1. Függvények aszimptotikus viselkedése

Tegyük fel, hogy g : N → R, aszimptotikusan nemnegatív függvény!

1.a, Adjuk meg az O(g) és az Ω(g) függvényhalmazok defnícióját!

O(g) = { f | létezik c > 0 ÉS N eleme N(természetes számok halmaza), hogy minden n>=N esetén f(n) <= c*g(n)} f-nek g aszimptotikus függvénye ha f eleme O(g)

Ω(g) = { f | létezik c > 0 ÉS N eleme N(természetes számok halmaza), hogy minden n>=N esetén f(n) >= c*g(n)} f-nek g aszimptotikus függvénye ha f eleme Ω (g)

1.b, Milyen alapvető összefüggést ismer az O(g), az Ω(g) és a Θ(g) függvényhalmazok között?

Θ(g) = O(g) metszve Ω(g)

1.c, Igaz-e, hogy $(3n + 4)^2 \in \Theta(n^2)$? Miért?

$9n^2 + 24n + 16$ eleme $\Theta(n^2)$ => igaz

elég nagy n-re az $a* n^2 + b*n + c$ polinomban elhanyagolható a b*n és a c

1.d, Igaz-e, hogy $n^n \in \Omega(2^n)$? Miért?

2^n felülről becsülhető n^n-el => igaz

1.e, Igaz-e, hogy $1000n^2 (\ln n)^2 \in O(n^3)$? Miért?

$1000n^2 (\ln n)^2$ nem becsülhető felül n^3-al => hamis

2.c, Igaz-e, hogy $(2n + 1)(3n − 4) \in \Theta(n^2)$? Miért?

$6n^2 - 5n – 4$ eleme $\Theta(n^2)$ => igaz

elég nagy n-re az $a* n^2 + b*n + c$ polinomban elhanyagolható a b*n és a c

2.d, Igaz-e, hogy $2^n \in O(n!)$? Miért?

2^n felülről becsülhető n!-el => igaz

2.e, Igaz-e, hogy $(n \ln n)^2 \in \Theta(n^3)$? Miért?

$n^2 \log^2(n)$ nem becsülhető alulról n^3-al => hamis

2. Összehasonlító rendezések

1.a, Osztályozza az előadásról ismert négy összehasonlító rendezést műveletigény (MT(n), AT(n), mT(n)) szempontjából!

(Θ == THETA)

BeszúróRendezés: $mT(n) \in \Theta(n)$, $MT(n) \in \Theta(n^2)$, $AT(n) \in \Theta(n^2)$

ÖsszefésülőRendezés: $mT(n) \in \Theta(n \log n)$, $MT(n) \in \Theta(n \log n)$, $AT(n) \in \Theta(n \log n)$

GyorsRendezés: $mT(n) \in \Theta(n \log n)$, $MT(n) \in \Theta(n^2)$, $AT(n) \in \Theta(n \log n)$

KupacRendezés: $mT(n) \in \Theta(\log m)$ $(m \in \{n-1, n-2, \ldots, 1\})$, $MT(n) \in \Theta(\log n)$

1.b, Mondja ki az összehasonlító rendezések maximális műveletigényének alsó korlátjára vonatkozó alaptételt!

(Ω == OMEGA)

Tetszőleges rendező algoritmusra $MT(n) \in \Omega(n \log n)$.

⇒ mind az n rendezendő elem értékét ellenőriznie kell, valamint minden alprogramhívás és ciklusiteráció csak korlátos számú elemet ellenőriz. Ha a korlátok maximuma k

$\Rightarrow MT(n) * k \geq MC(n) \Rightarrow MT(n) \geq 1/k\ MC(n) \Rightarrow MT(n) \in \Omega(MC(n)) \Rightarrow MT(n) \in \Omega(n \log n)$

1.c, Bizonyítsa be a kulcsösszehasonlítások számának maximumára vonatkozó lemmát!

(MC == maximális kulcsősszehasonlítás)

Bármely összehasonító rendezés végrehejásához a legrosszabb esetben $MC(n) \in \Omega(n \log n)$ kulcsösszehasonlítás szükséges.

$$MC(n) = h \geq \log n! = \sum_{i=1}^{n} \log i \geq \sum_{i=\lceil \frac{n}{2} \rceil}^{n} \log i \geq \sum_{i=\lceil \frac{n}{2} \rceil}^{n} \log \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil * \log \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \geq$$

$$\geq \frac{n}{2} * \log \frac{n}{2} = \frac{n}{2} * (\log n - \log 2) = \frac{n}{2} * (\log n - 1) = \frac{n}{2} \log n - \frac{n}{2} \in \Omega(n \log n)$$

1.d, Mi a jelentősége ennek a tételnek?

Az összefésülő és a kupacrendezés aszimptotikusan optimális. A műveletigényük $O(n \log n)$. Mindkettőre igaz, hogy $MT(n) \in \Omega(n \log n)$.

2.b, Mit tud mondani a rendezések minimális műveletigényének alsó korlátjáról? Miért?

(Ω == OMEGA)

Tetszőleges rendező algoritmusra $mT(n) \in \Omega(n)$.

$\Rightarrow$ mind az n rendezendő elem értékét ellenőriznie kell, valamint minden alprogramhívás és ciklusiteráció csak korlátos számú elemet ellenőriz. Ha a korlátok maximuma k

$\Rightarrow mT(n) * k \geq n \Rightarrow mT(n) \geq 1/k\ n \Rightarrow mT(n) \in \Omega(n)$

2.c, Osztályozza az előadásról ismert négy összehasonlító tömbrendezést (maximális és minimális) tárigény szempontjából! (A tárigény = az algoritmus végrehajtásához használt temporális adatok számára + az alprogram hívások számára szükséges tárterület.)

BeszúróRendezés: $M(n) \in \Theta(1)$

ÖsszefésülőRendezés: $M(n) \in \Theta(1)$

GyorsRendezés: $M(n) \in \Theta(\log n)$

KupacRendezés: $M(n) \in \Theta(1)$

2.d, A fenti négy rendezés közül melyeket javasolná egyirányú láncolt listák rendezésére is? Mit tud mondani ezen listarendezések tárigényéről?

Összefésülő rendzés: kisebb allistákra szedi szét a listát

2.e, A fenti négy rendezés közül melyiket javasolná előrendezett, kétirányú láncolt listák rendezésére? Miért?

Beszúró rendezés

2.1. Beszúró rendezés

1.a, Szemléltesse a beszúró rendezést az előadásról ismert módon az <5; 7; 6; 4; 8; 4> tömbre! Az utolsó beszúrást részletezze!

5 7 6484

57 6 484

567 4 84

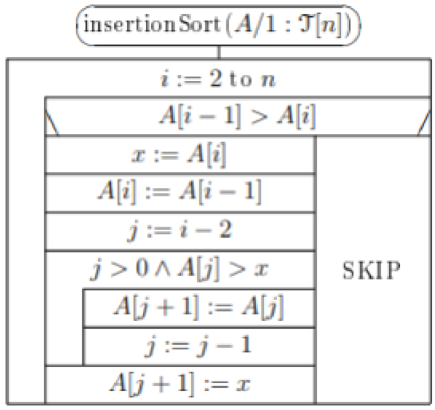
4567 8 4

45678 4

445678

$\Rightarrow$ stabil

1.b, Adja meg a megfelelő struktogramot!



1.c, Számolja ki a struktogramjának megfelelő pontos MT(n) és mT(n) értékeket!

$mT(n) = n = 6$

$MT(n) = \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} n + 1 = 16$

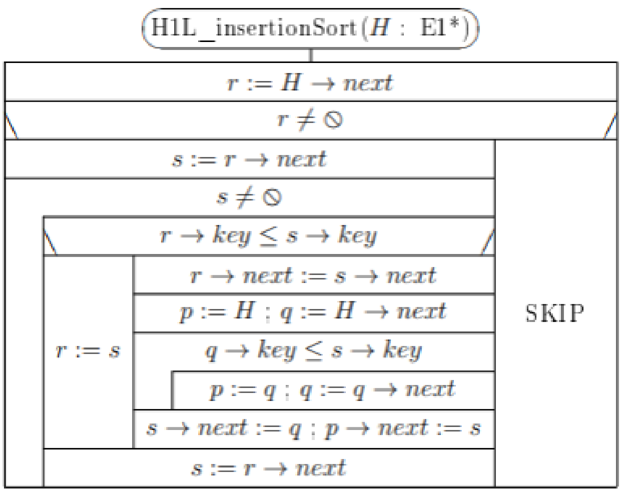
1.d, Mit jelentenek ezek az eredmények aszimptotikusan?

aszimptotikusan a legrosszabb esethez esik közel

2.a, Mikor nevezünk egy rendezést stabilnak?

