Emlékeztető (végtelen sorokra vonatkozó Cauchy-kritérium. A $\sum(x_n)$ sor pontosan akkor konverens, ha

$$\forall\,\varepsilon>0\;\exists\,N\in\mathbb{N}\;\forall\,m,n\in\mathbb{N}: \qquad \left(m>n>N \quad\Longrightarrow\quad |s_m-s_n|=\left|\sum_{k=n+1}^{m}x_k\right|<\varepsilon\right).$$

Emlékeztető (öszehasonlító kritérium). Legyen $x,y:\mathbb{N}_0\to\mathbb{R}$.

- Ha majdnem minden $n\in\mathbb{N}_0$ esetén $|x_n|\leq y_n$ és a $\sum\limits_{n=0}(y_n)$ sor konvergens, akkor $\sum\limits_{n=0}(x_n)$ abszolút konvergens (**majoránskritérium**), továbbá

$$0\leq\sum_{n=0}^{\infty}|x_n|\leq\sum_{n=0}^{\infty}y_n.$$

- Ha majdnem minden $n\in\mathbb{N}_0$ esetén $0\leq y_n\leq x_n$ és a $\sum(y_n)$ sor divergens, akkor $\sum(x_n)$ is divergens (**minoránskritérium**).

Emlékeztető (Leibniz-kritérium). Legyen

$$0\leq x_n\in\mathbb{R}\quad(n\in\mathbb{N}_0),\qquad (x_n)\searrow.$$

Ekkor

1. igaz a

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x_n\in\mathbb{R}\qquad\Longleftrightarrow\qquad \lim(x_n)=0$$

   ekvivalencia;

2. a $\lim(x_n)=0$ esetben

$$\sum_{n=0}^{2q-1}(-1)^n x_n\leq\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x_n\leq\sum_{n=0}^{2p}(-1)^n x_n\qquad(p,q\in\mathbb{N});$$

   és fennáll a

$$\left|\sum_{n=m}^{\infty}(-1)^n x_n\right|\leq x_m\qquad(m\in\mathbb{N}_0).$$

   hibabecslés.

Emlkékeztető. Tekintsük az $(x_n):\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ sorozatot.

1. Ha valamely $K\in\mathbb{R}$ és $q\in[0,1)$ esetén majdnem minden $n\in\mathbb{N}$ indexre

$$|x_n|\leq K\cdot q^n,$$

   akkor a $\sum(x_n)$ sor abszolút konvergens, következésképpen konvergens (**Cauchy-féle gyökkritérium**).

2. Ha majdnem minden $n \in \mathbb{N}$ indexre $x_n \neq 0$ és alkalmas $q \in (0, 1)$ esetén majdnem minden $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \leq q,$$

akkor a $\sum(x_n)$ sor abszolút konvergens, következésképpen konvergens (**D'Alembert-féle hányadoskritérium**).

Tétel. Ha

$$0 \leq x_{n+1} \leq x_n \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor a

$$\sum_{n=1}(x_n) \qquad \text{és a} \qquad \sum_{n=0}(2^n x_{2^n})$$

sorok ekvikonvergensek: egyszerre konvergensek, ill. divergensek (**Cauchy-féle kondenzációs elv**).

Emlékeztető.

- (**binomiális tétel.**) Legyen $a, b \in \mathbb{R}$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k},$$

ahol $0^0 := 1$.

- A

$$\sum_{n=0}(a_n) \qquad \text{és a} \qquad \sum_{n=0}(b_n)$$

sorok **Cauchy-szorzat**ának vagy **diszkrét konvolúció**jának nevezzük a

$$\sum_{n=0}(c_n) =: \sum_{n=0}(a_n) \times \sum_{n=0}(b_n)$$

sort, ha

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Tétel (Mertens). Ha a $\sum(a_n)$, $\sum(b_n)$ konvergens sorok:

$$A := \sum_{n=0}^{\infty} a_n, \qquad B := \sum_{n=0}^{\infty} b_n,$$

továbbá valamelyikük abszolút konvergens, akkor Cauchy-szorzatuk is konvergens, és

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = AB.$$

Feladat. A Cauchy-kritériumban alkalmazásával vizsgáljuk az alábbi sorok konvergenciáját!

