11. előadás

FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA 3.

Emlékeztető

1. Valós-valós függvények pontbeli folytonosságának a fogalma. Szakadási helyek és osztályozásuk. Egyoldali folytonosság. Halmazon folytonos függvények.

2. Folytonos függvények alaptulajdonságai: előjeltartás, hatványsor összegfüggvényének a folytonossága, a folytonosságra vonatkozó átviteli elv, a műveletek és a folytonosság kapcsolata.

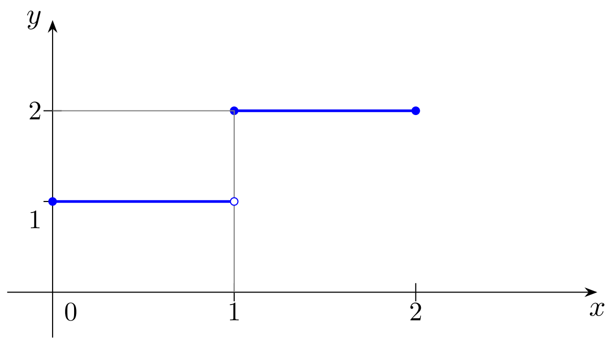
Korlátos és zárt $[a, b]$ intervallumon folytonos függvények tulajdonságai

Az alábbi tételek azt mutatják, hogy ha egy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény folytonos egy korlátos és zárt intervallumban, akkor ebből következik, hogy f számos egyéb fontos tulajdonsággal is rendelkezik.

Ebben a szakaszban feltesszük, hogy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $-\infty < a < b < +\infty$. A továbbiakban a $C[a, b]$ szimbólummal fogjuk jelölni a korlátos és zárt $[a, b]$ intervallumon folytonos függvények halmazát. A korábbi definíciónk szerint ez azt jelenti, hogy

$$\boxed{f \in C[a,b]} \quad :\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ [a,b] \subset \mathcal{D}_f, \\ f \in C\{x\}, \ \forall\, x \in (a,b), \\ f \text{ jobbról folytonos } a\text{-ban}, \\ f \text{ balról folytonos } b\text{-ben}. \end{cases}$$

Vigyázat: $f \in C[a, b]$ *nem jelenti* azt, hogy az f függvény az $[a, b]$ intervallum minden pontjában folytonos. Például az



$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 \le x < 1 \\ 2, & \text{ha } 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

függvény folytonos az $[1, 2]$ intervallumon, de $f \notin C\{1\}$.

A Weierstrass-tétel

Az analízis alkalmazásai gyakran vezetnek **szélsőérték-feladatokra**, amikor is egy valós értékű függvény legnagyobb, illetve legkisebb helyettesítési értékét keressük (ha egyáltalán ilyenek léteznek). Ezzel a feladattal kapcsolatosak következő fogalmak.

1. definíciók. *Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy $\alpha \in \mathcal{D}_f$.*

1° *Azt mondjuk, hogy f-nek az α pontban* ***abszolút maximuma van*** *(vagy másképpen fogalmazva α* ***abszoút maximumhelye f-nek****), ha*

$$f(x) \le f(\alpha) \quad (\forall\, x \in \mathcal{D}_f).$$

Ekkor az $f(\alpha)$ függvényértéket f ***abszolút maximumának*** *nevezzük.*

2° *Ha*

$$f(\alpha) \le f(x) \quad (\forall\, x \in \mathcal{D}_f),$$

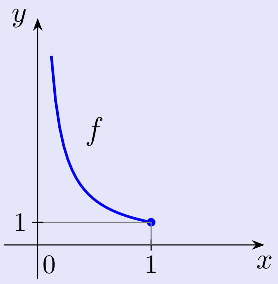
akkor f-nek α-ban ***abszolút minimuma van*** *(az α pont* ***abszolút minimumhelye f-nek****) és $f(\alpha)$ az f függvénynek az* ***abszolút minimuma****.*

3° *Az α* ***abszolút szélsőértékhelye*** *f-nek (az $f(\alpha)$ függvényérték* ***abszolút szélsőértéke*** *f-nek), ha f-nek α-ban abszolút maximuma vagy abszolút minimuma van.*

Egy függvénynek több abszolút maximum-, illetve mimimumhelye is lehet.

