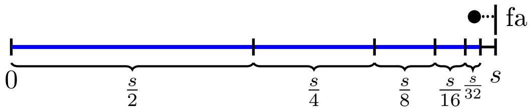
6. előadás

VÉGTELEN SOROK 1.
(Speciális képzésű sorozatok)

Történeti utalások

A végtelen fogalma és ehhez kapcsolódva a végtelen összegek problémaköre nehezen épült be a matematikába. Végtelen összegek már az ókori görögöknél is megjelentek.

- Zénon (i.e. 490-–430) híres paradoxonjai: a fának hajított kő, Akhilleusz és a teknős, stb.



A megtett távolság tart s-hez

- Arisztotelész (i.e. 384–322)
- Arkhimédész (i.e. 287–212)
- Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)
- Brook Taylor (1685–1731)
- Leonhard Euler (1707–1783)

Összességében az mondható, hogy még a XVIII. században is csak „gyerekcipőben járt” a végtelen összegek vizsgálata, aminek oka az volt, hogy nem voltak meg a szükséges eszközök, a pontos definíciók és tételek.

Az analízis alapfogalmainak szükségessé vált precízebb és elvontabb megalkotásában Augustin Louis Cauchy (1789–1857) tette meg az első jelentős lépéseket (1823): neki köszönhető a sorozat konvergenciájának és határértékének ma is elfogadott szigorú definíciója. Ezután a végtelen összegek problémája is elérte a logikai tisztaságnak azt a fokát, amelyet a matematika megkövetel. ■

A végtelen sor fogalma, konvergenciája és összege

Probléma. *Hogyan lehet értelmezni végtelen sok szám, pontosabban valamely $a_0, a_1, a_2, \dots$ számok egy végtelen sorozatának az*

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

szimbólummal jelölt összegét?

A sorozatokkal kapcsolatban megszerzett ismereteink alapján erre a következő eléggé „természetes” lehetőség kínálkozik: Tekintsük az $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ végtelen sorozatot, és képezzük azt az újabb sorozatot, amelynek n-edik tagja

$$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ha ez a sorozat mondjuk az $A \in \mathbb{R}$ számhoz tart, akkor ez azt jelenti, hogy nagy n-ekre az s_n értékek közel vannak A-hoz. Ebben az esetben kézenfekvő a végtelen sok tagú

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

összeget az (s_n) sorozat határértékével értelmezni.

Lássuk ezután a pontos definíciókat!

1. definíció. *Az $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozatból képzett*

$$s_n := a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

*sorozatot az (a_n) által generált **végtelen sornak** (röviden **sornak**) nevezzük, és így jelöljük:*

$$\sum a_n, \quad \text{vagy} \quad \sum_{n=0} a_n, \quad \text{vagy} \quad a_0 + a_1 + a_2 + \cdots .$$

*s_n, illetve a_n $(n \in \mathbb{N})$ a $\sum a_n$ végtelen sor n**-edik részletösszegek**, illetve n**-edik tagja**.*

A korábbi megállapodásunknak megfelelően az $(a_n) : \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq M\} \to \mathbb{R}$ függvények is sorozatok minden $M \in Z$ esetén. Az ilyenekből képzett

$$s_n := a_M + a_{M+1} + a_{M+2} + \cdots + a_n \quad (M \leq n \in \mathbb{N})$$

sorozatot is **végtelen sornak tekintjük**, és jelölésükre a

$$\sum_{n=M} a_n$$

szimbólumot fogjuk használni. A további definíciók és tételek (az értelemszerű módosításokkal) ezekre is érvényesek lesznek, de ezt nem fogjuk külön hangsúlyozni.

A végtelen sor tehát egy speciális képzésű sorozat. Ennek megfelelően beszélhetünk arról, hogy egy sor konvergens vagy divergens, és ha konvergens, akkor mi a sor összege.

2. definíciók.

