Emlékeztető. Legyen

$$x, c \in \mathbb{R} \qquad \text{és} \qquad a_n \in \mathbb{R} \quad (n \in \mathbf{N}_0)\,.$$

A

$$\sum_{n=0} \left(a_n (x-c)^n\right)$$

sort a_n **együtthatójú**, c **középpontú hatványsor**nak neveztük. A hatványsor **konvergenciahalmaz**ának neveztük a

$$\mathrm{KH}\left(\sum \left(a_n(x-c)^n\right)\right) := \left\{x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n \in \mathbb{R}\right\}$$

számhalmazt.

Emlékeztető. A

$$\sum \left(a_n(x-c)^n\right) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

hatványsor összegfüggvényének neveztük az

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n \qquad \left(x \in \mathrm{KH}\left(\sum \left(a_n(x-c)^n\right)\right)\right)$$

függvényt.

Tétel. Tegyük fel, hogy a

$$\sum \left(a_n(t-c)^n\right) \quad (t \in \mathbb{R}), \qquad \text{ill.} \qquad \sum \left(b_n(t-c)^n\right) \quad (t \in \mathbb{R})$$

hatványsorok konvergenciasugara

$$R_a \in (0, +\infty], \qquad \text{ill.} \qquad R_b \in (0, +\infty],$$

majd legyen

$$R := \min\{R_a, R_b\},$$

továbbá jelölje f, ill. g az összegfüggvényüket:

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n \qquad (x \in (c - R_a, c + R_a)),$$

ill

$$g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-c)^n \qquad (x \in (c - R_b, c + R_b)).$$

Ekkor bármely $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén a $\lambda \cdot f$, $f + g$ és az $f \cdot g$ függvények felírhatók az alábbi hatványsorok összegeként:

1. $(\lambda \cdot f)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda \cdot a_n)(x-c)^n \quad (x \in (c - R, c + R))$;

2. $(f+g)(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(x-c)^n \quad (x\in(c-R,c+R));$

3. $(f\cdot g)(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_k b_{n-k}\right)(x-c)^n \quad (x\in(c-R,c+R)).$

Emlékeztető. Tetszőleges $x\in\mathbb{R}$ szám esetén

$$\begin{aligned}
\exp(x) &:= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} && (x\in\mathbb{R}),\\
\sin(x) &:= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} && (x\in\mathbb{R}), \qquad \cos(x) := \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad (x\in\mathbb{R}),\\
\mathrm{sh}(x) &:= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} && (x\in\mathbb{R}), \qquad \mathrm{ch}(x) := \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad (x\in\mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Feladat. Határozzuk meg az alábbi hatványsorok konvergenciasugarát és konvergenciahalmazát!

1. $\sum\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot x^n\right) \quad (x\in\mathbb{R});$

Legyen

$$a_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad (n\in\mathbb{N}).$$

Ekkor

$$\sqrt[n]{|a_n|}=1+\frac{1}{n}\longrightarrow 1 \quad (n\to\infty),$$

így a hatványsor konvergenciasugara 1: $|x|<1$ esetén konvergens, $|x|>1$ esetén divergens. Ha $|x|=1$, azaz $x=\pm1$, akkor

$$\pm\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\longrightarrow \pm e\neq 0 \quad (n\to\infty)$$

következtében $\sum(a_n)$ divergens, így a hatványsor konvergenciahalmaza a $(-1,1)$ intervallum.

$$2.\quad \sum\left(\frac{(n!)^2}{(2n)!}\cdot(x+2)^n\right)\qquad (x\in\mathbb{R});$$

Legyen

$$a_n := \frac{(n!)^2}{(2n)!}\qquad (n\in\mathbb{N}).$$

Ekkor

$$\lim\left(\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\right) = \lim\left(\frac{(n!)^2}{(2n)!}\cdot\frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}\right) = \lim\left(\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2}\right) = \lim\left(\frac{4n^2+6n+2}{n^2+2n+1}\right) = 4,$$

