# 2. előadás

## VALÓS SOROZATOK 1.

Valós-valós függvények tulajdonságainak a vizsgálatát speciális $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú függvényekkel, a sorozatokkal kezdjük.

A korábbi tanulmányaikban már megismerkedtek a sorozatokkal. Először emlékeztetünk a sorozat definíciójára és néhány elemi tulajdonságára. Ezután bevezetjük az analízis alapvető fogalmait. Megadjuk a sorozat **konvergenciájának**, valamint a **határértékének** a definícióját, majd felsoroljuk a határértékkel kapcsolatos legfontosabb eredményeket.

## A sorozat fogalma, megadása

**Definíció.** *Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ függvényt (**valós**) **sorozatnak** nevezzük. Az*

$$a(n) =: a_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

*helyettesítési érték a sorozat $n$-**edik** (vagy $n$-**indexű**) **tagja**, a tag sorszámát jelző szám a tag **indexe**.*

Egy sorozat megadásához azt kell megmondanunk, hogy az $n \in \mathbb{N}$ számhoz melyik valós számot rendeljük. Például:

$$a_n := n^2 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

**Jelölések:**

$$a, \qquad (a_n), \qquad (a_0, a_1, a_2, \ldots).$$

Így például

$$(n^2) \qquad \text{vagy} \qquad (0, 1, 4, 9, \ldots)$$

azt a sorozatot jelöli, amelynek $n$-edik ($n \in \mathbb{N}$) tagja $n^2$.

Az

$$a_n := \sqrt{n-3}, \quad n = 3, 4, 5, \ldots$$

függvényt is sorozatnak tekintjük. Átalában: rögzített $M \in \mathbb{N}$ esetén az

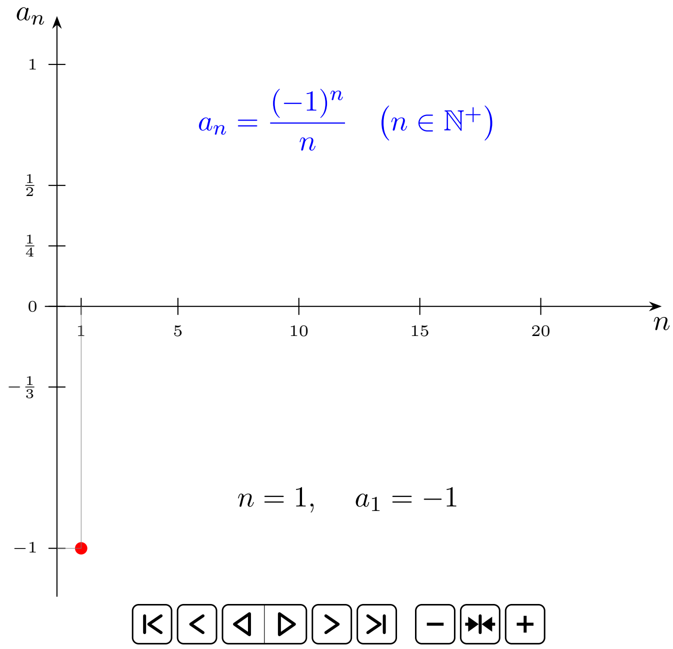
$$a : \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq M\} \to \mathbb{R}$$

**függvényt is sorozatnak fogjuk nevezni.**

A függvények egyenlőségével kapcsolatban tett megállapodásunkból következik, hogy az $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ és a $(b_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat **egyenlő**, ha bármely index esetén az azonos indexű tagok egyenlők, azaz $a_n = b_n$ minden $n \in \mathbb{N}$ számra teljesül.