1. $\sum\limits_{n=1} \left(\frac{n-1}{n!}\right)$;

1. Ha $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$, akkor

$$\frac{k-1}{k!} = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} \qquad (k \in \mathbb{N})$$

következtében

$$|s_m - s_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} \frac{k-1}{k!}\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} \left(\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}\right)\right| = \left|\frac{1}{n!} - \frac{1}{m!}\right| < \frac{1}{n!}.$$

Ezért

$$|s_m - s_n| < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad n! > \frac{1}{\varepsilon},$$

tehát (s_n) Cauchy-féle, így a $\sum\limits_{n=1} \left(\frac{n-1}{n!}\right)$ sor konvergens.

2. $\sum\limits_{n=1} \left(\frac{2n-1}{(2n)!}\right)$;

Ha $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$, akkor

$$\frac{2k-1}{(2k)!} = \frac{1}{(2k-1)!} - \frac{1}{(2k)!} \qquad (k \in \mathbb{N})$$

következtében

$$|s_m - s_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} \frac{2k-1}{(2k)!}\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} \left(\frac{1}{(2k-1)!} - \frac{1}{(2k)!}\right)\right| < \frac{1}{(2n+1)!}.$$

Ezért

$$|s_m - s_n| < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad (2n+1)! > \frac{1}{\varepsilon},$$

tehát (s_n) Cauchy-féle, így a $\sum\limits_{n=1} \left(\frac{2n-1}{(2n)!}\right)$ sor konvergens.

3. $\sum_{n=1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Mivel bármely $k, n \in \mathbb{N}$ esetén $\sqrt{n+1} < n+k$, így $\frac{1}{\sqrt{n+1}} > \frac{1}{n+k}$, és ha $m := 2n > n$, akkor tetszőleges $N qin \mathbb{N}$, illetve $N \leq n \in \mathbb{N}$ esetén

$$|s_{2n} - s_n| = \left|\frac{1}{\sqrt{n+1} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n}}}\right| > \left|\frac{1}{n+1+\ldots+\frac{1}{2n}}\right| > \frac{1}{2}.$$

Következésképpen (s_n) nem Cauchy-féle, így a $\sum_{n=1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ sor divergens. ■

Feladat. Mutassuk meg, hogy az alábbi sorok divergensek!

1. $\sum_{n=1}\left(\frac{n}{3n-1}\right)$;

$\lim\left(\frac{n}{3n-1}\right) = \frac{1}{3} \neq 0$, így a kérdéses sor divergens.

2. $\sum_{n=1}(\sqrt[n]{a}) \quad (a \in (0, +\infty))$;

$\lim(\sqrt[n]{a}) = 1 \neq 0$, így a kérdéses sor divergens.

3. $\sum_{n=1}\left(\frac{4^n n!}{n^n}\right)$;

Mivel

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 4 \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ezért az

$$x_n := \frac{4^n n!}{n^n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatra tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$x_n = 4^n \cdot n! \cdot \frac{1}{n^n} < \frac{4 \cdot 4^n \cdot n!}{(n+1)^n} = \frac{4^{n+1} n! \cdot (n+1)}{(n+1)^n \cdot (n+1)} = \frac{4^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} = x_{n+1},$$

tehát (x_n) pozitív tagú, szigorúan monoton növekedő sorozat, következésképpen nem nullsorozat. Így a kérdéses sor divergens.

4. $\sum\limits_{n=1} \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}} \right);$

Az

$$(x_n) := \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}} \right)$$

sorozat nem nullasorozat, sőt nem is konvergens, hiszen

- ha $n = 2k$, akkor
$$x_{2k} = \frac{1}{\sqrt[2k]{2k}} \longrightarrow 1 \qquad (k \to \infty),$$
- ha $n = 2k+1$, akkor
$$x_{2k+1} = \frac{-1}{\sqrt[2k+1]{2k+1}} \longrightarrow -1 \qquad (k \to \infty).$$

Ez az jelenti, hogy a kérdéses sor divergens.

5. $\sum\limits_{n=1} \left(\frac{n}{a^n} \right) \qquad (0 < |a| \leq 1);$

Mivel

$$\frac{n}{|a|^n} \geq 1 \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ezért

$$\left(\frac{n}{|a|^n} \right)$$

nem nullsorozat, tehát a kérdéses sor divergens.

