Emlékeztető. Legyen $\emptyset \neq \mathcal{H} \subset \mathbb{R}$. Azt mondtuk, hogy

1. a $\mathcal{H}$ halmaz **alulról korlátos**, ha van olyan $k \in \mathbb{R}$, hogy bármely $x \in \mathcal{H}$ esetén $x \geq k$. Az ilyen k számot a $\mathcal{H}$ halmaz **alsó korlát**jának neveztük.
2. a $\mathcal{H}$ halmaz **felülről korlátos**, ha van olyan $K \in \mathbb{R}$, hogy bármely $x \in \mathcal{H}$ esetén $x \leq K$. Az ilyen K számot a $\mathcal{H}$ halmaz **felső korlát**jának neveztük.
3. a $\mathcal{H}$ halmaz **korlátos**, ha alulról és felülről is korlátos.

Emlékeztető. Legyen $\emptyset \neq \mathcal{H} \subset \mathbb{R}$. Azt mondtuk, hogy a $\mathcal{H}$ halmaznak **van**

- **maximuma**, ha
$$\exists \alpha \in \mathcal{H}\ \forall x \in \mathcal{H}: \qquad x \leq \alpha.$$
Ekkor α-t a H halmaz **maximumának** nevezzük és a $\max(\mathcal{H})$ szimbólummal jelöljük.
- **minimuma**, ha
$$\exists \beta \in \mathcal{H}\ \forall x \in \mathcal{H}: \qquad x \geq \beta.$$
Ekkor β-t a $\mathcal{H}$ halmaz **minimumának** nevezzük és a $\min(\mathcal{H})$ szimbólummal jelöljük.

Tétel. Legyen $\emptyset \neq \mathcal{H} \subset \mathbb{R}$. Ha a $\mathcal{H}$ halmaz

1. felülről korlátos, akkor, akkor felső korlátai között van legkisebb: az
$$\mathcal{F} := \{K \in \mathbb{R} : \quad K \text{ felső korlátja } \mathcal{H}\text{-nak}\}$$
halmaznak van minimuma.
2. alulról korlátos, akkor, akkor alsó korlátai között van legnagyobb: az
$$\mathcal{A} := \{k \in \mathbb{R} : \quad k \text{ alsó korlátja } \mathcal{H}\text{-nak}\}$$
halmaznak van maximuma.

Definíció.

1. A felülről korlátos $\emptyset \neq \mathcal{H} \subset \mathbb{R}$ számhalmaz legkisebb felső korlátját a számhalmaz **felső határ**ának, más szóval **szuprémum**ának vagy **lényeges felső korlát**jának nevezzük és a $\sup(\mathcal{H})$ szimbólummal jelöljük: $\sup(\mathcal{H}) := \min(\mathcal{F}) \in \mathbb{R}$.
2. Az alulról korlátos $\emptyset \neq \mathcal{H} \subset \mathbb{R}$ számhalmaz legnagyobb alsó korlátját a számhalmaz **alsó határ**ának, más szóval **infimum**ának vagy **lényeges alsó korlát**jának nevezzük és az $\inf(\mathcal{H})$ szimbólummal jelöljük: $\inf(\mathcal{H}) := \max(\mathcal{A}) \in \mathbb{R}$.

Példák.

1. A
$$\mathcal{H} := \left\{\frac{1}{n} \in \mathbb{R} :\ n \in \mathbb{N}\right\}$$
halmaz alulról is és felülről is korlátos, ui. a 0, ill. az 1 alsó, ill. felső korlátja $\mathcal{H}$-nak:
$$0 < \frac{1}{n} \leq 1 \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

2. A
$$\mathcal{H} := \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \in \mathbb{R} :\ n \in \mathbb{N}\right\}$$
halmaz alulról is és felülről is korlátos, ui. a 2, ill. a 3 alsó, ill. felső korlátja $\mathcal{H}$-nak:
$$2 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3 \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

3. A
$$\mathcal{H} := \left\{a+\frac{1}{a} \in \mathbb{R} :\ 0 < a \in \mathbb{R}\right\}$$
halmaz alulról korlátos, ui. 2 alsó korlátja $\mathcal{H}$-nak:
$$a+\frac{1}{a} = 2 \cdot \frac{a+\frac{1}{a}}{2} \geq 2 \cdot \sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 2 \qquad (0 < a \in \mathbb{R}).$$

4. A
$$\mathcal{H} := \left\{\left|\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right| \in \mathbb{R} :\ a, b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\right\}$$
halmaz alulról korlátos, ui. 2 alsó korlátja $\mathcal{H}$-nak: ha $ab > 0$, akkor $\frac{a}{b}, \frac{b}{a} > 0$, így
$$\frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{b}{a}} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2;$$
ha pedig $ab < 0$, akkor $\frac{a}{b}, \frac{b}{a} < 0$, így
$$\frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{b}{a}} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{a}{b}+\frac{b}{a} \leq -2.$$

5. A
$$\mathcal{H} := \left\{\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + \left|\frac{x-1}{x+1}\right| \in \mathbb{R} :\ x \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}\right\}$$

halmaz alulról korlátos, ui. 2 alsó korlátja $\mathcal{H}$-nak: az

$$a := |x+1|, \qquad \text{ill.} \qquad b := |x-1|$$

helyettesítéssel látható, hogy bármely $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ esetén

$$\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + \left|\frac{x-1}{x+1}\right| = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2,$$

6. A

$$\mathcal{H} := \left\{ \operatorname{tg}(\alpha) + \operatorname{ctg}(\alpha) \in \mathbb{R} : \; \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \right\}$$

halmaz alulról korlátos, ui. 2 alsó korlátja $\mathcal{H}$-nak:

$$\operatorname{tg}(\alpha) + \operatorname{ctg}(\alpha) = \operatorname{tg}(\alpha) + \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha)} \geq 2 \qquad \left(\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right).$$

7. A

$$\mathcal{H} := \left\{ \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \in \mathbb{R} : \; x \in \mathbb{R} \right\}$$

halmaz alulról korlátos, ui. a 2 alsó korlátja $\mathcal{H}$-nak:

1. módszer. tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^2+1+1}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2;$$

2. módszer. bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2+1+1 \geq 2\sqrt{x^2+1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left(\sqrt{x^2+1}-1\right)^2 \geq 0.$$

8. A

$$\mathcal{H} := \left\{ \frac{x^2}{1+x^4} \in \mathbb{R} : \; x \in \mathbb{R} \right\}$$

halmaz felülről korlátos, ui. az $\frac{1}{2}$ felső korlátja $\mathcal{H}$-nak:

1. módszer. ha $x = 0$, akkor az egyenlőtlenség triviálisan teljesül, ha pedig pedig $0 \neq x \in \mathbb{R}$, akkor

$$\frac{x^2}{1+x^4} = \frac{1}{\frac{1}{x^2} + x^2} \leq \frac{1}{2};$$

2. módszer. minden $x \in \mathbb{R}$ számra

$$\frac{x^2}{1+x^4} \leq \frac{1}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2x^2 \leq 1 + x^4 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x^2-1)^2 \geq 0.$$

9. A

$$\mathcal{H} := \left\{ 2x^4 - 2x^3 - x^2 + 1 \in \mathbb{R} : \; x \in \mathbb{R} \right\}$$

halmaz alulról korlátos, ui. a 0 alsó korlátja $\mathcal{H}$-nak:

$$2x^4-2x^3-x^2+1\geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x^2-1)^2+(x^2-x)^2\geq 0 \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

10. A
$$\mathcal{H}:=\{a+b-ab\in\mathbb{R}:\ a,b\in\mathbb{R}\}$$
halmaz alulról is és felülről is korlátos, ui. a 0, ill. az 1 alsó, ill. felső korlátja $\mathcal{H}$-nak, hiszen hab $\in(0,1)$, akkor $1-b>0$, így bármely $a\in(0,1)$ esetén
$$0<a(1-b)<1-b \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0<a+b-ab<1.$$

11. A
$$\mathcal{H}:=\left\{ab-5a^2-3b^2\in\mathbb{R}:\ a,b\in\mathbb{R}\right\}$$
halmaz felülről korlátos, ui. a 0 felső korlátja $\mathcal{H}$-nak:
$$ab-5a^2-3b^2\leq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -ab-4a^2-4b^2-(a-b)^2\leq 0 \qquad (a,b\in\mathbb{R}).$$

12. A
$$\mathcal{H}:=\left\{a^2+b^2-ab-a-b+1\in\mathbb{R}:\ a,b\in\mathbb{R}\right\}$$
halmaz felülről alulról, ui. a 0 alsó korlátja $\mathcal{H}$-nak:
$$a^2+b^2-ab-a-b+1\geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2\geq 0 \qquad (a,b\in\mathbb{R}).$$

13. A
$$\mathcal{H}:=\left\{\frac{(a+b)(b+c)(a+c)}{abc}\in\mathbb{R}:\ 0<a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$$
halmaz alulról korlátos, ui. a $\frac{128}{65}$ alsó korlátja $\mathcal{H}$-nak:
$$\begin{aligned}\frac{(a+b)(b+c)(a+c)}{abc} &= \frac{a+b}{a}\cdot\frac{b+c}{b}\cdot\frac{a+c}{c}=\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right)=\\ &= \left(1+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{c}{a}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right)=1+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{a}{b}+1=\\ &= 2+\underbrace{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}_{\geq 2}+\underbrace{\frac{b}{c}+\frac{c}{b}}_{\geq 2}+\underbrace{\frac{a}{c}+\frac{c}{a}}_{\geq 2}\geq 8.\end{aligned}$$
és
$$8\geq\frac{128}{65} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 520\geq 128.$$

14. A
$$\mathcal{H}:=\left\{\left(1+\frac{x}{y}\right)^2+\left(1+\frac{y}{z}\right)^2+\left(1+\frac{z}{x}\right)^2\in\mathbb{R}:\ 0<x,y,z\in\mathbb{R}\right\}$$
halmaz alulról korlátos, ui. a 12 alsó korlátja $\mathcal{H}$-nak: bármely $a,b\in(0,+\infty)$ esetén

$$\frac{1+\frac{a}{b}}{2} \geq \sqrt{\frac{a}{b}},$$

ezért

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^2 \geq 4\cdot\frac{a}{b}.$$

A mértani és a számtani közép közötti egyenlőtlnség felhasználásával így azt kapjuk, hogy

$$\left(1+\frac{x}{y}\right)^2+\left(1+\frac{y}{z}\right)^2+\left(1+\frac{z}{x}\right)^2 \geq 4\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right) \geq 4\cdot 3\cdot\sqrt[3]{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{x}} = 12. \qquad \blacksquare$$

Feladat. Fogalmazzuk meg pozitív állítás formájában azt, hogy a $\mathcal{H}\subset\mathbb{R}$ halmaz alulról, ill. felülről nem korlátos!

A definíció szerint valamely $\emptyset \neq \mathcal{H}\subset\mathbb{R}$ halmaz

alulról nem korlátos, ha

$$\neg\left(\exists k\in\mathbb{R}\quad \forall x\in\mathcal{H}: \qquad x\geq k\right) \qquad\Longleftrightarrow\qquad \left(\forall k\in\mathbb{R}\quad \exists x\in\mathcal{H}: \qquad x<k\right);$$

felülről nem korlátos, ha

$$\neg\left(\exists K\in\mathbb{R}\quad \forall x\in\mathcal{H}: \qquad x\leq K\right) \qquad\Longleftrightarrow\qquad \left(\forall K\in\mathbb{R}\quad \exists x\in\mathcal{H}: \qquad x>K\right).$$

Feladat. Igazoljuk, hogy a

$$\mathcal{H} := \left\{\frac{x^2+2x+3}{x+1}\in\mathbb{R}:\ 1\leq x\in\mathbb{R}\right\}$$

halmaz felülről nem korlátos!