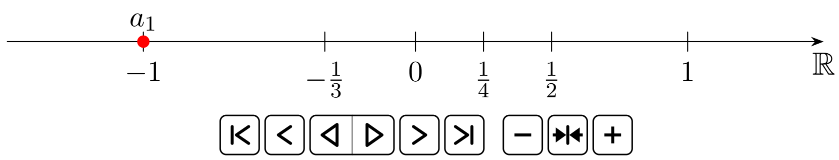
## Sorozatok szemléltetése

(a) **Koordináta-rendszerben** (sorozat specális valós-valós függvény)




(b) **Számegyenesen**

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n} \quad \left(n \in \mathbb{N}^+\right)$$




## Sorozatok megadása

(a) **Explicit módon**. Például:

- $a_n := 3n^2 + 2 \quad (n \in \mathbb{N})$,
- $a_n := \sqrt{n^2 - 100} \quad (n = 10, 11, 12, \ldots)$,
- $a_n := \begin{cases} 2n^2, & \text{ha } n = 1, 3, 5, \ldots \\ n, & \text{ha } n = 2, 4, 6, \ldots. \end{cases}$

(b) **Rekurzív módon**. Például:

- $a_0 := 1, \quad a_n := a_{n-1} + 2 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \quad$ (*egylépéses rekurzió*);
- $a_0 := 1, \quad a_1 := 1 \quad a_n := a_{n-1} + a_{n-2} \qquad (n = 2, 3, 4, \ldots) \quad$ (*kétlépéses rekurzió*)
  a **Fibonacci-sorozat**.

**Megjegyzés a rekurzív sorozatokról.** Felvetődik az a kérdés, hogy rekurzióval vajon „jól definiáltunk-e” egy sorozatot, vagyis a megadott feltételek egyértelműen meghatározzák-e a sorozat tagjait. Erre a kérdésre válaszol az ún. **rekurzió tétel**. ■

## Példák

$\boxed{1.}$ **A harmonikus sorozat:** $a_n := \dfrac{1}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$.

$\boxed{2.}$ **A számtani sorozat:** Adott $\alpha, d \in \mathbb{R}$ esetén

$$a_n := \alpha + nd \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ezt a sorozatot rekurzív módon is megadhatjuk:

$$a_0 := \alpha, \quad a_{n+1} := a_n + d \ \ (n = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

$\boxed{3.}$ **A mértani** (vagy **geometriai**) **sorozat:** Adott $\alpha, q \in \mathbb{R}$ esetén

$$a_n := \alpha\, q^n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ezt a sorozatot rekurzív módon így adjuk meg:

$$a_0 := \alpha, \quad a_{n+1} := q \cdot a_n \ \ (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)\,.$$

# Elemi tulajdonságok, műveletek

Az $(a_n)$ valós sorozat

- **monoton növekedő** (jelben $\nearrow$), ha

$$a_n \le a_{n+1} \quad \text{minden } n \in \mathbb{N} \text{ esetén;}$$

- **szigorúan monoton növekedő** (jelben $\uparrow$), ha

$$a_n < a_{n+1} \quad \text{minden } n \in \mathbb{N} \text{ esetén;}$$

- **monoton csökkenő** (jelben $\searrow$), ha

$$a_{n+1} \le a_n \quad \text{minden } n \in \mathbb{N} \text{ esetén;}$$

- **szigorúan monoton csökkenő** (jelben $\downarrow$), ha

$$a_{n+1} < a_n \quad \text{minden } n \in \mathbb{N} \text{ esetén.}$$

Az $(a_n)$ sorozatot **monoton** sorozatnak nevezzük, ha a fenti esetek valamelyike áll fenn.

**Megjegyzés.** Sorozat monotonitását sokszor a teljes indukció elvével igazolhatjuk. Gyakran hasznos lehet, ha a monotonitás definíciójában szereplő egyenlőtlenség helyett egy vele ekvivalens egyenlőtlenséget igazolunk. Például:

$$a_{n+1} \geq a_n \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \Longleftrightarrow \quad a_{n+1} - a_n \geq 0 \quad (n \in \mathbb{N});$$

ha $a_n > 0$ ninden $n$-re, akkor

$$a_{n+1} \geq a_n \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \quad (n \in \mathbb{N}). \quad \blacksquare$$

A következő egyszerű, de fontos tulajdonság a sorozat korlátossága. Az $(a_n)$ sorozat

- **alulról korlátos**, ha

$$\exists\, k \in \mathbb{R}, \text{ hogy } k \leq a_n \ (n \in \mathbb{N});$$

- **felülről korlátos**, ha

$$\exists\, K \in \mathbb{R}, \text{ hogy } a_n \leq K \ (n \in \mathbb{N});$$

- **korlátos**, ha alulról is, felülről is korlátos, azaz

$$\exists\, K \in \mathbb{R}^+, \text{ hogy } |a_n| \leq K \ (n \in \mathbb{N}).$$