így a hatványsor konvergenciasugara 4. Mivel

$$|x+2|<4 \qquad\Longleftrightarrow\qquad -4<x+2<4 \qquad\Longleftrightarrow\qquad -6<x<2,$$

ezért a hatványsor $x\in(-6,2)$ esetén konvergens, $x\in\mathbb{R}\backslash[-6,2]$ esetén divergens. Ha $x\in\{-6;2\}$, akkor legyen

$$\xi_n := \left|\frac{(n!)^2}{(2n)!}\cdot(\pm 4)^n\right|\qquad (n\in\mathbb{N}).$$

Ekkor

$$\frac{\xi_{n+1}}{\xi_n} = \frac{4n^2+6n+4}{4n^2+6n+2} > 1,$$

így $0\le\xi_n<\xi_{n+1}$, tehát a $(\xi_n)\notin c_0$ /(ξ_n) nem nullsorozat/, következésképpen

$$\mathrm{KH}\left(\sum(a_n x^n)\right) = (-6,2).$$

$$3.\quad \sum\left(\frac{3^n+(-2)^n}{n}\cdot x^n\right)\qquad (x\in\mathbb{R});$$

Legyen

$$a_n := \frac{3^n+(-2)^n}{n}\qquad (n\in\mathbb{N}).$$

Ekkor

$$\lim\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right) = \lim\left(\left|\frac{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{3^n+(-2)^n}\right|\right) =$$

$$= \lim\left(\left|\frac{n}{n+1}\cdot\frac{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}{3^n+(-2)^n}\right|\right) = \lim\left(\left|\frac{n}{n+1}\cdot\frac{3-2\left(\frac{-2}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{-2}{3}\right)^n}\right|\right) = 3.$$

Így a hatványsor konvergenciasugara $\frac{1}{3}$: $|x|<\frac{1}{3}$ esetén konvergens, $|x|>\frac{1}{3}$ esetén pedig divergens.

$$|x| = \frac{1}{3} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \pm\frac{1}{3}.$$

Világos, hogy $x = \frac{1}{3}$ esetén a sor minorálható a $\sum_{n=1}\left(\frac{1}{3n}\right)$ divergens sorral, így maga is divergens, $x = -\frac{1}{3}$ esetén a sor a

$$\sum_{n=1}\frac{(-1)^n}{n} \qquad \text{és a} \qquad \sum_{n=1}\frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

konvergens sorok összege, így maga is konvergens. Tehát

$$\mathrm{KH}\left(\sum(a_n x^n)\right) = \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

4. $\sum\left(\frac{2^n}{n+3}\cdot(x-3)^n\right) \quad (x \in \mathbb{R});$

Legyen

$$a_n := \frac{2^n}{n+3} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{2}{\sqrt[n]{n+3}} \longrightarrow 2 \qquad (n \to \infty),$$

ui. az $n \to \infty$ határesetben

$$1 \longleftarrow \sqrt[n]{n} \leq \sqrt[n]{n+3} \leq \sqrt[n]{n+3n} = \sqrt[n]{4}\cdot\sqrt[n]{n} \longrightarrow 1\cdot 1 = 1.$$

Így a hatványsor konvergensiasugara $\frac{1}{2}$.

$$|x-3| < \frac{1}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad -\frac{1}{2} < x-3 < \frac{1}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{5}{2} < x < \frac{7}{2}.$$

Ez azt jelenti, hogy a hatványsor $x \in \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$ esetén konvergens, $x \in \mathbb{R}\setminus\left[\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right]$ esetén pedig divergens. Ha

- $x = \frac{5}{2}$, akkor a
$$\sum\left(\frac{(-1)^n}{n+3}\right)$$
sor a Leibniz-kritérium következtében konvergens;
- $x = \frac{7}{2}$, akkor a
$$\sum\left(\frac{1}{n+3}\right)$$

sor a Leibniz-kritérium következtében konvergens;

- $x = \frac{7}{2}$, akkor a

$$\sum \left(\frac{1}{n+3}\right)$$

sor divergens.

