1. előadás

$\boxed{1.}$ A tantárgy honlapja:

https://numanal.inf.elte.hu/~weisz

A honlapon van:

- a követelményrendszer (gyakorlati jegy, vizsgajegy),
- ajánlott irodalmak,
- zárthelyi időpontok,
- az előadások, illetve a gyakorlatok tematikája heti felbontásban,
- részletes előadás-, illetve gyakorlatanyagok,
- egyéb segédanyagok.

$\boxed{2.}$ Előismeretek:

- Matematikai alapok.

$\boxed{3.}$ A félév anyaga:

- A valós számok struktúrája.
- Valós sorozatok.
- Végtelen sorok.
- Függvények határértéke és folytonossága.

$\boxed{4.}$ Előzetes megjegyzések az analízisről:

- Az analízis feladata.
- Az analízis centrális fogalmai (határérték, folytonosság, derivált, integrál).
- Történeti utalások.

$\boxed{5.}$ Az 1. előadás anyaga:

- A valós számokkal kapcsolatos ismeretek kibővítése.
  (Az axiomatikus módszerről.)
- Néhány függvényekre vonatkozó fogalom felidézése.

VALÓS SZÁMOK STRUKTÚRÁJA

A valós számok Dedekind-féle axiómarendszere

Elfogadjuk, hogy létezik a valós számok – $\mathbb{R}$ szimbólummal jelölt – halmaza, amelyet az alábbi tulajdonságok jellemeznek.

$\boxed{\text{I.}}$ **Testaxiómák:**
$\mathbb{R}$-en értelmezve van az **összeadás** és a **szorzás** művelete, és ezekre nézve $\mathbb{R}$ *test*et alkot. Ez azt jelenti, hogy:

I.1. Értelmezve van egy

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad +(x, y) =: x + y$$

függvény (az **összeadás művelete**), amelyre a következők teljesülnek:

(i) *kommutativitás*: $x + y = y + x$ $(x, y \in \mathbb{R})$;
(ii) *asszociativitás*: $(x + y) + z = x + (y + z)$ $(x, y, z \in \mathbb{R})$;
(iii) *nullelem létezése*: létezik olyan $0 \in \mathbb{R}$ elem, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $x + 0 = x$;
(iv) *ellentett létezése*: minden x valós számhoz létezik olyan $\tilde{x}$ valós szám úgy, hogy $x + \tilde{x} = 0$;

I.2. Értelmezve van továbbá egy

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \cdot(x, y) =: x \cdot y =: xy$$

függvény (a **szorzás művelete**), amelyre a következők teljesülnek:

(i) *kommutativitás*: $x \cdot y = y \cdot x$ $(x, y \in \mathbb{R})$;
(ii) *asszociativitás*: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ $(x, y, z \in \mathbb{R})$;
(iii) *egység létezése*: létezik olyan $1 \in \mathbb{R}$, $1 \neq 0$ elem, hogy $1 \cdot x = x$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén;
(iv) *reciprok létezése*: minden nullától különböző x valós számhoz létezik olyan $\hat{x}$ valós szám, hogy $x \cdot \hat{x} = 1$.

I.3. *Disztributivitás*: Minden $x, y, z \in \mathbb{R}$ esetén $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$.

$\boxed{\text{II.}}$ **Rendezési axiómák:**
$\mathbb{R}$-en értelmezve van egy $\leq \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (**kisebb-egyenlőnek** nevezett) reláció, amelyre a következők teljesülnek:

II.1. A $\leq$ reláció teljes lineáris rendezés $\mathbb{R}$-en, azaz

(i) *reflexív*: minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $x \leq x$;
(ii) *antiszimmetrikus*: ha $x, y \in \mathbb{R}$, $x \leq y$ és $y \leq x$, akkor $x = y$;
(iii) *tranzitív*: ha $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x \leq y$ és $y \leq z$, akkor $x \leq z$;
(iv) *dichotóm*: minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén $x \leq y$ vagy $y \leq x$.

II.2. A $\leq$ rendezést a műveletekkel az alábbi szabályok kapcsolják össze:

(i) $x \leq y \quad \Rightarrow \quad x + z \leq y + z \quad (x, y, z \in \mathbb{R})$,
(ii) $x \leq y$ és $0 \leq z \quad \Rightarrow \quad x \cdot z \leq y \cdot z \quad (x, y, z \in \mathbb{R})$.

$\boxed{\text{III.}}$ **Teljességi axióma** (**Dedekind-axióma** vagy **szétválasztási axióma**):
Tegyük fel, hogy az $A, B \subset \mathbb{R}$ halmazokra a következők teljesülnek:

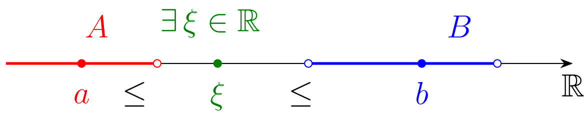
- $A \neq \emptyset$ és $B \neq \emptyset$,
- minden $a \in A$ és minden $b \in B$ elemre $a \leq b$.

Ekkor

$$\exists\, \xi \in \mathbb{R}: \quad \forall\, a \in A \text{ és } b \in B \text{ esetén } \ a \leq \xi \leq b.$$

Megjegyzések

1. A „szétválasztási axióma” elnevezést támasztja alá az alábbi ábra:



Azt is mondhatjuk, hogy a ξ valós szám „szétválasztja” az A és a B halmazt. A „teljességi axióma” szóhasználatot hamarosan megindokoljuk.

2. Igazolható, hogy „lényegében” egy olyan struktúra van, amelyre a fenti axiómák teljesülnek. Röviden azt mondjuk, hogy $\mathbb{R}$ **egy rendezett teljes test**.

3. A számfogalom fejlődéséről:

• A számfogalom kialakulása igen hosszú fejlődési folyamat eredményeként a XIX. század végére alakult ki.