Mivel bármely $1\leq x\in\mathbb{R}$ esetén

$$\frac{x^2+2x+3}{x+1} \overset{\boxed{x\geq 1}}{\geq} \frac{x^2}{x+1} \geq \frac{x^2}{x+x} = \frac{x^2}{2x} = \frac{x}{2},$$

ezért tetszőleges $0<K\in\mathbb{R}$ esetén igaz az

$$\frac{x}{2}>K \qquad\Longrightarrow\qquad \frac{x^2+2x+3}{x+1}>K$$

implikáció. Következésképpen az

$$x := 2K + 1 \in [1, +\infty)$$

jó választás. ■

Példák.

1. A
$$\mathcal{H} := \left\{ \frac{1}{n} \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N} \right\}$$
halmazn esetén $\max(H) = 1$, ui. $1 \in \mathcal{H}$ $(n = 1)$ és bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $\frac{1}{n} \leq 1$. A $\mathcal{H}$ halmaznak nincsen minimuma, hiszen bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $(n+1)$-re
$$\mathcal{H} \ni \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \in \mathcal{H} \qquad (\text{ui.} \quad \Longleftrightarrow \quad n+1 > n).$$

2. A
$$\mathcal{H} := \left\{ 1 - \frac{1}{n} \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N} \right\}$$
halmazn esetén $\min(\mathcal{H}) = 0$, ui. $0 \in \mathcal{H}$ $(n = 1)$ és bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $0 \leq 1 - \frac{1}{n}$. A $\mathcal{H}$ halmaznak nincsen maximuma, hiszen bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $(n+1)$-re
$$\mathcal{H} \ni 1 - \frac{1}{n+1} > 1 - \frac{1}{n} \in \mathcal{H} \qquad (\text{ui.} \quad \Longleftrightarrow \quad n+1 > n). \quad ■$$

A következő, alapvető fontosságú tétel azt mondja ki, hogy minden (nem-üres)

- felülről korlátos halmaz felső korlátai között van legkisebb, azaz a **felső korlátok halmazának van minimuma**;
- alulról korlátos halmaz alsó korlátai között van legnagyobb, azaz az **alsó korlátok halmazának van maximuma**.

Példák.

1. A $\mathcal{H} := [-1, 1]$ halmaz esetében
$$\inf(\mathcal{H}) = \min(\mathcal{H}) = -1, \qquad \sup(\mathcal{H}) = \max(\mathcal{H}) = 1;$$

2. A $H := (-1, 1]$ halmaz esetében
$$\inf(\mathcal{H}) = -1, \ \nexists \min(\mathcal{H}), \qquad \sup(\mathcal{H}) = \max(\mathcal{H}) = 1.$$

   Megjegyezzük, hogy a $\nexists \min(\mathcal{H})$ állítás a következőképpen látható be. Ha lenne $\mathcal{H}$-nak minimuma: $\xi \in \mathcal{H} \in (-1, 1]$, akkor az
   $$\eta := \frac{-1 + \xi}{2} < \xi$$
   számra $\eta \in (-1, 1] = \mathcal{H}$ teljesülne, ami nem lehetséges.

Megjegyzések.

1. Világos, hogy

   (a) $\exists \min(\mathcal{H}) \iff \inf(\mathcal{H}) \in \mathcal{H}$. Ebben az esetben $\inf(\mathcal{H}) = \min(\mathcal{H})$.

   (b) $\exists \max(\mathcal{H}) \iff \sup(\mathcal{H}) \in \mathcal{H}$. Ebben az esetben $\sup(\mathcal{H}) = \max(\mathcal{H})$.

2. Az $\inf(\mathcal{H}) = \alpha$ állítás azt jelenti, hogy

   - α a $\mathcal{H}$ halmaz alsó korlátja:
   $$\forall x \in \mathcal{H}: \qquad x \geq \alpha,$$
   - bármely α-nál nagyobb szám már nem alsó korlátja $\mathcal{H}$-nak:
   $$(\forall a > \alpha\ \exists x \in \mathcal{H}: \quad x < a) \qquad \iff \qquad (\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in \mathcal{H}: \quad x < \alpha + \varepsilon).$$

3. A $\sup(\mathcal{H}) = \beta$ állítás azt jelenti, hogy

   - β a $\mathcal{H}$ halmaz ferlső korlátja:
   $$\forall x \in \mathcal{H} \qquad x \leq \beta,$$
   - bármely β-nál kisebb szám $\mathcal{H}$-nak már nem felső korlátja:
   $$(\forall b < \beta\ \exists x \in \mathcal{H}: \quad x > b) \qquad \iff \qquad (\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in \mathcal{H}: \quad x > \beta - \varepsilon).$$

4. Célszerű kiterjeszteni az alsó és felső határ fogalmát nem korlátos halmazokra. Ehhez kibővítjük a valós számok halmazát két elemmel, amelyeket **plusz**, ill. **mínusz végtelen**nek nevezünk és a $+\infty$, $-\infty$ szimbólumokkal jelölünk. Szokás ezeket **ideális elem**eknek is nevezni, és ugyanúgy, mint a valós számok esetében a $+$ előjelet gyakran elhagyjuk. A valós számok ezekkel bővített halmazára az
   $$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\} := \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$$
   jelölést használjuk. Ha valamely halmaz felülről nem korlátos, akkor azt fogjuk mondani, hogy felső határa $+\infty$, ha pedig alulról nem korlátos, akkor definició szerint alsó határa legyen $-\infty$.

5. A $<$ relációt terjesszük ki a valós számok ideális elemekkel bővített $\overline{\mathbb{R}}$ halmazára az alábbiak szerint. Legyen
   $$\forall x \in \mathbb{R}: \quad -\infty < x < +\infty.$$
   A most bevezetett szóhasználattal élve azt mondhatjuk, hogy egy halmaz pontosan akkor felülről korlátos, ha
   $$\sup(H) < +\infty,$$
   és pontosan akkor alulról korlátos, ha
   $$\inf(H) > -\infty.$$

6. A korábbról ismert ún. **véges intervallum**ok mellett használni fogjuk az alábbi ún. **végtelen intervallum**okat is:
   $$(a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R}: \ x > a\}, \qquad [a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R}: \ x \geq a\},$$
   $$(-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R}: \ x < b\}, \qquad (-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R}: \ x \leq b\}.$$

Ezekkel összhangban a valós számok és az ideális elemekkel kibővített valós számok halmazát a

$$(-\infty, \infty) := \mathbb{R}, \qquad [-\infty, \infty] := \overline{\mathbb{R}}$$

végtelen intervallumokkal is jelöljük.