Stabil, ami a helyén van nem mozgatja, ha két egyforma elem van a tömbben a rendezett listában bal oldalt lesz ami az eredeti listában bal oldalt volt és jobb oldalt lesz ami az eredeti listában jobb oldalt volt.

2.b, Adja meg fejelemes, egyirányú, nemciklikus listára (H1L) a beszúró rendezés struktogramját! A listát a key mezők szerint monoton növekvően kell rendezni. (A listaelemeknek a szokásos key és next mezőkön kívül más részei is lehetnek, de ezeket nem ismerjük.)



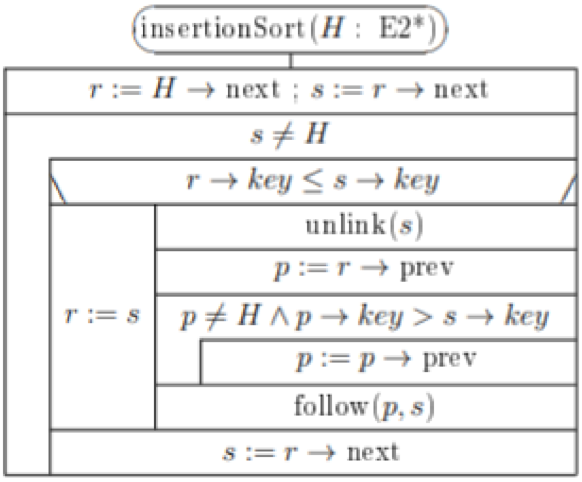
2.c, Hogyan biztosítottuk a fenti rendezés stabilitását?

s felveszi r->next értékét, ha r->key <= s->key akkor r továbbmegy

2.d, Mekkora lesz a rendezés minimális és maximális műveletigénye? Miért?

$mT(n) \in \Theta(n)$, $MT(n) \in \Theta(n^2)$, $AT(n) \in \Theta(n^2)$

3.b, Adja meg fejelemes, kétirányú, ciklikus listára (C2L) a beszúró rendezés struktogramját! A listát a key mez®k szerint monoton növekv®en kell rendezni. (A listaelemeknek a szokásos key és a két mutató mez®n kívül járulékos mez®i is lehetnek, de ezeket nem ismerjük. A listát kizárólag az out(q), precede(q, r) és follow(p, q) eljárásokkal szabad módosítani, ahogy azt az el®adáson tanultuk.)



3.c, Hogyan biztosítottuk a fenti rendezés stabilitását?

A beszúró rendezés jobbról balra rendez, valamint nincs megengedve egyenlőség. Ez biztosítja a stabilitást.

2.2. Összefésülő rendezés

1.a, Szemléltesse az összefésülő rendezés (mergesort) működését az előadásról ismert módon az <4; 3; 5; 2; 1; 8; 3> sorozatra! (Sem a szétvágásokat, sem az összefuttatásokat nem kell részletezni.)

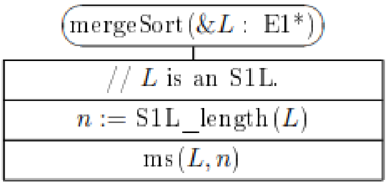
4 35 21 83

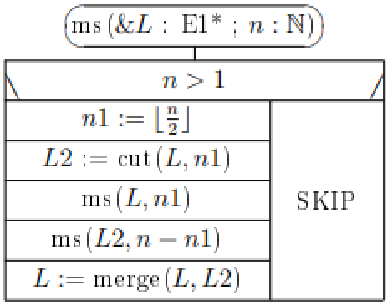
4 35 12 38

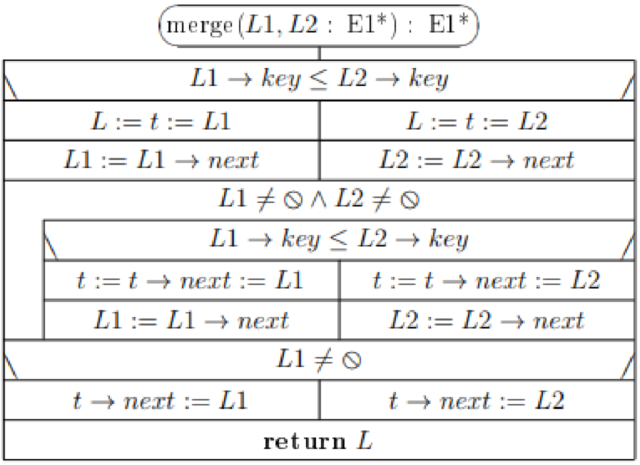
345 1238

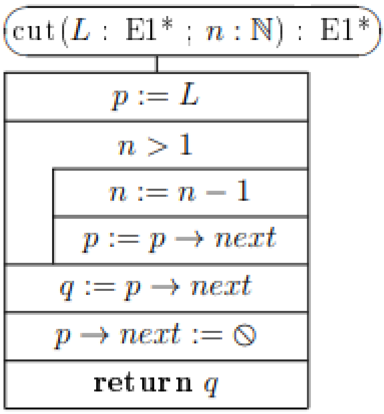
1233458

1.b, Adjuk meg egyszerű láncolt listákra a rekurzív eljárás és a „cut” függvény struktogramját!





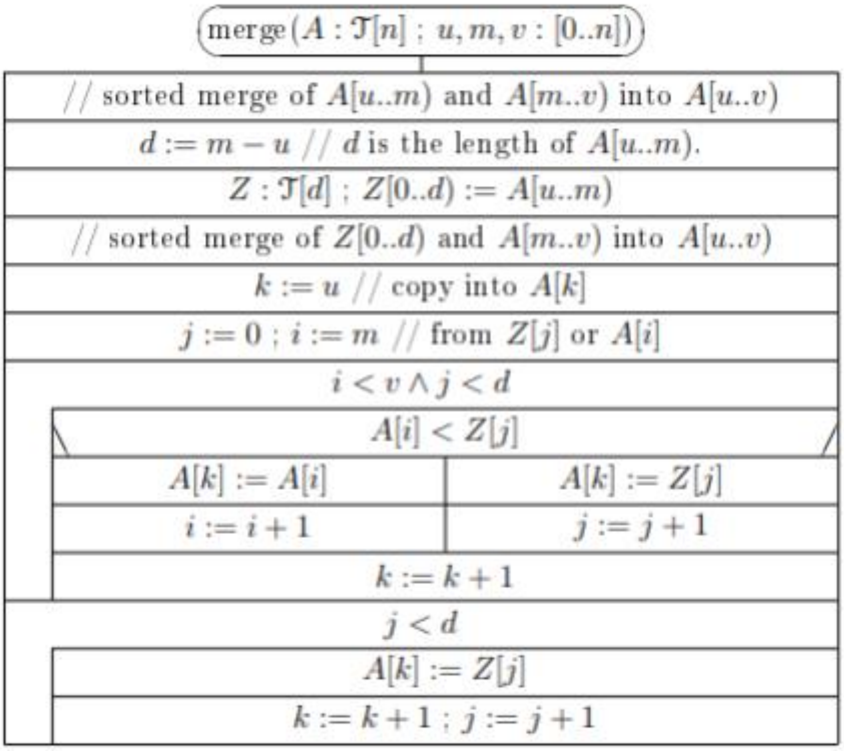




1.c, Mekkora a rendezés műveletigénye? Röviden indokoljuk állításunkat! (Csak a bizonyítás vázlatát kell leírni.)

mTcut(n) ∈ Θ(n), MTcut(n) ∈ Θ(n log n)

2.a, Adja meg vektorokra a mergeSort(A) és segédeljárásai struktogramjait!



2.b, Mekkora lesz a műveletigénye és a tárigénye? Miért? (Csak vázlatos indoklást kérünk.)

mT(n) ∈ Θ(n log n), MT(n) ∈ Θ(n log n), M(n) ∈ Θ(1)

3.a, Szemléltessük az összefésülő rendezés (merge sort) működését az előadásról ismert módon az <5; 3; 2; 1; 4; 9; 2> sorozatra!

5 32 14 92

5 23 14 29

235 1249

1223459

3.c, Mekkora a merge(L, L2) eljárás műveletigénye? Miért?

mT(n) ∈ Θ(n log n), MT(n) ∈ Θ(n log n)

4.a, Szemléltesse az összefésülő rendezés (merge sort) működését az előadásról ismert módon az <1; 9; 2; 5; 3; 2; 4> sorozatra! (Sem a szétvágásokat, sem az összefuttatásokat nem kell részletezni.)