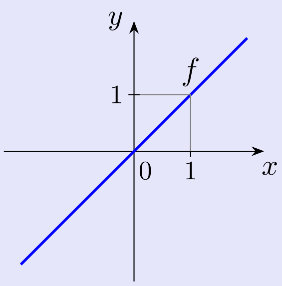
Egy valós-valós függvénynek vagy vannak abszolút szélsőértékei, vagy nincsenek. Ez utóbbi esetekre mutatunk példákat.

1. példa. Legyen $f(x) := \dfrac{1}{x}$ $\big(x \in (0,1]\big)$. Ekkor



$$\begin{cases} f \text{ folytonos } (0,1]\text{-en}, \\ f\text{-nek } \exists \text{ abszolút minimuma, } f(1) = 1, \\ f\text{-nek } \nexists \text{ abszolút maximuma.} \end{cases}$$

2. példa. Legyen $f(x) := x$ $\big(x \in \mathbb{R}\big)$. Ekkor

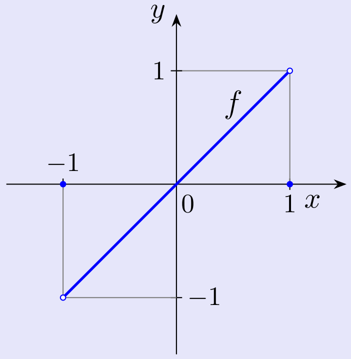


$$\begin{cases} f \text{ folytonos } \mathbb{R}\text{-en}, \\ f\text{-nek } \nexists \text{ abszolút minimuma,} \\ f\text{-nek } \nexists \text{ abszolút maximuma.} \end{cases}$$

3. példa. Legyen

$$f(x) := \begin{cases} x, & \text{ha } x \in (-1, 1) \\ 0, & \text{ha } x = \pm 1. \end{cases}$$

Ekkor



$$\begin{cases} f \text{ nem folytonos } [-1,1]\text{-en}, \\ f\text{-nek } \nexists \text{ abszolút minimuma}, \\ f\text{-nek } \nexists \text{ abszolút maximuma}. \end{cases}$$

Weierstrass tétele azt állítja, hogy egy *korlátos* és *zárt* intervallumon *folytonos* függvénynek mindig van abszolút maximum- és abszolút minimumhelye. A bizonyításához felhasználjuk a következő állítást.

1. tétel. *Ha $f \in C[a, b]$, akkor f korlátos az $[a, b]$ intervallumon.*

Megjegyzés. A tételben lényeges feltétel az, hogy az f függvény egy *korlátos* és *zárt* intervallumon folytonos. Bármelyik feltételt elhagyva a tétel állítása nem marad igaz. Például az $f(x) := \dfrac{1}{x}$ $\big(x \in (0, 1]\big)$ függvény folytonos a korlátos $(0, 1]$ intervallumon, de f itt nem korlátos. Az $f(x) := x$ $\big(x \in \mathbb{R}\big)$ függvény folytonos a $(-\infty, +\infty)$ intervallumon, de nem korlátos. ■

Bizonyítás. f korlátos $[a, b]$-n, ha

$$\exists\, K > 0 : \quad \forall\, x \in [a, b] \ \text{ esetén } \ |f(x)| \le K.$$

Indirekt módon bizonyítunk: Tegyük fel, hogy f nem korlátos $[a, b]$-n, azaz

$$\forall\, K > 0\text{-hoz } \ \exists x \in [a, b] : \quad |f(x)| > K.$$

A $K = n \in \mathbb{N}$ választással azt kapjuk, hogy

$$(*) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}\text{-hez } \ \exists\, x_n \in [a, b] : \quad |f(x_n)| \ge n.$$

Az $\big(f(x_n)\big)$ sorozat tehát nem korlátos.