Feladat. Vizsgáljuk az $\mathcal{H}$ halmazt korlátosság szempontjából! Határozzuk meg $\inf \mathcal{H}$-t és $\sup \mathcal{H}$-t! Van-e a $\mathcal{H}$ halmaznak legkisebb, ill. legnagyobb eleme?

1. $\mathcal{H} := \left\{ \frac{1}{x} \in \mathbb{R} : \ x \in (0, 1] \right\};$

- Ha x elég közel van 0-hoz, akkor $\frac{1}{x}$ értéke igen nagy. Így sejthető, hogy a $\mathcal{H}$ halmaz felülről nem korlátos. Valóban, tetszőleges $K \geq 1$ számhoz van olyan $h \in \mathcal{H}$, hogy $h > K$, hiszen $h := \frac{1}{x}$:

$$x \in \left(0, \frac{1}{K}\right) \qquad \text{esetén} \qquad h = \frac{1}{x} > \frac{1}{\frac{1}{K}} = K.$$

  Ezért

$$\sup(\mathcal{H}) = +\infty, \qquad \text{ill.} \qquad \nexists \max(\mathcal{H}).$$

- A $\mathcal{H}$ halmaz alulról korlátos, ugyanis 0 alsó korlátja, sőt minden $x \in (0, 1]$ esetén

$$\frac{1}{x} \geq \frac{1}{1} = 1,$$

  ezért az 1 is alsó korlát.

  - $\inf(\mathcal{H}) = 1$, sőt $1 \in \mathcal{H}$, így $\min(\mathcal{H}) = 1$.

Összefoglalva: a $\mathcal{H}$ halmaz alulról korlátos, felülről nem korlátos,

$$\inf(\mathcal{H}) = \min(\mathcal{H}) = 1, \qquad \sup(\mathcal{H}) = +\infty.$$

2. $\mathcal{H} := \left\{\frac{5n+3}{8n+1} \in \mathbb{R} : \; n \in \mathbb{N}_0\right\};$

- Világos, hogy bármely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$\frac{5n+3}{8n+1} = \frac{5}{8} \cdot \frac{n+\frac{3}{5}}{n+\frac{1}{8}} = \frac{5}{8} \cdot \frac{n+\frac{1}{8}+\frac{3}{5}-\frac{1}{8}}{n+\frac{1}{8}} = \frac{5}{8} + \frac{5}{8} \cdot \frac{19}{40} \cdot \frac{1}{n+\frac{1}{8}} = \frac{5}{8} + \frac{19}{8} \cdot \frac{1}{8n+1} > \frac{5}{8}$$

  vagy

$$\begin{aligned}\frac{5n+3}{8n+1} &= \frac{5}{8} \cdot \frac{40n+24}{40n+5} = \frac{5}{8} \cdot \frac{40n+5+19}{40n+5} = \frac{5}{8} \cdot \left(1 + \frac{19}{40n+5}\right) = \\ &= \frac{5}{8} + \frac{5}{8} \cdot \frac{19}{40n+5} = \frac{5}{8} + \frac{19}{8} \cdot \frac{1}{8n+1} > \frac{5}{8}.\end{aligned}$$

- Mivel nagy n-ekre $\frac{1}{8n+1}$ igen kicsi, ezért sejthető, hogy $\mathcal{H}$-nak nincsen $\frac{5}{8}$-nál nagyobb alsó korlátja:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}_0 : \qquad \mathcal{H} \ni \frac{5}{8} + \frac{19}{8} \cdot \frac{1}{8N+1} < \frac{5}{8} + \varepsilon.$$

  Ekkor

$$\frac{5}{8} + \frac{19}{8} \cdot \frac{1}{8N+1} < \frac{5}{8} + \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad N > \frac{1}{8}\left(\frac{19}{8\varepsilon} - 1\right)$$

  és

$$N := \max\left\{0, \left[\left(\frac{19}{8\varepsilon} - 1\right)\frac{1}{8}\right] + 1\right\}$$

  pl. ilyen. Tehát $\inf(\mathcal{H}) = \frac{5}{8}$.

- $\nexists \min(\mathcal{H})$, mivel $\forall h \in \mathcal{H}$: $h > \frac{5}{8} = \inf(\mathcal{H})$.
- Mivel bármely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$\frac{5n+3}{8n+1} = \frac{5}{8} + \frac{19}{8} \cdot \frac{1}{8n+1} \leq \frac{5}{8} + \frac{19}{8} \cdot \frac{1}{8 \cdot 0 + 1} = 3,$$

  ezért

$$3 = \max(\mathcal{H}) = \sup(\mathcal{H}).$$

Összefoglalva: a $\mathcal{H}$ halmaz alulról és felülről is korlátos,

$$\inf(\mathcal{H}) = \frac{5}{8}, \quad \nexists \min(\mathcal{H}), \qquad \sup(\mathcal{H}) = \max(\mathcal{H}) = 3.$$

3. $\mathcal{H} := \left\{ \frac{x+1}{2x+3} \in \mathbb{R} :\ 0 \leq x \in \mathbb{R} \right\};$

- Világos, hogy bármely $0 \leq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{x+1}{2x+3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x+2}{2x+3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x+3-1}{2x+3} = \frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2x+3}\right) = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2x+3}.$$

- Mivel

$$\mathcal{H} \ni \frac{x+1}{2x+3} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2x+3} \geq \frac{1}{2}-\frac{1}{4\cdot 0+6} = \frac{1}{2}-\frac{1}{6} = \frac{1}{3},$$

  ezért

$$\inf(\mathcal{H}) = \min(\mathcal{H}) = \frac{1}{3}.$$

- Mivel bármely $0 \leq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{1}{2x+3} > 0,$$

  ezért

$$\mathcal{H} \ni \frac{x+1}{2x+3} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2x+3} < \frac{1}{2},$$

  azaz $\frac{1}{2}$ felső korlátja $\mathcal{H}$-nak.