• Jelentős lépés volt az **irracionális számok** felfedezése, ami i.e. V. század környékén a görög tudósok nevéhez fűződik.

• Gondoljuk meg, hogy a racionális számok $\mathbb{Q}$-val jelölt halmazában is teljesülnek a test- és a rendezési axiómák. De mi a meghatározó különbség a **racionális** és az **irracionális** számok között? Ennek megtalálása tette lehetővé a valós számok **axiomatikus megalapozását**. Érdekes tény, hogy az ezzel kapcsolatos eredmények csak az 1860-as évektől kezdve jelentek meg. Látni fogjuk, hogy $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{R}$ között a meghatározó különbség az, hogy $\mathbb{Q}$-ban a teljességi axióma (ha abban $\mathbb{R}$ helyett $\mathbb{Q}$-t írunk) nem igaz. A $\boxed{\text{III.}}$ axiómában szereplő állítást több (vele ekvivalens) módon is meg lehet adni. Többek között *Karl Weierstrass* (1815–1897) 1863-ban, *Richard Dedekind* (1831–1916) 1872-ben és *Georg Cantor* (1845–1918) szintén 1872-ben közölt ilyen átfogalmazásokat. A valós számok fogalma tehát 1870 körül érte el a logikai tisztaságnak azt a fokát, amelyet a matematika megkövetel. ■

A test- és a rendezési axiómák következményei

A test- és a rendezési axiómák felhasználásával **definiálhatjuk** az $\mathbb{R}$ jól ismert részhalmazait.

A természetes számok halmaza

Definíció. *A $H \subset \mathbb{R}$ halmaz* ***induktív halmaz****, ha*

- $0 \in H$,
- *minden* $x \in H$ *esetén* $x + 1 \in H$.

Állítás.

1^o $\mathbb{R}$ *induktív halmaz.*

2^o *Induktív halmazok közös része is induktív halmaz.*

Definíció. *Az $\mathbb{R}$ halmaz összes induktív részhalmazának a közös részét a* ***természetes számok halmazának*** *nevezzük, és az $\mathbb{N}$ szimbólummal jelöljük, azaz*

$$\mathbb{N} := \bigcap_{\substack{H \subset \mathbb{R} \\ H \text{ induktív}}} H \, .$$

A természetes számok halmaza tehát az

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

halmaz. A pozitív egész számok halmazát a továbbiakban így fogjuk jelölni:

$$\mathbb{N}^+ := \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Most megmutatjuk azt, hogy a valós számok axiómarendszeréből hogyan vezethető le a teljes indukciós bizonyítási módszernek a „létjogosultsága”.

Tétel: A teljes indukció elve. *Tegyük fel, hogy minden n természetes számra adott egy $A(n)$ állítás, és azt tudjuk, hogy*

(i) $A(0)$ *igaz,*

(ii) *ha* $A(n)$ *igaz, akkor* $A(n+1)$ *is igaz.*

Ekkor az $A(n)$ állítás minden n természetes számra igaz.

Bizonyítás. Legyen

$$S := \{n \in \mathbb{N} \mid A(n) \text{ igaz}\}.$$

Ekkor $S \subset \mathbb{N}$ és S induktív halmaz, hiszen $0 \in S$, és ha $n \in S$, azaz $A(n)$ igaz, akkor $A(n+1)$ is igaz, ezért $n + 1 \in S$ teljesül, következésképpen S induktív halmaz. Mivel $\mathbb{N}$ a legszűkebb induktív halmaz, ezért az $\mathbb{N} \subset S$ tartalmazás is fennáll, tehát $S = \mathbb{N}$. Ez pedig azt jelenti, hogy az állítás minden n természetes számra igaz. ■

$\mathbb{R}$ további részhalmazai

A „szokásos módon” értelmezzük a következő halmazokat:

$\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid -x \in \mathbb{N}\}$ az **egész** számok halmaza,

$\mathbb{Q} := \{p/q \in \mathbb{R} \mid p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\}$ a **racionális** számok halmaza,

$\mathbb{Q}^* := \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ nem racionális}\}$ az **irracionális** számok halmaza.

A test- és a rendezési axiómákból levezethetők az ezekben a halmazokban értelmezett műveletekre és a rendezésre vonatkozó ismert szabályok.

A valós számok kibővített struktúrája

Több szempontból is hasznos, ha a valós számokhoz a végteleneket is hozzávesszük. Kibővítjük a valós számok halmazát a $+\infty$ és a $-\infty$ szimbólumokkal. Ezt a halmazt a **kibővített valós számok halmazának** nevezzük, és így jelöljük:

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Meg akarjuk őrizni $\mathbb{R}$ eredeti rendezését, ezért definíció szerint legyen

$$-\infty < x < +\infty$$

minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

Később lesz majd arról szó, hogy az $\mathbb{R}$-beli műveleteket hogyan lehet kiterjeszteni $\overline{\mathbb{R}}$-re.

Ha hangsúlyozni akarjuk a különbséget a valós számok, valamint a $+\infty$ és a $-\infty$ szimbólumok között, akkor az előbbieket **végesnek** nevezzük.

A teljességi axióma következményei

A szuprémum elv

Definíciók.