1° *Azt mondjuk, hogy a* $\sum a_n$ ***sor konvergens****, ha részletösszegeinek a sorozata konvergens, azaz a* $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$ *határérték véges. Ekkor ezt a határértéket a* $\sum a_n$ ***végtelen sor összegének*** *nevezzük, és így jelöljük:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} s_n.$$

2° *A* $\sum a_n$ *sor* ***divergens****, ha a részletösszegekből képzett* (s_n) *sorozat divergens (azaz vagy* $\pm\infty$ *a határértéke vagy nincs határértéke).*

Ha $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = +\infty$*, illetve* $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = -\infty$*, akkor azt mondjuk, hogy a* $\sum a_n$ ***végtelen sor összege*** $+\infty$*, illetve* $-\infty$*. Ezt úgy jelöljük, hogy*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n := +\infty, \qquad \textit{illetve} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n := -\infty.$$

Megjegyzések

1. Figyeljük meg a bevezetett jelöléseket!

- A $\sum\limits_{n=0} a_n$ szimbólum jelöli a **végtelen sort**,

  vagyis az (s_n) részletösszegeinek a **sorozatát**.

- A $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}$ szimbólummal pedig a sor **összegét**,

  vagyis a $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$ határértéket (tehát **egy** $\overline{\mathbb{R}}$**-beli elemet**) jelöljük (ha ez létezik).

2. A végtelen sort lényegében a véges sok tagú összeg végtelen sok tagra való általánosításának tekinthetjük, ezért „végtelen sok tagú összegekről" is beszélhetünk. Az $a_0, a_1, a_2, a_3 \ldots$ végtelen sok szám összegét tehát akkor értelmeztük, ha az (s_n) sorazatnak van ($\overline{\mathbb{R}}$-beli) határértéke. Az ellenkező esetben e számok összegét *nem értelmezzük.* A szóban forgó összeget időnként az

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

alakban is írjuk annak ellenére, hogy ugyanígy jelöltük a $\sum a_n$ sort is. Az adott szövegkörnyezetben azonban világos lesz majd, hogy a végtelen sorról, vagy pedig annak az összegéről van szó. ■

Nevezetes sorok

A geometriai/mértani sor

$\boxed{\textbf{1.}}$ *Legyen $q \in \mathbb{R}$. A $\big(q^n\big)$ sorozatból képzett $\sum_{n=0} q^n$* ***geometriai*** *vagy* ***mértani sor*** *akkor és csak akkor konvergens, ha $|q| < 1$, és ekkor az összege*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots = \frac{1}{1-q} \qquad \big(|q| < 1\big).$$

Ha $q \geq 1$, akkor a $\sum q^n$ sornak van összege, és $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = +\infty$.

Bizonyítás. Az

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\left(a^n + a^{n-1}\,b + \cdots + a\,b^{n-1} + b^n\right) \qquad \big(a, b \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}\big)$$

azonosság alapján a $\sum_{n=0} q^n$ geometriai sor részletösszegeit $q \neq 1$ esetén az alábbi „zárt alakban" írhatjuk fel:

$$s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q} \qquad (1 \leq n \in \mathbb{N}).$$

Ha $q \neq 1$ valós szám, akkor a $\big(q^{n+1}\big)$ geometriai sorozat pontosan akkor konvergens, ha $|q| < 1$, és ekkor 0 a határértéke, így a $\sum_{n=0} q^n$ sor konvergens, és az összege

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \lim_{n \to +\infty} s_n = \frac{1}{1-q} \qquad \big(|q| < 1\big). \blacksquare$$

A teleszkopikus sor

$\boxed{\textbf{2.}}$ *A $\sum_{n=1} \frac{1}{n(n+1)}$* ***teleszkopikus sor*** *konvergens, és összege 1, azaz*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots = 1.$$

Bizonyítás. A sor n-edik részletösszege:

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \overbrace{\frac{1}{k \cdot (k+1)}}^{\textbf{ötlet: } \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \\ &= \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{k}} - \cancel{\frac{1}{k+1}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right) = \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1. \blacksquare \end{aligned}$$

Megjegyzés. Egy sornak, vagyis a részletösszeg-sorozatának a konvergenciavizsgálatához nem használhatjuk a műveletek és a határátmenet felcserélhetőségéről szóló tételt, ui. az csak *rögzített számú* sorozatok összegére érvényes. Az n index növekedésével azonban s_n-t egyre nagyobb számú sorozat összegeként foghatjuk fel.