- Mivel nagy x-ekre $\frac{1}{2x+3}$ igen kicsi, ezért sejthető, hogy $\mathcal{H}$-nak nincsen $\frac{1}{2}$-nél kisebb felső korlátja:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists x \in [0,+\infty): \qquad \mathcal{H} \ni \frac{x+1}{2x+3} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2x+3} > \frac{1}{2}-\varepsilon.$$

  Ez azzal egyenértékű, hogy $\frac{1}{4x+6} < \varepsilon$, azaz hogy $\frac{1}{\varepsilon} - 6 < 4x$. Ilyen $x \geq 0$ nyilván létezik. Következésképpen $\sup(\mathcal{H}) = \frac{1}{2}$.

- $\nexists \max(\mathcal{H})$, mivel $\frac{1}{2} \notin \mathcal{H}$.

Összefoglalva: a $\mathcal{H}$ halmaz alulról és felülről is korlátos,

$$\inf(\mathcal{H}) = \min(\mathcal{H}) = \frac{1}{3}, \qquad \sup(\mathcal{H}) = \frac{1}{2}, \quad \nexists \max(\mathcal{H}).$$

4. $\mathcal{H} := \left\{ \frac{2x+3}{3x+1} \in \mathbb{R} :\ x \in \mathbb{Z} \right\};$

- Világos, hogy bármely $x \in \mathbb{Z}$ esetén

$$\frac{2x+3}{3x+1} = \frac{2}{3}\cdot\frac{6x+9}{6x+2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{6x+2+7}{6x+2} = \frac{2}{3}\cdot\left(1+\frac{7}{6x+2}\right) = \frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{6x+2} = \frac{2}{3}+\frac{7}{3}\cdot\frac{1}{3x+1}.$$

- Ha $x < 0$, akkor $\frac{7}{3} \cdot \frac{1}{3x+1} < 0$, míg $x \geq 0$ esetén
$$0 \leq \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{3x+1} \leq \frac{7}{3}.$$
Ezért
$$\frac{2x+3}{3x+1} \leq \frac{2}{3} + \frac{7}{3} = 3$$
és $x = 0$-ra
$$\frac{2 \cdot 0 + 3}{3 \cdot 0 + 1} = 3.$$
Tehát a $\mathcal{H}$ halmaznak van maximuma és $\max(\mathcal{H}) = 3$, következésképpen $\sup(\mathcal{H}) = 3$.

- Ha $x = -1$, akkor
$$\frac{2(-1)+3}{3(-1)+1} = -\frac{1}{2}.$$
Lássuk be, hogy
$$\frac{2x+3}{3x+1} \geq -\frac{1}{2} \qquad (x \in \mathbb{Z})$$
teljesül. Ui. ez azzal ekvivalens, hogy
$$\frac{2x+3}{3x+1} + \frac{1}{2} = 7 \cdot \frac{x+1}{3x+1} \geq 0 \quad (x \in \mathbb{Z}),$$
ami igaz. Tehát
$$\min(\mathcal{H}) = \inf(\mathcal{H}) = -1/2.$$

Összefoglalva: a $\mathcal{H}$ halmaz alulról és felülről is korlátos,
$$\inf(\mathcal{H}) = \min(\mathcal{H}) = -\frac{1}{2}, \qquad \sup(\mathcal{H}) = \max(\mathcal{H}) = 3.$$

5. $\mathcal{H} := \left\{ \frac{2|x|+3}{3|x|+1} \in \mathbb{R} : \; -2 \leq x \in \mathbb{R} \right\};$

- Világos, hogy bármely $-2 \leq x \in \mathbb{R}$ esetén
$$\frac{2|x|+3}{3|x|+1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{6|x|+9}{6|x|+2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{6|x|+2+7}{6|x|+2} = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{7}{6|x|+2}\right) = \frac{2}{3} + \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{3|x|+1}.$$

- Mivel tetszőleges $-2 \leq x \in \mathbb{R}$ esetén
$$\frac{7}{3} \cdot \frac{1}{3|x|+1} > 0,$$
ezért
$$\mathcal{H} \ni \frac{2|x|+3}{3|x|+1} = \frac{2}{3} + \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{3|x|+1} > \frac{2}{3},$$

azaz a $\mathcal{H}$ halmaz alulról korlátos, és $\frac{2}{3}$ alsó korlátja $\mathcal{H}$-nak.

- Látható, hogy az
$$\frac{1}{3|x|+1}$$
tört az x nagy értékeire igen közel van 0-hoz, ezért a $\mathcal{H}$ halmaz elemei nagy x-ekre $\frac{2}{3}$-hoz közeli értékeket vesznek fel. Sejthető tehát, hogy $\mathcal{H}$-nak nincsen $\frac{2}{3}$-nál nagyobb alsó korlátja:
$$\forall\,\varepsilon>0\ \exists x\in[-2,+\infty):\qquad \mathcal{H}\ni\frac{2}{3}+\frac{7}{3}\cdot\frac{7}{3|x|+1}<\frac{2}{3}+\varepsilon.$$
Valóban, a tetszőleges $x\in[-2,+\infty)$ esetén fennálló
$$\frac{2}{3}+\frac{7}{3}\cdot\frac{1}{3|x|+1}<\frac{2}{3}+\varepsilon \iff \frac{7}{3}\cdot\frac{1}{3|x|+1}<\varepsilon \iff \frac{7}{\varepsilon}<9|x|+3 \iff |x|>\frac{7}{9\varepsilon}-\frac{1}{3}$$
ekvivalencia-lánc következtében tetszőleges $\varepsilon>0$ számhoz van olyan $h\in\mathcal{H}$, amelyre
$$h<\frac{2}{3}+\varepsilon.$$
Így
$$\inf(\mathcal{H})=\frac{2}{3}\qquad \text{és}\qquad \nexists\min(\mathcal{H}),\quad \text{ui.}\quad \frac{2}{3}\notin\mathcal{H}.$$