**Megjegyzés.** Sorozat korlátosságát, például egy „megsejtett” felső korlátot sok esetben a teljes indukció módszerével igazolhatjuk. $\blacksquare$

## Műveletek sorozatokkal

Adott sorozatokból kiindulva **algebrai műveletekkel** új sorozatokat képezhetünk. Az $(a_n)$ és a $(b_n)$ sorozat

- **összegén** az

$$(a_n) + (b_n) := (a_n + b_n),$$

- **szorzatán** az

$$(a_n) \cdot (b_n) := (a_n \cdot b_n) \ \text{ és}$$

- $b_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N})$ esetén a **hányadosán** az

$$\frac{(a_n)}{(b_n)} := \left(\frac{a_n}{b_n}\right)$$

sorozatot értjük.

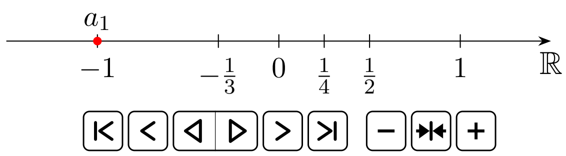
# Konvergens sorozatok

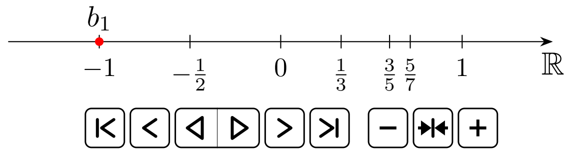
Most a sorozatok kevésbé egyszerű, de igen fontos tulajdonságával, a **konvergencia** fogalmával fogunk megismerkedni.

## A konvergencia motivációja és szemléletes jelentése

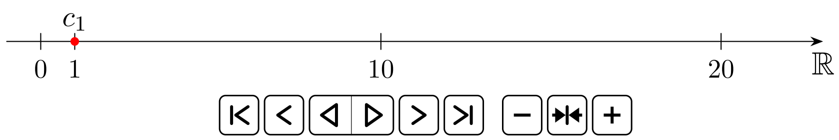
Ábrázoljuk a számegyenesen például a következő sorozatokat:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n} \quad \left(n \in \mathbb{N}^+\right) \qquad\qquad b_n = (-1)^{n+1}\left(1 - \frac{2}{n}\right) \quad \left(n \in \mathbb{N}^+\right)$$




$$c_n = n \quad \left(n \in \mathbb{N}^+\right)$$




Szemléletesen világos, hogy az $(a_n)$ sorozat tagjai 0 körül „sűrűsödnek”, amit kifejezhetünk úgy is, hogy „a nagy indexű tagok közel vannak 0-hoz”. A $(b_n)$ sorozat tagjainak egyik része $(-1)$ körül, a másik része 1 körül „sűrűsödik”, a $(c_n)$ sorozatnak pedig egyetlen valós sűrűsödési helye sincs.

Egy sorozatot akkor fogunk **konvergensnek** nevezni, ha a tagjai egyetlen szám körül sűrűsödnek. Ez igaz az $(a_n)$ sorozatra. Azt látjuk, hogy ha $n$ nagy, akkor $(-1)^n/n$ értéke „nagyon kicsi”, azaz nagyon közel van 0-hoz. Pontosabban, 0 körül akármilyen kis intervallumot véve, ha $n$ elég nagy, akkor $(-1)^n/n$ ezen az intervallumon **belül** van. Vegyük észre, hogy ez pontosan azt jelenti, hogy csak véges sok indexre lesz $(-1)^n/n$ ezen az intervallumon **kívül**.