A teleszkopikus sornál ezt a problémát egy ügyes átalakítással meg tudtuk oldani. Az s_n részletösszeget olyan alakra hoztuk, ahol csak véges sok elem maradt az összeg elejéből és a végéből, de a közepe „kiesett”. Vannak még olyan sorok, ahol ezt meg lehet tenni, és ezeket **teleszkopikus típusú soroknak** nevezzük. Elnevezésüket a régi hordozható egyszemes távcsövek (teleszkópok) után kapta, amelyek egymásba csúsztatható csövekből áll a könnyebb tárolásuk érdekében. Ebben az állapotban csak az első és az utolsó cső látható. ■

Hiperharmonikus sorok

1. feladat. *Végezzünk számítógépes kísérleteket a*

$$\sum_{n=1} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \cdots \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

hiperharmonikus sor *konvergenciájának a megismerésére!*

Megoldás Használható például

https://www.wolframalpha.com/

Az eredmények:

$\boxed{\alpha = 1}$ Legyen $s_n^{(1)} := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$.

$s_n^{(1)}:$										
	1	10	10^2	10^5	10^{10}	10^{15}	10^{20}	10^{30}	10^{40}	10^{50}
	1	$2,9\ldots$	$5,1\ldots$	$12,0\ldots$	$23,6\ldots$	$35,1\ldots$	$46,6\ldots$	$69,6\ldots$	$92,6\ldots$	$115,7\ldots$

$\boxed{\alpha = 2}$ Legyen $s_n^{(2)} := 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$.

$s_n^{(2)}:$							
	1	5	10	10^2	10^5	10^{10}	10^{20}
	1	$1,4\ldots$	$1,5\ldots$	$1,634\ldots$	$1,644\,924\ldots$	$1,644\,934\ldots$	$1,644\,934\ldots$

$\boxed{\alpha = \frac{3}{2}}$ Legyen $s_n^{(3/2)} := 1 + \frac{1}{2^{3/2}} + \frac{1}{3^{3/2}} + \cdots + \frac{1}{n^{3/2}}$.

$s_n^{(3/2)}:$								
	1	5	10	10^2	10^5	10^{10}	10^{20}	10^{30}
	1	$1,7\ldots$	$1,9\ldots$	$2,4\ldots$	$2,606..$	$2,612\,355\ldots$	$2.612\,375\ldots$	$2.612\,375\ldots$

Egyéb α értékeket is vizsgálva alakulhat ki az a sejtésünk, hogy a hiperharmonikus sor $\alpha \leq 1$ esetén divergens és konvergens, ha $\alpha > 1$. A következő tétel azt állítja, hogy ez a sejtés igaz. ■

$\boxed{3.}$ **1°** *A*

$$\sum_{n=1} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

harmonikus sor *divergens, de van összege és* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

2° *A*

$$\sum_{n=1} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

szuperharmonikus sor *konvergens.*

3° *Legyen α rögzített valós szám. Ekkor a*

$$\sum_{n=1} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \cdots$$

hiperharmonikus sor *divergens, ha $\alpha \leq 1$, de ekkor van összege, és* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = +\infty$. *Ha $\alpha > 1$, akkor a sor konvergens.*

Bizonyítás.

