gyak09

2022. november 9., szerda 8:14

+/- Szekvencia levezetési szabálya

1. A feladat informálisan: döntsük el hogy egy 1-nél nagyobb természetese szám prím-e.
   $A = (x:\mathbb{N}^+, l:\mathbb{L})$
   $B = (x':\mathbb{N}^+)$
   $Q = (x = x' \wedge x > 1)$
   $R = (Q \wedge l = (\forall j \in [2..x-1] : j \nmid x))$
   A program állapottere $(x:\mathbb{N}^+, \underline{k:\mathbb{N}^+}, l:\mathbb{L})$.

S

S	
$k, l := 2, igaz$	Q'
DO: $k \neq x$	
$l := l \wedge k \nmid x$	Q''
$k := k + 1$	

Legyen $Q' = (Q \wedge k = 2 \wedge l = igaz)$ a szekvencia közbülső állítása, $t : x - k$ terminálófüggvény.
$P = (Q \wedge l = (\forall j \in [2..k-1] : j \nmid x) \wedge k \in [2..x])$
Legyen a ciklusmagnak mint szekvenciának a közbülső állítása Q'', ahol $Q'' = (Q \wedge l = (\forall j \in [2..k] : j \nmid x) \wedge k + 1 \in [2..x] \wedge x - k = t_0)$.
Lásd be hogy az S program megoldja a specifikált feladatot.

A Specifikáció tétele szerint elég belátni, hogy $Q \Rightarrow lf(S, R)$

S szekvencia, ezért helyette elég belátni 2 másik állítást.

1) $Q \Rightarrow lf(\underbrace{(k,l := 2, igaz), Q \wedge k=2 \wedge l=igaz}_{})$

$\underbrace{(Q \wedge k=2 \wedge l=igaz)}^{k \leftarrow 2,\, l \leftarrow igaz} \wedge\ igaz$

$Q \wedge 2=2 \wedge igaz = igaz \wedge igaz$ ✓

2) $(Q \wedge k=2 \wedge l=igaz) \Rightarrow lf(DO, R)$

DO egy ciklus, ezért elég belátni 5 állítást:

I. $(Q \wedge k=2 \wedge l=igaz) \Rightarrow (Q \wedge l=(\forall j \in [2..k-1] : j \nmid x) \wedge k \in [2..x])$

$igaz = (\forall j \in [2..\overset{2}{1}] : j \nmid x)$ $\emptyset$ $\quad 2 \in \underbrace{[2..x]}_{\text{nem üres}}$ $\quad$ Q-ban $x > 1$ $(x:\mathbb{N})$

II. $P \wedge \neg\pi \Rightarrow R$

$(Q \wedge l=(\forall j \in [2..\underset{x-1}{k-1}] : j \nmid x) \wedge k \in [2..x] \wedge k=x) \Rightarrow (Q \wedge (\forall j \in [2..x-1] : j \nmid x) = l)$ ✓

III. $P \Rightarrow \pi \vee \neg\pi$

$(k \neq x) \vee (k = x)$ ✓ $\quad k, x : \mathbb{N}^+$

IV. $P \wedge \pi \Rightarrow t > 0$

$x - k > 0$ ✓

$k \in [2..x]$
$\Downarrow$
$k \leq x \qquad k \neq x$
$0 \leq x-k \qquad 0 \neq x-k$
$0 < x-k$

1. A feladat informálisan: döntsük el hogy egy 1-nél nagyobb természetese szám prím-e.
   $A = (x:\mathbb{N}^+, l:\mathbb{L})$
   $B = (x':\mathbb{N}^+)$
   $Q = (x = x' \wedge x > 1)$
   $R = (Q \wedge l = (\forall j \in [2..x-1] : j \nmid x))$
   A program állapottere $(x:\mathbb{N}^+, k:\mathbb{N}^+, l:\mathbb{L})$.