Mivel $(x_n) \subset [a, b]$ korlátos sorozat, ezért ennek a Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel szerint létezik (x_{n_k}) konvergens részsorozata. Legyen $\alpha := \lim (x_{n_k})$. Indirekt módon igazolható, hogy $\alpha \in [a, b]$. Ugyanakkor $f \in C\{\alpha\}$. Így a folytonosságra vonatkozó átviteli elv szerint létezik a

$$\lim\big(f(x_{n_k})\big) = f(\alpha)$$

véges határérték. Ebből következik az, hogy az $\big(f(x_{n_k})\big)$ sorozat korlátos, ami ellentmond $(*)$-nak. Ezzel a tétel állítását bebizonyítottuk. ■

2. tétel: Weierstrass tétele.

$$\text{Ha } f \in C[a,b] \implies \begin{cases} f\text{-nek léteznek abszolút szélsőértékei, azaz} \\ \exists\, \alpha, \beta \in [a,b] : \\ f(\beta) \le f(x) \le f(\alpha) \quad \big(\forall\, x \in [a,b]\big). \end{cases}$$

Bizonyítás. f folytonos $[a,b]$-n $\implies$ f korlátos $[a,b]$-n. Ezért

$$\exists \sup\big\{f(x) \mid x \in [a,b]\big\} =: M \in \mathbb{R},$$
$$\exists \inf\big\{f(x) \mid x \in [a,b]\big\} =: m \in \mathbb{R}.$$

Igazoljuk: az f függvénynek van abszolút maximumhelye, azaz $\exists\, \alpha \in [a,b] : f(\alpha) = M$.

A szuprémum definíciójából következik, hogy

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \exists\, y_n \in \mathcal{R}_f : \quad M - \frac{1}{n} < y_n \le M.$$

Viszont:

$$y_n \in \mathcal{R}_f \implies \exists\, x_n \in [a,b] : \ f(x_n) = y_n \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Az így definiált $(x_n) : \mathbb{N} \to [a,b]$ sorozat korlátos, ezért a Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel miatt az (x_n) sorozatnak létezik (x_{n_k}) konvergens részsorozata. Jelölje α ennek a határértékét, azaz legyen

$$(*) \qquad \alpha := \lim(x_{n_k}).$$

Indirekt módon belátható, hogy $\alpha \in [a,b]$.

f folytonos $[a,b]$-n $\implies$ $f \in C\{\alpha\}$ $\overset{\text{átviteli}}{\underset{\text{elv}}{\implies}}$

$$(*) \text{ miatt } \lim_{n_k \to +\infty} \underbrace{f(x_{n_k})}_{y_{n_k}} = f(\alpha).$$

Mivel

$$M - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) = y_{n_k} \le M \quad (\text{minden } n_k\text{-ra}),$$

ezért $\lim\limits_{n_k \to +\infty} y_{n_k} = M$, így $f(\alpha) = M$. Megmutattuk tehát azt, hogy α az f függvénynek egy maximumhelye.

Hasonlóan bizonyítható az abszolút minimum létezése. ■

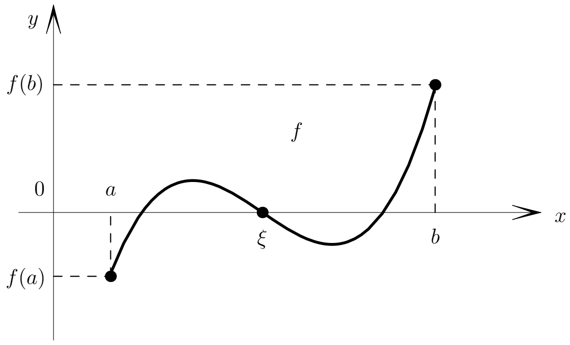
A Bolzano- és a Bolzano–Darboux-tétel

3. tétel: Bolzano tétele.

$$\left\{\begin{array}{l} \textit{Tegyük fel, hogy} \\ \quad \text{(a) } f \in C[a,b], \\ \quad \text{(b) } f(a)\cdot f(b) < 0 \\ (f \textit{ a két végpontban különböző előjelű}) \end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{c} \exists\, \xi \in (a,b), \\ \textit{ami zérushelye az } f \textit{ függvénynek, azaz} \\ f(\xi) = 0. \end{array}\right.$$