1 92 53 24

1 29 35 24

129 2345

1223459

5.a, Szemléltesse az összefésülő rendezés (mergesort) működését az előadásról ismert módon a <4; 5; 2; 3; 5; 7; 3; 9; 4> sorozatra! (Az utolsó összefésülésnél azt is jelezze, hogy az input elemei milyen sorrendben kerülnek az outputra!)

45 23 5 73 94

45 23 5 37 49

$23_b4_b5_b$ $3_j4_j5_j79$

$23\,_b3\,_j4\,_b4\,_j$ $5\,_b5\,_j$ 79

2.3. Kupacrendezés

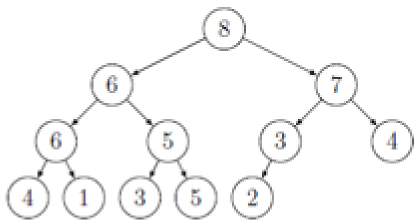
1.a, Egy bináris fa mikor szigorúan bináris? Mikor teljes? Mikor majdnem teljes? Ez utóbbi mikor balra tömörített, és mikor kupac?

Szigorúan bináris fa: bin fa, ahol minden belső csúcsnak két gyereke van

Teljes bináris fa: szigorúan bin fa, ahol minden levél azonos szinten van

Majdnem teljes bináris fa: ha egy teljes fa levélszintjéről nulla, egy vagy több levelet elveszünk (de nem az összeset)

Balra tömörített bináris fa = Szintfolytonos bin fa = kupac: olyan majdnem teljes bin fa ahol nem lehet balra már beszúrni új levelet



1.b, Szemléltesse a kupacrendezést a következő tömbre! <3; 9; 8; 2; 4; 6; 7; 5> Minden lesüllyesztés előtt jelölje a csúcs mellett egy kis körbe tett sorszámmal, hogy ez a rendezés során a hányadik lesüllyesztés; akkor is, ha az aktuális lesüllyesztés nem mozdítja el a csúcsban lévő kulcsot! Minden valódi lesüllyesztés előtt jelölje a lesüllyesztés irányát és útvonalát! Minden olyan lesüllyesztés előtt rajzolja újra a fát, ami az aktuális ábrán már módosított csúcsokat érinti! Újrarajzoláskor adja meg a fát tartalmazó tömb pillanatnyi állapotát is! Elég a kupaccá alakítást és még utána a fő ciklus első 3 iterációját (a 3. lesüllyesztés végéig) szemléltetni.

3

9 8

2 4 6 7

5

9

3 8

2 4 6 7

5

9

3 8

5 4 6 7

2

9

5 8

3 4 6 7

2

az új tömb <9,5,8,3,4,6,7,2> ⇒ <2,5,8,3,4,6,7,**9**>

2

5 8

3 4 6 7

8

5 2

3 4 6 7

8

5 7

3 4 6 2

az új tömb <8,5,7,3,4,6,2,**9**> ⇒ <2,5,7,3,4,6,**8**,**9**>

2

5 7

3 4 6

7

5 6

3 4 2

az új tömb <7,5,6,3,4,2, **8**,**9**> ⇒ <2,5,6,3,4,**7**,**8**,**9**>

2

5 6

3 4

6

5 2

3 4

az új tömb <6,5,2,3,4,**7**, **8**,**9**> ⇒ <2,5,3,4,**6**,**7**,**8**,**9**>

2

5

3 4

5

2

3 4

5

4

3 2

az új tömb <5,4,3,2,**6**,**7**, **8**,**9**> ⇒ <2,4,3,**5**,**6**,**7**,**8**,**9**>

2

4

3

4

2

3

4

3

2

az új tömb <4,3,2,**5**,**6**,**7**, **8**,**9**> ⇒ <2,3,**4**,**5**,**6**,**7**,**8**,**9**>

2

3

3

2

az új tömb <3,2,**4**,**5**,**6**,**7**, **8**,**9**> ⇒ <2,**3**,**4**,**5**,**6**,**7**,**8**,**9**>

2.b, Szemléltesse a kupacrendezést a következő tömbre! <5; 7; 6; 4; 2; 8; 9; 4; 3>

5

7 6

4 2 2 8

9 4 3

9

7 8

4 2 2 6

5 4 3

9

7 8

5 2 2 6

4 4 3

az új tömb <9,7,6,5,2,2,8,4,4,3> ⇒ <3,7,8,5,2,2,6,4,4,**9**>

3

7 8

5 2 2 6

4 4

8

7 3

5 2 2 6

4 4

8

7 6

5 2 2 3

4 4

az új tömb <8,7,6,5,2,2,3,4,4,**9**> ⇒ <4,7,6,5,2,2,3,4,**8**,**9**>

4

7 6

5 2 2 3

4

7

4 6

5 2 2 3

4

7

5 6

4 2 2 3

4

az új tömb <7,5,6,4,2,2,3,4,**8,9**> ⇒ <4,5,6,4,2,2,3,**7,8,9**>

4

5 6

4 2 2 3

6

5 4

4 2 2 3

az új tömb <6,5,4,4,2,2,3,**7,8,9**> ⇒ <3,5,4,4,2,2,**6,7,8,9**>

3

5 4

4 2 2

5

3 4

4 2 2

5

4 4

3 2 2

az új tömb <5,4,4,3,2,2,**6,7,8,9**> ⇒ <2,4,4,3,2,**5,6,7,8,9**>

2

4 4

3 2

4

2 4

3 2

4

3 4

2 2

az új tömb <4,3,4,2,2,**5,6,7,8,9**> ⇒ <2,3,4,2,**4,5,6,7,8,9**>

2

3 4

2

4

3 2

2

az új tömb <4,3,2,2,**4,5,6,7,8,9**> ⇒ <2,3,2,**4,4,5,6,7,8,9**>

2

3 2

3

2 2

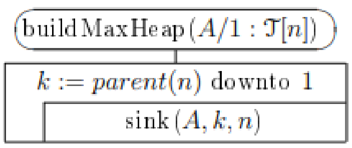
az új tömb <3,2,2,**4,4,5,6,7,8,9**> ⇒ <2,2,**3,4,4,5,6,7,8,9**>

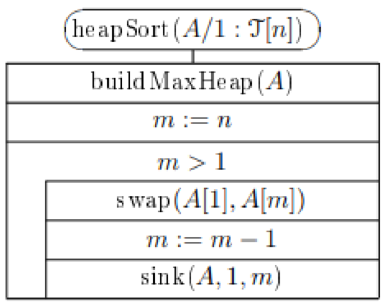
2

2

<2,**2,3,4,4,5,6,7,8,9**>

3.a, Adja meg a heapSort(A : T []) és segédeljárásai struktogramjait!





3.b, Igaz-e, hogy MT(n) ∈ Θ(n lg n)? Miért? [Vegyük észre, hogy az indokláshoz elegendő, ha a kupaccá alakítás és az utána következő rész műveletigényére is durva felső becslést adunk, továbbá használjuk az összehasonlító rendezések (alsókorlát-elemzésre vonatkozó) alaptételét!]

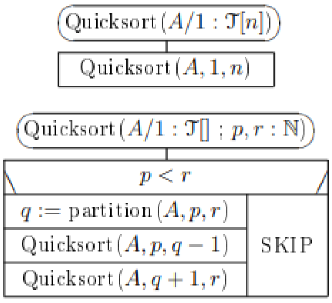
a süllyesztés műveletigénye O(log n)

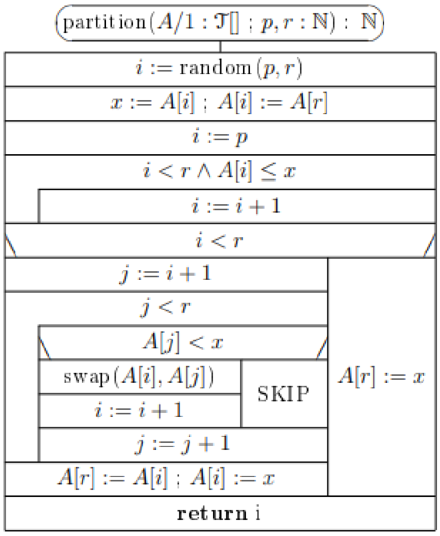
kupaccá alakítás műveletigénye Θ(n)

a teljes futási idő O(n log n)

2.4. Gyorsrendezés

1.a, Írja le az előadásról ismert formában a gyorsrendezés (quicksort) struktogramjait!





