8. előadás

VÉGTELEN SOROK 3.

HATVÁNYSOROK
(Polinomok általánosítása végtelen sok tagra)

A korábbiakban több olyan végtelen sorral találkoztunk, amelyeknek a tagjai paraméterektől vagy változóktól függtek. Az ilyen végtelen sorokat **függvénysoroknak** nevezzük. Közöttük a legegyszerűbbek a legegyszerűbb függvénysorozatból, ti. hatványfüggvények sorozatából képzett végtelen sorok. Ezeket fogjuk **hatványsoroknak** nevezni.

1. definíció. *Az adott $(\alpha_n)\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozattal és az $a \in \mathbb{R}$ számmal képzett*

$$\sum_{n=0} \alpha_n (x-a)^n = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)^2 + \cdots \quad (x \in \mathbb{R})$$

*függvénysort $a \in \mathbb{R}$ középpontú, (α_n) együtthatójú **hatványsornak** nevezzük.*

Az első fontos kérdés az, hogy milyen $x \in \mathbb{R}$ érték mellett lesz a $\sum_{n=0} \alpha_n (x-a)^n$ hatványsor konvergens. Ezeknek a pontoknak a halmazát a szóban forgó hatványsor **konvergenciahalmazának** nevezzük, és így jelöljük:

$$\mathrm{KH}\left(\sum_{n=0} \alpha_n (x-a)^n\right) := \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \text{a } \sum_{n=0} \alpha_n (x-a)^n \text{ számsor konvergens}\right\}.$$

Minthogy $x = a$ esetén a szóban forgó sor valamennyi 0-nál nagyobb indexű tagja 0, ezért az a középpont eleme az A-val jelölt konvergenciahalmaznak. Az A halmaz minden egyes x eleméhez a sor összegét rendelve egy függvényt, nevezetesen a hatványsor **összegfüggvényét** értelmezzük:

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (x-a)^n, \quad \text{ha } x \in \mathrm{KH}\left(\sum_{n=0} \alpha_n (x-a)^n\right).$$

Az előzőek illusztrálására nézzünk egy példát!

1. példa. *Határozzuk meg a*

$$\sum_{n=0} x^n \quad (x \in \mathbb{R})$$

hatványsor konvergencaiahalmazát és az összegfüggvényét!

Megoldás. Az $a = 0$ középpontú és az $\alpha_n = 1$ $(n \in \mathbb{N})$ együtthatójú hatványsorról van szó. Ez az x hányadosú geometriai sor, ami akkor és csak akkor konvergens, ha $|x| < 1$. Ez azt jelenti, hogy a sor konvergenciahalmaza

$$\mathrm{KH}\left(\sum_{n=0} x^n\right) = (-1, 1).$$

Azt is tudjuk azonban, hogy $x \in (-1, 1)$ esetén a geometriai sor összege $\frac{1}{1-x}$, ezért a $\sum\limits_{n=0} x^n$ hatványsor összegfüggvénye:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x} \quad \big(|x| < 1\big). \blacksquare$$

Megjegyzések

1. A KH $\big(\sum\limits_{n=0} \alpha_n (x-a)^n\big)$ konvergenciahalmaz elemeit megkaphatjuk a KH $\big(\sum\limits_{n=0} \alpha_n\, x^n\big)$ halmaz elemeiből úgy, hogy ez utóbbi minden eleméhez hozzáadjuk az a értéket. Ezért sokszor elegendő a 0 középpontú hatványsorokkal foglalkozni.

2. Hatványsor összegfüggvénye polinomok sorozatának a határértéke, ezért a helyettesítési értékeit általában nem tudjuk pontosan kiszámítani. A közelítő értékeit azonban (elvileg) tetszőleges pontossággal meg tudjuk határozni a négy alapművelet véges sokszori alkalmazásával.