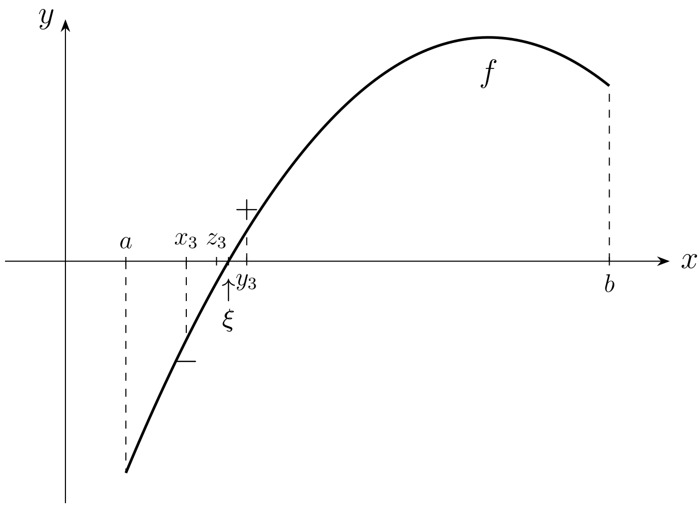
Megjegyzések

1. A szemléletünk alapján nyilvánvalónak tűnő állítást szemlélteti a következő ábra abban az esetben, amikor $f(a) < 0 < f(b)$:



Az ábra azt is illusztrálja, hogy f-nek az intervallumban több zérushelye is lehet, és ezek az intervallumban bárhol elhelyezkedhetnek.

2. Az állítás bizonyításának az alapja az ún. **Bolzano-féle felezési eljárás**.



3. lépés: $f(z_2) < 0 \implies x_3 = z_2,\ y_3 = y_2,\ z_3 = \frac{x_3+y_3}{2},\ |z_3 - \xi| < \frac{b-a}{2^4}$

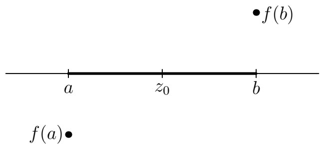
■

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy

$$f(a) < 0 < f(b).$$

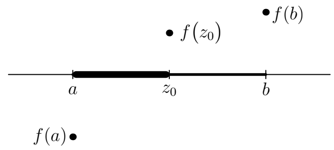
A ξ számot egymásba skatulyázott zárt intervallumsorozat közös pontjaként fogjuk definiálni. Legyen

$$[x_0, y_0] := [a, b]$$

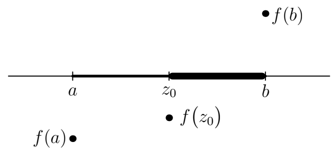


Az intervallumot megfelezzük. Legyen $z_0 := \dfrac{a+b}{2}$.
Három eset lehetséges:

1. $f(z_0) = 0$, ekkor $\xi := z_0$ zérushelye f-nek.
2. $f(z_0) > 0$ esetén legyen $[x_1, y_1] := [a, z_0]$



3. $f(z_0) < 0$ esetén legyen $[x_1, y_1] := [z_0, b]$



Az $[x_1, y_1]$ intervallumot megfelezve is három eset lehetséges.

$\vdots$

Az eljárást folytatjuk.

Vagy véges sok lépésben találunk olyan ξ-t, amelyre $f(\xi) = 0$, vagy nem. Az utóbbi esetben $\exists\ [x_n, y_n]\quad (n \in \mathbb{N})$ intervallumsorozat, amelyre

(i) $[x_{n+1}, y_{n+1}] \subset [x_n, y_n] \quad (\forall\, n \in \mathbb{N})$,

(ii) $f(x_n) < 0, \quad f(y_n) > 0 \ (\forall\, n \in \mathbb{N})$

(iii) $y_n - x_n = \dfrac{b-a}{2^n} \ (\forall\, n \in \mathbb{N})$.

A valós számok Cantor-tulajdonságából és (iii)-ből következik, hogy fenti egymásba skatulyázott intervallumsorozatnak pontosan egy közös pontja van. Legyen ez ξ, azaz

$$\text{egyértelműen } \exists\ \xi \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [x_n, y_n] \neq \emptyset.$$

A konstrukcióból következik, hogy

$$\xi = \lim_{n \to +\infty} x_n = \lim_{n \to +\infty} y_n.$$

Mivel f folytonos ξ-ben, ezért

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(\xi) = \lim_{n \to +\infty} f(y_n).$$

De (ii)-ből

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) \le 0 \le \lim_{n\to+\infty} f(y_n),$$

azaz $f(\xi) \le 0$ és $f(\xi) \ge 0$, ami csak úgy teljesülhet, ha $f(\xi) = 0$.