Mindez azt jelenti, hogy

$$\mathrm{KH}\left(\sum \left(a_n(x-3)^n\right)\right) = \left[\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right).$$

5. $\sum_{n=0} \left(\frac{n!}{\alpha^{n^2}} \cdot x^n\right) \quad (\alpha \in (1, +\infty),\ x \in \mathbb{R});$

Legyen

$$a_n := \frac{n!}{\alpha^{n^2}} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor

$$\lim\left(\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\right) = \lim\left(\frac{n!}{\alpha^{n^2}} \cdot \frac{\alpha^{(n+1)^2}}{(n+1)!}\right) = \lim\left(\frac{\alpha^{2n+1}}{n+1}\right) = +\infty,$$

így a hatványsor konvergenciasugara $+\infty$, tehát konvergenciahalmaza $\mathbb{R}$.
Megjegyezzük, hogy ha

$$a_n := \frac{n+1}{\alpha^{2n+1}} = \frac{1}{\alpha} \cdot n \left(\frac{1}{\alpha^2}\right)^n + \frac{1}{\alpha^{2n+1}} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor $\lim(a_n) = 0$, így a tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ index esetén fennálló $a_n > 0$ reláció következtében

$$\lim\left(\frac{\alpha^{2n+1}}{n+1}\right) = \lim\left(\frac{1}{a_n}\right) = +\infty.$$

6. $\sum_{n=1} \left(\frac{2^{n-1}}{2n-1} \cdot (3x-1)^n\right) \quad (x \in \mathbb{R});$

Látható, hogy

$$\sum_{n=1} \left(\frac{2^{n-1}}{2n-1} \cdot (3x-1)^n\right) = \sum_{n=1} \left(\frac{2^{n-1} \cdot 3^n}{2n-1} \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right)^n\right).$$

Ha
$$a_n := \frac{2^{n-1}\cdot 3^n}{2n-1} \qquad (n\in\mathbb{N}),$$
akkor
$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{2^n\cdot 3^n}{4n-2}} = \frac{6}{\sqrt[n]{4n-2}} \longrightarrow 6 \qquad (n\to\infty),$$
ui. az $n\to\infty$ határesetben
$$1 \longleftarrow \sqrt[n]{n} \le \sqrt[n]{4n-2} \le \sqrt[n]{10n} = \sqrt[n]{10}\cdot\sqrt[n]{n} \longrightarrow 1.$$
Így a hatványsor konvergenciasugara: $\frac{1}{6}$. Mivel
$$\left|x-\frac{1}{3}\right| < \frac{1}{6} \quad\Longleftrightarrow\quad -\frac{1}{6} < x-\frac{1}{3} < \frac{1}{6} \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{1}{6} < x < \frac{1}{2},$$
ezért a hatványsor $x\in\left(\frac{1}{6},\frac{1}{2}\right)$ esetén konvergens, $x\in\mathbb{R}\backslash\left[\frac{1}{6},\frac{1}{2}\right]$ esetén pedig divergens. Ha $x=\frac{1}{6}$, akkor a
$$\sum_{n=1}\left(\frac{(-1)^n}{4n-2}\right)$$
sor a Leibniz-kritérium következtében konvergens. Ha $x=\frac{1}{2}$, akkor a
$$\sum_{n=1}\left(\frac{2^{n-1}}{2n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = \sum_{n=1}\left(\frac{1}{4n-2}\right)$$
sor divergens, hiszen
$$\frac{1}{4n-2} \ge \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{n}.$$
Tehát
$$\mathrm{KH}\left(\sum_{n=1}\left(\frac{2^{n-1}}{2n-1}\cdot(3x-1)^n\right)\right) = \left[\frac{1}{6},\frac{1}{2}\right).$$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}\left(\frac{3^{-n}}{\sqrt{n^3+n+1}}\cdot(3x+1)^n\right) \quad (x\in\mathbb{R});$