1^o *A nemüres $H \subset \mathbb{R}$ számhalmaznak **van maximuma**, ha*

$$\exists\, \alpha \in H, \ \textit{hogy}\ \forall\, x \in H \ \textit{esetén}\ x \leq \alpha.$$

*Ekkor α-t a H **maximumának** nevezzük, és a $\max H$ szimbólummal jelöljük.*

2^o *A nemüres $H \subset \mathbb{R}$ számhalmaznak **van minimuma**, ha*

$$\exists\, \beta \in H, \ \textit{hogy}\ \forall\, x \in H \ \textit{esetén}\ \beta \leq x.$$

*Ekkor β-t a H **minimumának** nevezzük, és a $\min H$ szimbólummal jelöljük.*

Egy halmaznak vagy **van** maximuma, illetve minimuma vagy **nincsen**. Világos, hogy ha $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$, akkor

$$\nexists \max H \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \forall\, \alpha \in H\text{-hoz} \;\; \exists\, x \in H: \;\; x > \alpha \\ (\text{„bármely } H\text{-beli } \alpha \text{ elemnél van nagyobb } H\text{-beli } x \text{ elem”}), \end{cases}$$

$$\nexists \min H \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \forall\, \beta \in H\text{-hoz} \;\; \exists\, x \in H: \;\; \beta > x \\ (\text{„bármely } H\text{-beli } \beta \text{ elemnél van kisebb } H\text{-beli } x \text{ elem”}). \end{cases}$$

Például, ha $H := \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^+\right\}$, akkor

$$\max H = 1, \;\; \text{mert } 1 \in H \text{ és } \forall\, n \in \mathbb{N}^+\text{-ra: } \; \tfrac{1}{n} \leq 1;$$
$$\nexists \min H, \;\; \text{mert } \forall\, n \in \mathbb{N}^+\text{-hoz } (n+1)\text{-re: } \tfrac{1}{n} > \tfrac{1}{n+1}.$$

Ha $H := \left\{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^+\right\}$, akkor pedig

$$\min H = 0, \;\; \text{mert } 0 \in H \text{ és } \forall\, n \in \mathbb{N}^+\text{-ra: } \; 0 \leq 1 - \tfrac{1}{n};$$
$$\nexists \max H, \;\; \text{mert } \forall\, n \in \mathbb{N}^+\text{-hoz } (n+1)\text{-re: } 1 - \tfrac{1}{n+1} > 1 - \tfrac{1}{n}.$$

Definíciók.

1^o *A $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ halmaz* ***felülről korlátos****, ha*

$$\exists\, K \in \mathbb{R}, \;\; \textit{hogy } \forall\, x \in H \;\; \textit{esetén } x \leq K.$$

Az ilyen K számot a H halmaz egy ***felső korlátjának*** *nevezzük.*

2^o *A $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ halmaz* ***alulról korlátos****, ha*

$$\exists\, k \in \mathbb{R}, \;\; \textit{hogy } \forall\, x \in H \;\; \textit{esetén } k \leq x.$$

Az ilyen k számot a H halmaz egy ***alsó korlátjának*** *nevezzük.*

3^o *A $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ halmaz* ***korlátos****, ha alulról is, felülről is korlátos azaz*

$$\exists\, K \in \mathbb{R}, \;\; \textit{hogy } \forall\, x \in H \;\; \textit{esetén } |x| \leq K.$$

Jegyezzük meg, hogy ha K a H halmaznak felső korlátja, akkor $\forall\, K' > K$ valós szám is felső korlát lesz. Ezért egy felülről korlátos halmaznak mindig végtelen sok felső korlátja van.

Hasonlóan: Ha k a H-nak alsó korlátja, akkor $\forall\, k' < k$ valós szám is alsó korlát lesz. Ezért egy alulról korlátos halmaznak is mindig végtelen sok alsó korlátja van.

A következő, alapvető fontosságú tétel azt mondja ki, hogy egy felülről korlátos (és nem-üres) halmaz felső korlátjai között van legkisebb, vagyis a **felső korlátok halmazának van minimuma**.

Tétel: A szuprémum elv. *Legyen* $H \subset \mathbb{R}$ *és tegyük fel, hogy*

(i) $H \neq \emptyset$ *és*

(ii) H *felülről korlátos.*

Ekkor

$$\exists \min \{K \in \mathbb{R} \mid K \textit{ felső korlátja } H\textit{-nak}\},$$

azaz $\mathbb{R}$ *minden nemüres, felülről korlátos részhalmazának felső korlátjai között van legkisebb.*

Bizonyítás. Legyen

$$A := H \quad \text{és} \quad B := \big\{K \in \mathbb{R} \mid K \text{ felső korlátja } H\text{-nak}\big\}.$$

A feltételek miatt $A \neq \emptyset$ és $B \neq \emptyset$, továbbá

$$\forall\, a \in A \quad \text{és} \quad \forall\, K \in B \quad \text{esetén } a \leq K.$$

A teljességi axiómából következik, hogy

$$\exists\, \xi \in \mathbb{R}: \ a \leq \xi \leq K \quad \forall\, a \in A \text{ és } \forall\, K \in B \text{ esetén.}$$

Erre a ξ-re az teljesül, hogy

- ξ felső korlátja H-nak, hiszen $a \leq \xi \quad \forall\, a \in A$ esetén;
- ξ a legkisebb felső korlát, ui. ha K egy felső korlát (azaz $K \in B$), akkor $K \geq \xi$.

Ez pedig pontosan azt jelenti, hogy ξ a H halmaz legkisebb felső korlátja. ■

A fenti bizonyítás értelemszerű módosításával megkapjuk az előző tételnek az alsó korlátokra vonatkozó párját.

Tétel. *Minden nemüres és alulról korlátos számhalmaznak van legnagyobb alsó korlátja.*

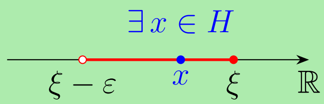
Definíciók.