3. A végtelen sorokhoz hasonlóan itt is megállapodunk abban, hogy időnként az

$$\alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)^2 + \alpha_3(x-a)^3 + \cdots$$

jelsorozattal fogjuk jelölni egyrészt magát a hatványsort, másrészt pedig a sor összegét is (amennyiben az létezik). Ez a „pongyolaság” azért nem vezet félreértéshez, mert az adott szövegkörnyezetben világos lesz majd az, hogy a sorról, vagy pedig annak az összegéről van szó. $\blacksquare$

A következő alapvető jelentőségű tétel azt állítja, hogy minden hatványsor konvergenciahalmaza **intervallum**.

1. tétel: Hatványsor konvergenciasugara. *Tetszőleges* $\sum\limits_{n=0} \alpha_n(x-a)^n$ $(x \in \mathbb{R})$ *hatványsor konvergenciahalmazára a következő három eset egyike áll fenn:*

1° $\exists\, 0 < R < +\infty$, *hogy a hatványsor* $\forall\, x \in \mathbb{R}:\ |x-a| < R$ *esetén abszolút konvergens és* $\forall\, x \in \mathbb{R}:\ |x-a| > R$ *pontban pedig divergens.*

2° *A hatványsor csak az* $x = a$ *pontban konvergens. Ekkor legyen* $R := 0$.

3° *A hatványsor abszolút konvergens* $\forall\, x \in \mathbb{R}$ *esetén. Ekkor legyen* $R := +\infty$.

R-et a hatványsor ***konvergenciasugarának*** *nevezzük.*

Bizonyítás. Az állítást elég $a = 0$ esetén igazolni.

Segédtétel. *Tegyük fel, hogy a* $\sum \alpha_n x^n$ *hatványsor konvergens egy* $x_0 \neq 0$ *pontban. Ekkor* $\forall\, |x| < |x_0|$ *esetén a hatványsor abszolút konvergens* x*-ben.*

A segédtétel bizonyítása. Mivel a $\sum \alpha_n x_0^n$ végtelen sor konvergens, ezért $\lim \big(\alpha_n x_0^n\big) = 0$, így az $\big(\alpha_n x_0^n\big)$ sorozat korlátos, azaz $\exists\, M > 0:\ |\alpha_n x_0^n| \leq M < +\infty$ $(n \in \mathbb{N})$.

Legyen $|x| < |x_0|$. Ekkor

$$|\alpha_n x^n| = |\alpha_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq M \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

A $\sum |\alpha_n x^n|$ végtelen sor tehát majorálható az $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$ feltétel miatt konvergens $\sum M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ geometriai sorral. Így a majoráns kritérium szerint a $\sum\left|\alpha_n x^n\right|$ sor konvergens, tehát a $\sum \alpha_n x^n$ végtelen sor abszolút konvergens. $\square$

A tétel bizonyítása. Tekintsük a $\sum \alpha_n\, x^n$ hatványsort. Ez $x = 0$-ban nyilván konvergens, ezért $\mathrm{KH}\left(\sum \alpha_n x^n\right) \neq \emptyset$, így

$$\exists\ \sup \mathrm{KH}\left(\sum_{n=0} \alpha_n x^n\right) =: R \in \overline{\mathbb{R}} \quad \text{és} \quad R \geq 0. \tag{1}$$

A következő három eset lehetséges.

1° $0 < R < +\infty$. Legyen $|x| < R$ tetszőleges. Ekkor a szuprémum definíciója szerint $\exists\, x_0 :$ $|x| < x_0 < R$, hogy a $\sum \alpha_n x_0^n$ végtelen sor konvergens. A Segédtétel szerint tehát a $\sum \alpha_n x^n$ sor abszolút konvergens. Ha $|x| > R$ tetszőleges, akkor az R szám definíciója és a Segédtétel szerint a $\sum \alpha_n x^n$ sor divergens.

2° $R = 0$. Ekkor a $\sum \alpha_n x^n$ hatványsor az $x = 0$ pontban nyilván konvergens. Ha $|x| > 0$ tetszőleges, akkor $\exists\, x_0 :\ 0 < x_0 < |x|$. Az R szám definíciója miatt ekkor a $\sum \alpha_n x_0^n$ végtelen sor divergens, így a Segédtétel szerint a $\sum \alpha_n x^n$ végtelen sor is divergens. A hatványsor tehát csak az $x = a$ pontban konvergens.