1.b, Szemléltesse a program „partition" függvényének működését a következő vektorra! <3; 4; 8; 7; 1; 2; 6; 4>.

legyen p=3

p helyet cserél az utolsó elemmel ⇒ <4,4,8,7,1,2,6,3>

elindulunk balról keresünk egy elemet ami nagyobb vagy egyenlő mint a p ⇒ i=4

elindulunk jobbról keresünk egy elemet ami kisebb mint p ⇒ j=2

kicseréljük i-t és j-t ⇒ <2,4,8,7,1,4,6,3>

i=4 j=1 ⇒ <2,1,8,7,4,4,6,3>

⇒ <2,1,3,7,4,4,6,8> <- a 3 a helyén van so quicksort mindkét oldalára

<2,1> ahol p=2 ⇒ <1,2>

<7,4,4,6,8> ahol p=7 ⇒ <8,4,4,6,7>

i=8 j=6 ⇒ <6,4,4,8,7>

⇒ <6,4,4,7,8>   < a 7 és a 8 a helyén quicksort a bal oldalra

<6,4,4> ahol p=6 ⇒ <4,4,6>

⇒ <1,2,3,4,4,6,7,8>

1.c, Mekkora a gyorsrendezés műveletigénye?

$mT(n) \in \Theta(n \log n)$, $MT(n) \in \Theta(n^2)$, $AT(n) \in \Theta(n \log n)$

1.d, Érdemes-e a gyorsrendezést és a beszúró rendezést egyetlen rendezésben egyesíteni? Hogyan? Miért?

A beszúró rendezés egyes esetekben hatékonyabb, mint a gyorsrendezés. A gyorsrendezés eljárása jelentősen gyorsítható, ha a kis méretű résztömbökre beszúró rendezére térnénk át.

2.b, Szemléltessük a program „partition" függvényének működését a következő vektorra! <1; 2; 8; 7; 3; 2; 6; 3>.

p=1 ⇒ <3,2,8,7,3,2,6,1>

⇒ <1,2,8,7,3,2,6,3>

i=8 j=2 ⇒ <1,2,2,7,3,8,6,3>

i=7 j=3 ⇒ <1,2,2,3,7,8,6,3>

⇒ <1,2,2,3,3,8,6,7>   <- a 3 és a jobb oldal fix

<8,6,7> ahol p=8 ⇒ <7,6,8>   <- a 8 fix

<7,6> ahol p=7 ⇒ <6,7>

⇒ <1,2,2,3,3,6,7,8>

2.d, Mekkora munkatárat igényel a gyorsrendezés (quicksort) alapváltozata a legjobb és a legrosszabb esetben? Miért?

$mT(n) \in \Theta(n \log n)$, $MT(n) \in \Theta(n^2)$, $AT(n) \in \Theta(n \log n)$

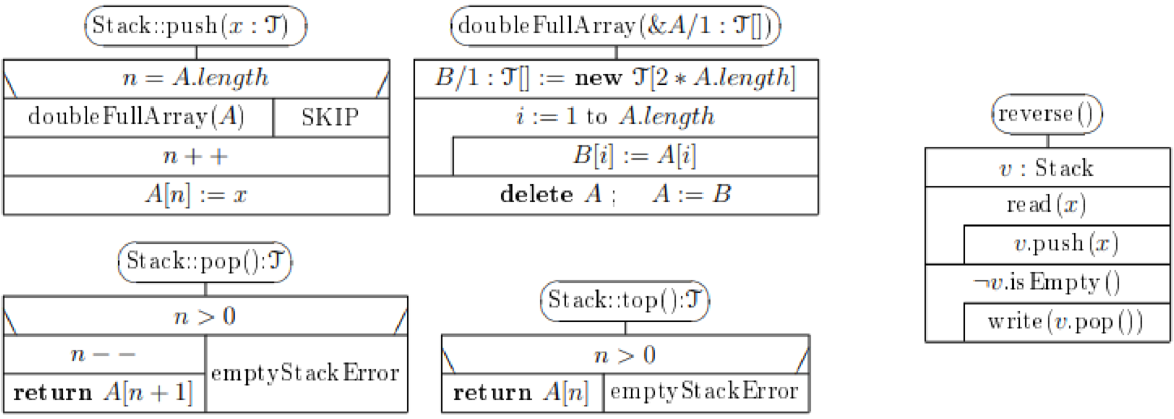
3. Absztrakt adattípusok

3.1. Verem

1. Adja meg az előadásról ismert módon a Stack osztály tömbös reprezentációra alapozott leírását, a metódusok struktogramjaival együtt! Mekkora az egyes műveletek aszimptotikus futási ideje?

a vermek műveleteinek műveletigénye Θ(1) kivéve a push mert az mT(n) ∈ Θ(1), MT(n) ∈ Θ(n)

Stack
$-\ A/1 : \mathcal{T}[]$ // $\mathcal{T}$ is some known type ; $A.length$ is the physical
$-$ constant $m0 : \mathbb{N}_+ := 16$ // size of the stack, its default is m0.
$-\ n : \mathbb{N}$ // $n \in 0..A.length$ is the actual size of the stack
$+$ Stack$(m : \mathbb{N}_+ := m0)$ $\{A :=$ **new** $\mathcal{T}[m]$; $n := 0\}$ // create empty stack
$+ \sim$ Stack() { **delete** A }
$+$ push$(x : \mathcal{T})$ // push x onto the top of the stack
$+$ pop() : $\mathcal{T}$ // remove and return the top element of the stack
$+$ top() : $\mathcal{T}$ // return the top element of the stack
$+$ isFull() : $\mathbb{B}$ {**return** $n = A.length$}
$+$ isEmpty() : $\mathbb{B}$ {**return** $n = 0$}
$+$ setEmpty() $\{n := 0\}$ // reinitialize the stack

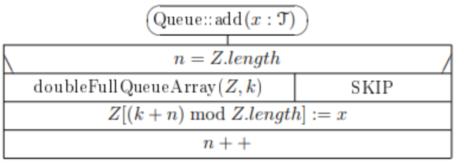


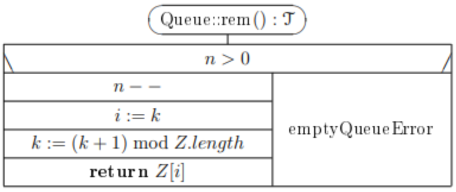
3.2. Sor

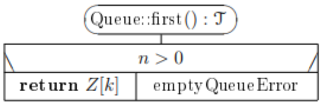
1. Adja meg az előadásról ismert módon a Queue osztály tömbös reprezentációra alapozott leírását, a metódusok struktogramjaival együtt! Mekkora az egyes műveletek aszimptotikus futási ideje?

a sorok műveleteinek műveletigénye Θ(1) kivéve az add mert az mT(n) ∈ Θ(1), MT(n) ∈ Θ(n)

Queue
$-\ Z : \mathcal{T}[]$ // $\mathcal{T}$ is some known type ; $Z.length$ is the physical
$-$ constant $m0 : \mathbb{N}_+ := 16$ // length of the queue, its default is m0.
$-\ n : \mathbb{N}$ // $n \in 0..Z.length$ is the actual length of the queue
$-\ k : \mathbb{N}$ // $k \in 0..(Z.length - 1)$: the starting position of the queue in Z
$+$ Queue$(m : \mathbb{N}_+ := m0)\{$ $Z :=$ **new** $\mathcal{T}[m]$; $n := 0$; $k := 0$ }
// create an empty queue
$+$ add$(x : \mathcal{T})$ // join x to the end of the queue
$+$ rem() : $\mathcal{T}$ // remove and return the first element of the queue
$+$ first() : $\mathcal{T}$ // return the first element of the queue
$+$ length() : $\mathbb{N}$ {**return** n}
$+$ isFull() : $\mathbb{B}$ {**return** $n = Z.length$}
$+$ isEmpty() : $\mathbb{B}$ {**return** $n = 0$}
$+ \sim$ Queue() { **delete** Z }
$+$ setEmpty() $\{n := 0\}$ // reinitialize the queue







3.3. Prioritásos sor

1. Tegyük fel, hogy a prioritásos sort tömbben, maximum kupaccal reprezentáljuk! Adja meg az előadásról ismert módon a PrQueue osztály leírását, a metódusok struktogramjaival együtt! (A lesüllyesztést nem kell leírni.) Mekkora az egyes műveletek aszimptotikus futási ideje?