1^o *A felülről korlátos* $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ *számhalmaz legkisebb felső korlátját* H ***szuprémumának*** *nevezzük, és a* $\sup H$ *szimbólummal jelöljük.*

2^o *Az alulról korlátos* $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ *számhalmaz legnagyobb alsó korlátját a* H *halmaz* ***infimumának*** *nevezzük, és az* $\inf H$ *szimbólummal jelöljük.*

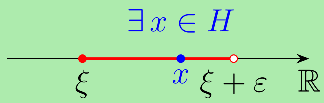
Tétel. *Legyen* $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ *felülről korlátos halmaz. Ekkor*

$$\xi = \sup H \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \text{(i) } \xi \ \textit{ felső korlát, azaz} \\ \quad \forall x \in H: \ x \le \xi; \\ \text{(ii) } \xi \ \textit{a legkisebb felső korlát, azaz} \\ \quad \forall \varepsilon > 0\textit{-hoz} \ \exists x \in H: \ \xi - \varepsilon < x. \end{cases}$$



Tétel. *Legyen* $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ *alulról korlátos halmaz. Ekkor*

$$\xi = \inf H \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \text{(i) } \xi \ \textit{ alsó korlát, azaz} \\ \quad \forall x \in H: \ \xi \le x; \\ \text{(ii) } \xi \ \textit{a legnagyobb alsó korlát, azaz} \\ \quad \forall \varepsilon > 0\textit{-hoz} \ \exists x \in H: \ x < \xi + \varepsilon \end{cases}$$



A szuprémum és az infimum értelmezését kiterjesztjük nem korlátos halmazokra is.

Definíciók.

1^o *Ha a* $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ *halmaz felülről nem korlátos, akkor azt mondjuk, hogy a* ***szuprémuma plusz végtelen****, és ezt úgy jelöljük, hogy*

$$\sup H := +\infty.$$

2^o *Ha a* $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ *halmaz alulról nem korlátos, akkor azt mondjuk, hogy az* ***infimuma mínusz végtelen****, és ezt úgy jelöljük, hogy*

$$\inf H := -\infty.$$

Megjegyzés. A fentiek alapján tehát minden nemüres $H \subset \mathbb{R}$ halmaznak van szuprémuma is és infimuma is. Világos, hogy

- $\exists \max H \quad \Longleftrightarrow \quad \sup H \in H$ és ekkor $\sup H = \max H$,
- $\exists \min H \quad \Longleftrightarrow \quad \inf H \in H$ és ekkor $\inf H = \min H$.

A szuprémum a maximum általánosításaként fogható fel. Láttuk, hogy egy $\mathbb{R}$-beli halmaznak általában nincsen maximuma Ilyenkor ennek szerepét a szuprémum veszi át. Hasonló érvényes a minimum általánosításának tekinthető infimumra. ■

Tétel. *A teljességi axióma ekvivalens a szuprémum elvvel.*

Bizonyítás.

$\boxed{\Longrightarrow}$ A teljességi axióma $\Longrightarrow$ a szuprémum elv. (Ezt láttuk.)

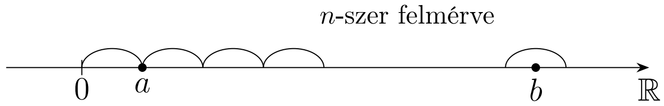
$\boxed{\Longleftarrow}$ Nem bizonyítjuk. ■

Az arkhimédészi tulajdonság és a Cantor-tulajdonság

Tétel: Az arkhimédészi tulajdonság. *Minden $a > 0$ és minden b valós számhoz létezik olyan n természetes szám, hogy $b < n \cdot a$, azaz*

$$\forall\, a > 0 \ \text{és}\ \forall\, b \in \mathbb{R} \quad \text{esetén} \quad \exists\, n \in \mathbb{N}, \ \text{hogy} \quad b < n \cdot a.$$

Szemléletesen:



Bizonyítás. Indirekt módon. Tegyük fel, hogy

$$\exists\, a > 0 \ \text{ és } \ \exists\, b \in \mathbb{R}, \ \text{hogy} \ \forall\, n \in \mathbb{N}: \ b \geq n \cdot a.$$

Legyen

$$H := \{n \cdot a \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Ekkor $H \neq \emptyset$ és H felülről korlátos, hiszen $n \cdot a \leq b$ minden $n \in \mathbb{N}$-re. A szuprémum elv $\Longrightarrow$

$$\exists \sup H =: \xi.$$

Ekkor ξ a legkisebb felső korlátja H-nak, tehát $\xi - a$ nem felső korlát. Ez azt jelenti, hogy

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}: \ n_0 \cdot a > \xi - a \quad \Longrightarrow \quad (n_0 + 1) \cdot a > \xi.$$

Ez viszont ellentmondás, mert ξ felső korlát, azaz $(n_0 + 1) \cdot a \leq \xi$. ■

Következmények:

1^o $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, n \in \mathbb{N}: \ \frac{1}{n} < \varepsilon$.

2^o Az $\mathbb{N}$ halmaz felülrő nem korlátos, azaz $\forall\, b \in \mathbb{R}$ számhoz $\exists\, n \in \mathbb{N}: \ b < n$.

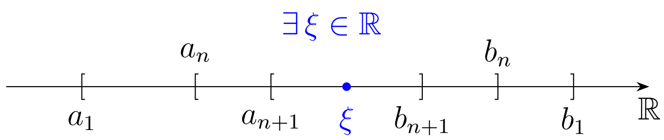
Tétel: A Cantor-tulajdonság. *Ha minden n természetes számra adott az $[a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$ korlátos és zárt intervallum úgy, hogy*

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \quad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset.$$

A Cantor-tulajdonságot úgy szoktuk szavakba foglalni, hogy *egymásba skatulyázott korlátos és zárt intervallumok közös része nem üres.* Ezt szemlélteti az alábi ábra:



Bizonyítás. A teljességi axiómát fogjuk alkalmazni. Legyen

$$A := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \quad \text{és} \quad B := \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Belátjuk, hogy ekkor

$$(*) \qquad a_n \leq b_m \quad \text{tetszőleges } n, m \in \mathbb{N} \text{ esetén.}$$

Valóban,

(i) ha $n \leq m$, akkor $a_n \leq a_m \leq b_m$,

(ii) ha $m < n$, akkor $a_n \leq b_n \leq b_m$.