- Mivel bármely $x\in[-2,+\infty)$ esetén
$$\mathcal{H}\ni\frac{2|x|+3}{3|x|+1}=\frac{2}{3}+\frac{7}{3}\cdot\frac{1}{3|x|+1}\leq\frac{2}{3}+\frac{7}{3}\cdot\frac{1}{3|0|+1}=\frac{2|0|+3}{3|0|+1}=\frac{3}{1},$$
ezért $\mathcal{H}$-nak van legnagyobb eleme: $\max(\mathcal{H})=3$. Következésképpen
$$\sup(\mathcal{H})=\max(\mathcal{H})=3.$$

Összefoglalva: a $\mathcal{H}$ halmaz alulról és felülről is korlátos,
$$\inf(\mathcal{H})=\frac{2}{3},\quad \nexists\min(\mathcal{H}),\qquad \sup(\mathcal{H})=\max(\mathcal{H})=3.$$

6. $\mathcal{H}:=\left\{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\in\mathbb{R}:\ 0\leq x\in\mathbb{R}\right\}.$

- Mivel bármely $0\leq x\in\mathbb{R}$ esetén
$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\cdot 1=\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\cdot\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

és
$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\geq 1\qquad (0\leq x\in\mathbb{R}),$$

ezért

$$0 < \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \leq 1 \qquad (0 \leq x \in \mathbb{R}).$$

Ez azt jelenti, hogy a $\mathcal{H}$ halmaz korlátos, továbbá 0, ill. 1 alsó, ill. felső korlátja $\mathcal{H}$-nak.

- Mivel $x = 0$ esetén $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = 1$ ezért $1 \in \mathcal{H}$, következésképpen $\max(\mathcal{H}) = 1$, és így $\sup(\mathcal{H}) = 1$.
- Látható, hogy ha x elég nagy, akkor

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

igen kicsi. Sejthető tehát, hogy $\mathcal{H}$-nak nincsen 0-nál nagyobb alsó korlátja:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists x \in [0, +\infty): \qquad \mathcal{H} \ni \sqrt{x+1} - \sqrt{x} < 0 + \varepsilon = \varepsilon.$$

Mivel tetszőleges $0 \leq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad x > \frac{1}{4\varepsilon^2},$$

ezért $\inf(\mathcal{H}) = 0$.

- Mivel $0 \notin \mathcal{H}$, ezért $\mathcal{H}$-nak nincsen legkisebb eleme.

Összefoglalva: a $\mathcal{H}$ halmaz alulról és felülről is korlátos,

$$\inf(\mathcal{H}) = 0, \quad \nexists \min(\mathcal{H}), \qquad \sup(\mathcal{H}) = \max(\mathcal{H}) = 1. \quad \blacksquare$$

Gyakorló feladat. Vizsgáljuk az $\mathcal{H}$ halmazt korlátosság szempontjából! Határozzuk meg $\inf \mathcal{H}$-t és $\sup \mathcal{H}$-t! Van-e a $\mathcal{H}$ halmaznak legkisebb, ill. legnagyobb eleme?

1. $\mathcal{H} := \left\{ \dfrac{x^2+1}{4x^2+3} \in \mathbb{R} :\ x \in [2, +\infty) \right\};$

- Mivel minden $x \in [2, +\infty)$ esetén

$$(*) \quad \frac{x^2+1}{4x^2+3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4x^2+4}{4x^2+3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4x^2+3+1}{4x^2+3} = \frac{1}{4} \cdot \left(1 + \frac{1}{4x^2+3}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{16x^2+12}$$

és

$$\frac{1}{16x^2+12} > 0,$$

ezért

$$\mathcal{H} \ni \frac{x^2+1}{4x^2+3} > \frac{1}{4},$$

azaz $\frac{1}{4}$ alsó korlátja $\mathcal{H}$-nak.

- Megmutatjuk, hogy $\frac{1}{4}$ a legnagyobb alsó korlát: $\inf(\mathcal{H}) = \frac{1}{4}$. Valóban, bármely $\varepsilon > 0$ szám esetén pontosan akkor van olyan $h \in \mathcal{H}$, hogy $h < \frac{1}{4} + \varepsilon$, ha alkalmas $x \in [2, +\infty)$ számra

$$\frac{1}{4} + \varepsilon > h := \frac{1}{4} + \frac{1}{16x^2 + 12} \quad \iff \quad \varepsilon > \frac{1}{16x^2 + 12} \quad \iff \quad x^2 > \frac{1}{16\varepsilon} - \frac{3}{4}.$$

Világos, hogy pl. az

$$x := \sqrt{\frac{1}{16\varepsilon}} + 2 = \frac{1}{4\sqrt{\varepsilon}} + 2 > 2$$

szám ilyen.

- Mivel $\frac{1}{4} \notin \mathcal{H}$, ezért $\mathcal{H}$-nak nincsen legkisebb eleme.

- A $(*)$ felbontásból az is látható, hogy bármely $x \in [2, +\infty)$ esetén

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16x^2 + 12} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{16 \cdot 2^2 + 12} = \frac{5}{19} \in \mathcal{H}.$$

Ez azt jelenti, hogy $\sup(\mathcal{H}) = \max(\mathcal{H}) = \frac{5}{19}$.