## A konvergencia fogalma

**Definíciók.**

**1°** *Azt mondjuk, hogy az* $(a_n): \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *sorozat* ***konvergens****, ha*

$$\exists\, A \in \mathbb{R}, \text{ hogy } \forall\, \varepsilon > 0 \text{ számhoz } \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \text{ hogy } \forall\, n > n_0 \text{ indexre } |a_n - A| < \varepsilon. \tag{1}$$

*Ekkor az* $A$ *számot a sorozat* ***határértékének*** *nevezzük, és az alábbi szimbólumok valamelyikével jelöljük:*

$$\lim\,(a_n) := A \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n := A \qquad a_n \to A \ (n \to +\infty).$$

**2°** *Az* $(a_n)$ *sorozat* ***divergensnek*** *nevezzük, ha nem konvergens, azaz*

$$\forall\, A \in \mathbb{R} \text{ számhoz } \exists\, \varepsilon > 0, \text{ hogy } \forall\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ indexhez } \exists\, n > n_0 \text{ index, amelyre } |a_n - A| \ge \varepsilon. \tag{2}$$

**Megjegyzések.**

**1.** Az $\varepsilon > 0$ számot **hibakorlátnak**, $n_0$-at pedig **küszöbindexnek** nevezzük. Világos, hogy $n_0$ függ az $\varepsilon$-tól, ezért szokás ezt az *$\varepsilon$-hoz tartozó küszöbindexnek* is nevezni és $n_0(\varepsilon)$-nal jelölni.

Egy adott $\varepsilon$ hibakorláthoz tartozó küszöbindex nem egyértelmű, ui. bármely $n_0$-nál nagyobb természetes szám is egy „jó” küszöbindex.

**2.** Megállapodunk abban, hogy (1)-et, illetve (2)-őt így rövidítjük:

$$\exists\, A \in \mathbb{R}, \quad \forall\, \varepsilon > 0\text{–}hoz \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall\, n > n_0: \quad |a_n - A| < \varepsilon. \tag{1'}$$

$$\forall\, A \in \mathbb{R}\text{-hez} \quad \exists\, \varepsilon > 0, \quad \forall\, n_0 \in \mathbb{N}\text{-hez} \quad \exists\, n > n_0: \quad |a_n - A| \ge \varepsilon. \tag{2'}$$

■

Először azt mutatjuk meg, hogy minden sorozatnak legfeljebb egy határértéke lehet.

**Tétel: A határérték egyértelmű.** *Ha az* $(a_n): \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *sorozat konvergens, akkor a konvergencia definíciójában szereplő* $A$ *szám egyértelműen létezik.*

**Bizonyítás.** Tegyük fel, hogy az $(a_n)$ sorozatra (1) az $A_1$ és az $A_2$ számokkal is teljesül. Indirekt módon tegyük fel azt is, hogy $A_1 \ne A_2$. Ekkor $\forall\, \varepsilon > 0$ számhoz

$$\exists\, n_1 \in \mathbb{N}, \ \forall\, n > n_1: \ |a_n - A_1| < \varepsilon \ \text{ és}$$
$$\exists\, n_2 \in \mathbb{N}, \ \forall\, n > n_2: \ |a_n - A_2| < \varepsilon.$$

Válasszuk itt speciálisan az

$$\varepsilon := \frac{|A_1 - A_2|}{2}$$

(pozitív) számot. Az ennek megfelelő $n_1, n_2$ indexeket figyelembe véve legyen

$$n_0 := \max\{n_1, n_2\}.$$

Ha $n \in \mathbb{N}$ és $n > n_0$, akkor nyilván $n > n_1$ és $n > n_2$ is fennáll, következésképpen

$$|A_1 - A_2| = \big|(A_1 - a_n) + (a_n - A_1)\big| \le \big|a_n - A_1\big| + \big|a_n - A_2\big| < \varepsilon + \varepsilon = \big|A_1 - A_2\big|,$$

amiből (a nyilván nem igaz) $\big|A_1 - A_2\big| < \big|A_1 - A_2\big|$ következne. Ezért csak $A_1 = A_2$ lehet. ■

**1. példa.** *A definíció alapján bizonyítsuk be, hogy az*

$$a_n := \frac{(-1)^n}{n} \qquad (n \in \mathbb{N}^+)$$

*sorozat konvergens és* 0 *a határértéke.*

**Megoldás.** Azt kell megmutatnunk, hogy

$$(*) \qquad \forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz } \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \ \ \forall\, n > n_0 : \quad |a_n - 0| < \varepsilon.$$