1° Az (s_n) részletösszeg-sorozat nyilván szigorúan monoton növekedő. Az s_n összegnek egy **ötletes** csoportosításával egyszerűen igazolható, hogy az (s_n) sorozat felülről nem korlátos. Valóban: Legyen $P > 0$ tetszőleges. Válasszunk egy $k > 2P$ egész számot. Ha $n > 2^k$, akkor

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right) > 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \cdots + 2^{k-1} \cdot \frac{1}{2^k} =$$

$$= 1 + k \cdot \frac{1}{2} > \frac{k}{2} > P.$$

Így $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = +\infty$, tehát a harmonikus sor divergens, de van összege és $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

2° Az (s_n) részletösszeg-sorozat nyilván szigorúan monoton növekedő. Mivel

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1) \cdot k} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2,$$

(s_n) felüről korlátos, így (s_n) konvergens, tehát a szuperharmonikus sor konvergens.

Megjegyzés. A fenti egyszerű gondolatmenetből a szuperharmonikus sor összegére a

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} < 2$$

felső becslést kapjuk. *Johann Bernoulli* (1667–1748) és *Leonhard Euler* (1707–1783) svájci matematikusok egymástól függetlenül fedezték fel, hogy

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1,644\,934\,066\,848\ldots .$$

3° Ha $\boxed{\alpha = 1}$, akkor a $\sum\limits_{n=1} \frac{1}{n}$ divergens harmonikus sort kapjuk.

Ha $\boxed{\alpha < 1}$, akkor $\frac{1}{n} \le \frac{1}{n^\alpha}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$, ezért a $\sum\limits_{n=1} \frac{1}{n^\alpha}$ sor részletösszegeinek az (s_n) sorozata szigorúan monoton növekedő és felülről nem korlátos, így $\lim (s_n) = +\infty$. Ezért

$$\text{a } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ sor divergens, ha } \alpha < 1\,, \quad \text{de } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = +\infty.$$

Legyen $\boxed{\alpha > 1}$. Megmutatjuk, hogy a $\sum\limits_{n=1} \frac{1}{n^\alpha}$ sor részletösszegeinek a sorozata felülről korlátos. Ennek igazolásához az $\alpha = 1$ esetben mutatott **ötletet** használjuk, ti. kettőhatványok közötti csoportokat képezünk. Egy ilyen csoportra az

$$\frac{1}{(2^k+1)^\alpha} + \frac{1}{(2^k+2)^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(2^k+2^k)^\alpha} \le 2^k \frac{1}{(2^k)^\alpha} = \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^k$$

egyenlőtlenség teljesül. Mivel $\alpha > 1$ miatt $\frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1$, ezért a $\sum\limits_{k=0} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^k$ geometriai sor konvergens, következésképpen

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha} < \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}} \qquad (n \in \mathbb{N}^+).$$

(s_n) tehát valóban felülről korlátos. Mivel monoton növekedő is, ezért konvergens. Megmutattuk tehát azt, hogy

$$\text{a } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ sor konvergens, ha } \alpha > 1\,. \ \blacksquare$$

Az e szám sorösszeg előállítása

$\boxed{\textbf{4.}}$ *A* $\sum\limits_{n=0} \frac{1}{n!}$ *végtelen sor konvergens, és az összege az* $e := \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ *számmal egyenlő:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots = e.$$

Bizonyítás. Minden $2 \le n \in \mathbb{N}$ esetén

$$s_n := 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!} \le 1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(n-1)\cdot n} =$$

$$= \big(\text{teleszkopikus sor}\big) = 3 - \frac{1}{n} < 3,$$

továbbá (s_n) szigorúan monoton növekedő, ezért a $\sum\limits_{n=0} \frac{1}{n!}$ sor konvergens.

A binomiális tétel alapján

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n\,(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1))}{k!} \cdot \frac{1}{n^k} =$$

$$= 1 + \frac{1}{1!} + \sum_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdot \ldots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \cdot \frac{1}{k!} \le$$

$$\le 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots \ldots + \frac{1}{n!} = s_n, \quad \text{így}$$

$$e = \lim_{n\to+\infty} a_n \le \lim_{n\to+\infty} s_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}.$$

Ha $2 \le m \in \mathbb{N}$ rögzített és $n > m$, akkor az előbbiekből

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \ge 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{m!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{m-1}{n}\right),$$

amiből $n \to +\infty$ határátmenetet véve kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to+\infty} a_n \ge 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + + \cdots + \frac{1}{m!} = s_m.$$

Ez pedig azonnal adja, hogy

$$e = \lim_{n\to+\infty} a_n \ge \lim_{m\to+\infty} s_m = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!}.$$

Ezt a korábbi egyenlőtlenséggel összevetve kapjuk, hogy

$$e = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} s_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}. \ \blacksquare$$

A Leibniz-sor

5. *A*

$$\sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

Leibniz-sor *konvergens.*

Az állítást később fogjuk igazolni.