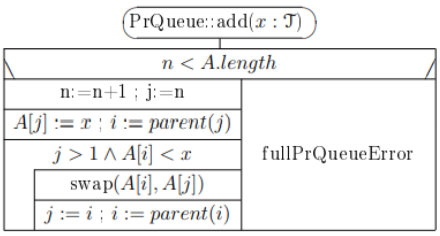
$mT_{add}(n) \in \Theta(1)$, $MT_{add}(n) \in \Theta(n)$

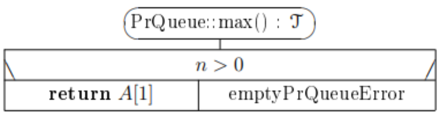
$mT_{remMax}(n) \in \Theta(1)$, $MT_{remMax}(n) \in \Theta(n)$

$m_{max}(n) \in \Theta(1)$

PrQueue
- $A/1 : \mathcal{T}[]$ // $\mathcal{T}$ is some known type - $n : \mathbb{N}$ // $n \in [0..A.length]$ is the actual length of the priority queue

+ PrQueue($m : \mathbb{N}$){ $A :=$ **new** $\mathcal{T}[m]$; $n := 0$ } // create an empty priority queue
+ add($x : \mathcal{T}$) // insert x into the priority queue
+ remMax():$\mathcal{T}$ // remove and return the maximal element of the priority queue
+ max():$\mathcal{T}$ // return the maximal element of the priority queue
+ isFull() : $\mathbb{B}$ {**return** $n = A.length$}
+ isEmpty() : $\mathbb{B}$ {**return** $n = 0$}
+ ~ PrQueue() { **delete** A }
+ setEmpty() {$n := 0$} // reinitialize the priority queue





PrQueue::remMax() : $\mathcal{T}$

$n > 0$	
$max := A[1]$	emptyPrQueueError
$A[1] := A[n]$	
$n := n - 1$	
sink$(A, 1, n)$	
return max	

2.b, Szemléltesse az alábbi kupacra a 9, majd az eredmény kupacra a 8 beszúrásának műveletét! <8; 8; 6; 6; 5; 2; 3; 1; 5; 4>.

8

8 6

6 5 2 3

1 5 4 **9**

8

8 6

6 **9** 2 3

1 5 4 5

8

9 6

6 8 2 3

1 5 4 5

9

8 6

6 8 2 3

1 5 4 5

az új tömb: <9,8,6,6,8,2,3,1,5,4,5>

9

8 6

6 8 2 3

1 5 4 5 **8**

9

8 6

6 8 **8** 3

1 5 4 5 2

9

8 **8**

6 8 6 3

1 5 4 5 2

az új tömb: <9,8,8,6,8,6,3,1,5,4,5,2>

2.c, Szemléltesse az eredeti kupacra a maxKivesz eljárás kétszeri végrehajtását! Minden művelet után rajzolja újra a fát!

8

8 6

6 5 2 3

1 5 4

4

8 6

6 5 2 3

1 5 (8)

8

4 6

6 5 2 3

1 5

8

6 6

4 5 2 3

1 5

8

6 6

5 5 2 3

1 4

az új tömb: <8,6,6,5,5,2,3,1,4>

4

6 6

5 5 2 3

1 (8)

6

4 6

5 5 2 3

1

6

5 6

4 5 2 3

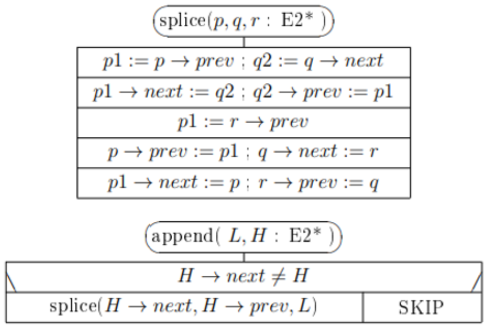
1

az új tömb: <6,5,6,4,5,2,3,1>

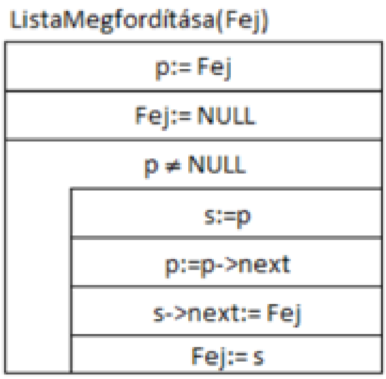
4. Láncolt listák

4.1. Egyszerű listák (S1L)

1. Az L1 és L2 pointerek két egyszerű láncolt listát azonosítanak. Írja meg az append(L1, L2) eljárást, ami MT(n) ∈ Θ(n) és mT(n) ∈ Θ(1) (n = |L1|) műveletigénnyel az L1 lista után fűzi az L2 listát!



2. Írja meg a reverse(L) eljárást, ami megfordítja az L egyszerű láncolt lista elemeinek sorrendjét! T(n) ∈ Θ(n), ahol n a lista hossza.

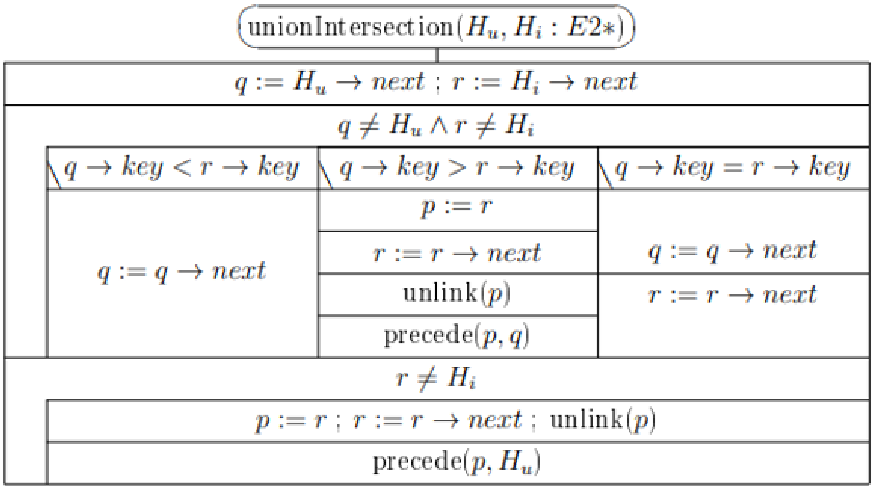


(Fej == H)

4.4. Fejelemes, kétirányú, ciklikus listák (C2L)

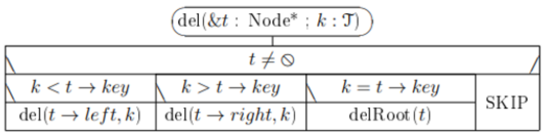
2. Az L1, L2 pointerek egy-egy szigorúan monoton növekvő C2L (fejelemes, kétirányú, ciklikus, láncolt lista) fejelemére mutatnak. A listákat kizárólag az out(q), precede(q, r) és follow(p, q) eljárásokkal szabad módosítani, ahogy azt az előadáson tanultuk. Írjuk meg a unionIntersection(L1, L2) eljárást, ami az L1 lista elemei közé átfűzi az L2 listáról az L1 listán eredetileg nem szereplő elemeket! Így az L1 listán a két input lista uniója, míg az L2 listán a metszetük jön létre, és mindkét lista szigorúan monoton növekvő marad. Mindkét listán legfeljebb

egyszer menjünk végig! Listaelemeket ne hozzunk létre és ne is töröljünk! MT(n1, n2) ∈ O(n1 + n2) és mT(n1, n2) ∈ O(n2) legyen, ahol n1 az L1, n2 az L2 lista hossza.

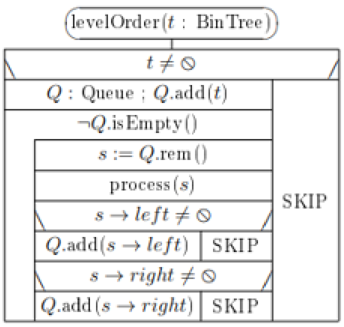


5. Bináris fák

1.a A t : Node* típusú pointer egy láncoltan ábrázolt bináris fát azonosít. A fa csúcsaiban nincsenek „parent” pointerek. Írjuk meg a töröl(t) rekurzív eljárást, ami törli a t fa csúcsait, Θ(|t|) műveletigénnyel, a posztorder bejárás szerint! Rendelkezésre áll ehhez a delete p utasítás, ami a p pointer által mutatott csúcsot törli. A t fa végül legyen üres!