A bizonyítás hasonló, ha $f(a) > 0$ és $f(b) < 0$. ■

Megjegyzés. A Bolzano-tétel bizonyításában szereplő intervallumfelezési eljárás azért is fontos, mert olyan numerikus módszert biztosít, amivel közelítőleg meg tudjuk keresni intervallumon folytonos f függvény zérushelyeit, vagyis az $f(x) = 0$ egyenlet megoldásait. Ehhez először két pontot kell találni, ahol a függvény előjelet vált, és ezután addig alkalmazunk az eljárást, amíg a zérushelyet tartalmazó $[x_n, y_n]$ intervallum hossza kisebb lesz, mint egy előre megadott hibakorlát. Ekkor az intervallum bármely értéke megfelelő közelítése lesz a keresett zérushelynek. ■

4. tétel: A Bolzano–Darboux-tétel.

$$\left\{\begin{array}{l} \textit{Tegyük fel, hogy} \\ \quad \text{(a)}\ f \in C[a,b], \\ \quad \text{(b)}\ f(a) \ne f(b). \end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{c} \underline{\textit{f minden } f(a) \textit{ és } f(b) \textit{ közötti értéket felvesz } [a,b]\textit{-n}}, \textit{ azaz} \\ \textit{ha } f(a) < f(b), \textit{ akkor} \\ \forall c \in \big(f(a), f(b)\big)\textit{-hez} \ \ \exists \xi \in (a,b): \quad f(\xi) = c. \\ \textit{ha } f(a) > f(b), \textit{ akkor} \\ \forall c \in \big(f(b), f(a)\big)\textit{-hez} \ \ \exists \xi \in (a,b): \quad f(\xi) = c. \end{array}\right.$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a Bolzano-tételt a $\varphi(x) := f(x) - c$ $\big(x \in [a,b]\big)$ függvényre. ■

A tétel az intervallumon folytonos függvényekről alkotott szemléletes képünket (miszerint az ilyen függvények grafikonját a ceruza felemelése nélkül megrajzolhatjuk) támasztja alá.

A Bolzano–Darboux-tétel egyéb intervallumon folytonos függvényekre is érvényes. **Intervallumon** mindig nem üres és nem egyetlen pontból álló $\mathbb{R}$-beli halmazt értünk. A továbbiakban gyakran használt „$I \subset \mathbb{R}$ (tetszőleges) intervallum" kijelentésen (hacsak mást nem mondunk) azt értjük, hogy I korlátos vagy nem korlátos, nyílt, zárt, félig nyílt vagy félig zárt intervallum. Például: $(-1,1)$, $[-1,1]$, $[-1,0)$, $[0,+\infty)$, $(-\infty,0)$, $(-\infty,+\infty)$.

2. definíció. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ tetszőleges intervallum. Azt mondjuk, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény **Darboux-tulajdonságú I-n**, ha minden $a, b \in I$, $a < b$, $f(a) \ne f(b)$ esetén az f függvény minden $f(a)$ és $f(b)$ közötti értéket felvesz $[a,b]$-ben.*

Az előzőek alapján a Bolzano–Darboux-tételt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy *a korlátos és zárt $[a,b]$ intervallumon folytonos függvény Darboux-tulajdonságú $[a,b]$-n.* Az előzőek felhasználásával igazolhatók a következő állítások:

5. tétel. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ tetszőleges intervallum, és tegyük fel, hogy az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény folytonos I-n. Ekkor*

1º *f Darboux-tulajdonságú I-n.*

2º *$\mathcal{R}_f$ vagy egyelemű vagy intervallum.*

Bizonyítás.

1º Annyit kell csupán megjegyeznünk, hogy a $g(x) := f(x)$ $\big(x \in [a,b]\big)$ függvény nyilván folytonos minden $a, b \in I$, $a < b$ esetén, azaz $g \in C[a,b]$.