Legyen $\varepsilon > 0$ egy rögzített valós szám. Ekkor $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$|a_n - 0| = \left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad 1 < n\,\varepsilon.$$

A valós számok arkhimédészi tulajdonságából következik, hogy $\varepsilon$-hoz létezik olyan $n_0 \in \mathbb{N}^+$ természetes szám, amelyre $1 < n_0 \cdot \varepsilon$ (például az $1/\varepsilon$ szám $\big[1/\varepsilon\big]$-nal jelölt **egész része** rendelkezik ezzel a tulajdonsággal). Ha $\mathbb{N}^+ \ni n > n_0$, akkor az $1 < n_0\,\varepsilon < n\,\varepsilon$ egyenlőtlenség is fennáll. Azt kaptuk tehát, hogy adott $\varepsilon > 0$ esetén

$$|a_n - 0| = \left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad \mathbb{N} \ni n > n_0 := \left[\frac{1}{\varepsilon}\right],$$

így $\varepsilon > 0$-hoz $n_0$ egy alkalmas küszöbindex.

Mivel $\varepsilon > 0$ tetszőleges, ezért $(*)$ valóban teljesül. Ez azt jelenti, hogy

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

(Világos, hogy adott $\varepsilon > 0$-hoz az imént megadott $n_0$ küszöbindexnél nagyobb természetes szám is jó küszöbindex. A küszöbindex megadásánál nem törekszünk a legkisebb küszöbindex meghatározására.) ■

**2. példa.** *Mutassuk meg, hogy az*

$$a_n := (-1)^n \quad (n \in \mathbb{N})$$

*sorozat divergens.*

**Megoldás.** Az állítással ellentétben tegyük fel azt, hogy a sorozat konvergens és $A \in \mathbb{R}$ a határértéke. A konvergencia definíciója szerint ez azt jelenti, hogy

$$\forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz } \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \ \ \forall\, n > n_0 : \quad |a_n - A| < \varepsilon.$$

Legyen $\varepsilon = 1$. Ekkor

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall\, n > n_0 : \quad |a_n - A| < 1.$$

Így,

$$\begin{array}{llllll} \text{ha } n > n_0 \text{ páratlan} & \Longrightarrow & a_n = (-1)^n = -1 & \Longrightarrow & |(-1) - A| = |1 + A| < 1, \\ \text{ha } n > n_0 \text{ páros} & \Longrightarrow & a_n = (-1)^n = 1 & \Longrightarrow & |1 - A| < 1. \end{array}$$

Azt kaptuk tehát, hogy az $A$ határértékre $|1 + A| < 1$ és $|1 - A| < 1$ is teljesül. Ebből az következik, hogy

$$2 = |1 - (-1)| = |(1 - A) + (A - (-1))| \leq |1 - A| + |A + 1| < 1 + 1 = 2, \text{ azaz } 2 < 2.$$

Ez az ellentmondás azt bizonyítja, hogy az $(a_n)$ sorozat divergens. ■

Vezessük be valamilyen $A \in \mathbb{R}$ és $r > 0$ esetén az $A$ **középpontú** $r$ **sugarú környezet** fogalmát az alábbiak szerint:

$$K_r(A) := (A - r, A + r).$$

Esetenként pusztán $K(A)$-t írunk, ha az adott szituációban az $r$ sugár nem játszik szerepet.

Az $|a_n - A| < \varepsilon$ egyenlőtlenség azzal ekvivalens, hogy

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon,$$

ami azt jelenti, hogy $a_n$ eleme az $A$ középpontú $\varepsilon$ sugarú $K_\varepsilon(A)$ környezetnek, azaz $a_n \in K_\varepsilon(A)$.

