# Programozáselmélet - Programkonstrukciók

Készítette: Borsi Zsolt

Ebben a fejezetben azzal foglalkozunk, hogy lehet meglévő programokból új programokat készíteni. Háromféle konstrukciót engedünk meg: szekvencia, elágazás és ciklus. Ezek definícióit úgy adjuk meg, hogy a velük képzett relációk illeszkedjenek a korábban bevezetett program fogalmához. A programkonstrukciókat struktogrammal ábrázoljuk.

## 1. Szekvencia

Szekvencia esetében két programot egymás után végzünk el. Amennyiben az első program végrehajtása adott állapotból indulva nem véges vagy hibásan terminál, a második program nem tudja folytatni a végrehajtást a végpontból; az első program által generált végrehajtás egy lehetséges végrehajtása lesz a szekvenciának is.
Nevezzük csatlakozási pontnak azt az állapotot egy végrehajtási sorozatban, ahol az egyik program terminál és a másik program ugyaninnen indul el. Nem szeretnénk ha például az $x := x + 1$ és $x := x + 2$ programok szekvenciája (ahol $x$ egész típusú) az állapottér $\{x{:}5\}$ eleméhez az $< \{x{:}5\}, \{x{:}6\}, \{x{:}6\}, \{x{:}8\} >$ sorozatot rendelné. Ezért az egymás után véges sokszor ismétlődő csatlakozási pontokból egyet hagyjunk el.

***Jelölés:*** *Véges hosszú $\alpha$ sorozat utolsó elemét jelölje $\tau(\alpha)$. Tehát ha $\alpha$ véges, $\tau(\alpha) = \alpha_{|\alpha|}$.*

***Jelölés:*** *Legyen $A$ tetszőleges állapottér. $\alpha \in \bar{A}^*$ és $\beta \in (\bar{A} \cup \{fail\})^{**}$ úgy hogy $\alpha$ és $\beta$ nem üres sorozatok továbbá $\tau(\alpha) = \beta_1$. Ekkor $\alpha \otimes \beta$ jelölje az $\alpha$ és $\beta$ sorozatok összefűzésében $\beta$ első elemének elhagyásával kapott sorozatot.*
*Általánosítsuk a jelölést $n \in \mathbb{N}^+$ darab vagy akár végtelen sok sorozat esetére. A sorozatok összefűzése (konkatenációja) után az egymás után véges sokszor ismétlődő csatlakozási pontokból egyet hagyjunk el.*

***Példa:*** *Legyen $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Ekkor*

$$\otimes_4(< 1, 2, 3, 1 >, < 1, 2, 3, 1 >, < 1, 2, 3, 1 >, < 1, 2, 3, 1 >) =< 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1 >$$

$$\otimes_4(< 1 >, < 1 >, < 1 >, < 1, 2, 3, 1 >) =< 1, 1, 1, 2, 3, 1 >$$

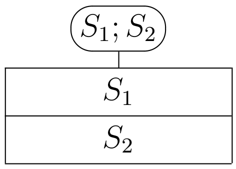
$$\otimes_\infty(< 1 >, < 1 >, < 1 >, < 1 >, \ldots) =< 1, 1, \ldots >$$

$$\otimes_\infty(< 1, 2, 3, 1 >, < 1, 2, 3, 1 >, < 1, 4 >, < 4 >, < 4 >, < 4 >, \ldots) =< 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 4, 4, 4, \ldots >$$

***Definíció:*** *Legyen $A$ közös alap-állapottere az $S_1$ és $S_2$ programoknak. Az $(S_1; S_2)$ relációt az $S_1$ és $S_2$ programok szekvenciájának nevezzük, ha*

$$\begin{aligned}(S_1; S_2)(a) =&\{\alpha \in \bar{A}^\infty \mid \alpha \in S_1(a)\} \cup \\ &\{\alpha \in (\bar{A} \cup \{fail\})^* \mid \alpha \in S_1(a) \wedge \alpha_{|\alpha|} = fail\} \cup \\ &\{\gamma \in (\bar{A} \cup \{fail\})^{**} \mid \gamma = \alpha \otimes \beta \wedge \alpha \in S_1(a) \wedge |\alpha| < \infty \wedge \alpha_{|\alpha|} \neq fail \wedge \beta \in S_2(\alpha_{|\alpha|})\}\end{aligned}$$

A szekvencia struktogramja:




***Tétel:*** *Legyen $A$ közös alap-állapottere az $S_1$ és $S_2$ programoknak. Az $(S_1; S_2)$ szekvencia program.*

***Tétel:*** *Legyen $A$ közös alap-állapottere az $S_1$ és $S_2$ programoknak és jelölje $S$ az $(S_1; S_2)$ szekvenciát. Ekkor*

$$p(S) = p(S_2) \odot p(S_1)$$

# 2. Elágazás

***Definíció:*** *Legyen $A$ közös alap-állapottere az $S_1, \dots S_n$ programoknak. Legyenek továbbá $\pi_1, \dots \pi_n \in A \to \mathbb{L}$ logikai függvények. Ekkor az $IF \subseteq A \times (\bar{A} \cup \{fail\})^{**}$ relációt az $S_i$ programokból képzett $\pi_i$ feltételek által meghatározott elágazásnak nevezzük és $(\pi_1{:}S_1, \dots \pi_n{:}S_n)$-nel jelöljük, ha*

$$\forall a \in A : IF(a) = \omega_0(a) \cup \bigcup_{i=1}^{n} \omega_i(a)$$

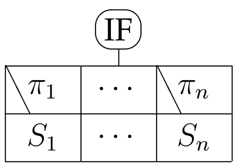
*ahol* $\forall i \in [1..n]$ :

$$\omega_i(a) = \begin{cases} S_i(a), & \textit{ha } a \in \mathcal{D}_{\pi_i} \land \pi_i(a) \\ \emptyset, & \textit{ha } a \in \mathcal{D}_{\pi_i} \land \neg\pi_i(a) \\ \{< a, fail >\}, & \textit{ha } a \notin \mathcal{D}_{\pi_i} \end{cases}$$

*és*

$$\omega_0(a) = \begin{cases} \{< a, fail >\}, & \textit{ha } \forall i \in [1..n] : (a \in \mathcal{D}_{\pi_i} \land \neg\pi_i(a)) \\ \emptyset, & \textit{különben} \end{cases}$$

Az elágazás struktogramja:



Az elágazást szokás még a következő módon is leírni:

**if**
$\quad \pi_1 \to S_1 \;\square$
$\quad \dots$
$\quad \pi_{n-1} \to S_{n-1} \;\square$
$\quad \pi_n \to S_n$
**fi**

***Tétel:*** *Legyen $A$ közös alap-állapottere az $S_1, \dots S_n$ programoknak. Legyenek továbbá $\pi_1, \dots \pi_n \in A \to \mathbb{L}$ logikai függvények. Az $IF = (\pi_1{:}S_1, \dots \pi_n{:}S_n)$ elágazás program.*

***Tétel:*** *Legyen $A$ közös alap-állapottere az $S_1, \dots S_n$ programoknak. Legyenek továbbá $\pi_1, \dots \pi_n \in A \to \mathbb{L}$ logikai függvények. $IF = (\pi_1{:}S_1, \dots \pi_n{:}S_n)$. Ekkor*

$$\mathcal{D}_{p(IF)} = \{a \in A \mid a \in \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{D}_{\pi_i} \wedge a \in \bigcup_{i=1}^{n} \lceil \pi_i \rceil \wedge \forall i \in [1..n] : a \in \lceil \pi_i \rceil \implies a \in \mathcal{D}_{p(S_i)}\}$$

*és*

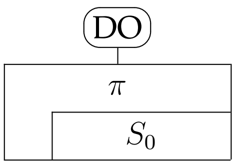
$$\forall a \in \mathcal{D}_{p(IF)} : p(IF)(a) = \bigcup_{i=1}^{n} p(S_i)|_{\lceil \pi_i \rceil}$$

# 3. Ciklus

***Definíció:*** *Legyen $\pi \in A \to \mathbb{L}$ feltétel és $S_0 \subseteq A \times (\bar{A} \cup \{fail\})^{**}$ program. A $DO \subseteq A \times (\bar{A} \cup \{fail\})^{**}$ relációt az $S_0$ programból $\pi$ feltétellel képzett ciklusnak nevezzük és $(\pi, S_0)$-lal jelöljük, ha $\forall a \in A$:*

$$DO(a) = \begin{cases} (S_0; DO)(a) & \textit{ha} \quad a \in \mathcal{D}_\pi \wedge \pi(a) \\ \{< a >\} & \textit{ha} \quad a \in \mathcal{D}_\pi \wedge \neg\pi(a) \\ \{< a, fail >\} & \textit{ha} \quad a \notin \mathcal{D}_\pi \end{cases}$$

A ciklus struktogramja:




A szakirodalomban a következő mód is elterjedt a ciklus leírására:

**while** $\pi$ **do**
$\quad S_0$
**od**

A szekvenciához és az elágazáshoz hasonló módon is definiálhatjuk a ciklust.