Végtelen sorok konvergenciája (Alaptulajdonságok)

A definíció szerint egy **végtelen sor** a részletösszegeinek a **sorozata**. Sorok konvergenciájának a vizsgálatához tehát alkalmazhatók a sorozatokra eddig megismert állítások.

Ebben a pontban felsoroljuk a szóban forgó állítások közvetlen következményeit. Fontos megjegyezni azonban azt, hogy ezek a tételek a gyakorlatban sokszor jól használható elégséges feltételeket adnak végtelen sorok konvergenciájára, illetve divergenciájára. Végtelen sorok összegének a meghatározása azonban általában nehéz feladat.

Végtelen sorok lineáris kombinációi

1. tétel: Sorok lineáris kombinációi.

1° *Tegyük fel, hogy a* $\sum a_n$*, illetve a* $\sum b_n$ *sorok konvergensek. Ekkor tetszőleges* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *esetén a sorok* $\sum \big(\lambda\, a_n + \mu\, b_n\big)$ *lineáris kombinációja is konvergens, és az összege egyenlő a sorok összegének a lineáris kombinációjával:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\big(\lambda\, a_n + \mu\, b_n\big) = \lambda \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \mu \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} b_n.$$

2° *Tegyük fel, hogy a* $\sum a_n$ *és a* $\sum b_n$ *soroknak van összege. Legyen*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n =: A \in \overline{\mathbb{R}} \quad \text{és} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} b_n =: B \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ha a $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *olyan számok, amelyekre* $\lambda \cdot A + \mu \cdot B \in \overline{\mathbb{R}}$ *értelmezve van, akkor a sorok* $\sum \big(\lambda\, a_n + \mu\, b_n\big)$ *lineáris kombinációjának is van összege, és*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\big(\lambda\, a_n + \mu\, b_n\big) = \lambda \cdot A + \mu \cdot B.$$

Bizonyítás.

1° Jelölje s_n, illetve t_n a $\sum a_n$, illetve a $\sum b_n$ sor n-edik részletösszegét. Ekkor a sorok lineáris kombinációjának n-edik részletösszege $\lambda\, s_n + \mu\, t_n$. Így az állítás abból következik, hogy

$$\lim_{n\to+\infty}\big(\lambda\, s_n + \mu\, t_n\big) = \lambda \cdot \lim_{n\to+\infty} s_n + \mu \cdot \lim_{n\to+\infty} t_n = \lambda \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \mu \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} b_n.$$

2° A tágabb értelemben vett határérték és a műveletek kapcsolatára vonatkozó állítás közvetlen következménye. ■

Megjegyzés. Teljes indukcióval igazolható, hogy az állítás igaz véges sok sor lineáris kombinációjára is. ■

Végtelen sor konvergenciájának egy szükséges feltétele

2. tétel. *Ha a* $\sum a_n$ *végtelen sor konvergens, akkor az* (a_n) *generáló sorozat nullasorozat, azaz* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Bizonyítás. Legyen a sor összege A. Mivel

$$a_n = \big(a_0 + a_1 + \cdots + a_n\big) - \big(a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}\big) = s_n - s_{n-1},$$

ezért $a_n \to A - A = 0$, ha $n \to +\infty$. ■

Megjegyzés. A $\lim (a_n) = 0$ csak **szükséges, de nem elégséges feltétel** a $\sum a_n$ sor konvergenciájához, hiszen tudjuk, hogy a harmonikus sor divergens, de a tagjai nullához tartanak. ■