3° $R = \infty$. Ha $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges, akkor $\exists\ x_0 :\ |x| < x_0$, hogy a $\sum \alpha_n x_0^n$ sor konvergens, így a Segédtétel szerint a $\sum \alpha_n x^n$ sor abszolút konvergens. A hatványsor tehát $\forall\, x \in \mathbb{R}$ esetén abszolút konvergens. ■

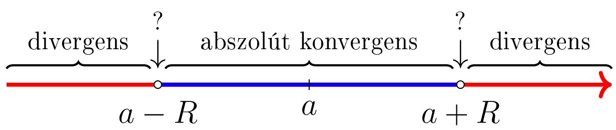
Megjegyzések

1. Hamarosan konkrét példákat mutatunk arra, hogy a három eset mindegyike előfordulhat.

2. A tétel állításait más alakban is megfogalmazhatjuk. Jelölje R a $\sum \alpha_n (x-a)^n$ hatványsor konvergenciasugarát.

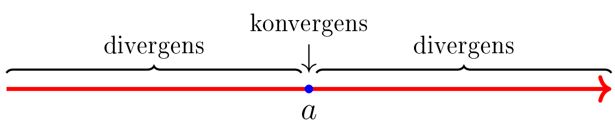
1° Ha $0 < R < +\infty$, akkor

$$(a - R, a + R) \subset \mathrm{KH}\left(\sum \alpha_n (x-a)^n\right) \subset [a - R, a + R].$$

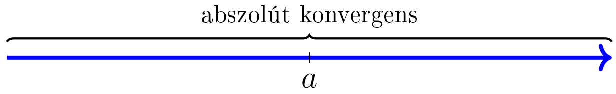


Hamarosan konkrét példákat mutatunk arra, hogy a $a \pm R$ végpontokban konvergencia szempontjából minden lehetséges eset előfordulhat.

2° Ha $R = 0$, akkor $\mathrm{KH}\left(\sum \alpha_n (x-a)^n\right) = \{a\}$, például $\mathrm{KH}\left(\sum n^n \cdot x^n\right) = \{0\}$.



3° Ha $R = +\infty$, akkor KH $\left(\sum \alpha_n (x-a)^n\right) = \mathbb{R}$ például, KH $\left(\sum \frac{1}{n^n} \cdot x^n\right) = \mathbb{R}$.



A következő állítás azt fejezi ki, hogy hatványsor R konvergenciasugarának az (1) alatti definíciójában szereplő szuprémum bizonyos esetekben könnyen kiszámolható.

2. tétel: A Cauchy–Hadamard-tétel. *Tekintsük a* $\sum\limits_{n=0} \alpha_n (x-a)^n$ *hatványsort, és tegyük fel, hogy*

$$\exists \lim \left(\sqrt[n]{|\alpha_n|}\right) =: A \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ekkor $A \geq 0$, *és a hatványsor konvergenciasugara*

$$R = \frac{1}{A} \qquad \left(\frac{1}{+\infty} := 0,\ \frac{1}{0} := +\infty\right).$$

Ez azt jelenti, hogy

1° *ha* $0 < R < +\infty$, *akkor a hatványsor (abszolút) konvergens az* $(a-R, a+R)$ *intervallum minden pontjában, és divergens az* $[a-R, a+R]$ *intervallumon kívül eső pontokban;*

2° *ha* $R = 0$, *akkor a hatványsor csak az* $x = a$ *pontban konvergens;*

3° *ha* $R = +\infty$, *akkor a hatványsor az egész* $\mathbb{R}$*-en (abszolút) konvergens.*

Bizonyítás. Rögzítsük tetszőlegesen az $x \in \mathbb{R}$ számot és alkalmazzuk a Cauchy-féle gyökkritériumot a $\sum \alpha_n (x-a)^n$ végtelen számsorra:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\alpha_n (x-a)^n\right|} = \left(\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|\alpha_n|}\right) \cdot |x-a| = A \cdot |x-a|.$$

1° Tegyük fel, hogy $0 < A < +\infty$, vagyis $0 < R < +\infty$.