S

S	
$k, l := 2, igaz$	Q'
$k \neq x$	
$l := l \wedge k \nmid x$	Q'' $\} S_0$
$k := k + 1$	

Legyen $Q' = (Q \wedge k = 2 \wedge l = igaz)$ a szekvencia közbülső állítása, $t : x - k$ terminálófüggvény.
$P = (Q \wedge l = (\forall j \in [2..k-1] : j \nmid x) \wedge k \in [2..x])$
Legyen a ciklusmagnak mint szekvenciának a közbülső állítása Q'', ahol $Q'' = (Q \wedge l = (\forall j \in [2..k] : j \nmid x) \wedge k + 1 \in [2..x] \wedge x - k = t_0)$.
Lásd be hogy az S program megoldja a specifikált feladatot.

V. $P \wedge \pi \wedge t = t_0 \Rightarrow lf(S_0, P \wedge t < t_0)$

Mivel S_0 szekvencia, ezért elég belátni 2 másik állítást.

$r \in [2..x-1] \Leftrightarrow r+1 \in [3..x]$

i) $(Q \wedge l = (\forall j \in [2..r-1]: j \nmid x) \wedge r \in [2..x] \wedge r \neq x \wedge x - r = t_0) \Rightarrow$

① ⑤ ③ ②

$\underbrace{lf(l := l \wedge r \nmid x, Q'')}$

$(Q'')^{l \leftarrow l \wedge r \nmid x} \wedge l \wedge r \nmid x \in \mathbb{L}$

$l:\mathbb{L}$ $r: r \neq 0$

$(Q \wedge (l \wedge r \nmid x) = (\forall j \in [2..r]: j \nmid x) \wedge r+1 \in [2..x] \wedge x - r = t_0)$

① ⑤ ② $r \neq 0$

$\Uparrow$ $\cup|$

$r+1 \in [3..x]$ $r: \mathbb{N}^+$

$\nearrow$

⑤ $l = \forall j \in [2..r-1]: j \nmid x$

$r \nmid x = r \nmid x$ igaz

$\underbrace{l \wedge r \nmid x = \forall j \in [2..r-1]\, j \nmid x \wedge r \nmid x}$

$\forall j \in [2..r]: j \nmid x$

1. A feladat informálisan: döntsük el hogy egy 1-nél nagyobb természetese szám prím-e.
   $A = (x:\mathbb{N}^+, l:\mathbb{L})$
   $B = (x':\mathbb{N}^+)$
   $Q = (x = x' \wedge x > 1)$
   $R = (Q \wedge l = (\forall j \in [2..x-1]: j \nmid x))$
   A program állapottere $(x:\mathbb{N}^+, k:\mathbb{N}^+, l:\mathbb{L})$.

S

$k, l := 2, igaz$		Q'
$k \neq x$		
	$l := l \wedge k \nmid x$	Q''
	$k := k + 1$	

Legyen $Q' = (Q \wedge k = 2 \wedge l = igaz)$ a szekvencia közbülső állítása, $t : x - k$ terminálófüggvény.
$P = (Q \wedge l = (\forall j \in [2..k-1]: j \nmid x) \wedge k \in [2..x])$
Legyen a ciklusmagnak mint szekvenciának a közbülső állítása Q'', ahol $Q'' = (Q \wedge l = (\forall j \in [2..k]: j \nmid x) \wedge k + 1 \in [2..x] \wedge x - k = t_0)$.
Lásd be hogy az S program megoldja a specifikált feladatot.

ii) $(Q \wedge l = (\forall j \in [2..r]: j \nmid x) \wedge r+1 \in [2..x] \wedge x - r = t_0)$

① ② ③ ④

$\Rightarrow \underbrace{lf(r := r+1, P \wedge t < t_0)}$

$(P \wedge t < t_0)^{r \leftarrow r+1} \wedge r+1 \in \mathbb{N}^+$

$r: \mathbb{N}$

igaz

$(Q \wedge l = (\forall j \in [2..r\cancel{+1-1}]: j \nmid x) \wedge r+1 \in [2..x] \wedge x - r - 1 < t_0 \wedge igaz)$

① ② ③ ④ $x - r \mid -x + r + 1$

$0 < 1$

Beláttuk, hogy $Q \Rightarrow lf(S, R)$, tehát S megoldja a specifikált feladatot.

