} \cdot (x_n^2 + x_n + 10)$ $(n \in \mathbb{N})$ *sorozat. Konvergens-e és ha igen, mi a határértéke ?*

Megoldás :

i) Jegyezzük meg (ld. indukció), hogy a sorozat minden tagja nemnegatív.

Vizsgáljuk meg a sorozatot monotonitás szempontjából : $x_0 = 0 < x_1 = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$.

Igazoljuk indukcióval, hogy a sorozat szigorúan monton nő. Az első lépés megvan, tegyük fel, hogy valamely $n \in \mathbb{N}$ indexre teljesül, hogy $(\star) : 0 \le x_n < x_{n+1}$ és kell, hogy : $x_{n+1} < x_{n+2}$. A rekurzív formula alapján :

$$x_{n+1} = \frac{1}{8} \cdot (x_n^2 + x_n + 10) < (\star) < \frac{1}{8} \cdot (x_{n+1}^2 + x_{n+1} + 10) = x_{n+2}.$$

Tehát a sorozat szigorúan monoton nő , így $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén : $x_0 = 0 \le x_n$, azaz a sorozat első eleme a legnagyobb alsó korlát.

ii) Van-e felső korlát ? Nézzük meg ehhez a lehetséges határértékeket !

Tegyük fel, hogy a sorozat konvergens és $\lim(x_n) =: A \in \mathbb{R}$. Ekkor $\lim(x_{n+1}) = A$ és a fentiek alapján $A \in [0; +\infty)$ is igaz. A rekurzió és a konvergens sorozatokkal végzett műveleti szabályok értelmében :

$$\lim(x_{n+1}) = \frac{1}{8}\cdot(\lim(x_n^2)+\lim(x_n)+10) \iff A = \frac{1}{8}\cdot(A^2+A+10) \implies A^2-7A+10 = 0 \iff A_1 = 2 \in [0;+\infty); A_2 = 5 \in [0;+\infty).$$

Tehát, ha (x_n) konvergens, akkor a határértéke csak A_1 vagy A_2 **lehet** .

iii) Belátjuk, hogy A_1 felső korlátja a sorozatnak !

Indukcióval igazoljuk, hogy $x_n < A_1 = 2 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$.

Ha $n = 0$, akkor $x_0 = 0 < 2$, ami igaz.

Tegyük fel, hogy valamely $n \in \mathbb{N}$-re : $x_n < 2$. Be kell látni, hogy : $x_{n+1} < 2$ is igaz.

A rekurzió és az indukciós feltevés alapján : $x_{n+1} = \frac{1}{8} \cdot (x_n^2 + x_n + 10) < \frac{1}{8} \cdot (4 + 2 + 10) = 2$.

Tehát a sorozat korlátos, monoton $\implies (x_n)$ konvergens és $\lim(x_n) = 2$.

2. *Számítsa ki az alábbi határértéket :*

$$\lim_{n\to+\infty} \Big(\frac{n^2}{1+n^3} + \frac{n^2}{2+n^3} + \frac{n^2}{3+n^3} + \cdots + \frac{n^2}{n+n^3}\Big).$$

Megoldás :

A feladatot közrefogással oldjuk meg. A felső becsléshez minden tag helyett írjuk be a legnagyobb törtet, az alsó becsléshez pedig a legkisebbet, azaz :

$$\frac{n^3}{n+n^3} = n \cdot \frac{n^2}{n+n^3} \le \frac{n^2}{1+n^3} + \frac{n^2}{2+n^3} + \frac{n^2}{3+n^3} + \cdots + \frac{n^2}{n+n^3} \le n \cdot \frac{n^2}{1+n^3} = \frac{n^3}{1+n^3} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

A közrefogó sorozatokra :

$$\lim\Big(\frac{n^3}{n+n^3}\Big) = \lim\Big(\frac{n^3}{1+n^3}\Big) = 1,$$

így a közrefogás értelmében az eredeti határérétk 1.

3. *Döntse el, hogy az alábbi sorok konvergensek vagy divergensek (a válaszát indokolja) :*

$$i) \sum_{n=0} \Big(\frac{2n^2+1}{2n^2+7}\Big)^{n^3+n}; \qquad ii) \sum_{n=1} (-28)^n \cdot \frac{[(n+1)!]^3}{(3n+2)!}.$$

Megoldás :

i) Írjuk fel a gyök−kritériumot :

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\Big(\frac{2n^2+1}{2n^2+7}\Big)^{n^3+n}} = \lim_{n\to+\infty} \Big(\frac{2n^2+1}{2n^2+7}\Big)^{n^2+1} = \lim_{n\to+\infty} \Big(1 - \frac{6}{2n^2+7}\Big)^{n^2+1} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\left(1-\frac{6}{2n^2+7}\right)^{2n^2+7}\cdot\left(1-\frac{6}{2n^2+7}\right)^{-5}} = \lim_{n\to+\infty}\left(\left(1-\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}\right)^3 \cdot \lim_{n\to+\infty}\sqrt{\left(1-\frac{6}{2n^2+7}\right)^{-5}} = \frac{1}{e^3},$$

ahol $x_n := \dfrac{2n^2+7}{6} \to +\infty$, ha $n\to+\infty$ és a tanult tétel értelmében ilyenkor $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x_n}\right)^{x_n} = \dfrac{1}{e}$.

A kapott határérték $\dfrac{1}{e^3} < 1$, ezért a gyök$-$kritérium értelmében a megadott sor (abszolút) konvergens.

ii) Alkalmazzuk a hányados$-$kritériumot :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \lim_{n\to+\infty} 28\cdot\frac{[(n+2)!]^3}{(3n+5)!}\cdot\frac{(3n+2)!}{[(n+1)!]^3} =$$

$$= 28\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+2)^3}{(3n+3)\cdot(3n+4)\cdot(3n+5)} = 28\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{(1+2/n)^3}{(3+3/n)\cdot(3+4/n)\cdot(3+5/n)} = \frac{28}{27}.$$

Mivel a kapott határérték $\dfrac{28}{27} > 1$, ezért a megadott sor **divergens**.