6. $\sum_{n=1}\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+2}\right)$.

Világos, hogy

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+2}=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2}\longrightarrow\frac{1}{e}\neq 0\qquad(n\to\infty),$$

tehát a kérdéses sor divergens. ■

Feladat. Az összehasonlító kritérium segítségével döntsük el, hogy konvergensek-e a következő sorok!

1. $\sum_{n=1}\left(\frac{n^2}{n^3+1}\right)$;

Mivel nagy $n\in\mathbb{N}$ indexekre

$$\frac{n^2}{n^3+1}=\frac{1}{n+\frac{1}{n^2}}\approx\frac{1}{n}\qquad\text{és}\qquad\sum_{n=1}\left(\frac{1}{n}\right)\quad\text{divergens,}$$

ezért a minoránskritériumot kíséreljük meg alkalmazni. Mivel tetszőleges $n\in\mathbb{N}$ indexre

$$\frac{n^2}{n^3+1}\geq\frac{n^2}{n^3+n^3}=\frac{1}{2n}$$

és a

$$\sum_{n=1}\left(\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}\left(\frac{1}{n}\right)$$

sor divergens, ezért a kérdéses sor a minoránskritérium alapján divergens.

2. $\sum_{n=1}\left(\frac{2n^3-16}{n^5+n}\right)$;

Mivel nagy $n\in\mathbb{N}$ indexekre

$$\frac{2n^3-16}{n^5+n}=\frac{1-\frac{16}{n^3}}{n^2+\frac{1}{n^2}}\approx\frac{1}{n^2}\qquad\text{és}\qquad\sum_{n=1}\left(\frac{1}{n^2}\right)\quad\text{konvergens,}$$

$$\frac{2n^3-16}{n^5+n} < \frac{2n^3}{n^5+n} < \frac{2n^3}{n^5} = \frac{2}{n^2}$$

és a

$$\sum_{n=1} \left(\frac{2}{n^2}\right) = 2 \cdot \sum_{n=1} \left(\frac{1}{n^2}\right)$$

3. $\displaystyle\sum_{n=1} \left(\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}\right);$

Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} < \frac{1}{n(\sqrt{n}+\sqrt{n})} = \frac{1}{2n^{3/2}}$$

és a

$$\sum_{n=1} \left(\frac{1}{2n^{3/2}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1} \left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

sor konvergens, ezért a kérdéses sor a majoránskritérium alapján konvergens.

4. $\displaystyle\sum_{n=1} \left(\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{n}\right);$

Mivel nagy $n \in \mathbb{N}$ indexekre

$$\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{n} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}{\sqrt{n}} \approx \frac{2}{\sqrt{n}}$$

ezért a minoránskritériumot kíséreljük meg alkalmazni (vö. hiperharmonikus sor konvergenciakérdése). Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{n} = \frac{2}{n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})} > \frac{1}{n} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2 > \sqrt{n+1}-\sqrt{n-1},$$

és ez utóbbi igaz, hiszen

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1} = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} < \frac{2}{1} = 2 \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

így a kérdéses sor a minoránskritérium alapján divergens.

5. $\sum_{n=0} \left(\frac{2^n + 4^n}{3^n + 5^n} \right)$;

Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{2^n + 4^n}{3^n + 5^n} < \frac{4^n + 4^n}{5^n} = 2 \left(\frac{4}{5} \right)^n,$$

így a kérdéses sor a majoránskritérium alapján konvergens.

6. $\sum_{n=1} \left(\frac{n + 2}{\sqrt{n^4 + 3n^2 + 2}} \right)$;

Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{n + 2}{\sqrt{n^4 + 3n^2 + 2}} > \frac{n + 2}{\sqrt{(n + 2)^4}} = \frac{1}{n + 2},$$

így a kérdéses sor a minoránskritérium alapján divergens.

7. $\sum_{n=1} \left(\frac{1}{\sqrt{n(n + 1)}} \right)$;

Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{1}{\sqrt{n(n + 1)}} > \frac{1}{\sqrt{n(n + n)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{n},$$

így a kérdéses sor a minoránskritérium alapján divergens.

8. $\sum_{n=1} \left(\frac{1}{\sqrt{n(n^2 + 1)}} \right)$.

Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{1}{\sqrt{n(n^2 + 1)}} < \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{n^{3/2}},$$

így a kérdéses sor a majoránskritérium alapján konvergens.

9. $\sum_{n=1}\left(\frac{n+1}{\sqrt{n^3+n+7}}\right)$.

Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$\frac{n+1}{\sqrt{n^3+n+7}} > \frac{n}{\sqrt{n^3+n+7}} \geq \frac{n}{\sqrt{n^3+n^3+7n^3}} = \frac{n}{\sqrt{9n^3}} = \frac{1}{3\sqrt{n}} \geq \frac{1}{3n},$$

ezért a harmonikus sor a kérdéses sor divergens minoránsa. ■

Feladat. A Leibniz-kritérium segítségével vizsgáljuk az alábbi sorok konvergenciáját!

1. $\sum_{n=0}\left((-1)^{n+1} \cdot \frac{n}{n^2+1}\right)$;

Ha

$$x_n := \frac{n}{n^2+1} \qquad (n \in \mathbb{N}_0),$$

akkor (**HF**) bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $0 \leq x_{n+1} < x_n$ és nyilván $\lim(x_n) = 0$, így a $\sum(x_n)$ sor konvergens.

2. $\sum_{n=0}\left((-1)^n \cdot \frac{n}{5n-2}\right)$.

Ha

$$x_n := \frac{n}{5n-2} \qquad (n \in \mathbb{N}_0),$$

akkor (**HF**) bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $0 \leq x_{n+1} < x_n$, de $\lim(x_n) = \frac{1}{5} \neq 0$, így a $\sum(x_n)$ sor divergens.

Feladat. Vizsgáljuk az alábbi sorok konvergenciáját!

1. $\sum_{n=1}\left(\frac{1}{3^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n}\right)$;

Legyen

$$x_n := \frac{1}{3^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor

$$\lim\left(\sqrt[n]{|x_n|}\right) = \frac{1}{3}\cdot\lim\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\right) = \frac{1}{3} < 1,$$

így a gyökkritérium szerint a $\sum(x_n)$ sor konvergens.

2. $\sum\limits_{n=1}\left(\frac{n^2}{2^n}\right)$;

Legyen

$$x_n := \frac{n^2}{2^n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor

1. módszer a hányadoskritérium következtében a kérdéses sor konvergens, hiszen

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n^2} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \longrightarrow \frac{1}{2} < 1 \qquad (n\to\infty).$$

2. módszer a gyökkritérium következtében a kérdéses sor konvergens, hiszen

$$\sqrt[n]{|x_n|} = \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{2} \longrightarrow \frac{1}{2} < 1 \qquad (n\to\infty).$$

3. $\sum\limits_{n=1}\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n\right)$;

Mivel

$$\lim\left(\sqrt[n]{\left|\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n\right|}\right) = \lim\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} < 1,$$

ezért a $\sum(x_n)$ sor konvergens.

4. $\sum_{n=1}\left(\frac{n^2}{2^n+3^n}\right);$

Mivel
$$\lim\left(\sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n+3^n}}\right)=\lim\left(\frac{\sqrt[n]{n}^2}{\sqrt[n]{2^n+3^n}}\right)=\frac{1^2}{\max\{2,3\}}=\frac{1}{3}<1,$$
ezért a $\sum(x_n)$ sor konvergens.

5. $\sum_{n=1}\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2+n+1}\right)$

Mivel
$$\sqrt[n]{\left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2+n+1}\right|}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n^2+n+1}{n}}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{1}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{1/n}=$$
$$=\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}\cdot\frac{n}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}\cdot\sqrt[n]{\frac{n}{n+1}}\longrightarrow\frac{1}{e}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{e}<1\quad(n\to\infty),$$
ezért a $\sum(x_n)$ sor (abszolút) konvergens.

6. $\sum_{n=1}\left(\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e-1}\right)^n\right);$

Ha
$$x_n:=\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e-1}\right)^n\qquad(n\in\mathbb{N}),$$
akkor
$$\lim\left(\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|\right)=\frac{1}{e-1}\lim\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right)=\frac{e}{e-1}>1,$$
így a hányadoskritérium szerint a $\sum(x_n)$ sor divergens.