Látható, hogy
$$\sum_{n=1}\left(\frac{3^{-n}}{\sqrt{n^3+n+1}}\cdot(3x+1)^n\right) = \sum_{n=1}\left(\frac{1}{\sqrt{n^3+n+1}}\cdot\left(x+\frac{1}{3}\right)^n\right).$$
Ha
$$a_n := \frac{1}{\sqrt{n^3+n+1}} \qquad (n\in\mathbb{N}),$$
akkor az $n\to\infty$ határátmenetben

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{\sqrt{(n+1)^3+(n+1)+1}}{\sqrt{n^3+n+1}} = \frac{\sqrt{n^3+3n^2+4n+3}}{\sqrt{n^3+n+1}} =$$

$$= \frac{\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}+\frac{3}{n^3}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}} \longrightarrow \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1}} = 1.$$

Így a hatványsor konvergenciasugara: 1. Mivel

$$\left|x+\frac{1}{3}\right| < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad -1 < x+\frac{1}{3} < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{4}{3} < x < \frac{2}{3},$$

ezért a hatványsor $x \in \left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$ esetén konvergens, $x \in \mathbb{R}\setminus\left[-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right]$ esetén pedig divergens. Ha $x = -\frac{4}{3}$, akkor a

$$\sum_{n=1}\left(\frac{1}{\sqrt{n^3+n+1}}\right)$$

konvergens, ui. a $\sum_{n=1}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ sor konvergens majoránsa:

$$\frac{1}{\sqrt{n^3+n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{n^{3/2}} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ha $x = \frac{2}{3}$, akkor a

$$\sum_{n=1}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^3+n+1}}\right)$$

sor a Leibniz-kritérium következtében konvergens, Tehát

$$\mathrm{KH}\left(\sum_{n=1}\left(\frac{3^{-n}}{\sqrt{n^3+n+1}}\cdot(3x+1)^n\right)\right) = \left[-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right). \quad \blacksquare$$

Feladat. Állítsuk elő a következő függvényeket vagy egy alkalmas leszűkítésüket 0-középpontú hatványsorok összegfüggvényeként:

1. $f(x) := \dfrac{1+x}{1-x^2}$ $(x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\})$;

Ha $x \in \mathbb{R}$: $|x| < 1$, akkor

$$\frac{1+x}{1-x^2} = (1+x)\cdot\frac{1}{1-x^2} = (1+x)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}x^n.$$

VAGY:

$$|x| < 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1+x}{1-x^2} = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

> 2. $f(x) := \dfrac{1-x}{1-x^2}$ $(x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\})$;

Ha $x \in \mathbb{R}$: $|x| < 1$, akkor

$$\frac{1-x}{1-x^2} = (1-x)\cdot\frac{1}{1-x^2} = (1-x)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} - \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n.$$

VAGY:

$$|x| < 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1-x}{1-x^2} = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n.$$

> 3. $f(x) := \dfrac{1}{1+x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$;

Világos, hogy bármely $x \in \mathbb{R}$, $|x^2| < 1$, azaz $x \in (-1,1)$ esetén

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-0)^n,$$

ahol

$$a_n := \begin{cases} (-1)^{n/2} & (n \equiv 0\ (2)), \\ \\ 0 & (n \equiv 1\ (2)). \end{cases}$$

> 4. $f(x) := \dfrac{x}{x^2-5x+6}$ $(x \in \mathbb{R}\setminus\{2,3\})$.