4. *Tekintsük a* $\sum\limits_{n=0}\dfrac{(-1)^n}{3^n\cdot(5n+1)}\cdot(x+1)^n \quad (x\in\mathbb{R})$ *hatványsort. Milyen* $x\in\mathbb{R}$ *számok mellett konvergens a sor ?*

Megoldás :

i) A hatványsorok definícióját figyelembe véve leolvasható az együtthatósorozat $a_n := \dfrac{(-1)^n}{3^n\cdot(5n+1)}$, $(n\in\mathbb{N})$ és a hatványsor középpontja : $a=-1$.

ii) Alkalmazva a Cauchy$-$Hadamard tételt a konvergencia sugárra kapjuk, hogy :

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left|\dfrac{(-1)^n}{3^n\cdot(5n+1)}\right|}} = \frac{3}{\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{5n+1}}} = 3.$$

A fenti határértéknél felhasználtuk, hogy (ld. közrefogás) :

$$1 = \sqrt[n]{1} \le \sqrt[n]{5n+1} \le \sqrt[n]{5n+n} = \sqrt[n]{6n} \quad (1\le n\in\mathbb{N}).$$

A közrefogó sorozatokra : $\lim\limits_{n\to+\infty}(1) = 1 = \lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{6}\cdot\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}$.

Azt kaptuk, hogy $R=3$ és $a=-1$, ezért a Cauchy$-$Hadamard tétel szerint a sor abszolút konvergens (így konvergens is), ha $x\in(a-R;a+R)=(-4;2)$.

Azt is tudjuk a tételből, hogy ha $x\in(-\infty;-4)\cup(2;+\infty)$, akkor a hatványsor divergens.

Ha $x=-4$, akkor kapjuk a $\sum\limits_{n=0}\dfrac{1}{5n+1}$ sort. Mivel ebben az esetben

$$\frac{1}{5n+1} \ge (NRA) \ge \frac{1}{5n+n} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{n} > 0 \quad (1\le n\in\mathbb{N})$$

és az $\dfrac{1}{6}\cdot\sum\left(\dfrac{1}{n}\right)$sor divergens, ezért az összehasonlító kritérium értelmében a vizsgált sor is **divergens.**

Ha pedig $x=2$, akkor kapjuk a $\sum\limits_{n=0}\dfrac{(-1)^n}{5n+1}$ konvergens Leibniz sort, ugyanis a Leibniz sorokra vonatkozó definíció és tétel értelmében :

$$0 < \frac{1}{5\cdot(n+1)+1} < \frac{1}{5n+1} \quad (\forall\, n\in\mathbb{N}) \text{ illetve } \lim\left(\frac{1}{5n+1}\right) = 0.$$

Összefoglalva tehát, a hatványsor konvergencia halmaza a $(-4;2]$ intervallum.

5. *Adjon meg olyan* $R>0$ *valós számot és* (a_n) *sorozatot, amelyekkel :*

$$\frac{4x-5}{(x+7)\cdot(3x-1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\cdot x^n \quad (x\in(-R,+R)).$$

Megoldás :

Legyen $f(x) = \dfrac{4x-5}{(3x-1)\cdot(x+7)}$ $(x \in \mathbb{R}\setminus\{-7;1/3\})$. Bontsuk fel az itteni törtet résztörtek összegére az alábbiak szerint :

$$f(x) = \frac{4x-5}{(3x-1)\cdot(x+7)} = \frac{A}{x+7} + \frac{B}{3x-1} = \frac{A\cdot(3x-1)+B\cdot(x+7)}{(3x-1)\cdot(x+7)}.$$

A számlálók egyenlősége alapján az együtthatókat összehasonlítva kapjuk, hogy :

$$3A+B=4;\quad 7B-A=-5 \iff A=\frac{3}{2},\ B=-\frac{1}{2} \Longrightarrow$$

$$f(x) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x+7} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3x-1} \quad (x \in \mathbb{R}\setminus\{-7;1/3\}).$$

A kapott két törtet tagonként hatványsorba fejtve (ld. geometriai sor összegzése) :

$$\frac{1}{x+7} = \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{x}{7}\right)} = \left(\text{ha } \left|-\frac{x}{7}\right| < 1 \iff |x|<7\right) = \frac{1}{7}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{x}{7}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{7^{n+1}}\cdot x^n, \quad \text{ha } x\in(-7;7),$$

illetve

$$\frac{1}{3x-1} = -\frac{1}{1-3x} = \left(\text{ha } |3x|<1 \iff |x|<1/3\right) = -\sum_{n=0}^{+\infty}(3x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}-3^n\cdot x^n, \quad \text{ha } x\in(-1/3;1/3).$$

A konvergencia tartományok közös pontjaiban, ha $x \in (-1/3;1/3)\cap(-7;7) = (-1/3;1/3)$, felhasználva a konvergens sorokra vonatkozó műveleteket kapjuk, hogy :

$$f(x) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x+7} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3x-1} = \frac{3}{2}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{7^{n+1}}\cdot x^n - \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}-3^n\cdot x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3^n}{2}+\frac{3\cdot(-1)^n}{2\cdot 7^{n+1}}\right)\cdot x^n.$$

Tehát a keresett konvergencia sugár $R=\dfrac{1}{3}$ és $a_n = \dfrac{3^n}{2} + \dfrac{3\cdot(-1)^n}{2\cdot 7^{n+1}}$ $(n\in\mathbb{N})$.