Összefoglalva: a $\mathcal{H}$ halmaz alulról és felülről is korlátos,

$$\inf(\mathcal{H}) = \frac{1}{4}, \quad \nexists \min(\mathcal{H}), \qquad \sup(\mathcal{H}) = \max(\mathcal{H}) = \frac{5}{19}.$$

2. $\mathcal{H} := \left\{ \frac{5 \cdot 5^n + 1}{2 \cdot 5^n + 3} \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N} \right\}$;

- Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$(*) \qquad \frac{5 \cdot 5^n + 1}{2 \cdot 5^n + 3} = \frac{5}{2} \cdot \frac{10 \cdot 5^n + 2}{10 \cdot 5^n + 15} = \frac{5}{2} \cdot \frac{10 \cdot 5^n + 15 - 13}{10 \cdot 5^n + 15} = \frac{5}{2} \cdot \left(1 - \frac{13}{10 \cdot 5^n + 15}\right) = \frac{5}{2} - \frac{13}{4 \cdot 5^n + 6}$$

és

$$\frac{13}{4 \cdot 5^n + 6} > 0,$$

ezért

$$\frac{5 \cdot 5^n + 1}{2 \cdot 5^n + 3} < \frac{5}{2},$$

azaz $\frac{5}{2}$ felső korlátja $\mathcal{H}$-nak.

- Megmutatjuk, hogy $\frac{5}{2}$ a legkisebb felső korlát: $\sup(\mathcal{H}) = \frac{5}{2}$. Valóban, bármely $\varepsilon > 0$ szám esetén pontosan akkor van olyan $h \in \mathcal{H}$, hogy $h > \frac{5}{2} - \varepsilon$, ha alkalmas $n \in \mathbb{N}$ számra

$$\frac{5}{2} - \varepsilon < a := \frac{5}{2} - \frac{13}{4 \cdot 5^n + 6} \quad \Longleftrightarrow \quad \varepsilon > \frac{13}{4 \cdot 5^n + 6} \quad \Longleftrightarrow \quad 5^n > \frac{13}{4\varepsilon} - \frac{6}{4}.$$

  Nem nehéz belátni, hogy van ilyen n.
- Mivel $\frac{5}{2} \notin \mathcal{H}$, ezért $\mathcal{H}$-nak nincsen legnagyobb eleme.
- A $(*)$ felbontásból az is látható, hogy bármely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$\frac{5}{2} - \frac{13}{4 \cdot 5^n + 6} \geq \frac{5}{2} - \frac{13}{4 \cdot 5^0 + 6} = \frac{6}{5} \in \mathcal{H}.$$

  Ez azt jelenti, hogy $\inf(\mathcal{H}) = \min(\mathcal{H}) = \frac{6}{5}$.

Összefoglalva: a $\mathcal{H}$ halmaz alulról és felülről is korlátos,

$$\inf(\mathcal{H}) = \min(\mathcal{H}) = \frac{6}{5}, \qquad \sup(\mathcal{H}) = \frac{5}{2}, \quad \nexists \max(\mathcal{H}).$$

3. $\mathcal{H} := \left\{ \frac{\sqrt{x} - 1}{5\sqrt{x} + 2} \in \mathbb{R} : \ x \in [4, +\infty) \right\};$

- Mivel minden $x \in [4, +\infty)$ esetén

$$(*) \quad \frac{\sqrt{x} - 1}{5\sqrt{x} + 2} = \frac{1}{5} \cdot \frac{5\sqrt{x} - 5}{5\sqrt{x} + 2} = \frac{1}{5} \cdot \frac{5\sqrt{x} + 2 - 7}{5\sqrt{x} + 2} = \frac{1}{5} \cdot \left(1 - \frac{7}{5\sqrt{x} + 2} \right) = \frac{1}{5} - \frac{7}{25\sqrt{x} + 10}$$

  és

$$\frac{7}{25\sqrt{x} + 10} > 0,$$

  ezért

$$\frac{\sqrt{x} - 1}{5\sqrt{x} + 2} < \frac{1}{5},$$

  azaz $\frac{1}{5}$ felső korlátja $\mathcal{H}$-nak.
- Megmutatjuk, hogy $\frac{1}{5}$ a legkisebb felső korlát: $\sup(\mathcal{H}) = \frac{1}{5}$. Valóban, bármely $\varepsilon > 0$ szám esetén pontosan akkor van olyan $h \in \mathcal{H}$, hogy $h > \frac{1}{5} - \varepsilon$, ha alkalmas $x \in [4, +\infty)$ számra

$$\frac{1}{5}-\varepsilon < h := \frac{1}{5} - \frac{7}{25\sqrt{x}+10} \quad\Longleftrightarrow\quad \varepsilon > \frac{7}{25\sqrt{x}+10} \quad\Longleftrightarrow\quad \sqrt{x} > \frac{7}{25\varepsilon} - \frac{2}{5}.$$

Világos, hogy pl. az

$$x := \left(\frac{7}{25\varepsilon}\right)^2 + 4 = \frac{49}{225\varepsilon^2} + 4 > 4$$

szám ilyen.

- Mivel $\frac{1}{5} \notin \mathcal{H}$, ezért $\mathcal{H}$-nak nincsen legnagyobb eleme.
- A $(*)$ felbontásból az is látható, hogy bármely $x \in [4, +\infty)$ esetén

$$\frac{1}{5} - \frac{7}{25\sqrt{x}+10} \geq \frac{1}{5} - \frac{7}{25\sqrt{4}+10} = \frac{1}{12} \in \mathcal{H}.$$

Ez azt jelenti, hogy $\inf(\mathcal{H}) = \min(\mathcal{H}) = \frac{1}{12}$.

Összefoglalva: a $\mathcal{H}$ halmaz alulról és felülről is korlátos,

$$\inf(\mathcal{H}) = \min(\mathcal{H}) = \frac{1}{12}, \qquad \sup(\mathcal{H}) = \frac{1}{5}, \quad \nexists \max(\mathcal{H}).$$

4. $\mathcal{H} := \left\{\frac{x}{y} \in \mathbb{R} :\ x \in (0,1), y \in (0,x)\right\};$

- A $\mathcal{H}$ halmaz felülről nem korlátos, ugyanis tetszőleges $K \geq 1$ számhoz van olyan $h \in \mathcal{H}$, hogy $h > K$, hiszen $h := \frac{x}{y}$:

$$x := \frac{1}{2}, \quad y \in \left(0, \frac{1}{2K}\right) \qquad \text{esetén} \qquad h = \frac{\frac{1}{2}}{y} > \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2K}} = K.$$

Ezért

$$\sup(\mathcal{H}) = +\infty, \qquad \text{ill.} \qquad \nexists \max(\mathcal{H}).$$