Mivel bármely $x \in \mathbb{R}\setminus\{2,3\}$ esetén

$$\frac{x}{x^2-5x+6} = \frac{x}{(x-2)(x-3)} = \frac{3(x-2)-2(x-3)}{(x-2)(x-3)} = \frac{3}{x-3} - \frac{2}{x-2} = -\frac{1}{1-\frac{x}{3}} + \frac{1}{1-\frac{x}{2}},$$

ezért tetszőleges

$$x \in \mathbb{R}, \qquad |x| < \min\{2,3\} = 2$$

számra

$$\frac{x}{x^2-5x+6} = -\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)x^n.$$

$$\frac{x}{(x-a)(x-(a+k))} = \frac{1}{k}\cdot\frac{kx}{(x-a)(x-(a+k))} = \frac{1}{k}\cdot\frac{(a+k)(x-a)-a(x-(a+k))}{(x-a)(x-(a+k))} =$$

$$= \frac{1}{k}\cdot\left\{\frac{(a+k)}{x-(a+k)}-\frac{a}{x-a}\right\}$$

(fentebb az $a := 2$, ill. $k := 1$ esettel volt dolgunk). ■

Feladat. Legyen a

$$\sum_{n=0}(a_n x^n) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

hatványsor konvergenciasugara: ρ, összegfüggvénye f. Mutassuk meg, hogy ekkor fennáll a következő egyenlőség!

$$\frac{f(x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty}(a_0+\ldots+a_n)\,x^n \qquad (x \in \mathbb{R}:\ |x| < \min\{1,\rho\}).$$

Ha $x \in \mathbb{R}$: $|x| < \min\{1,\rho\}$, akkor

$$\frac{f(x)}{1-x} = f(x)\cdot\frac{1}{1-x} = \left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}a_k\cdot x^k\cdot x^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_k\right)x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(a_0+\ldots+a_n)\,x^n. \quad ■$$

Feladat. Adjunk meg olyan $R > 0$ valós számot és (u_n) sorozatot, amelyekkel

$$\frac{2x+4}{(x-3)(3x+1)} = \sum_{n=0}^{\infty}u_n\cdot x^n \qquad (x \in (-R,R))$$

teljesül!

testzőleges $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1/3;3\}$ esetén <-tetszőleges

$$\frac{2x+4}{(x-3)(3x+1)} = \frac{(3x+1)-(x-3)}{(x-3)(3x+1)} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{3x+1}$$

és

$$\frac{1}{x-3} = \frac{1}{3\left(1-\frac{x}{3}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{x}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} x^n \qquad (x \in (-3,3)),$$

ill.

$$\frac{1}{3x+1} = \frac{1}{1-(-3x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-3x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-3)^n x^n \qquad \left(|x| < \frac{1}{3}\right).$$

Így bármely

$$x \in (-3,3) \cap \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

esetén

$$\frac{2x+4}{(x-3)(3x+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3^{n+1}} - (-3)^n\right) x^n.$$

Ennélfogva

$$R = \frac{1}{3} \qquad \text{és} \qquad u_n = \frac{1}{3^{n+1}} - (-3)^n \quad (n \in \mathbb{N}). \quad \blacksquare$$

Feladat. Lássuk be, hogy bármely $x, y \in \mathbb{R}$ esetén fennállnak az alábbi egyenlőségek!

1. $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$;

Bármely $x, y \in \mathbb{R}$ számra

$$\begin{aligned}
\exp(x)\exp(y) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} \frac{x^l}{l!} \cdot \frac{y^{k-l}}{(k-l)!} = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^{k} k! \cdot \frac{x^l}{l!} \cdot \frac{y^{k-l}}{(k-l)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} x^l \cdot y^{k-l} = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+y)^k}{k!} = \exp(x+y).
\end{aligned}$$

2. $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$;

Bármely $x \in \mathbb{R}$ számra

$$\exp(x)\exp(-x) = \exp(x + (-x)) = \exp(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{0^k}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{0^k}{k!} = 1 + 0 = 1.$$

3. $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$;