7. $\displaystyle\sum_{n=1}\left(\frac{n!}{2^n+1}\right)$;

Ha
$$x_n := \frac{n!}{2^n+1} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$
akkor
$$\lim\left(\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|\right) = \lim\left((n+1)\frac{2^n+1}{2^{n+1}+1}\right) = \lim\left((n+1)\frac{1+\frac{1}{2^n}}{2+\frac{1}{2^n}}\right) = +\infty,$$
így a hányadoskritérium szerint a $\sum(x_n)$ sor divergens.

8. $\displaystyle\sum_{n=1}\left(\frac{(-1)^n\cdot n!}{3n+2}\right)$;

Legyen
$$x_n := \frac{(-1)^n\cdot n!}{3n+2} \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$
Ekkor
$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \frac{(n+1)!}{3(n+1)+2}\cdot\frac{3n+2}{(-1)^n\cdot n!} = \frac{(n+1)(3n+2)}{3n+2} = n+1 > 1,$$
így a hányadoskritérium szerint a $\sum(x_n)$ sor divergens.

9. $\displaystyle\sum_{n=1}\left(\frac{2n+1}{(-3)^n}\right)$.

Ha
$$x_n := \frac{2n+1}{(-3)^n} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$
akkor
$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \frac{2(n+1)+1}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{2n+1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2n+3}{2n+1} \longrightarrow \frac{1}{3} \quad (n\to\infty).$$
Így a hányadoskritérium szerint a $\sum(x_n)$ sor (abszolút) konvergens.

10. $\sum_{n=0}\left(\frac{(2n+1)!}{3^{n^2}}\right)$;

Az

$$x_n := \frac{(2n+1)!}{3^{n^2}} \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

sorozatra

$$\begin{aligned}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| &= \frac{(2(n+1)+1)!}{3^{(n+1)^2}} \cdot \frac{(2n+1)!}{3^{n^2}} = \frac{(2n+3)!}{(2n+1)!} \cdot \frac{3^{n^2}}{3^{n^2+2n+1}} = \\ &= \frac{(2n+3)(2n+2)}{3^{2n+1}} = \frac{1}{3} \cdot n^2 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^n \cdot \left(2+\frac{3}{n}\right) \cdot \left(2+\frac{2}{n}\right) \longrightarrow \\ &\longrightarrow \frac{1}{3} \cdot 0 \cdot (2+0) \cdot (2+0) = 0 \quad (n \to \infty).\end{aligned}$$

Mindez a hányadoskritérium következtében azt jelenti, hogy a $\sum(x_n)$ sor (abszolút) konvergens.

11. $\sum_{n=0}\left(\left(\frac{3n+4}{3n+3}\right)^{n^2+1}\right)$;

Legyen

$$x_n := \left(\frac{3n+4}{3n+3}\right)^{n^2+1} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor

$$\sqrt[n]{|x_n|} = \left(\frac{3n+4}{3n+3}\right)^{n+\frac{1}{n}} = \left(\frac{3n+4}{3n+3}\right)^n \cdot \sqrt[n]{\frac{3n+4}{3n+3}} \longrightarrow \sqrt[3]{e} \cdot 1 = \sqrt[3]{e} > 1 \qquad (n \to \infty),$$

hiszen

- egyrészt az $n \to \infty$ határátmenetben

$$\left(\frac{3n+4}{3n+3}\right)^n = \left(\frac{3n+3+1}{3n+3}\right)^n = \sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{3n+3}\right)^{3n+3} \cdot \left(1+\frac{1}{3n+3}\right)^{-3}} \longrightarrow \sqrt[3]{e \cdot 1}$$

- másrészt pedig

$$\lim\left(\frac{3n+4}{3n+3}\right)=1>0 \qquad \text{így} \qquad \lim\left(\sqrt[n]{\frac{3n+4}{3n+3}}\right)=1.$$

Ezért a hányadoskritérium következtében a $\sum(x_n)$ sor divergens.

12. $\sum\limits_{n=1}\left(n!\cdot 2^{1-n}\right)$;

Ha

$$x_n := n!\cdot 2^{1-n} = 2\cdot\frac{n!}{2^n} \qquad (n\in\mathbb{N}),$$

akkor a sorozatokra vonatkozó hányadoskritérium (vö. 5. **GY**) következtében

$$\lim\left(\frac{1}{x_n}\right)=0, \qquad \text{így} \qquad \lim(x_n)=+\infty.$$

Mindez azt jelenti, hogy a $\sum(x_n)$ sor divergens.