3. A feladat informálisan: adott x egész számokat tartalmazó vektor minden elemét növeljük meg eggyel.

$A = (x{:}\mathbb{Z}^n)$

$B = (x'{:}\mathbb{Z}^n)$

$Q = (x = x')$

$R = (\forall k \in [1..n] : x[k] = x'[k] + 1)$

A program állapottere $(x{:}\mathbb{Z}^n, i{:}\mathbb{N})$.

	S	
	$i := 1$	Q'
DO	$i \neq n+1$	
	$x[i] := x[i] + 1$	$Q'' \wedge n+1-i = t_0$
	$i := i + 1$	

Legyen $Q' = (Q \wedge i = 1)$ a szekvencia közbülső állítása, $t : n+1-i$ terminálófüggvény.
$P = (\forall k \in [1..i-1] : x[k] = x'[k] + 1 \wedge i \in [1..n+1] \wedge \forall k \in [i..n] : x[k] = x'[k])$
Legyen a ciklusmagnak mint szekvenciának a közbülső állítása $Q'' \wedge n+1-i = t_0$, ahol $Q'' = P^{i \leftarrow i+1}$. Lásd be hogy az S program megoldja a specifikált feladatot.

Specifikáció tétele szerint elég belátni, hogy $Q \Rightarrow lf(S, R)$

S szekvencia, ezért elég belátni 2 másik állítást:

1) $\underset{\sim}{Q} \Rightarrow \underbrace{lf(i:=1,\ Q \wedge i=1)}$

$(Q \wedge i=1)^{i \leftarrow 1} \wedge 1 \in \mathbb{N}$

$\underset{\sim}{Q} \wedge \underbrace{1=1}_{\text{igaz}} \wedge \underbrace{1 \in \mathbb{N}}_{\text{igaz}}$

2) $Q' \Rightarrow lf(DO, R)$ Mivel DO ciklus, ezért elég belátni 5 másik állítást:

I. $(\underset{\sim}{Q} \wedge \underline{i=1}) \Rightarrow (\forall k \in [\underbrace{1..\overset{0}{\underset{1}{i-1}}}_{\emptyset}] : x[k] = x'[k] + 1 \wedge i \in [\overset{\text{nem üres}}{1..n+1}] \wedge \underbrace{\forall k \in [\underset{1}{i}..n] : x[k] = x'[k]}_{x = x' \,=\, Q})$ ✓

$1 \in [1..n+1]$ ✓

$n{:}\mathbb{N}$ (a tömb hossza)

II. $P \wedge \neg\pi \Rightarrow R$

$(\underbrace{\forall k \in [1..\underset{n+1-1}{i-1}] : x[k] = x'[k]+1}_{\sim\sim\sim} \wedge \overset{\text{igaz}}{i \in [1..\underset{n+1,\,1 \text{ nem üres}}{n+1}]} \wedge \overset{\text{igaz}}{\forall k \in [\overset{i-1}{i}..n] : x[k] = x'[k]} \wedge \underline{i = n+1}) \Rightarrow$

$\forall k \in \emptyset : (\dots)$

$\forall k \in [1..n] : x[k] = x'[k] + 1$ ✓

III. $P \Rightarrow \underbrace{\pi \vee \neg\pi}$

$i \neq n+1 \vee i = n+1$ ✓ $i, n{:}\mathbb{N}$

IV. $P \wedge \pi \Rightarrow n+1-i > 0$ ✓

$i \in [1..n+1]$

$\Downarrow$

$i \leq n+1$

$0 \leq n+1-i$ $\Big\}$ $n+1-i > 0$

$\pi : i \neq n+1 \Rightarrow 0 \neq n+1-i$

3. A feladat informálisan: adott x egész számokat tartalmazó vektor minden elemét növeljük meg eggyel.

$A = (x{:}\mathbb{Z}^n)$

$B = (x'{:}\mathbb{Z}^n)$

$Q = (x = x')$

$R = (\forall k \in [1..n] : x[k] = x'[k] + 1)$

A program állapottere $(x{:}\mathbb{Z}^n, i{:}\mathbb{N})$.