Mivel $A \neq \emptyset$ és $B \neq \emptyset$, ezért (*) miatt a teljességi axióma feltételei teljesülnek, így

$$\exists\, \xi \in \mathbb{R} : \ a_n \leq \xi \leq b_m \quad \forall\, n, m \in \mathbb{N} \text{ indexre.}$$

Ha $n = m$, akkor azt kapjuk, hogy

$$a_n \leq \xi \leq b_n \quad \iff \quad \xi \in [a_n, b_n] \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \text{ esetén,}$$

és ez azt jelenti, hogy

$$\xi \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset.$$

■

Tétel. *Az arkhimédészi- és a Cantor-tulajdonság együtt ekvivalens a teljességi axiómával.*

Bizonyítás.

$\boxed{\Longleftarrow}$ A teljességi axióma $\Longrightarrow$ az arkhimédészi + a Cantor-tulajdonság. (Ezt láttuk.)

$\boxed{\Longrightarrow}$ Nem bizonyítjuk. ■

Tétel.

$$\text{A teljességi axióma} \iff \text{A szuprémum elv} \iff$$
$$\iff \text{Az arkhimédészi- + Cantor-tulajdonság}$$

A gyökvonás

A valós számok axiómarendszeréből már **bebizonyítható**, hogy minden $A \geq 0$ valós számnak **létezik** n-edik gyöke ($\mathbb{N} \ni n \geq 2$).

Tétel: Gyökvonás. *Minden $A \geq 0$ valós számhoz és minden $n \geq 2$ természetes számhoz létezik egyetlen olyan $\alpha \geq 0$ valós szám, amelyre $\alpha^n = A$. Ezt a nemnegatív α számot az A nemnegatív szám **n-edik gyökének** nevezzük, és az $\sqrt[n]{A}$ vagy az $A^{\frac{1}{n}}$ szimbólumok valamelyikével jelöljük.*

Ezt az állítást később (további eredmények felhasználásával) mi is igazolni fogjuk, és konstruktív eljárást is fogunk mutatni $\sqrt[n]{A}$ kiszámolására.

A racionális és az irracionális számok halmaza

Tétel. *$\mathbb{Q}$ az $\mathbb{R}$-beli műveletekkel és rendezéssel*

1^o *rendezett test, azaz teljesülnek benne a test- és a rendezési axiómák,*

2^o *$\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$, mert van irracionális szám,*

3^o *$\mathbb{Q}$-ban a teljességi axióma nem teljesül.*

Bizonyítás. (Vázlat.)

1^o Elég azt igazolni, hogy bármely két racionális szám összege is és szorzata is racionális szám. ✓

2^o Például $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ és $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. ✓

3^o Megmutatjuk, hogy a $\boxed{\text{III.}}$ axiómában megfogalmazott tulajdonság nem igaz, ha abban $\mathbb{R}$ helyett $\mathbb{Q}$-t írunk.

Az állítást indirekt módon igazoljuk. Legyen

$$A := \{a \in \mathbb{Q} \mid a > 0 \text{ és } a^2 < 2\} = \{a \in \mathbb{Q} \mid 0 < a < \sqrt{2}\},$$

$$B := \{b \in \mathbb{Q} \mid b > 0 \text{ és } b^2 > 2\} = \{b \in \mathbb{Q} \mid b > \sqrt{2}\}.$$

Ekkor $\forall a \in A$ és $\forall b \in B$ esetén $a \leq b$. Most $\sqrt{2}$ az egyetlen olyan valós szám, amelyik szétválasztja az A és a B halmazt, és $\sqrt{2}$ nem racionális. ■

Tétel.

1^o *Bármely két racionális szám között van racionális szám.*

2^o *Bármely két irracionális szám között van irracionális szám.*

3^o *Minden nemelfajuló $\mathbb{R}$-beli intervallum végtelen sok racionális számot és végtelen sok irracionális számot tartalmaz.*

A fentieket úgy szokás kifejezni, hogy a racionális, illetve az irracionális számok halmaza „mindenütt sűrűn” helyezkednek el a számegyenesen.

Szemléltessük a számegyenesen a racionális számokat. Az a tény, hogy $\mathbb{Q}$-ban a $\boxed{\text{III.}}$ axiómában megfogalmazott tulajdonság nem teljesül azt jelenti, hogy a számegyenesen a racionális számok között bizonyos „hézagok” vannak, annak ellenére, hogy bármely két racionális szám között van racionális szám. A valós számok kitöltik ezeket a „hézagokat”. A $\boxed{\text{III.}}$ axiómát ezért nevezzük „teljességi axiómának”.

FÜGGVÉNYEK

A függvény fogalma

Tetszőleges a, b „objektum” esetén az

$$(a,b) := \{\{a\}, \{a,b\}\}$$

halmazt **rendezett párnak** nevezzük.

A nemüres A és B halmazok **Descartes-szorzatát** így értelmezzük:

$$A \times B := \{(a,b) \mid a \in A, \text{ és } b \in B\}.$$

Ennek a halmaznak a nemüres r részhalmazait **relációnak** hívjuk. Az $r \subset A \times B$ reláció **értelmezési tartománya** a

$$\mathcal{D}_r := \{a \in A \mid \exists\, b \in B: \ (a,b) \in r\},$$

az **értékkészlete** pedig az

$$\mathcal{R}_r := \{b \in B \mid \exists\, a \in A: \ (a,b) \in r\}$$

halmaz.

Definíció. *Legyen A és B tetszőleges nemüres halmaz. A*

$$\emptyset \neq f \subset A \times B$$

*relációt **függvénynek** nevezzük, ha*

$$\forall\, x \in \mathcal{D}_f \text{ esetén } \exists!\ y \in \mathcal{R}_f : (x,y) \in f.$$

*Az y elemet az f függvény x helyen felvett **helyettesítési értékének** nevezzük és az $f(x)$ szimbólummal jelöljük. Ekkor azt is mondjuk, hogy az f függvény x-hez az $f(x)$ függvényértéket **rendeli**.*

A halmazok egyenlőségére vonatkozó megállapodásból következik, hogy az $f \subset A \times B$ és a $g \in C \times D$ függvények pontosan akkor **egyenlők** (jelben $f = g$), ha

$$\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g \ \text{ és } \ \forall\, x \in \mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g : \ f(x) = g(x).$$

Jelölések:

$\boxed{f \in A \to B}$ $\quad :\iff \quad f \subset A \times B$ függvény és $\mathcal{D}_f \subset A$.