13. $\sum\limits_{n=1}\left(\frac{2^{n-1}}{(3n+4)\cdot 5^n}\right)$;

Ha

$$x_n := \frac{2^{n-1}}{(3n+4)\cdot 5^n} \qquad (n\in\mathbb{N}),$$

akkor

$$\sqrt[n]{|x_n|}=\frac{2}{5\cdot\sqrt[n]{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{3n+4}} \longrightarrow \frac{2}{5}<1 \qquad (n\to\infty),$$

hiszen

$$\sqrt[n]{3}\cdot\sqrt[n]{n}\le\sqrt[n]{3n+4}\le\sqrt[n]{3n+4n}=\sqrt[n]{7}\cdot\sqrt[n]{n} \qquad (n\in\mathbb{N})$$

következtében

$$\lim(\sqrt[n]{|x_n|})=\frac{1}{5}<1.$$

Ez a gyökkritérium következtében azt jelenti, hogy a $\sum(x_n)$ sor (abszolút) konvergens.

14. $\sum_{n=1}\left(\left(\frac{n+1}{3n}\right)^n\right);$

Ha

$$x_n := \left(\frac{n+1}{3n}\right)^n \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor

$$\sqrt[n]{|x_n|} = \frac{n+1}{3n} \longrightarrow \frac{1}{3} < 1 \qquad (n \to \infty).$$

Következésképpen a $\sum(x_n)$ sor (abszolút) konvergens.

15. $\sum_{n=1}\left(\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{4n+1}\right);$

Ha

$$x_n := \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{4n+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{4n} \cdot \left(\frac{n+1/2}{n+1/3}\right)^{4n} \cdot \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right) \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor az $n \to \infty$ határátmenetben

$$\sqrt[n]{|x_n|} = \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{n+1/3+1/6}{n+1/3}\right)^4 \cdot \sqrt[n]{\frac{2n+1}{3n+1}} \longrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot 1 \cdot 1 = \left(\frac{2}{3}\right)^4 < 1.$$

Ez azt jelenti, hogy a $\sum(x_n)$ sor (abszolút) konvergens.

16. $\sum_{n=1}\left(\frac{(2n)!}{n^n}\right);$

Ha

$$x_n := \frac{(2n)!}{n^n} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor az $n \to \infty$ határátmenetben

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \frac{(2n+2)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{(2n)!} = \frac{(2n+1)\cdot(2n+2)}{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \longrightarrow (+\infty) \cdot \frac{1}{e} = +\infty > 1.$$

Következésképpen a $\sum(x_n)$ sor divergens.

17. $\sum_{n=1} \left(n^{100} \cdot 2^{-2n}\right)$;

Ha
$$x_n := n^{100} \cdot 2^{-2n} = n^{100} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n \qquad (n \in \mathbb{N}),$$
akkor
$$\sqrt[n]{|x_n|} = \left(\sqrt[n]{n}\right)^{100} \cdot \frac{1}{4} \longrightarrow \frac{1}{4} < 1 \qquad (n \to \infty).$$
A $\sum (x_n)$ sor tehát a gyökkritérium szerint (abszolút) konvergens.

18. $\sum_{n=1} \left(\frac{3^n}{n^n}\right)$;

Ha
$$x_n := \frac{3^n}{n^n} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$
akkor
$$\sqrt[n]{|x_n|} = \frac{3}{n} \longrightarrow 0 < 1 \qquad (n \to \infty).$$
Így a gyökkritérium szerint a $\sum (x_n)$ sor (abszolút) konvergens.

19. $\sum_{n=1} \left(\frac{1}{n \cdot 3^n}\right)$.

Ha
$$x_n := \frac{1}{n \cdot 3^n} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$
akkor
$$\sqrt[n]{|x_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n} \cdot 3} \longrightarrow \frac{1}{3} < 1 \qquad (n \to \infty).$$
Így a gyökkritérium szerint a $\sum (x_n)$ sor (abszolút) konvergens. ■

Feladat. Mely $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén konvergens a $\sum(x_n)$ sor?