***Definíció:*** $\forall a \in A$:

$$DO(a) = \begin{cases} \{<a, fail>\}, & \textit{ha } a \notin \mathcal{D}_\pi \\ \{<a>\}, & \textit{ha } a \in \mathcal{D}_\pi \wedge \neg\pi(a) \\ \{\alpha \in (\bar{A} \cup \{fail\})^{**} \mid \exists \alpha^1, \ldots, \alpha^n \in (\bar{A} \cup \{fail\})^{**} \colon \alpha = \otimes_n(\alpha^1, \ldots, \alpha^n) \wedge & \\ \alpha^1 \in S_0(a) \wedge \forall i \in [1..n-1] \colon (\alpha^i \in \bar{A}^* \wedge \tau(\alpha^i) \in \lceil \pi \rceil \wedge \alpha^{i+1} \in S_0(\tau(\alpha^i))) \wedge & \\ ((\alpha^n \in \bar{A}^\infty \vee (\alpha^n \in (\bar{A} \cup \{fail\})^* \wedge \tau(\alpha^i) = fail) \vee & \\ (\alpha^n \in \bar{A}^* \wedge \tau(\alpha^i) \in \mathcal{D}_\pi \wedge \tau(\alpha^i) \notin \lceil \pi \rceil)\} & \\ \cup & \\ \{\alpha \in \bar{A}^\infty \mid \exists \alpha^1, \alpha^2, \ldots \in \bar{A}^* \colon \alpha = \otimes_\infty(\alpha^1, \alpha^2, \ldots) \wedge \alpha^1 \in S_0(a) \wedge \forall i \in \mathbb{N}^+ \colon & \\ (\alpha^i \in \bar{A}^* \wedge \tau(\alpha^i) \in \lceil \pi \rceil \wedge \alpha^{i+1} \in S_0(\tau(\alpha^i)))\} & \\ \cup & \\ \{\alpha \in (\bar{A} \cup \{fail\})^* \mid \exists \alpha^1, \ldots, \alpha^n \in (\bar{A} \cup \{fail\})^{**} \colon \alpha = \otimes_n(\alpha^1, \ldots, \alpha^n) \wedge & \\ \alpha^1 \in S_0(a) \wedge \forall i \in [1..n-2] \colon (\alpha^i \in \bar{A}^* \wedge \tau(\alpha^i) \in \lceil \pi \rceil \wedge \alpha^{i+1} \in S_0(\tau(\alpha^i))) & \\ \wedge(\alpha^{n-1} \in \bar{A}^* \wedge \tau(\alpha^{n-1}) \notin \mathcal{D}_\pi \wedge \alpha^n = <\tau(\alpha^{n-1}), fail>)\}, & \textit{ha } a \in \mathcal{D}_\pi \wedge \pi(a) \end{cases}$$

Első ránézésre a definíció kissé bonyolultnak tűnik. Amennyiben sorra vesszük hogy az állapottér egy $a$ pontjához milyen sorozatokat rendelhet a ciklus, már nem is fogjuk bonyolultnak találni a definíciót!

- Ha $a$ állapotban a ciklusfeltétel nem kiértékelhető, akkor a ciklus hibásan terminál.
- Ha $a$ állapotban a ciklusfeltétel kiértékelhető de nem teljesül $a$-ra, akkor a ciklus semmit nem csinál, végrehajtása befejeződik az $a$ állapotban.
- A ciklusmagot véges sokszor elvégezzük egymás után, úgy hogy a ciklusmag utolsó végrehajtásához tartozó sorozat
  - végtelen; vagy
  - véges és a $fail$ állapotban végződik; vagy
  - véges és utolsó elemében kiértékelhető a $\pi$ feltétel, de az $hamis$.
- A ciklusmagot végtelen sokszor elvégezzük egymás után, mert egy végrehajtás után mindig olyan állapotba jutunk ahol a ciklusfeltétel teljesül.
- Az utolsó lehetőség az, hogy a ciklusmagot azért véges sokszor (de legalább egyszer) végezzük el egymás után, mert utoljára egy olyan állapotba jutunk ahol a ciklusfeltétel nem kiértékelhető.