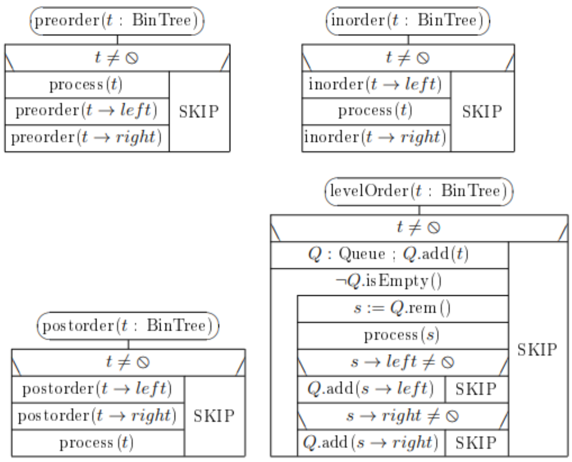
2. A t : Node* típusú pointer egy láncoltan ábrázolt bináris fát azonosít, ami majdnem teljes és balra tömörített. A fa csúcsaiban nincsenek parentpointerek. Írja meg az szkiír(t, A, n) eljárást, ami Θ(|t|) műveletigénnyel a fa kulcsait szintfolytonosan az A tömbbe írja, és n-ben visszaadja a fa méretét! Feltehető, hogy a tömb elég nagy. Az eljárás a fát ne változtassa meg!



i=0 -> A[i]=process(s) -> i++ -> return i

4. Milyen bináris fa bejárásokat ismer?

4.a, Adja meg a struktogramjaikat!



4.b, Számolja ki a struktogramokhoz tartozó műveletigényeket!

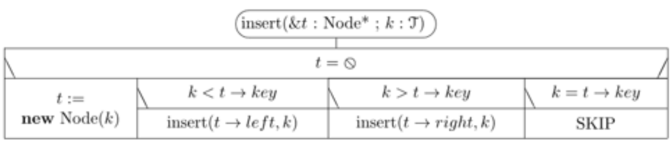
$T_{preorder}(n)$, $T_{inorder}(n)$, $T_{postorder}(n)$, $T_{levelOrder}(n) \in \Theta(n)$, ahol n a fa mérete

5.1. Bináris keresőfák (és rendezőfák)

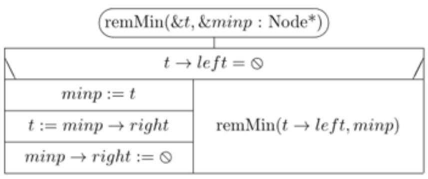
1.a, A bináris fa fogalmát ismertnek feltételezve, mondjuk ki a bináris keresőfa definícióját!

keresőfa = a bal oldali kulcsok mind kisebbek a jobb részfa kulcsai mind nagyobbak

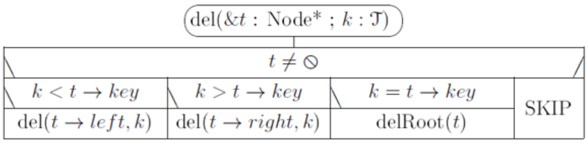
1.b, A t egy láncoltan ábrázolt bináris keresőfa gyökérpointere. A csúcsokban nincsenek „parent" pointerek. (A fa üres is lehet.) Írja meg az előadásról ismert módon az insert(t, k) eljárás rekurzív struktogramját, ami megkeresi a t fában a k kulcs helyét, és ha ott egy üres részfát talál, akkor az üres részfa helyére tesz egy új levélcsúcsot, k kulccsal.



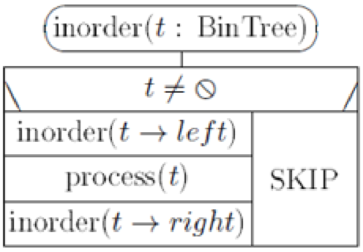
3.a, A bináris fával kapcsolatos egyéb fogalmakat ismertnek feltételezve, definiálja a bináris keresőfa fogalmát! Adott a remMin(t, minp) eljárás az előadásról ismert jelentéssel. (Ezt nem kell megírni.)



3.b, Írja meg a del(t, k, s) ciklust nem tartalmazó MT(h(t)) ∈ O(h(t)) hatékonyságú rekurzív eljárást, ami megpróbálja törölni a láncoltan ábrázolt t bináris keresőfából a k kulcsú csúcsot! (Akkor tudja törölni, ha talál ilyet a fában.) Az s, logikai típusú paraméterben visszaadjuk, hogy sikeres volt-e a törlés. A fa csúcsai „parent” pointert nem tartalmaznak, számunkra ismeretlen, járulékos adatmezőket viszont tartalmazhatnak.



4.b, Adott a t bináris fa. A csúcsok kulcsai pozitív egész számok. Írja meg a bst(t) logikai függvényt; ami a t egyszeri (Inorder) bejárásával eldönti, hogy keresőfa-e! MT(n) ∈ O(n), ahol n = |t|. MS(h) ∈ O(h), ahol h = h(t); MS pedig az algoritmus maximális tárigényét jelöli. (A bejárást és eldöntést a megfelelően inicializált, rekurzív, bst(t, k) logikai segédfüggvény végezze, ami híváskor k-ban a t kulcsainál kisebb értéket vár, visszatéréskor pedig, amennyiben t nemüres keresőfa, a t-beli legnagyobb kulcsot tartalmazza! Ha t üres, akkor k-ban maradjon a függvényhívásnál kapott érték!)



l=true, for i=1; i<A.length; i++ {if(A[i-1]>A[i]) {l=false, break}} return l

5.a, Bizonyítsa be, hogy tetszőleges, n csúcsú és h magasságú bináris fára az n − 1 ≥ h egyenlőtlenség teljesül!

a gyökér a 0.szinten van

tegyük fel a fánk így néz ki:

5

2

7

ekkor n=3 és h=2 => 3-1 >= 2 <- IGAZ

5.b, Mikor lesz h = n − 1, és miért?

ha minden gyereknek további egy gyereke van csak

5.c, Bizonyítsa be, hogy h ≥ [lg n], ha a bináris fa nemüres!

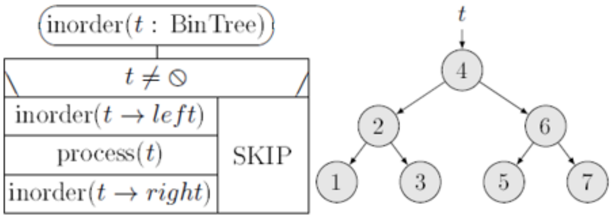
tetszőleges h magasságú teljes bináris fa csúcsainak száma tehát $1 + 2 + 4 + ... + 2^h = 2^{h+1} - 1$.

5.d, Bizonyítsa be, hogy h = [lg n], ha az előbbi fa majdnem teljes!

tetszőleges h mélységű, majdnem teljes bináris fa csúcsainak száma $n \in [2^h..2^{h+1}-1)$, és így h = [log n]

6.b, Milyen kapcsolat van a bináris keresőfák és az inorder bejárás között? (Indokolja is az állítást!)

ha a bináris keresőfát inorder járjuk be akkor egy szigorúan monoton növő sorozatot kapunk



6. Rendezés lineáris időben

6.1. Edényrendezés a [0;1) intervallumon (bucket sort)

1.a, A ;0,4; 0,82; 0,0; 0,53; 0,73; 0,023; 0,64; 0,7; 0,39; 0,203>, tíz elemű listán mutassa be a bucket sort algoritmusát [0; 1)-beli kulcsokra!

0 0.0 => 0.023, 0.0 => 0.0, 0.023

1 -

2 0.203

3 0.39

4 0.4

5 0.53

6 0.64

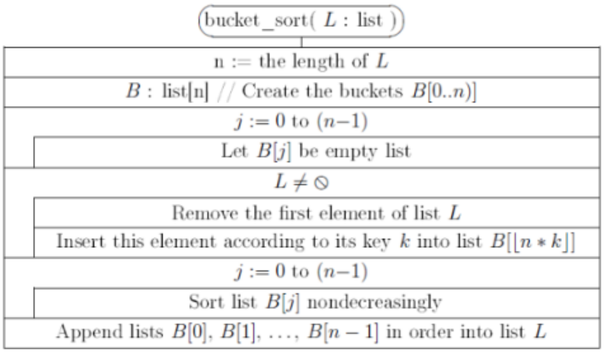
7 0.73 => 0.7, 0.73 => 0.7, 0.73

8 0.82

9 –

=> <0.0, 0.023, 0.203, 0.39, 0.4, 0.53, 0.64, 0.7, 0.73, 0.82>

1.b, Adja meg a bucket sort struktogramját!