$\boxed{f : A \to B}$ $\quad :\iff \quad f \subset A \times B$ függvény és $\mathcal{D}_f = A$.

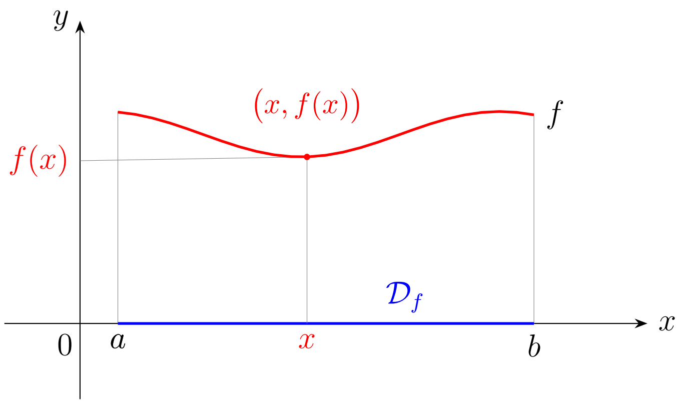
Függvények megadása:

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ f(x) := x^2,$
- $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R},$
- $f(x) := x^2 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Valós-valós függvényeknek nevezzük az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú függvényeket. Ilyeneket a síkbeli Descartes-féle koordináta-rendszerben szemléltethetünk. Az

$$\big\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathcal{D}_f\big\} \subset \mathbb{R}^2$$

síkbeli halmaz az f **függvény grafikonja**. Ezt illusztrálja az alábi ábra:



Halmaz képe, ősképe

A továbbiakban feltesszük, hogy A és B nemüres halmazok.

Halmaz függvény által létesített képe

Definíció. *Legyen $f : A \to B$ egy adott függvény és $C \subset A$. Ekkor a C halmaz f által létesített **képén** az*

$$f[C] := \big\{f(x) \mid x \in C\big\} = \big\{y \in B \mid \exists x \in C :\ y = f(x)\big\} \subset B$$

halmazt értjük. Megállapodunk abban, hogy $f[\emptyset] = \emptyset$.

Világos, hogy az f függvény értékkészlete az értelmezési tartományának f által létesített képe, azaz

$$\mathcal{R}_f = f\left[\mathcal{D}_f\right].$$

Megjegyzés. Szavakkal így is fogalmazhatunk:

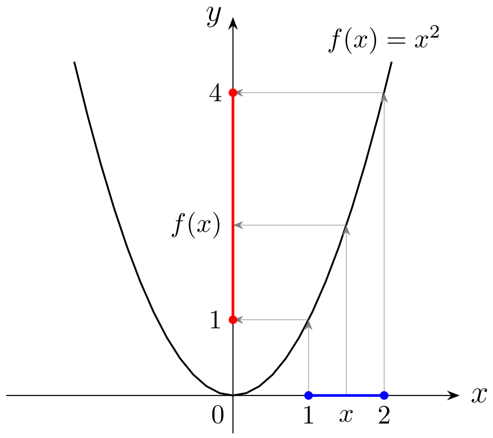
- $f[C]$ az a B-beli halmaz amelyet az $f(x)$ függvényértékek „befutnak”, ha x „befutja” a C halmaz elemeit.
- Az $f[C]$ halmaz B azon y elemeit tartalmazza, amelyekhez létezik olyan $x \in C$, amelyre $y = f(x)$. ■

Példa. *Határozzuk meg a $C := [1,2]$ halmaz*

$$f(x) := x^2 \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvény által létesített képét.

Megoldás. Nézzük először a feladat grafikus megoldását:



$$\Longrightarrow \qquad f\big[[1,2]\big] = [1,4]$$

Most megmutatjuk a feladat precíz megoldását. A definíció alapján

$$f\big[[1,2]\big] = \big\{x^2 \mid 1 \le x \le 2\big\} = \big\{y \in \mathbb{R} \mid \exists\, x \in [1,2]:\ y = x^2\big\}.$$

Azt kell tehát meghatározni, hogy x^2 milyen értékek vesz fel, ha x „befutja” az $[1,2]$ intervallum pontjait. Mivel

$$1 \le x \le 2 \quad \Longrightarrow \quad 1 \le x^2 \le 4, \quad \text{azaz} \quad x^2 \in [1,4],$$

ezért

(∗) $$f\big[[1,2]\big] \subset [1,4].$$

A kérdés ezek után az, hogy az x^2 függvényértékek vajon teljesen „befutják-e” az egész $[1,4]$ intervallumot, ha x „befutja” az $[1,2]$ intervallum pontjait, vagyis igaz-e a fordított irányú

(#) $$[1,4] \subset f\big[[1,2]\big]$$

tartalmazás is. Az előzőek alapján ez azzal ekvivalens, hogy

(#′) $$\forall\, y \in [1,4] \text{ számhoz } \exists\, x \in [1,2]:\ y = x^2.$$

Ennek az egyenletnek a megoldása $x_1 = \sqrt{y}, \quad x_2 = -\sqrt{y}$. Mivel $1 \le y \le 4$, ezért $1 \le \sqrt{y} \le 2$, így $x_1 \in [1,2]$. Ez pedig azt jelenti, hogy a (#′) állítás, tehát a vele ekvivalens (#) tartalmazás is igaz.