Bármely $x \in \mathbb{R}$ számra

$$\begin{aligned}
2\sin(x)\cos(x) &= 2\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\right) = \\
&= 2\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{k}(-1)^l \frac{x^{2l+1}}{(2l+1)!}\cdot(-1)^{(k-l)}\frac{x^{2(k-l)}}{(2(k-l))!} = \\
&= 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}\sum_{l=0}^{k}(2k+1)!(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2l+1)!\cdot(2k-2l)!} = \\
= 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\sum_{l=0}^{k}\binom{2k+1}{2l+1}x^{2k+1} &= 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}2^{2k}x^{2k+1} = \\
= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2x)^{2k+1}}{(2k+1)!} &= \sin(2x),
\end{aligned}$$

hiszen

$$\begin{aligned}
\sum_{l=0}^{k}\binom{2k+1}{2l+1} &= \binom{2k+1}{1} + \sum_{l=1}^{k-1}\left\{\binom{2k}{2l+1} + \binom{2k}{2l}\right\} + \binom{2k+1}{2k+1} = \\
&= 2k+1+\sum_{l=2}^{2k-1}\binom{2k}{l} + 1 = \\
&= 2k+2+\sum_{l=0}^{2k}\binom{2k}{l} - \binom{2k}{2k} - \binom{2k}{1} - \binom{2k}{0} = \\
&= 2k+2+2^{2k}-1-2k-1 = 2^{2k}.
\end{aligned}$$

4. $\cos^2(x) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$;

Bármely $x \in \mathbb{R}$ számra

$$\begin{aligned}
\cos^2(x) &= \cos(x)\cos(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}\right) = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{k}(-1)^l\frac{x^{2l}}{(2l)!}(-1)^{k-l}\frac{x^{2(k-l)}}{(2(k-l))!} = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}\sum_{l=0}^{k}(2k)!(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2l)!\cdot(2(k-l))!} = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}\sum_{l=0}^{k}\binom{2k}{2l} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}\cdot\sum_{l=0}^{k}\binom{2k}{2l} = \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}\cdot 2^{2k-1} = 1 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}\cdot 2^{2k} = \\
&= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2x)^{2k}}{(2k)!} = \frac{1+\cos(2x)}{2},
\end{aligned}$$

hiszen

$$\begin{aligned}
\sum_{l=0}^{k}\binom{2k}{2l} &= \binom{2k}{0} + \sum_{l=1}^{k-1}\binom{2k}{2l} + \binom{2k}{2k} = 1 + \sum_{l=1}^{k-1}\left\{\binom{2k-1}{2l} + \binom{2k-1}{2l-1}\right\} + 1 = \\
&= 1 + \sum_{l=1}^{2k-2}\binom{2k-1}{l} + 1 = \sum_{l=0}^{2k-1}\binom{2k-1}{l} = 2^{2k-1}.
\end{aligned}$$

5. $\sin^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$;

Bármely $x \in \mathbb{R}$ számra

$$\sin^2(x) = \sin(x)\sin(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{k}(-1)^l\frac{x^{2l+1}}{(2l+1)!}(-1)^{k-l}\frac{x^{2(k-l)+1}}{(2(k-l)+1)!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+2)!}\sum_{l=0}^{k}(2k+2)!(-1)^k\frac{x^{2k+2}}{(2l+1)!\cdot(2(k-l)+1)!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!}\sum_{l=0}^{k}\binom{2k+2}{2l+1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!}\sum_{l=0}^{k}\binom{2k+2}{2l+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!}2^{2k+1} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!}2^{2k+2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2x)^{2k+2}}{(2k+2)!} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{(2x)^{2k}}{(2k)!} = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{(2x)^{2k}}{(2k)!} =$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2x)^{2k}}{(2k)!} + \frac{1}{2} = \frac{1-\cos(2x)}{2},$$