Ha $A \cdot |x-a| < 1$, azaz $|x-a| < \frac{1}{A} = R$, akkor a $\sum \alpha_n (x-a)^n$ végtelen számsor x-ben (abszolút) konvergens, és ez azt jelenti, hogy a $\sum \alpha_n (x-a)^n$ hatványsor (abszolút) konvergens az $(a-R, a+R)$ intervallum minden pontjában.

Ha $A \cdot |x-a| > 1$, azaz $|x-a| > \frac{1}{A} = R$, akkor a $\sum \alpha_n (x-a)^n$ végtelen számsor divergens x-ben, és ez azt jelenti, hogy a $\sum \alpha_n (x-a)^n$ hatványsor divergens az $[a-R, a+R]$ intervallumon kívül eső pontokban.

2° Ha $A = +\infty$, vagyis $R = 0$, akkor $(+\infty) \cdot |x-a| = +\infty > 1$ minden $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$ esetén, ezért a $\sum \alpha_n (x-a)^n$ végtelen sor divergens. Ez pedig azt jelenti, hogy $\sum \alpha_n (x-a)^n$ hatványsor csak az $x = a$ pontban konvergens.

3° Ha $A = 0$, vagyis $R = +\infty$, akkor $0 \cdot |x-a| = 0 < 1$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, ezért a $\sum \alpha_n (x-a)^n$ végtelen számsor minden $x \in \mathbb{R}$ pontban (abszolút) konvergens. Ez pedig azt jelenti, hogy a $\sum \alpha_n (x-a)^n$ hatványsor az egész $\mathbb{R}$-en (abszolút) konvergens. ∎

Megjegyzés. A tételt csak akkor tudjuk alkalmazni, ha az $\left(\sqrt[n]{|\alpha_n|}\right)$ sorozatnak van határértéke. Számsorozatok „limesz szuperiorjának” a fogalmát felhasználva a Cauchy–Hadamard-tételnek igazolható egy olyan általánosítása, amelyik már *minden hatványsorra* érvényes. ■

Hatványsor konvergenciasugarának a meghatározásához a számsorokra vonatkozó Cauchy-féle gyökkritériumot alkalmaztuk. Emlékeztetünk a számsorok konvergencájával kapcsolatos másik sokszor használható tételre, ti. a d'Alembert-féle hányadoskritériumra. Ennek segítségével is sok esetben egyszerűen kiszámíthatjuk egy hatványsor konvergenciasugrát.

3. tétel. *Tekintsük a* $\sum\limits_{n=0} \alpha_n(x-a)^n$ *hatványsort, és tegyük fel, hogy* $\alpha_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N})$ *és*

$$\exists \lim \left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| =: A \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ekkor $A \geq 0$, *és a hatványsor konvergenciasugara*

$$R = \frac{1}{A} \qquad \left(\frac{1}{+\infty} := 0,\ \frac{1}{0} := +\infty\right).$$

Bizonyítás. Meggondolható. ■

1. példa.

(a) $\operatorname{KH}\left(\sum\limits_{n=0} x^n\right) = (-1,1)$, (b) $\operatorname{KH}\left(\sum\limits_{n=1} \frac{1}{n^2}\, x^n\right) = [-1,1]$,

(c) $\operatorname{KH}\left(\sum\limits_{n=1} \frac{1}{n}\, x^n\right) = [-1,1)$, (d) $\operatorname{KH}\left(\sum\limits_{n=1} \frac{(-1)^n}{n}\, x^n\right) = (-1,1]$,

(e) $\operatorname{KH}\left(\sum\limits_{n=1} n^n\, x^n\right) = \{0\}$, (f) $\operatorname{KH}\left(\sum\limits_{n=0} \frac{1}{n!}\, x^n\right) = \mathbb{R}$.