A Cauchy-féle konvergencikritérium végtelen sorokra

3. tétel. *A* $\sum a_n$ *sor akkor és csak akkor konvergens, ha*

$$\forall\, \varepsilon > 0\text{-}hoz \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall\, m > n > n_0: \quad \big|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m\big| < \varepsilon.$$

Bizonyítás. Mivel $a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m = s_m - s_n$, ezért az állítás s sorozatokra vonatkozó Cauchy-féle konvergencikritérium közvetlen következménye. ■

Végtelen sorok ekvikonvergenciája

4. tétel. *Tekintsük a* $\sum a_n$ *és* $\sum b_n$ *végtelen sorokat, és tegyük fel, hogy*

$$\exists\, N \in \mathbb{N}, \quad \forall\, n > N: \quad a_n = b_n.$$

Ekkor a két sor ***ekvikonvergens****, azaz a* $\sum a_n$ *végtelen sor akkor és csak akkor konvergens, ha a* $\sum b_n$ *végtelen sor konvergens.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a $\sum a_n$ sor konvergens. Ekkor a sorokra vonatkozó Cauchy-féle konvergenciakritérium szerint

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall\, m > n > n_0: \quad |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m| < \varepsilon.$$

Ha $n_1 := \max\{n_0, N\}$, akkor $\forall\, m > n > n_1$ indexre

$$|b_{n+1} + b_{n+2} + \cdots + b_m| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m| < \varepsilon$$

teljesül, így a $\sum b_n$ sor is kielégíti a sorokra vonatkozó Cauchy-féle konvergenciakritériumot, tehát konvergens.

Hasonlóan igazolható, hogy ha a $\sum b_n$ sor konvergens, akkor a $\sum a_n$ sor is konvergens. ■

Megjegyzés. A tétel azt állítja, hogy ha két sor legfeljebb véges sok tagban különbözik egymástól, akkor a két sor egyszerre konvergens vagy divergens. Ennek következménye, hogy egy sor véges sok tagjának a megváltoztatásával nem változik a sor konvergenciája.

Vigyázat! Itt csak a konvergencia/divergencia tényéről van szó, és ez nem jelenti azt hogy a sorösszegek is megegyeznek. Ekvikonvergens sorok összege különböző is lehet. ■

Abszolút és feltételesen konvergens sorok

3. definíció. *A $\sum a_n$ végtelen sor*

- ***abszolút konvergens**, ha a $\sum |a_n|$ sor konvergens,*
- ***feltételesen konvergens**, ha a $\sum a_n$ sor konvergens, de nem abszolút konvergens.*

5. tétel. *Ha a $\sum a_n$ sor abszolút konvergens, akkor konvergens is.*

Bizonyítás. Ha a $\sum |a_n|$ sor konvergens, akkor a sorokra vonatkozó Cauchy-féle konvergencia-kritérium szerint

$$\forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz} \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall\, m > n > n_0 : \quad \Big| |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_m| \Big| < \varepsilon.$$

Mivel

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_m| < \varepsilon,$$

ezért a kritérium teljesül a $\sum a_n$ sorra is. ■

Megjegyzések

1. Ha egy konvergens pozitív tagú sor tetszőleges számú tagjainak előjelét mínuszra cseréljük, akkor abszolút konvergens sort kapunk. Így például az

$$1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} - \frac{1}{7^2} + \cdots$$

sor abszolút konvergens, hiszen a

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots$$

szuperharmonikus sor konvergens.

2. A tétel állításának a megfordítása nem igaz: egy konvergens sor nem feltétlenül abszolút konvergens. Meg fogjuk majd mutatni azt, hogy a

$$\sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

Leibniz-sor konvergens, de az abszolút értékeiből képzett

$$\sum_{n=1} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

harmonikus sor divergens. A Leibniz-sor tehát például egy feltételesen konvergens sor. ■

Nemnegatív tagú sorok

Érdemes külön foglalkozni azokkal a sorokkal, amelyeknek minden tagja nagyobb vagy egyenlő mint nulla. Ezeket **nemnegatív tagú soroknak** nevezzük.