hiszen

$$\sum_{l=0}^{k}\binom{2k+2}{2l+1} = \binom{2k+2}{1} + \sum_{l=1}^{k-1}\binom{2k+2}{2l+1} + \binom{2k+2}{2k+1} =$$

$$= 2k+2+\sum_{l=1}^{k-1}\left\{\binom{2k+1}{2l+1}+\binom{2k+1}{2l}\right\}+2k+2 =$$

$$= \quad 4k+4+\sum_{l=2}^{2k-1}\binom{2k+1}{l} = 4k+4+$$

$$+\sum_{l=0}^{2k+1}\binom{2k+1}{l}-\binom{2k+1}{0}-\binom{2k+1}{1}-\binom{2k+1}{2k}-\binom{2k+1}{2k+1}=$$

$$= \quad 4k+4+2^{2k+1}-1-(2k+1)-(2k+1)-1=2^{2k+1}.$$

6. $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1.$

Bármely $x \in \mathbb{R}$ számra

$$\cos^2(x)+\sin^2(x)=\frac{1+\cos(2x)}{2}+\frac{1-\cos(2x)}{2}=\frac{2}{2}=1.$$

7. $\cos(2x)=\cos^2(x)-\sin^2(x).$

Bármely $x \in \mathbb{R}$ számra

$$\cos^2(x)-\sin^2(x)=\frac{1+\cos(2x)}{2}-\frac{1-\cos(2x)}{2}=\frac{2\cos(2x)}{2}=\cos(2x). \quad \blacksquare$$

Feladat. Írjuk fel az alábbi függvényeket 0 középpontú hatványsor összegeként!

1. $f(x) := e^{-x^2/2} \quad (x \in \mathbb{R}),$

Tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{x^2}{3}\right)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(-2)^n n!}\cdot x^{2n}.$$

2. $f(x) := \sin^2(x) \quad (x \in \mathbb{R})$,

Mivel bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2},$$

ezért

$$\begin{aligned}
\sin^2(x) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{4^n x^{2n}}{(2n)!} = \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n}{-2} \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} 2 \cdot (-4)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot (-4)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot (-4)^{n-1}}{(2n)!} \cdot x^{2n}.
\end{aligned}$$

3. $f(x) := \cos^2(x) \quad (x \in \mathbb{R})$.

Mivel bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2},$$

ezért

$$\begin{aligned}
\cos^2(x) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^{2n} x^{2n}}{(2n)!} = \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}(-4)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-4)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Házi feladat. Milyen $x, \alpha_k, \beta_k, \gamma_k \in \mathbb{R}$ esetén igazak az alábbi egyenlőségek?

1. $\dfrac{1}{2-x} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k;$

Bármely $x \in \mathbb{K}\colon |x| < 2$ esetén

$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} x^k.$$

2. $\dfrac{1}{2-x} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \beta_k x^{-k};$

Tetszőleges $x \in \mathbb{K}\colon |x| > 2$ esetén

$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{-1}{1-\frac{2}{x}} = \frac{-1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} -2^k x^{-(k+1)}.$$

3. $\dfrac{x}{x^2-x-2} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \gamma_k (x-1)^k.$

Ha $x \in \mathbb{K}\colon |x-1| < \min\{1, 2\} = 1$, akkor

$$\frac{x}{x^2-x-2} = \frac{x}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} =$$

$$= \frac{(A+B)x + A - 2B}{(x+1)(x-2)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x-2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+1} =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x-1-1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x-1+2} =$$

$$= \frac{-2}{3} \cdot \frac{1}{1-(x-1)} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2-(1-x)} =$$

$$= \frac{-2}{3} \cdot \frac{1}{1-(x-1)} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-\frac{1-x}{2}} =$$

$$= \frac{-2}{3} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (x-1)^k + \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1-x}{2}\right)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k}{6 \cdot 2^k} - \frac{2}{3}\right)(x-1)^k. \quad \blacksquare$$