Az előzőekből következik, hogy

(3) $$\boxed{\lim (a_n) = A \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall\, n > n_0 : \quad |a_n - A| < \varepsilon}\,.$$

(4) $$\lim (a_n) = A \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall\, n > n_0 : \quad a_n \in K_\varepsilon(A)\,.$$

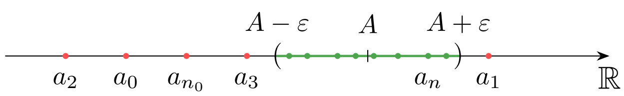
Mivel a küszöbindex előtt csak véges sok index van, ezért

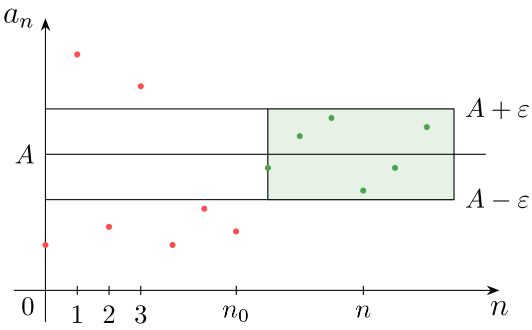
(5) $$\lim (a_n) = A \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0 \text{ esetén az } \big\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \notin K_\varepsilon(A)\big\} \text{ véges halmaz.}$$

Az $(a_n)$ sorozat pedig pontosan akkor divergens, ha

(6) $$\forall\, A \in \mathbb{R}\text{-hoz } \exists\, \varepsilon > 0, \quad \forall\, n_0 \in \mathbb{N}\text{-hez } \exists\, n > n_0 : \quad |a_n - A| \geq \varepsilon.$$

A határérték fogalmát szemléltetik az alábbi ábrák:






### Megjegyzések

**1.** A fentieket célszerű szavakkal is megfogalmazni.

(4)-et például így: „Az $(a_n)$ sorozatnak akkor és csak akkor határértéke $A$, ha ennek tetszőleges környezete tartalmazza a sorozat minden, alkalmas küszöbindex utáni tagját."

(5)-öt például így: „Az $(a_n)$ sorozatnak a határértéke $A$ pontosan akkor, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén a sorozatnak csak véges sok tagja esik a $K_\varepsilon(A)$ környezeten kívül."

Szemléletesen, de „pongyolán" fogalmazva modhatjuk ezt is: „Az a tény, hogy az $(a_n)$ sorozatnak $A$ a határértéke, azt jelenti, hogy *a sorozat nagy indexű tagjai közel vannak az $A$ számhoz*". Ha tehát egy sorozat határértékét keressük, akkor azt kell megvizsgálnunk, hogy a sorozat nagy indexű tagjai hogyan „viselkednek".

(6)-ot pedig így fogalmazhatjuk meg: „Az $(a_n)$ sorozat pontosan akkor divergens, ha minden $A \in \mathbb{R}$ számnak van olyan $K_\varepsilon(A)$ környezete, hogy a sorozat tetszőlegesen nagy $n_0$ indexű tagjánál van olyan nagyobb $n$ indexű tag, amelyik nincsen benne a $K_\varepsilon(A)$ környezetben."

**2.** Sorozatok konvergenciájának a vizsgálata és határértékének a meghatározása a *definíció alapján* igen sok esetben nem egyszerű feladat. Hamarosan ismertetünk olyan eredményeket, amelyek megkönnyítik az ilyen feladatok megoldását.

**3.** A konvergencia fogalmáról, történeti megjegyzések. ■

## Konvergens sorozatok alaptulajdonságai

**1. tétel.** *Tegyük fel, hogy az $(a_n)$ és a $(b_n)$ sorozatokra igaz a következő:*

$$\exists\, N \in \mathbb{N},\ \textit{hogy}\ \forall\, n > N\ \textit{indexre}\ a_n = b_n.$$

*Ekkor az $(a_n)$ sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha $(b_n)$ is konvergens, továbbá az utóbbi esetben* $\lim(a_n) = \lim(b_n)$.