1. $x_n := \dfrac{\alpha^n n!}{n^n} \quad (n \in \mathbb{N};\ e \neq \alpha \in \mathbb{R});$

Legyen

$$x_n := \frac{\alpha^n n!}{n^n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor az $\alpha. = 0$ esetén a sor nyilván konvergens, sőt összege: 0. Ha $\alpha \neq 0$, akkor

$$\lim\left(\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|\right) = |\alpha| \cdot \lim\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right) = \frac{|\alpha|}{e}.$$

így a hányadoskritérium erősebb változata szerint a $\sum(x_n)$ sor

- $|\alpha| < e$, azaz $\alpha \in (-e, e)$ esetén konvergens,
- $|\alpha| > e$, azaz $\alpha \in (-\infty, -e) \cup (e, +\infty)$ esetén divergens.

2. $x_n := \dfrac{(\alpha-2)^n}{n+\sqrt{n}} \quad (n \in \mathbb{N};\ \alpha \in \mathbb{R});$

Világos, hogy $\alpha = 2$ esetén a sor konvergens és összege 0. Legyen most $2 \neq \alpha \in \mathbb{R}$. Ekkor az $n \longrightarrow \infty$ határesetben

$$\left|\frac{(\alpha-2)^{n+1}}{n+1+\sqrt{n+1}} \cdot \frac{n+\sqrt{n}}{(\alpha-2)^n}\right| = |\alpha-2| \cdot \frac{n+\sqrt{n}}{n+1+\sqrt{n+1}} =$$

$$= |\alpha-2| \cdot \frac{1+\sqrt{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}+\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} \longrightarrow |\alpha-2|.$$

Mivel

$$|\alpha-2| < 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -1 < \alpha-2 < 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 1 < \alpha < 3,$$

ezért $\alpha \in (1,3)$ esetén a sor konvergens és $\alpha \in \mathbb{R}\backslash[1,3]$ esetén pedig divergens. Az $\alpha = 3$ esetén a sor minorálható a

$$\sum_{n=1}\left(\frac{1}{2n}\right)$$

divergens sorral, hiszen

$$\frac{(3-2)^n}{n+\sqrt{n}} = \frac{1}{n+\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n+n}\frac{1}{2n} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

így a sor divergens. Az $\alpha = 1$ esetben pedig a sor a Leibniz-tétel miatt konvergens, hiszen

$$\frac{(2-2)^n}{n+\sqrt{n}} = \frac{(-1)^n}{n+\sqrt{n}} \searrow 0 \qquad (n \to \infty).$$

A sor tehát pontosan az $\alpha \in [1, 3)$ esetben konvergens.

3. $x_n := \dfrac{n \cdot 2^n}{n+1} \cdot \dfrac{1}{(3\alpha^2 + 8\alpha + 6)^n} \qquad (n \in \mathbb{N}_0;\ \alpha \in \mathbb{R});$

Világos, hogy

$$\sqrt[n]{|x_n|} = \frac{2\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n+1}} \cdot \frac{1}{|3\alpha^2+8\alpha+6|} \longrightarrow \frac{2}{|3\alpha^2+8\alpha+6|} \qquad (n \to \infty)$$

és

$$\frac{2}{|3\alpha^2+8\alpha+6|} < 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha \in (-\infty, -2) \cup (-2/3, +\infty).$$

Ha $\alpha \in \{-2; -2/3\}$, akkor

$$\sum (x_n) = \sum \left(\frac{n2^n}{n+1} \cdot \frac{1}{2^n} \right) = \sum \left(\frac{n}{n+1} \right),$$

ami divergens. Tehát $\sum (x_n)$ pontosan akkor konvergens, ha $\alpha \in (-\infty, -2) \cup (-2/3, +\infty)$.