Megoldás. Az (a)–(d) példákban a hányadoskritériumot, vagyis az előző tételt alkalmazzuk. Könnyű ellenőrizni, hogy mindegyik hatványsor konvergenciasugara $R = 1$. A végpontokban külön vizsgálat kell, mert ezeken a helyeken a hányadoskritérium nem alkalmazható.

(a) $x = \pm 1$: a $\sum (\pm 1)^n$ számsorok divergensek, mert a sorokat generáló $\big((\pm 1)^n\big)$ sorozatok nem nullasorozatok, így $\operatorname{KH}\left(\sum x^n\right) = (-1,1)$.

(b) $x = 1$: a $\sum \frac{1}{n^2}$ végtelen sor konvergens, szuperharmonikus sor;
$x = -1$: a $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ végtelen sor abszolút konvergens, ezért konvergens; így
$\operatorname{KH}\left(\sum \frac{1}{n^2}\, x^n\right) = [-1,1]$.

(c) $x = 1$: a $\sum \frac{1}{n}$ végtelen sor divergens, harmonikus sor;
$x = -1$: a $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ végtelen sor konvergens, Leibniz-sor, így
$\operatorname{KH}\left(\sum \frac{1}{n}\, x^n\right) = [-1,1)$.

(d) $x = 1$: a $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ végtelen sor konvergens, Leibniz-típusú sor;
$x = -1$: a $\sum \frac{(-1)^n}{n} \cdot (-1)^n = \sum \frac{1}{n}$ végtelen sor divergens, harmonikus sor, így
$\mathrm{KH}\left(\sum \frac{(-1)^n}{n}\, x^n\right) = (-1, 1]$.

(e) Mivel $A = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, ezért a Cauchy–Hadamard-tétel szerint a hatványsor konvergenciasugara $R = \frac{1}{A} = \frac{1}{+\infty} = 0$, így $\mathrm{KH}\left(\sum n^n\, x^n\right) = \{0\}$.

(f) Mivel $A = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1/(n+1)!}{1/n!} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, ezért a 3. tétel szerint a hatványsor konvergenciasugara $R = \frac{1}{A} = \frac{1}{0} = +\infty$, így $\mathrm{KH}\left(\sum \frac{1}{n!}\, x^n\right) = \mathbb{R}$. ■

Műveletek hatványsorokkal

A $\sum\limits_{n=0} \alpha_n (x-a)^n$ és a $\sum\limits_{n=0} \beta_n (x-a)^n$ hatványsorok **számszorosát**, illetve **összegét** így értelmezzük:

1°

$$\lambda \cdot \sum_{n=0} \alpha_n (x-a)^n := \sum_{n=0} (\lambda\, \alpha_n)\,(x-a)^n \quad (x \in \mathbb{R},\ \lambda \in \mathbb{R}),$$

2°

$$\sum_{n=0} \alpha_n\,(x-a)^n + \sum_{n=0} \beta_n\,(x-a)^n := \sum_{n=0} (\alpha_n + \beta_n)\,(x-a)^n \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Hatványsorok szorzatának az értelmezése előtt számítsuk ki először a szóban forgó hatványsorok Cauchy-szorzatát egy $x \in \mathbb{R}$ pontban:

$$\left(\sum_{n=0} \alpha_n\,(x-a)^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0} \beta_n\,(x-a)^n\right) = \sum_{n=0} \left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x-a)^k \cdot \beta_{n-k}(x-a)^{n-k}\right) =$$

$$= \sum_{n=0} \left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k\, \beta_{n-k} (x-a)^n\right) = \sum_{n=0} \left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k\, \beta_{n-k}\right) \cdot (x-a)^n.$$

Két hatványsor Cauchy-szorzata tehát ismét egy hatványsor. Ezért hatványsorok **szorzatát** így definiáljuk:

3°

$$\left(\sum_{n=0} \alpha_n\,(x-a)^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0} \beta_n\,(x-a)^n\right) := \sum_{n=0} \left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k\, \beta_{n-k}\right) \cdot (x-a)^n \quad (x \in \mathbb{R}).$$

A műveletek és a hatványsorok összegfüggvényeinek a kapcsolatára vonatkozik a következő állítás.