**Bizonyítás.**

$\boxed{\Longrightarrow}$ Tegyük fel, hogy az $(a_n)$ sorozat konvergens és $\lim(a_n) = A$. Ekkor

$$\forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz}\ \ \exists\, n_1 \in \mathbb{N},\ \ \forall\, n > n_1 :\ \ a_n \in K_\varepsilon(A).$$

Tekintsünk egy rögzített $\varepsilon > 0$ valós számot, és legyen $n_0 := \max\{n_1, N\}$. Ha $n > n_0$, akkor $b_n = a_n \in K_\varepsilon(A)$ is igaz, ezért a $(b_n)$ sorozat is konvergens, és $\lim(b_n) = A$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Hasonlóan igazolható. ■

**Megjegyzések**

**1.** Az állítás azt fejezi ki, hogy egy sorozat konvergenciáját és a határértékét a sorozat „első néhány" (akár az első százezer) tagja nem befolyásolja. Másként fogalmazva: ha egy sorozat (legfeljebb) véges sok tagját megváltoztatjuk, akkor ez sem a konvergencia tényén, sem pedig (ha konvergens sorozatból indulunk ki) a határértékén nem változtat.

**2.** A fentiek motiválják az alábbi elnevezések bevezetését. Ha valamely sorozat tagjaira vonatkozó állítás a sorozat véges sok tagját kivéve teljesül, akkor azt mondjuk, hogy a szóban forgó állítás a sorozat **majdnem minden tagjára** (vagy majdnem minden indexre) teljesül. Ha tehát minden $n \in \mathbb{N}$-re $T(n)$ egy állítás, akkor megállapodunk abban, hogy a „$T(n)$ *majdnem minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén igaz*" megfogalmazás azt jelenti, hogy

$$\exists\, N \in \mathbb{N}, \text{ hogy } \forall\, n > N \text{ indexre } T(n) \text{ igaz.}$$

A „majdnem minden" kitételt a legtöbbször így rövidítjük: m.m.

Ezt a tényt egy másik szóhasználattal úgy fejezhetjük ki, hogy $T(n)$ **minden elég nagy** $n$**-re teljesül**.

Például az előző tétel feltételét röviden így írhatjuk le: *Tegyük fel, hogy az* $(a_n)$ *és a* $(b_n)$ *sorozatokra*

$$\boxed{a_n = b_n \quad (m.m.\ n \in \mathbb{N})},$$

*vagy*

$$\boxed{a_n = b_n \ \ \textit{minden elég nagy } n\textit{-re}}. \ ■$$

A következő állítás a konvergencia és a korlátosság kapcsolatára vonatkozik. Azt fejezi ki, hogy a **korlátosság szükséges feltétele a konvergenciának.**

**2. tétel.** *Ha az* $(a_n)$ *sorozat konvergens, akkor korlátos is.*

**Bizonyítás.** Tegyük fel, hogy $(a_n)$ konvergens és $\lim (a_n) = A \in \mathbb{R}$. Válasszuk a konvergencia definíciója szerinti jelöléssel $\varepsilon$-t 1-nek. Ehhez a hibakorláthoz

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall\, n > n_0 : \quad |a_n - A| < 1.$$

Így

$$|a_n| = \big|(a_n - A) + A\big| \le |a_n - A| + |A| < 1 + |A| \quad (n > n_0).$$

Ha $n \le n_0$, akkor

$$|a_n| \le \max\big\{|a_0|,\ |a_1|,\ \ldots,\ |a_{n_0}|\big\}.$$

Legyen

$$K := \max\big\{|a_0|,\ |a_1|,\ \ldots,\ |a_{n_0}|,\ 1 + |A|\big\}.$$

Ekkor $|a_n| \le K$ minden $n \in \mathbb{N}$ indexre, és ez azt jelenti, hogy az $(a_n)$ sorozat korlátos. ■

**Megjegyzés.** Az állítás megfordítása nem igaz. Például a $\big((-1)^n\big)$ sorozat korlátos, de nem konvergens. A konvergenciának tehát a korlátosság **szükséges, de nem elégséges** feltétele. ■

Most bevezetjük a **részsorozat** fogalmát. Egy sorozat részsorozatát úgy kapjuk, hogy az eredeti sorozatból elhagyunk néhány (esetleg végtelen sok) tagot, végtelen sokat megtartva.