6. tétel. *Egy nemnegatív tagú sor akkor és csak akkor konvergens, ha a részletösszegeiből álló sorozat korlátos.*

Bizonyítás. A $\sum a_n$ nemnegatív tagú sor (s_n) részletösszegeinek a sorozata monoton növekvő, hiszen $s_{n+1} - s_n = a_{n+1} \geq 0$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Ekkor csak két eset lehetséges.

- (s_n) korlátos, és így a monotonitás miatt konvergens. Ekkor a $\sum a_n$ sor is konvergens.
- (s_n) nem korlátos, és így a monotonitás miatt $(+\infty)$-hez tart. Ekkor a sor divergens. ■

Megjegyzések

1. A tétel bizonyításából látható, hogy ha a $\sum a_n$ nemnegatív tagú sor divergens, akkor az összege $+\infty$, azaz $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$.

2. Az előző tétel állítása érvényben marad, ha a sor csak véges sok negatív tagot tartalmaz, mert ekkor (s_n) egy index után már monoton növekvő sorozat lesz. Hasonló állítás fogalmazható meg nempozitív tagú végtelen sorokra. Más a helyzet, ha a sor végtelen sok pozitív és negatív tagot is tartalmaz. ■

7. tétel: Összehasonlító kritériumok. *Legyenek $\sum a_n$ és $\sum b_n$ nemnegatív tagú sorok. Tegyük fel, hogy*

$$\exists\, N \in \mathbb{N}: \quad 0 \leq a_n \leq b_n \quad \forall\, n \geq N \text{ indexre.}$$

Ekkor

1^o *Majoráns kritérium:* *ha a $\sum b_n$ sor konvergens, akkor $\sum a_n$ sor is konvergens.*

2^o *Minoráns kritérium:* *ha a $\sum a_n$ sor divergens, akkor a $\sum b_n$ sor is divergens.*

Bizonyítás. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $a_n \leq b_n$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, hiszen véges sok tag megváltozásával egy sor konvergenciája nem változik. Jelölje (s_n), illetve (t_n) a $\sum a_n$, illetve a $\sum b_n$ sorok részletösszegeiből álló sorozatokat. A feltevésünk miatt $s_n \leq t_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Ekkor a nemnegatív tagú sorok konvergenciáról szóló tétel szerint

a) ha a $\sum b_n$ sor konvergens, akkor (t_n) korlátos, így (s_n) is az. Ezért a $\sum a_n$ sor is konvergens.

b) ha $\sum a_n$ sor divergens, akkor (s_n) nem korlátos, így (t_n) sem az. Ezért a $\sum b_n$ sor is divergens.

■

A gyök- és a hányadoskritérium

8. tétel: A Cauchy-féle gyökkritérium. *Tekintsük a $\sum a_n$ végtelen sort, és tegyük fel, hogy létezik az*

$$A := \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in \overline{\mathbb{R}}$$

határérték. Ekkor

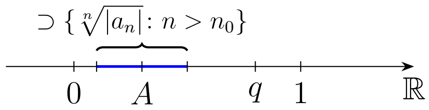
1° $0 \le A < 1$ *esetén a* $\sum a_n$ *sor abszolút konvergens (tehát konvergens is),*

2° $A > 1$ *esetén a* $\sum a_n$ *sor divergens,*

3° $A = 1$ *esetén a* $\sum a_n$ *sor lehet konvergens is, divergens is.*

Bizonyítás. Mivel $\sqrt[n]{|a_n|} \ge 0$ $(n \in \mathbb{N})$, ezért $A \ge 0$.

1° Tegyük fel, hogy $\boxed{0 \le A < 1}$. Vegyünk egy A és 1 közötti q számot!