4. tétel. *Tegyük fel, hogy a* $\sum_{n=0} \alpha_n(x-a)^n$*, illetve* $\sum_{n=0} \beta_n(x-a)^n$ *hatványsorok* R_α*, illetve* R_β *konvergenciasugarai pozitívak, és legyen* $R := \min\{R_\alpha, R_\beta\}$*. Jelölje* f*, illetve* g *az összegfüggvényeket:*

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n(x-a)^n \quad \big(x \in (a-R_\alpha, a+R_\alpha)\big),$$

$$g(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n(x-a)^n \quad \big(x \in (a-R_\beta, a+R_\beta)\big).$$

Ekkor a $\lambda \cdot f$*,* $f+g$ *és* $f \cdot g$ *függvények az* $(a-R, a+R)$ *intervallumon felírhatók az alábbi hatványsorok összegeként:*

1° $\lambda \cdot f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda\,\alpha_n)\,(x-a)^n \quad \big(x \in (a-R, a+R)\big),$

2° $f(x) + g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha_n + \beta_n)\,(x-a)^n \quad \big(x \in (a-R, a+R)\big),$

3° $f(x) \cdot g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k\,\beta_{n-k}\right)(x-a)^n \quad \big(x \in (a-R, a+R)\big).$

Bizonyítás. Az **1°**, illetve a **2°** állítás a végtelen sorok számszorosára, illetve összegére vonatkozó tétel közvetlen következménye.

3° Mindkét hatványsor abszolút konvergens az $(a-R, a+R)$ intervallumon, ezért a Cauchy-szorzatuk is abszolút konvergens, és az összegük a két hatványsor összegének a szorzata, azaz $f(x) \cdot g(x)$. ■

Megjegyzés Két azonos középpontú hatványsor összegfüggvényeinek összege a két hatványsor összegéből adódó hatványsor összegfüggvénye. Két azonos középpontú hatványsor összegfüggvényeinek szorzata a két hatványsor Cauchy-szorzatából adódó hatványsor összegfüggvénye.

ELEMI FÜGGVÉNYEK 1.

A középiskolai tanulmányainkban már sokat foglalkoztunk az exponenciális- és trigonometrikus függvényekkel. Az értelmezésük azonban intuitív vagy geometriai eredetű volt, azért a pontos függvényértékeket csak speciális esetekben tudtuk kiszámítani. Ezeket elfogadva ismertük meg a függvények tulajdonságait.

A továbbiakban hatványsorok összegfüggvényeiként fogjuk **definiálni** a szóban forgó függvényeket. Így a helyettesítési értékeiket bármelyik pontban (elvileg) tetszőleges pontossággal meg tudjuk határozni.

Az exponenciális függvény

Adott $a > 0$ valós szám esetén tekintsük az a^x hatványokat! Azt már tudjuk, hogy ha $x = \frac{p}{q}$ racionális szám, akkor

$$a^{\frac{p}{q}} := \sqrt[q]{a^p}.$$

Irracionális x kitevőkre a hatványok értelmezése már jóval bonyolultabb feladat.

Első lépésben az e szám valós kitevős hatványait, vagyis e^x-t és ennek felhasználásával az e^x $(x \in \mathbb{R})$ függvényt fogjuk értelmezni.

Induljunk ki a következő definícióból:

2. definíció. *A* $\sum\limits_{n=0} \frac{x^n}{n!}$ *hatványsor minden* $x \in \mathbb{R}$ *pontban abszolút konvergens. Az összegfüggvényét, vagyis az*

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvényt ***exponenciális függvénynek*** *nevezzük.*

Most felsoroljuk a definíció néhány következményét.