1.c, Mekkora a minimális műveletigénye? Mekkora az átlagos műveletigénye, és milyen feltétellel? Hogyan tudnánk biztosítani, hogy a maximális műveletigénye Θ(n lg n) legyen?

O(n logn), Ω(n)

2.a, A <0,42; 0,16; 0,64; 0,39; 0,20; 0,89; 0,13; 0,79; 0,53; 0,71> listán mutassa be és magyarázza el az bucket sort algoritmusát [0; 1)-beli kulcsokra!

0 -

1 0.16 => 0.13, 0.16

2 0.20

3 0.39

4 0.42

5 0.53

6 0.64

7 0.79 => 0.71, 0.79

8 0.89

9 -

=> <0.13, 0.16, 0.20, 0.39, 0.42, 0.53, 0.64, 0.71, 0.79, 0.89>

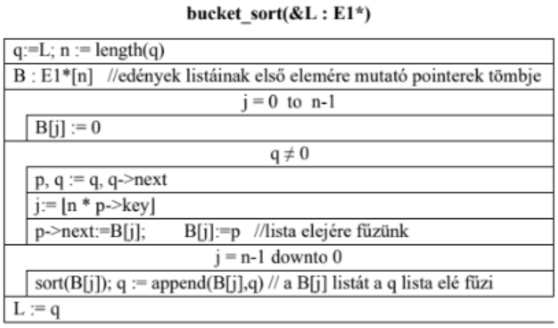
2.d, Mit értünk stabil rendezés alatt? Hogyan tudná a bucket sort-ot stabil rendezéssé alakítani?

ami jobb oldalt volt eredetileg az a rendezett tömbben is jobb oldalt marad

ha a rendezésnél az egyenlő elemeket megcserélnénk

3. Adott az L egyszerű láncolt lista, aminek n ≥ 0 eleme van. Minden elemének kulcsa a [0; 1) intervalumon egyenletes eloszlás szerint választott érték. Írja meg a bucketSort(L, n) utasítással

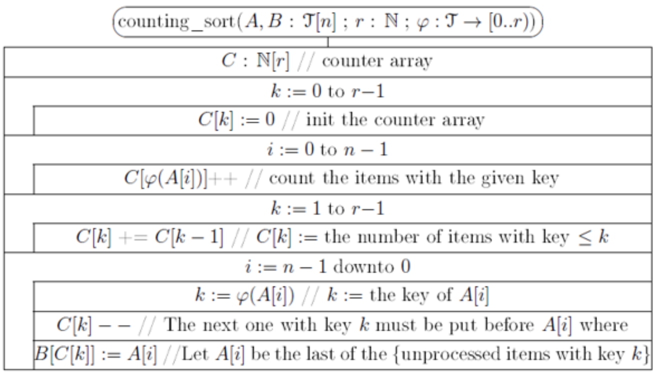
meghívható egyszerű edényrendezés struktogramját, AT(n) ∈ Θ(n), MT(n) ∈ Θ(n lg n) műveletigénnyel és M(n) ∈ O(n) tárigénnyel! Segédrendezésként felhasználható a megfelelő, ebben a félévben tanult, egyszerű láncolt listákat kulcsösszehasonlításokkal rendező eljárás. Ezt nem kell megírni, a kód többi részét viszont teljes részletességgel kérjük.



6.2. Leszámláló rendezés (counting sort)

1.a Adja meg a leszámláló rendezés előfeltételeit, struktogramját és aszimptotikus műveletigényét!

a radix rendezés segédfüggvénye, szükség lesz két tömbre: A = {rendezendő elemek} és B = {eredmény}, az A elemeinek muszáj egész számnak lennie, valamint meg kell adni számrendszert



a műveletigény Θ(n + r), de mivel az r konstans => Θ(n)

1.b, Szemléltesse a <30; 20; 11; 22; 23; 13> négyes számrendszerbeli számok tömbjén, ha a kulcsfüggvény a baloldali számjegyet választja ki!

	C	30	20	11	22	23	13			13	23	22	11	20	30
0	0							|0	0|						
1	0			1			2	|2	2|	1			0		
2	0		1		2	3		|3	5|		4	3		2	
3	0	1						|1	6|						5

=> B = <11,13,20,22,23,30>

1.c, Minek kellett teljesülnie a bemenetre, és minek a rendezésre, hogy a fenti példában a végeredmény, mint számsor is rendezett lett? Hogyan biztosítottuk a rendezés e tulajdonságát?

már rendezve voltak a második számjegy szerint

6.3. Radix rendezés leszámláló rendezéssel

1.a, Mutassa be a számjegypozíciós (Radix) rendezés működését a következő, négyes számrendszerbeli számok tömbjén: <20; 02; 21; 01; 31; 20>! Az egyes menetekben leszámláló rendezést alkalmazzon!

<20; 02; 21; 01; 31; 20>

0 20 20	2	2
1 21 01 31	3	5
2 02	1	6
3 -	0	6

<20,31,01,21,02,20> => <20,20,21,01,31,02>

0 01 02	2	2
1 -	0	2
2 20 20 21	3	5
3 31	1	6

<02,31,01,21,20,20> => <01,02,20,20,21,31>

1.b, Mekkora a fenti rendezés aszimptotikus műveletigénye, és miért?

a műveletigény Θ(n + r), de mivel az r konstans => Θ(n)

1.c, A leszámláló rendezés mint segédprogram mely tulajdonságára épül a Radix rendezés? Mit jelent ez a tulajdonság az adott esetben?

stabilitás

2.a, Mutassa be a számjegypozíciós („Radix") rendezés működését a <11; 20; 10; 23; 21; 30> négyes számrendszerbeli számok tömbjén! Az egyes menetekben leszámláló rendezést alkalmazzon!

<11,20,10,23,21,30>

0 20 10 30 3 3

1 11 21 2 5

2 - 0 5

3 23 1 6

<30,21,23,10,20,11> => <20,10,30,11,21,23>

0 - 0 0

1 10 11 2 2

2 20 21 23 3 5

3 30 1 6

<23,21,11,30,10,20> => <10,11,20,21,23,30>

6.4. Radix rendezés szétválogatással

1.a, Mutassa be a számjegypozíciós („Radix") rendezés működését a <31; 20; 11; 23; 21; 10> négyes számrendszerbeli számok listáján! Az egyes menetekben a megfelelő számjegy szerinti szétválogatást alkalmazzon!

<31; 20; 11; 23; 21; 10>

0 20 10 2 2

1 31 11 21 3 5

2 - 0 5

3 23 1 6

=> <20,10,31,11,21,23>

0 - 0 0

1 10 11 2 2

2 20 21 23 3 5

3 31 1 6

=> <10,11,20,21,23,31>

2. Oldja meg az előző feladatot a <11; 20; 10; 23; 21; 30> input listával!

<11; 20; 10; 23; 21; 30>

0 20 10 30   3 3

1 11 21   2 5

2 -   0 5

3 23   1 6

=> <20,10,30,11,21,23>

0 -   0 0

1 10 11   2 2

2 20 21 23   3 5

3 30   1 6

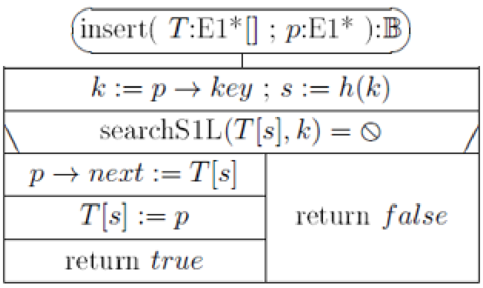
=> <10,11,20,21,23,30>

7. Hasító táblák

7.1. Ütközés feloldása láncolással

1. A Z[0..(m−1)] hasító tábla rései kétirányú, nemciklikus, fejelem nélküli, rendezetlen láncolt listák pointerei. Adott a k mod m hasító függvény. A kulcsütközéseket láncolással oldjuk fel. Mindegyik kulcs csak egyszer szerepelhet Z-ben.

1.a, Írja meg az ins(Z, k, a):0..2 értékű függvényt, ami beszúrja a hasító táblába a (k, a) kulcs-adat párt! Ha a táblában már volt k kulcsú elem, a beszúrás meghiúsul, és a 2 hibakódot adja vissza. Különben, ha nem tudja már a szükséges listaelemet allokálni, az 1 hibakódot adja vissza. (Feltesszük, hogy a new művelet, ha sikertelen, akkor pointert ad vissza.) Az ins() művelet akkor ad vissza 0 kódot, ha sikeres volt a beszúrás. Ilyenkor az új listaelemet a megfelelő lista elejére szúrja be.