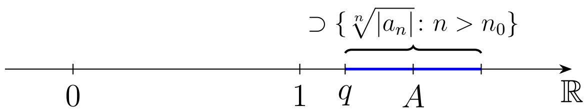


$$\lim \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) \iff \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \quad n > n_0 : \quad \sqrt[n]{|a_n|} < q, \quad \text{azaz}$$

$$|a_n| < q^n \quad \forall\, n > n_0.$$

Mivel $0 < q < 1 \implies \sum\limits_{n=n_0} q^n$ mértani sor konvergens. A majoráns kritérium szerint $\sum |a_n|$ konvergens, vagyis a $\sum a_n$ végtelen sor abszolút konvergens (tehát konvergens is).

2° Tegyük fel, hogy $\boxed{A > 1}$. Vegyünk most egy 1 és A közötti q számot!



Mivel $A = \lim \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$, ezért $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, hogy ha $n > n_0$, akkor $\sqrt[n]{|a_n|} > q$, azaz $|a_n| > q^n > 1$. Ebből következik, hogy $\lim (a_n) \ne 0$, és így a $\sum a_n$ sor divergens.

3° Tegyük fel, hogy $\boxed{A = 1}$. Ekkor

- a $\sum \frac{1}{n}$ **divergens** sor esetében $|a_n| = \frac{1}{n}$, azaz $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$;
- a $\sum \frac{1}{n^2}$ **konvergens** sor esetében $|a_n| = \frac{1}{n^2}$, azaz $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = 1$. ■

9. tétel: A d'Alembert-féle hányadoskritérium. *Tegyük fel, hogy a $\sum a_n$ végtelen sor tagjai közül egyik sem 0 és létezik az*

$$A := \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \in \overline{\mathbb{R}}$$

határérték. Ekkor

1° $0 \le A < 1$ *esetén a* $\sum a_n$ *sor abszolút konvergens (tehát konvergens is),*

2° $A > 1$ *esetén a* $\sum a_n$ *sor divergens,*

3° $A = 1$ *esetén a* $\sum a_n$ *sor lehet konvergens is, divergens is.*

Bizonyítás. Világos, hogy $A \ge 0$.

1° Legyen $\boxed{0 \le A < 1}$ és vegyünk egy olyan q számot, amire $0 \le A < q < 1$ teljesül. Ekkor

$$A := \lim \left(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right) \quad \Longrightarrow \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall\, n > n_0 : \quad \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < q, \quad \text{azaz} \quad |a_{n+1}| < q|a_n|.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$|a_{n_0+1}| < q|a_{n_0}|, \quad |a_{n_0+2}| < q|a_{n_0+1}|, \quad \ldots \quad , \quad |a_n| < q|a_{n-1}|$$

minden $n > n_0$ esetén. Így

$$|a_n| < q|a_{n-1}| < q^2|a_{n-2}| < q^3|a_{n-3}| < \cdots < q^{n-n_0}|a_{n_0}| = q^{-n_0}|a_{n_0}|q^n = aq^n,$$

ahol $a = q^{-n_0}|a_{n_0}|$ egy n-től független konstans. A $\sum aq^n$ mértani sor konvergens, mert $0 < q < 1$. Ezért a majoráns kritérium szerint a $\sum |a_n|$ sor konvergens, vagyis a $\sum a_n$ végtelen sor abszolút konvergens (tehát konvergens is).

2° Legyen $\boxed{A > 1}$ és vegyünk most egy olyan q számot, amire $1 < q < A$ teljesül. Ekkor

$$A := \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \quad \Longrightarrow \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \forall\, n > n_0 : \quad \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > q, \quad \text{azaz} \quad |a_{n+1}| > q|a_n| > |a_n|.$$

Ebből következik, hogy $\lim (a_n) \ne 0$, így a $\sum a_n$ sor divergens.

3° Tegyük fel, hogy $\boxed{A = 1}$. Ekkor

- $\sum \frac{1}{n}$ **divergens** sor esetében $|a_n| = \frac{1}{n}$, azaz $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1,$
- $\sum \frac{1}{n^2}$ **konvergens** sor esetében $|a_n| = \frac{1}{n^2}$, azaz $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1.$ ■