- A $\mathcal{H}$ halmaz alulról korlátos, ugyanis 0 alsó korlátja, sőt minden $x \in (0,1)$ esetén $\frac{x}{y} > \frac{x}{x} = 1$, ezért az 1 is alsó korlát.
- $\inf(\mathcal{H}) = 1$, ugyanis minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $x \in (0,1)$, $y \in (0,x)$, hogy $\frac{x}{y} < 1+\varepsilon$, hiszen

$$\frac{x}{y} < 1+\varepsilon \quad\Longleftrightarrow\quad y > \frac{x}{1+\varepsilon}$$

és $\frac{x}{1+\varepsilon} < x$, ezért tetszőleges $x \in (0,1)$ esetén y legyen olyan, hogy $\frac{x}{1+\varepsilon} < y < x$.
- $\nexists \min(\mathcal{H})$, mivel $\inf(\mathcal{H}) = 1 \notin \mathcal{H}$.

Összefoglalva: a $\mathcal{H}$ halmaz alulról korlátos, felülről nem korlátos,

$$\inf(\mathcal{H}) = 1, \quad \nexists \min(\mathcal{H}), \qquad \sup(\mathcal{H}) = +\infty.$$

5. $\mathcal{H} := \left\{ \dfrac{2+\sqrt{x}}{3\sqrt{x}+1} \in \mathbb{R} : \ x \in [1/9, +\infty) \right\}.$

- Mivel minden $x \in [1/9, +\infty)$ esetén

$$(*) \quad \frac{2+\sqrt{x}}{3\sqrt{x}+1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{x}+6}{3\sqrt{x}+1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{x}+1+5}{3\sqrt{x}+1} = \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{5}{3\sqrt{x}+1}\right) = \frac{1}{3} + \frac{5}{9\sqrt{x}+3}$$

  és

$$\frac{5}{9\sqrt{x}+3} > 0,$$

  ezért

$$\frac{2+\sqrt{x}}{3\sqrt{x}+1} > \frac{1}{3},$$

  azaz $\frac{1}{3}$ alsó korlátja $\mathcal{H}$-nak.

- Megmutatjuk, hogy $\frac{1}{3}$ a legnagyobb alsó korlát: $\inf(\mathcal{H}) = \frac{1}{3}$. Valóban, bármely $\varepsilon > 0$ szám esetén pontosan akkor van olyan $h \in \mathcal{H}$, hogy $a < \frac{1}{3} + \varepsilon$, ha alkalmas $x \in [1/9, +\infty)$ számra

$$\frac{1}{3} + \varepsilon > h := \frac{1}{3} + \frac{5}{9\sqrt{x}+3} \quad \Longleftrightarrow \quad \varepsilon > \frac{5}{9\sqrt{x}+3} \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{x} > \frac{1}{9}\left(\frac{5}{\varepsilon} - 3\right) = \frac{5}{9\varepsilon} - \frac{1}{3}.$$

  Világos, hogy pl. az

$$x := \frac{25}{81\varepsilon^2} + \frac{1}{9}$$

  szám ilyen.

- Mivel $\frac{1}{3} \notin \mathcal{H}$, ezért $\mathcal{H}$-nak nincsen legkisebb eleme.
- A $(*)$ felbontásból az is látható, hogy bármely $x \in [1/9, +\infty)$ esetén

$$\frac{1}{3} + \frac{5}{9\sqrt{x}+3} \leq \frac{1}{3} + \frac{5}{9\sqrt{1/9}+3} = \frac{1}{3} + \frac{5}{6} = \frac{7}{6} \in A.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\sup(\mathcal{H}) = \max(\mathcal{H}) = \frac{7}{6}.$$

Összefoglalva: a $\mathcal{H}$ halmaz alulról és felülről is korlátos,

$$\inf(\mathcal{H}) = \frac{1}{3}, \quad \nexists \min(\mathcal{H}), \qquad \sup(\mathcal{H}) = \max(\mathcal{H}) = \frac{7}{6}.$$

6. $\mathcal{H} := \left\{ \dfrac{5x-1}{2x+3} \in \mathbb{R} : \ x \in [3, +\infty) \right\}.$

- Világos, hogy bármely $3 \leq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{5x-1}{2x+3} = \frac{5}{2} \cdot \frac{10x-2}{10x+15} = \frac{5}{2} \cdot \frac{10x+15-17}{10x+15} = \frac{5}{2} \cdot \left(1 - \frac{17}{10x+15}\right) = \frac{5}{2} - \frac{17}{2} \cdot \frac{1}{2x+3}.$$

- Mivel tetszőleges $3 \leq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{14}{9} = \frac{5}{2} - \frac{17}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3 + 3} \leq \frac{5}{2} - \frac{17}{2} \cdot \frac{1}{2x+3},$$

ezért

$$\inf(A) = \min(A) = \frac{14}{9}.$$

- Látható, hogy $\frac{5}{2}$ felső korlát. Belátjuk, hogy $\sup(A) = \frac{5}{2}$. Ehhez azt kell megmutatni, hogy

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in [3, +\infty): \quad \frac{5}{2} - \frac{17}{2} \cdot \frac{1}{2x+3} > \frac{5}{2} - \varepsilon.$$

Ez azzal egyenértékű, hogy

$$\frac{17}{2} \cdot \frac{1}{2x+3} < \varepsilon, \qquad \text{azaz hogy} \qquad \frac{17}{2\varepsilon} - 3 < 2x.$$

Ilyen $x \in \mathcal{H} := [3, +\infty)$ nyilván létezik, hiszen $\mathcal{H}$ felülrőlnem korlátos.

- $\nexists \max(A)$, mivel $\frac{5}{2} \notin A$.

Összefoglalva: a $\mathcal{H}$ halmaz alulról és felülről is korlátos,

$$\inf(\mathcal{H}) = \inf(\mathcal{H}) = \frac{14}{9}, \qquad \sup(\mathcal{H}) = \frac{5}{2}, \quad \nexists \max(\mathcal{H}) = . \quad \blacksquare$$