**Definíció.** *Legyen $a = (a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ egy valós sorozat és $\nu = (\nu_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ egy szigorúan monoton növekedő sorozat (röviden: $\nu$ egy* ***indexsorozat****). Ekkor az $a \circ \nu$ függvény is sorozat, amelyet az $a$ sorozat $\nu$ indexsorozat által meghatározott* ***részsorozatának*** *nevezünk. Az $a \circ \nu$ sorozat $n$-edik tagja:*

$$\big(a \circ \nu\big)(n) = a\big(\nu_n\big) = a_{\nu_n} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

*így*

$$a \circ \nu = \big(a_{\nu_n}\big).$$

**Megjegyzés.** A függvények kompozíciójának a definíciója alapján

$$\mathcal{D}_{a \circ \nu} = \big\{n \in \mathcal{D}_\nu \mid \nu(n) \in \mathcal{D}_a\big\} = \big\{n \in \mathbb{N} \mid \nu(n) \in \mathbb{N}\big\} = \mathbb{N},$$

ezért az $a \circ \nu$ függvény valóban sorozat.

Szemléletesen szólva, az $a = (a_n)$ sorozatból az $a \circ \nu = \big(a_{\nu_n}\big)$ részsorozatot úgy kapjuk, hogy az $a = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ sorozatból kiválasztjuk (kiszedjük) az egyre nagyobb indexű $\nu_0, \nu_1, \nu_2, \ldots$ tagokat. Az $\big(a_{\nu_n}\big)$ jelölésben az is tükröződik, hogy $a_{\nu_n}$ az $a \circ \nu$ sorozat $n$-edik tagja, az „eredeti” $a = (a_n)$ sorozatnak pedig $\nu_n$-edik tagja.

Például, ha

$$a = \big(a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ \ldots\big)$$

és

$$\nu = (2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \ldots),$$

akkor

$$a \circ \nu = \big(a_2,\ a_4,\ a_6,\ a_8, \ldots\big) \quad \blacksquare$$

A részsorozatok konvergenciájára vonatkoznak a következő állítások:

**3. tétel.**

**1º** *Ha az $a = (a_n)$ sorozat konvergens, akkor tetszőleges $\nu$ indexsorozat esetén az $a \circ \nu$ részsorozat is konvergens és*

$$\lim \big(a \circ \nu\big) = \lim a.$$

**2º** *Tegyük fel, hogy az $(a_n)$ sorozathoz létezik olyan $\nu$ és $\mu$ indexsorozat, amelyre*

$$\lim \big(a \circ \nu\big) \neq \lim \big(a \circ \mu\big).$$

*Ekkor az $(a_n)$ sorozat divergens.*

**Bizonyítás.**

**1º** Tegyük fel, hogy $(a_n)$ konvergens és $\lim (a_n) = A$. A definíció szerint

$$\forall\, \varepsilon > 0 \text{ esetén a } \big\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \notin K_\varepsilon(A)\big\} \text{ halmaz véges.}$$

Ekkor viszont az

$$\{n \in \mathbb{N} \mid a_{\nu_n} \notin K_\varepsilon(A)\} \text{ halmaz is véges,}$$

és ez azt jelenti, hogy az $a \circ \nu$ részsorozat is konvergens és $\lim a \circ \nu = A$.

**2$^o$** Indirekt módon tegyük fel, hogy az $(a_n)$ sorozat konvergens. Ekkor az **1$^o$** állítás miatt $(a_n)$ minden részsorozata is konvergens, és ugyanaz a határértékük. Ez pedig ellentmond a sorozatra tett feltételünknek, ezért $(a_n)$ valóban divergens. ■

A **2$^o$** állítás felhasználásával egy újabb bizonyítást mutatunk a $\big((-1)^n\big)$ sorozat divergenciájára.

**3. példa.** *Mutassuk meg, hogy az*

$$a_n := (-1)^n \quad (n \in \mathbb{N})$$

*sorozat divergens.*

**Megoldás.** Az $(a_n)$ sorozat páros indexű részsorozata $a_{2n} = 1$ $(n \in \mathbb{N})$, azaz $(1, 1, 1, \ldots)$, és ez 1-hez konvergál. A páratlan indexű részsorozata pedig $a_{2n+1} = -1$ $(n \in \mathbb{N})$, azaz $(-1, -1, -1, \ldots)$, és ennek határértéke $-1$. Az előző tétel **2$^o$** állításából következik, hogy a sorozat divergens. ■