	S	
	$i := 1$	Q'
S_0	$i \neq n+1$	
	$x[i] := x[i] + 1$	$Q'' \wedge n+1-i = t_0$
	$i := i + 1$	

Legyen $Q' = (Q \wedge i = 1)$ a szekvencia közbülső állítása, $t : n+1-i$ terminálófüggvény.
$P = (\forall k \in [1..i-1] : x[k] = x'[k] + 1 \wedge i \in [1..n+1] \wedge \forall k \in [i..n] : x[k] = x'[k])$
Legyen a ciklusmagnak mint szekvenciának a közbülső állítása $Q'' \wedge n+1-i = t_0$, ahol $Q'' = P^{i \leftarrow i+1}$. Lásd be hogy az S program megoldja a specifikált feladatot.

V. $P \wedge \pi \wedge t = t_0 \Rightarrow lf(S_0, P \wedge t < t_0)$ $\quad (\forall t_0 \in \mathbb{Z}\text{-re})$

A szekvencia levezetési szabálya szerint elég belátni 2 állítást:

i) $(\underbrace{\forall q\in[1..i-1]: x[q]=x'[q]+1}_{1} \wedge i\in[1..n+1] \wedge \forall q\in[i..n]: x[q]=x'[q] \wedge i\neq n+1 \wedge \underbrace{n+1-i=t_0}_{4})$

(2) $x[i]=x'[i] \wedge \forall q\in[i+1..n]: x[q]=x'[q]$

(3) $i\in[1..n]$

$$\Rightarrow \underbrace{lf(x[i]:=x[i]+1,\ P^{i\leftarrow i+1} \wedge n+1-i=t_0)}$$

$x[i] \leftarrow x[i]+1$

$(\forall q\in[1..i+1-1]: x[q]=x'[q]+1 \wedge i+1\in[1..n+1] \wedge \forall q\in[i+1..n]: x[q]=x'[q] \wedge n+1-i=t_0)$

$\wedge\ x[i]+1\in\mathbb{Z} \wedge i\in[1..n]$

értékadás helyes; nem indexelünk ki a tömbből

$(\underbrace{\forall q\in[1..i-1]: x[q]=x'[q]+1}_{1} \wedge x[i]+1 = x'[i]+1$ $\quad /-1$

$x[i]=x'[i]$

$\wedge\ i+1\in[1..n+1] \wedge \forall q\in[i+1..n]: x[q]=x'[q] \wedge \underbrace{n+1-i=t_0}_{4} \wedge \text{igaz} \wedge \underbrace{i\in[1..n]}_{3})$

$i\in[0..n]$

$\Uparrow$

(3) $i\in[1..n]$

ii) $(\underbrace{\forall q\in[1..i]: x[q]=x'[q]+1 \wedge i+1\in[1..n+1] \wedge \forall q\in[i+1..n]: x[q]=x'[q]}_{P^{i\leftarrow i+1}} \wedge n+1-i=t_0)$

$$\Rightarrow \underbrace{lf(i:=i+1,\ P\wedge n+1-i<t_0)}$$

$(P\wedge n+1-i<t_0)^{i\leftarrow i+1} \wedge i+1\in\mathbb{N}$

$(\underbrace{\forall q\in[1..i]: x[q]=x'[q]+1 \wedge i+1\in[1..n+1] \wedge \forall q\in[i+1..n]: x[q]=x'[q]}_{P^{i\leftarrow i+1}} \wedge n+\cancel{1}-i-\cancel{1} < t_0)$

igaz

$n-i < n+1-i \quad /-n+i$

$0<1$

Beláttuk, hogy $Q\Rightarrow lf(S,R)$, tehát S megoldja a specifikált feladatot.