2º Legyen $m := \inf \mathcal{R}_f$ és $M := \sup \mathcal{R}_f$. Ha $m = M$, akkor nyilván $\mathcal{R}_f = \{m\}$.

Ha $m < M$, akkor először azt látjuk be, hogy $(m, M) \subset \mathcal{R}_f$. Vegyünk egy tetszőleges $c \in (m, M)$ számot. Ekkor a szuprémum, illetve az infimum tulajdonságai alapján vannak olyan $a, b \in I$ helyek, amelyekre $f(a) < c < f(b)$ teljesül. Nyilván $a \neq b$, és azt is feltehetjük, hogy $a < b$. Ekkor **1º** miatt $\exists \xi \in (a,b) : \ f(\xi) = c$, azaz $c \in \mathcal{R}_f$. Így az $(m, M) \subset \mathcal{R}_f$ állítást igazoltuk.

Ebből a tétel állítása már következik. Valóban,

ha $m, M \in \mathcal{R}_f$, akkor $\mathcal{R}_f = [m, M]$,
ha $m, M \notin \mathcal{R}_f$, akkor $\mathcal{R}_f = (m, M)$,
ha $m \in \mathcal{R}_f$ és $M \notin \mathcal{R}f$, akkor $\mathcal{R}_f = [m, M)$,
ha $m \notin \mathcal{R}_f$ és $M \in \mathcal{R}f$, akkor $\mathcal{R}_f = (m, M]$. ■

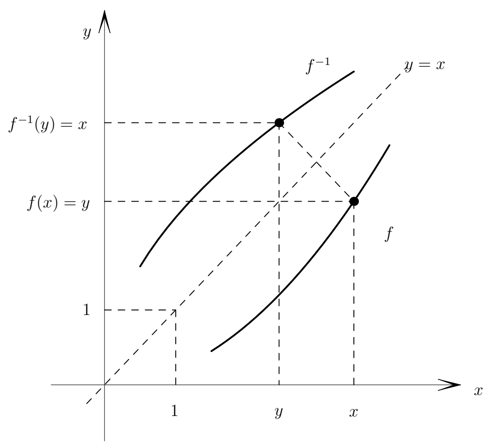
Megjegyzés. Egy intervallumon folytonos függvény tehát szükségképpen Darboux-tulajdonságú. Konstruálható azonban olyan Darboux-tulajdonságú függvény is, amelyik egyetlen pontban sem folytonos. ■

Az inverz függvény folytonossága

Emlékeztetünk arra, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény *invertálható*, ha különböző értelmezési tartománybeli elemekhez különböző helyettesítési értékek tartoznak, azaz minden $y \in \mathcal{R}_f$ elemhez létezik egyetlen olyan $x \in \mathcal{D}_f$ elem, amelyre $f(x) = y$. Ebben az esetben f *inverz függvénye*:

$$f^{-1} : \mathcal{R}_f \ni y \mapsto x, \quad \text{amelyre } f(x) = y.$$

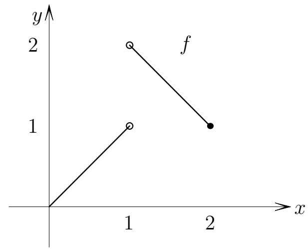
Tegyük fel, hogy f invertálható, és ábrázoljuk f és f^{-1} grafikonját egy olyan koordinátarendszerben, amelynek tengelyein az egységek egyenlő hosszúak. Vegyük f grafikonjának egy (x, y) pontját, azaz legyen $y = f(x)$. Ekkor $f^{-1}(y) = x$, vagyis az (y, x) pont rajta van az f^{-1} függvény grafikonján. Ha egy pont két koordinátáját felcseréljük, akkor a pont tükörképét kapjuk meg a két tengely szögfelező egyenesére (vagyis az $y = x$ egyenletű egyenesre) vonatkozóan. Ez azt jelenti, hogy *f és f^{-1} – geometriailag – egymás tükörképei a szóban forgó szögfelezőre vonatkozóan*:



A következő egyszerű példa azt mutatja, hogy az f függvény folytonossága nem „öröklődik” az f^{-1} inverz függvényre.