Világos, hogy $\exp(0) = 1$ és $\exp(x) > 1 > 0$ minden $x > 0$ valós szám esetén. Azt is tudjuk már, hogy

$$\exp(1) := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = e.$$

A számsorok Cauchy-szorzatának a felhasználásával igazolható az alábbi fontos képlet:

$$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}),$$

amit szokás az exp függvény **függvényegyenletének**, vagy **multiplikatív** tulajdonságának nevezni. Valóban, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$\exp(x) \cdot \exp(y) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!\,(n-k)!} x^k\, y^{n-k} \right) =$$

$$= \text{(binomiális tétel)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\, y^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \exp(x+y).$$

Alkalmazzuk ezt az azonosságot az $x \in \mathbb{R}$, $y = -x \in \mathbb{R}$ szereposztással. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$1 = \exp(0) = \exp\big(x + (-x)\big) = \exp(x) \cdot \exp(-x) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

így

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Mivel $x > 0$ esetén $\exp(x) > 0$, ezért az

$$\exp(x) > 0 \quad \big(\forall\, x \in \mathbb{R}\big)$$

egyenlőtlenség is teljesül.

Most megmutatjuk, hogy az exp függvény szigorúan monoton növekedő $\mathbb{R}$-en, azaz

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ x < y \quad \Longrightarrow \quad \exp(x) < \exp(y).$$

Valóban: Legyen $x < y$. Ekkor $0 < y - x$, így

$$1 < \exp(y - x) = \exp\big(y + (-x)\big) = \exp(y) \cdot \exp(-x) = \frac{\exp(y)}{\exp(x)},$$

tehát $\exp(x) < \exp(y)$.

A függvényegyenletet felhasználva igazolható az is, hogy ha p, q relatív prím egészek és $q > 0$, akkor

$$\exp\left(\frac{p}{q}\right) = e^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{e^p}.$$

Kézenfekvő tehát, hogy az e szám hatványait tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ kitevő esetén így *értelmezzük*:

$$e^x := \exp(x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Így például

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y, \qquad e^{-x} = \frac{1}{e^x} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

A következő állításban összefoglaljuk az exp függvény eddig megismert tulajdonságait.

5. tétel: Az exp **függvény tulajdonságai.**

1° $e^x := \exp x := \exp(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \quad (x \in \mathbb{R})$;

2° $\exp(0) = 1$, $\exp 1 = e$ és $\exp(x) > 0$ minden $x \in \mathbb{R}$ pontban;

3° a függvényegyenlet: $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ $(x, y \in \mathbb{R})$;

4° $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ $(x \in \mathbb{R})$;

5° $\exp \uparrow \mathbb{R}$-en.

A szinusz- és koszinuszfüggvény

A középiskolában már megismerkedtünk tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén a $\sin x$, a $\cos x$ számok szemléletes definícióival. Ezekből kiindulva értelmeztük a trigonometrikus függvényeket, és megállapítottuk számos érdekes és fontos tulajdonságaikat. A szóban forgó értelmezésekhez a következő megjegyzéseket fűzzük: Egyrészt ezek a definíciók még utalást sem adnak a függvényértékek (akárcsak közelítő) kiszámolására. Másrészt az egyszerű geometriai fogalmakon túl szerepelnek viszonylag bonyolult és definiálatlan fogalmak is, így a valós számoknak a kör kerületére való „felmérése" vagy a *körív hossza.* A π **számot** az egységsugarú kör kerületének a felével definiáltuk, amelyről megtudtuk, hogy az egy *irracionális szám*, század pontossággal $3,14$.

Most a szinusz- és a koszinuszfüggvényt bizonyos hatványsor összegfüggvényeként fogjuk értelmezni. Egyáltalán nem nyilvánvaló, hogy ezek ekvivalensek a középiskolai definíciókkal. A kétféle bevezetés ekvivalenciájának az igazolását majd az integrálszámítás alkalmazásainak a tárgyalásánál fejezzük be, amikor is értelmezzük a körív hosszát, és meghatározzuk a kör kerületét. A hatványsoros definíció alapján bevezetésre kerülő szinusz- és koszinuszfüggvény jelölésére a jelzett ekvivalencia miatt használni fogjuk a „szokásos" sin és cos szimbólumokat.