(∗) és (#) alapján a két halmaz egyenlő. Bebizonyítottuk tehát azt, hogy

$$f\big[[1,2]\big] = [1,4]. \blacksquare$$

Halmaz függvény által létesített ősképe

Definíció. *Legyen $f : A \to B$ egy adott függvény és $D \subset B$. Ekkor a D halmaz f által létesített **őképén** az*

$$f^{-1}[D] := \{x \in \mathcal{D}_f \mid f(x) \in D\} \subset A$$

halmazt értjük. Megállapodunk abban, hogy $f^{-1}[\emptyset] = \emptyset$.

Világos, hogy az f függvény értelmezési tartománya az értékkészletének f által létesített ősképe, azaz

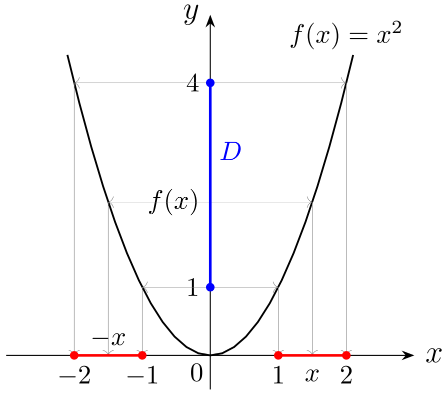
$$\mathcal{D}_f = f^{-1}[\mathcal{R}_f]$$

Példa. *Számítsuk ki a $D := [1, 4]$ halmaz*

$$f(x) := x^2 \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvény által létesített ősképét.

Megoldás. Most is a grafikus megoldással kezdjük:



$$\Longrightarrow \qquad \underset{\sim\sim\sim}{f^{-1}\big[[1, 4]\big] = [-2, -1] \cup [1, 2]}$$

A feladat precíz megoldása a következő. A definíció alapján

$$f^{-1}\big[[1, 4]\big] = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \in [1, 4]\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \le x^2 \le 4\}.$$

Így $f^{-1}\big[[1, 4]\big]$ az $1 \le x^2 \le 4$ egyenlőtlenségrendszer megoldáshalmaza. Mivel

$$1 \le x^2 \le 4 \iff 1 \le |x| \le 2 \iff 1 \le x \le 2 \text{ vagy } -2 \le x \le -1 \iff$$
$$\iff x \in [-2, -1] \cup [1, 2]$$

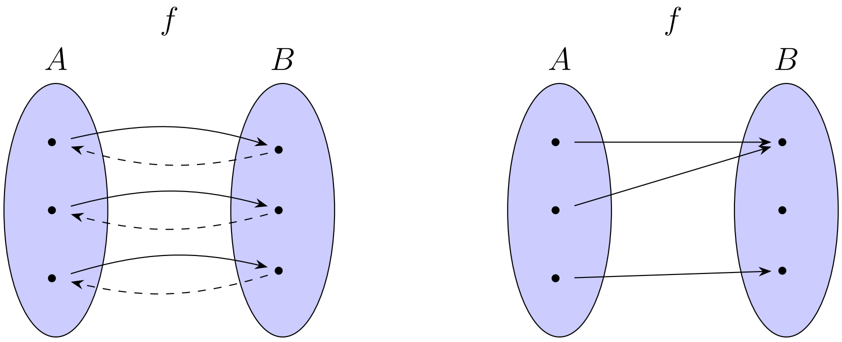
ezért bebizonyítottuk azt, hogy

$$f^{-1}\big[[1, 4]\big] = [-2, -1] \cup [1, 2]. \ \blacksquare$$

Műveletek függvényekkel

Függvények inverze

Motiváció:



Figyeljük meg a következőket:

• Az első esetben különböző $\mathcal{D}_f$-beli elemekhez különböző függvényértékek tartoznak, ezért a hozzárendelés „megfordítása” is függvény. Ilyenkor azt mondjuk, hogy a függvény **invertálható**.

• A második esetben egy értékkészletbeli elemhez több értelmezési tartománybeli elem is tartozik, ezért a hozzárendelés „megfordítása” nem függvény. Az ilyen esetekben azt mondjuk, hogy a függvény **nem invertálható**. ■

Definíció. *Az $f : A \to B$ függvényt* ***invertálhatónak*** *(vagy* ***injektívnek****) nevezzük akkor, ha a $\mathcal{D}_f$ értelmezési tartomány bármely két különböző pontjának a képe különböző, azaz*

$$(\triangle) \qquad \forall\, x, t \in \mathcal{D}_f,\ x \neq t \quad \Longrightarrow \quad f(x) \neq f(t).$$

Gyakran használjuk a $(\triangle)$ alábbi ekvivalens átfogalmazásait:

- f invertálható $\iff$ $\forall\, x, t \in \mathcal{D}_f$, esetén $f(x) = f(t) \quad \Longrightarrow \quad x = t$;
- f invertálható $\iff$ $\forall\, y \in \mathcal{R}_f$-hez $\exists\,!\ x \in \mathcal{D}_f :\ f(x) = y$.

Definíció. *Legyen f egy invertálható függvény, azaz tegyük fel, hogy*

$$\forall\, y \in \mathcal{R}_f\text{-hez } \exists\,!\ x \in \mathcal{D}_f :\ f(x) = y.$$

Ekkor az f ***inverz függvényét*** *(vagy röviden* ***inverzét****) így értelmezzük:*

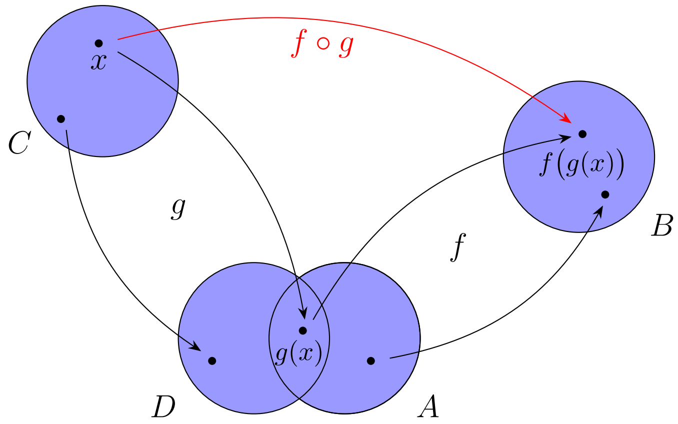
$$f^{-1} : \mathcal{R}_f \ni y \mapsto x,\ \text{amelyre } f(x) = y.$$

Így $\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f$, és könnyű meggondolni, hogy $\mathcal{R}_{f^{-1}} = \mathcal{D}_f$.