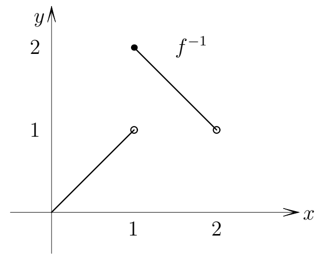
Példa. Ha

$$f(x) := \begin{cases} x, & \text{ha } 0 \le x < 1 \\ 3 - x, & \text{ha } 1 < x \le 2, \end{cases}$$



akkor

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } 0 \le x < 1 \\ 3 - x, & \text{ha } 1 \le x < 2. \end{cases}$$



Világos, hogy

- f folytonos a $\mathcal{D}_f = [0, 2] \setminus \{1\}$ halmazon,
- f invertálható és $\mathcal{D}_{f^{-1}} = [0, 2]$,
- $f^{-1} \notin C\{1\}$. ■

A következő tétel azt állítja, hogy ha feltesszük, hogy f invertálható, az értelmezési tartománya *korlátos* és *zárt* intervallum, továbbá f folytonos $\mathcal{D}_f$-en, akkor az inverz függvénye is folytonos.

6. tétel: Az inverz függvény folytonossága.

$$\begin{cases} \textit{Tegyük fel, hogy } f\colon [a,b] \to \mathbb{R}, \\ \quad \text{(a) } f \in C[a,b], \\ \quad \text{(b) } \exists\, f^{-1} \end{cases} \implies \begin{cases} \textit{az } f^{-1} \textit{ függvény folytonos a} \\ \quad \mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f \textit{ halmazon.} \end{cases}$$

Bizonyítás. Indirekt. Tegyük fel, hogy $f^{-1} : \mathcal{R}_f \to [a,b]$ nem folytonos a $\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f$ halmazon, azaz

$$\exists\, y_0 \in \mathcal{R}_f, \quad \text{hogy} \quad f^{-1} \notin C\{y_0\}.$$

A folytonosságra vonatkozó átviteli elvből $\Longrightarrow \exists\, (y_n) \subset \mathcal{R}_f$ úgy, hogy

$$\lim\,(y_n) = y_0, \quad \text{de} \quad \lim_{n\to+\infty} f^{-1}(y_n) \neq f^{-1}(y_0).$$

Legyen

$$\begin{aligned} x_n &:= f^{-1}(y_n) \quad (\text{azaz } f(x_n) = y_n) \quad (\forall\, n \in \mathbb{N}), \\ x_0 &:= f^{-1}(y_0) \quad (\text{azaz } f(x_0) = y_0). \end{aligned}$$

Ekkor az indirekt feltétel alapján

$$\lim\,(x_n) \neq x_0.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$(*) \qquad \exists\, \delta > 0, \quad \text{hogy az} \quad \big\{ n \in \mathbb{N} \mid |x_n - x_0| \geq \delta \big\} \text{ halmaz végtelen.}$$

Az $(x_n) \subset [a,b]$ sorozat korlátos, ezért a Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tételből következik, hogy $\exists\, \big(x_{n_k}\big)$ konvergens részsorozata.

Legyen $\overline{x} := \lim \big(x_{n_k}\big)$. Indirekt úton belátható, hogy $\overline{x} \in [a,b]$.

$(*)$-ból következik, hogy az $\big(x_{n_k}\big)$ részsorozat megválasztható úgy, hogy

$$(\triangle) \qquad \overline{x} \neq x_0.$$

Mivel $f \in C\{\overline{x}\}$ és $\lim \big(x_{n_k}\big) = \overline{x}$, ezért a folytonosságra vonatkozó átviteli elv alapján

$$\lim \big(f\big(x_{n_k}\big)\big) = \lim \big(y_{n_k}\big) = f\big(\overline{x}\big).$$

Az (y_n) (vagyis az $(f(x_n))$) sorozat határértéke y_0 (vagyis $f(x_0)$), és ez igaz minden részsorozatára is, következésképpen

$$\lim\,(y_{n_k}) = f(x_0),$$

ami azt jelenti, hogy $f\big(\overline{x}\big) = f\big(x_0\big)$. Az f függvény azonban invertálható, ezért $\overline{x} = x_0$, ami ellentmondásban van a $(\triangle)$ relációval. ■