3. definíció. *A* $\sum_{n=0}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ *hatványsor minden* $x \in \mathbb{R}$ *pontban abszolút konvergens. Az összegfüggvényét, vagyis az*

$$\sin x := \sin(x) := \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvényt ***szinuszfüggvénynek*** *nevezzük.*

4. definíció. *A* $\sum_{n=0}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ *hatványsor minden* $x \in \mathbb{R}$ *pontban abszolút konvergens. Az összegfüggvényét, vagyis az*

$$\cos x := \cos(x) := \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvényt ***koszinuszfüggvénynek*** *nevezzük.*

Most felsoroljuk a definíciók alapján már bebizonyítható állításokat.

6. tétel: A sin és a cos függvény alaptulajdonságai.

1° *A* $\sin$ *függvény páratlan, azaz* $\sin(-x) = -\sin x \quad (x \in \mathbb{R})$, *a* $\cos$ *függvény páros, vagyis* $\cos(-x) = \cos x \quad (x \in \mathbb{R})$.

2° ***Addíciós képletek:*** *minden* $x, y \in \mathbb{R}$ *esetén*

$$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y,$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y.$$

3° *Minden* $x \in \mathbb{R}$ *esetén*

$$\sin(2x) = 2\sin x \cdot \cos x, \qquad \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

4° ***Négyzetes összefüggés:***

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Bizonyítás.

1°

$$\sin(-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(-x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(-1)^{2n+1} \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!} =$$
$$= (-1) \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\sin x \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\cos(-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(-x)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(-1)^{2n} \cdot x^{2n}}{(2n)!} =$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

2° Mindegyik állítást hatványsorok Cauchy-szorzatának a felhasználásával igazoljuk. A részleteket csak a szinuszfüggvény addíciós képletére mutatjuk meg.

Legyen egyrészt

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} =: \sum_{n=0}^{+\infty} a_n, \qquad \cos y = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} =: \sum_{n=0}^{+\infty} b_n.$$

A két sor Cauchy-szorzata

$$\sin x \cdot \cos y = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n,$$

ahol

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} (-1)^{n-k} \frac{y^{2(n-k)}}{(2(n-k))!} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^n \frac{x^{2k+1} y^{2n-2k}}{(2k+1)!(2n-2k)!} =$$

$$= \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} x^{2k+1} y^{2n-2k} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ páratlan}}}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} x^k y^{2n+1-k}.$$

Másrészt

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} =: \sum_{n=0}^{+\infty} d_n, \qquad \sin y = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} =: \sum_{n=0}^{+\infty} e_n.$$

A két sor Cauchy-szorzata

$$\cos x \cdot \sin y = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n,$$

ahol

$$f_n = \sum_{k=0}^{n} d_k e_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} (-1)^{n-k} \frac{y^{2(n-k)+1}}{(2(n-k)+1)!} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^n \frac{x^{2k} y^{2n-2k+1}}{(2k)!(2n-2k+1)!} =$$

$$= \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} x^{2k} y^{2n-2k+1} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ páros}}}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} x^k y^{2n+1-k}.$$

Ezért

$$\underline{\sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n + \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} (c_n + f_n) =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} x^k y^{2n+1-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (x+y)^{2n+1} = \underline{\sin(x+y)}.$$

3° A szinuszfüggvényre vonatkozó addíciós képletet az $x \in \mathbb{R}$, $y = x \in \mathbb{R}$ szereposztással alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\sin(2x) = \sin(x+x) = \sin x \cdot \cos x + \cos x \cdot \sin x = 2 \sin x \cdot \cos x.$$

A koszinuszfüggvényre vonatkozó addíciós képletet az $x \in \mathbb{R}$, $y = x \in \mathbb{R}$ szereposztással alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

4° Ha a koszinuszfüggvényre vonatkozó addíciós képletet az $x \in \mathbb{R}$, $y = -x \in \mathbb{R}$ szereposztással alkalmazzuk, és felhasználjuk a függvények paritásaira vonatkozó **1°** állításokat, akkor azt kapjuk, hogy

$$1 = \cos 0 = \cos\big(x + (-x)\big) = \cos x \cdot \cos(-x) - \sin x \cdot \sin(-x) =$$
$$= \cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot \sin x = \sin^2 x + \cos^2 x. \blacksquare$$