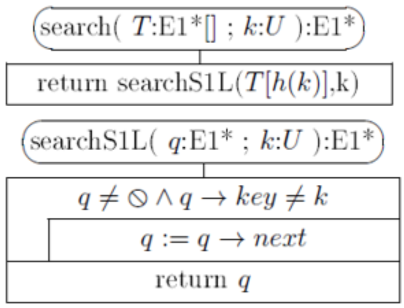


1.b, Mi a kitöltöttségi hányados? Milyen aszimptotikus becslést tud adni a fenti művelet minimális, átlagos és maximális futási idejére? Miért?

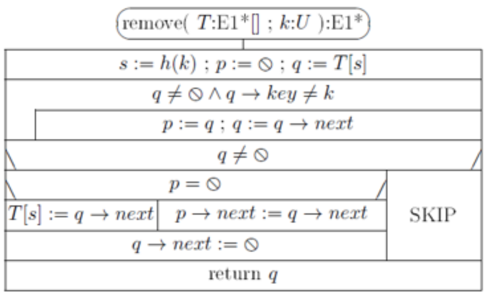
AT ∈ Θ (1), MT ∈ Θ (n)

2. A Z[0..(m−1)] hasító tábla rései kétirányú, nemciklikus, fejelem nélküli, rendezetlen láncolt listák pointerei. Adott a k mod m hasító függvény. A kulcsütközéseket láncolással oldjuk fel. Mindegyik kulcs csak egyszer szerepelhet Z-ben.

(2.a) Írja meg a search(Z, k) függvényt, ami visszaadja a Z-beli, k kulcsú listaelem címét, vagy a pointert, ha ilyen nincs!



(2.b) Írja meg a del(Z, p) eljárást, ami törli a Z hasító táblából (és deallokálja is) a p pointer által mutatott listaelemet!



(2.c) Mi a kitöltöttségi hányados? Milyen aszimptotikus becslést tudunk adni a fenti műveletek minimális, átlagos és maximális futási idejére? Miért?

AT ∈ Θ (1), MT ∈ Θ (n)

7.2. Nyílt címzés

1. A Z[0..(m−1)] hasító táblában a kulcsütközést nyílt címzéssel oldjuk fel.

1.a, Mit értünk kitöltöttségi hányados, próbasorozat és egyenletes hasítás alatt?

kitöltöttségi hányados: alfa = n/m (n==hasító táblán tárolt adatok száma, m==tábla mérete)

próbasorozat: van potenciális és akutális, <h(k, 0), h(k, 1), . . . , h(k, m−1)>

egyenletes hasítás: a kulcsokat a rések között egyenletesen szórja szét

1.b, Mekkora egy sikertelen keresés várható hossza 80%-os kitöltöttség esetén, ha nincs törölt rés? Egy sikeres keresésé ennél több vagy kevesebb? Miért?

ha a keresés a h(k, i−1) próbánál áll meg => a keresés hossza i

kevesebb

1.c, Legyen most m = 11, h1(k) = k mod m, és alkalmazzon lineáris próbát! Az alábbi műveletek mindegyikére adja meg a próbasorozatot h. . .i alakban! Szúrja be a táblába sorban a következő kulcsokat: 10; 22; 31; 4; 15; 28; 16; 26; 62; ezután törölje a 16-ot, majd próbálja megkeresni a 27-et és a 62-t, végül pedig szúrja be a 27-et! Szemléltesse a hasító tábla változásait! Rajzolja újra, valahányszor egy művelet egy nemüres rés állapotát változtatja meg!

művelet	kulcs	h1(k)	ps	?	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
i	10	10	10	I											10
i	22	0	0	I	22										10
i	31	9	9	I	22									31	10
i	4	4	4	I	22				4					31	10
i	15	4	4,5	I	22				4	15				31	10
i	28	6	6	I	22				4	15	28			31	10
i	16	5	5,6,7	I	22				4	15	28	16		31	10
i	26	4	4,5,6,7,8	I	22				4	15	28	16	26	31	10
i	62	7	7,8,9,10,0,1	I	22	62			4	15	28	16	26	31	10
d	16	5	5,6,7	I	22	62			4	15	28	D	26	31	10
s	27	5	5,6,7,8,9,10,0,1,2	X	22	62			4	15	28	D	26	31	10
s	62	7	7,8,9,10,0,1	I	22	62			4	15	28	D	26	31	10
i	27	5	5,6,7,8,9,10,0,1,2	I	22	62	27		4	15	28	D	26	31	10

2.c, Legyen most m = 8, (az egyszerűség kedvéért) h1(k) = k mod m, és alkalmazzunk négyzetes próbát a szokásos c1 = c2 = 1/2 konstansokkal! Az alábbi műveletek mindegyikére adja meg a próbasorozatát h. . .i alakban! Szemléltesse a hasító tábla változásait! Rajzolja újra, valahányszor egy művelet egy nemüres rés állapotát változtatja meg! Szúrja be a táblába sorban a következő kulcsokat: 22; 31; 4; 28; 15; 14; 30; ezután törölje a 14-et, majd próbálja megkeresni a 38-at és a 30-at, végül pedig szúrja be a 27-et!

művelet	kulcs	h1(k)	ps	?	0	1	2	3	4	5	6	7
i	22	6	6	I							22	
i	31	7	7	I							22	31
i	4	4	4	I					4		22	31
i	28	4	4,5	I					4	28	22	31
i	15	7	7,0	I	15				4	28	22	31
i	14	6	6,7,1	I	15	14			4	28	22	31
i	30	6	6,7,1,4,0,5,3	I	15	14		30	4	28	22	31
d	14	6	6,7,1	I	15	D		30	4	28	22	31
s	38	6	6,7,1,4,0,5,3,2	X	15	D		30	4	28	22	31
s	30	6	6,7,1,4,0,5,3	I	15	D		30	4	28	22	31
i	27	3	3,4,6,1,5,2	I	15	D	27	30	4	28	22	31

3.a, Adott egy m = 7 méretű, üres hasító tábla. Nyílt címzést és kettős hasítást alkalmazunk a h1(k) = k mod m, h2(k) = 1 + (k mod (m−2)) tördelő függvények segítségével. Az alábbi műveletek mindegyikére adja meg a próbasorozatot h. . .i alakban, és a hasító táblát is rajzolja újra, valahányszor egy művelet egy nemüres rés státuszát változtatja meg (i-beszúrás, s-keresés, d-törlés): i37, i45, i19, i72, i33, d19, s12, i33, d33, i33.

művelet	kulcs	h1(k)	h2(k)	ps	?	0	1	2	3	4	5	6	7
i	37	2	3	2	I			37					
i	45	3	1	3	I			37	45				
i	19	5	5	5	I			37	45		19		
i	72	2	3	2,5,0	I	72		37	45		19		
i	33	5	4	5,1	I	72	33	37	45		19		
d	19	5	5	5	I	72	33	37	45		D		
s	12	5	3	5,0,3,6	X	72	33	37	45		D		
i	33	5	4	5,1	X	72	33	37	45		D		
d	33	5	4	5,1	I	72	D	37	45		D		
i	33	5	4	5,1	I	72	33	37	45		D		

4. Adott egy m = 11 méretű üres hasító tábla. Nyílt címzést és kettős hasítást alkalmazunk a h1(k) = k mod m és a h2(k) = 1 + (k mod (m − 1)) tördelő függvények segítségével.

4.a, Az alábbi műveletek mindegyikére adja meg a próbasorozatát h. . .i alakban! Szemléltesse a hasító tábla változásait! Rajzolja újra, valahányszor egy művelet egy nemüres rés állapotát változtatja meg! Szúrja be a táblába sorban a következő kulcsokat: 12; 17; 23; 105. Ezután törölje a 23-at, majd próbálja megkeresni a 133-at, végül pedig szúrja be a 133-at!

művelet	kulcs	h1(k)	h2(k)	ps	?	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
i	12	1	3	1	I		12									
i	17	6	8	6	I		12					17				
i	23	1	4	1,5	I		12				23	17				
i	105	6	6	6,1,7	I		12				23	17	105			
d	23	1	4	1,5	I		12				D	17	105			
s	133	1	4	1,**4**,8	X		12				D	17	105			
i	133	1	4	1,**4**,8	I		12				133	17	105			