Függvények kompozíciója

Feltesszük, hogy A, B, C és D tetszőlegesen rögzített nemüres halmazok.

Szemléletesen: Legyenek $f : A \to B$ és $g : C \to D$ adott függvények.



Az $f \circ g$ kompozíció akkor képezhető, ha a $C = \mathcal{D}_g$ halmaznak van olyan x eleme, amelynek a $g(x)$ képe benne van az $A = \mathcal{D}_f$ halmazban, azaz

$$\big\{x \in \mathcal{D}_g \mid g(x) \in \mathcal{D}_f\big\} \neq \emptyset.$$

Definíció. *Tegyük fel, hogy $f : A \to B$ és $g : C \to D$ olyan függvények, amelyekre*

$$\{x \in \mathcal{D}_g \mid g(x) \in \mathcal{D}_f\} \neq \emptyset.$$

*Ebben az esetben az f (külső) és a g (belső) függvény **összetett függvényét** (vagy más szóval f és g **kompozícióját**) az $f \circ g$ szimbólummal jelöljük, és így értelmezzük:*

$$f \circ g \,:\, \{x \in \mathcal{D}_g \mid g(x) \in \mathcal{D}_f\} \to B, \quad \big(f \circ g\big)(x) := f\big(g(x)\big).$$

Az $f \circ g$ függvény értelmezési tartománya tehát a

$$\mathcal{D}_{f\circ g} = \{x \in \mathcal{D}_g \mid g(x) \in \mathcal{D}_f\}$$

halmaz. A korábban bevezetett fogalmakat felhasználva egyszerűen belátható, hogy

$$\mathcal{D}_{f\circ g} = g^{-1}\left[\mathcal{R}_g \cap \mathcal{D}_f\right].$$

Ha még a $\mathcal{R}_g \subset \mathcal{D}_f$ tartalmazás is fennáll, akkor

$$\mathcal{D}_{f\circ g} = \mathcal{D}_g.$$

Ha $\{x \in \mathcal{D}_g \mid g(x) \in \mathcal{D}_f\} = \emptyset$, akkor f és g kompozícióját nem értelmezzük.

Megjegyzés. Az $f \circ g$ függvény $\mathcal{D}_{f\circ g}$ értelmezési tartományát szavakkal így fogalmazhatjuk meg: „$\mathcal{D}_{f\circ g}$ a belső függvény értelmezési tartományának azon pontjait tartalmazza, amelyekben felvett függvényértékek benne vannak a külső függvény értelmezési tartományában.” ■

Példa. *Legyen*

$$f(x) := \sqrt{1-x} \quad \big(x \in (-\infty, 1]\big) \quad \textit{és} \quad g(u) := u^2 \quad (u \in \mathbb{R}).$$

Határozzuk meg az $f \circ g$ és a $g \circ f$ függvényeket.

Megoldás.

$\underset{\sim\sim\sim}{f \circ g}$. Mivel

$$\big\{x \in \mathcal{D}_g \mid g(x) \in \mathcal{D}_f\big\} = \big\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \le 1\big\} = [-1, 1] \ne \emptyset,$$

ezért az $f \circ g$ kompozíció képezhető, és $\mathcal{D}_{f \circ g} = [-1, 1]$. Így

$$f \circ g : [-1, 1] \ni x \mapsto f\big(g(x)\big) = \sqrt{1 - g(x)} = \sqrt{1 - x^2}, \quad \text{azaz}$$

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\big(f \circ g\big)(x) = \sqrt{1 - x^2} \quad \big(|x| \le 1\big)}.$$

$\underset{\sim\sim\sim}{g \circ f}$. Mivel

$$\big\{x \in \mathcal{D}_f \mid f(x) \in \mathcal{D}_g\big\} = \big\{x \in (-\infty, 1] \mid \sqrt{1-x} \in \mathbb{R}\big\} = (-\infty, 1] \ne \emptyset,$$

ezért a $g \circ f$ kompozíció is képezhető, és $\mathcal{D}_{g \circ f} = (-\infty, 1]$. Így

$$g \circ f : (-\infty, 1] \ni x \mapsto g\big(f(x)\big) = g\big(\sqrt{1-x}\big) = \big(\sqrt{1-x}\big)^2 = 1 - x, \quad \text{azaz}$$

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\big(g \circ f\big)(x) = 1 - x \quad \big(x \le 1\big)}. \ \blacksquare$$

Mivel

$$\boxed{f \circ g \ne g \circ f},$$

ezért a kompozíció művelete **nem kommutatív** művelet.

Algebrai műveletek valós-valós függvényekkel

Az f és a g valós-valós függvények összegét, szorzatát és hányadosát a $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \ne \emptyset$ feltétel teljesülése esetén a következőképpen értelmezzük:

- $\big(f + g\big)(x) := f(x) + g(x) \quad (x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g)$,
- $\big(f \cdot g\big)(x) := f(x) \cdot g(x) \quad (x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g)$,
- ha még az is teljesül, hogy $A := \big\{x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \mid g(x) \ne 0\big\} \ne \emptyset$, akkor

$$\left(\frac{f}{g}\right) := \frac{f(x)}{g(x)} \quad (x \in A).$$