4. $x_n := \dfrac{(-1)^n}{2n-1} \left(\dfrac{2-\alpha}{2+\alpha} \right)^n \qquad (n \in \mathbb{N};\ -2 \neq \alpha \in \mathbb{R});$

Ha $\alpha = 2$, akkor a sor konvergens. Ha $\alpha \neq 2$, akkor

$$\lim \left(\left| \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} \cdot \left(\frac{2-\alpha}{2+\alpha} \right)^{n+1} \right| \cdot \left| \frac{2n-1}{(-1)^n} \cdot \left(\frac{2+\alpha}{2-\alpha} \right)^n \right| \right) = \left| \frac{2-\alpha}{2+\alpha} \right| \lim \left(\frac{2n-1}{2n+1} \right) = \left| \frac{2-\alpha}{2+\alpha} \right|.$$

Ha

$$\left| \frac{2-\alpha}{2+\alpha} \right| < 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -1 < \frac{2-\alpha}{2+\alpha} < 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0 < \frac{4}{2+\alpha} < 2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha > 0,$$

akkor a sor abszolút konvergens. Ha

$$\left| \frac{2-\alpha}{2+\alpha} \right| > 1, \qquad \text{azaz} \qquad \alpha \in (-\infty, -2) \cup (-2, 0),$$

akkor a sor divergens. Ha

$$\left|\frac{2-\alpha}{2+\alpha}\right| = 1, \qquad \text{azaz} \qquad \alpha = 0,$$

a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2n-1}\right)$$

Leibniz-sort kapjuk, amely konvergens.

5. $x_n := \dfrac{\alpha^{2n}}{1+\alpha^{4n}} \quad (n \in \mathbb{N};\ \alpha \in \mathbb{R}).$

A konvergencia vizsgálatát a gyökkritérium segítségével végezzük. Mivel bármely $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sqrt[n]{\left|\frac{\alpha^{2n}}{1+\alpha^{4n}}\right|} = \frac{|\alpha|^2}{\sqrt[n]{|1+\alpha^{4n}|}} \leq \frac{|\alpha|^2}{\sqrt[n]{1}} = |\alpha|^2,$$

így

$$\lim\left(\sqrt[n]{\left|\frac{\alpha^{2n}}{1+\alpha^{4n}}\right|}\right) \leq |\alpha|^2 < 1,$$

ha $|\alpha| < 1$. Tehát $|\alpha| < 1$ esetén a sor abszolút konvergens. Legyen most $|\alpha| > 1$, és alakítsuk át a törtet a következőképpen:

$$\sqrt[n]{\left|\frac{\alpha^{2n}}{1+\alpha^{4n}}\right|} = \sqrt[n]{\frac{\frac{1}{|\alpha|^{2n}}}{\left|\frac{1}{\alpha^{4n}}+1\right|}} = \frac{\frac{1}{|\alpha|^2}}{\sqrt[n]{\left|\frac{1}{\alpha^{4n}}+1\right|}} < \frac{\frac{1}{|\alpha|^2}}{\sqrt[n]{1}} = \frac{1}{|\alpha|^2} < 1,$$

így $|\alpha| > 1$ esetén is

$$\lim\left(\sqrt[n]{\left|\frac{\alpha^{2n}}{1+\alpha^{4n}}\right|}\right) < 1,$$

azaz a sor abszolút konvergens. Ha $|\alpha| = 1$, akkor $\alpha = 1$, ill.$\alpha = -1$. Ebben az esetben a sor nem más mint

$$\sum_{n=1}\left(\frac{1}{2}\right),$$

ami divergens. ■

Feladat. Mutassuk meg, hogy ha

$$x_n, y_n \in (0, +\infty) \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad \text{és} \qquad \left(\frac{x_n}{y_n}\right) \quad \text{korlátos,}$$

akkor igazak az alábbi implikációk!

1. $\sum(y_n)$ konvergens $\implies$ $\sum(x_n)$ konvergens;
2. $\sum(x_n)$ divergens $\implies$ $\sum(y_n)$ divergens.

$$\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$$

sorozat korlátossága azt jelenti, hogy van olyan $k > 0$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $x_n \leq k y_n$, így az összehasonlító-kritérium alapján adódik az állítás.

Megjegyzés. Ez a helyzet, ha

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} < \frac{y_{n+1}}{y_n} \qquad (\text{mm. } n \in \mathbb{N}),$$

ugyanis ekkor

$$\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} < \frac{x_n}{y_n} \qquad (\text{mm. } n \in \mathbb{N}),$$

és így

$$\frac{x_n}{y_n} < \frac{x_0}{y_0} \qquad (\text{m.m. } n \in \mathbb{N}),$$

azaz $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ korlátos. Így pl., ha

- $1 < \alpha \in \mathbb{R}$ és
$$\boxed{\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha} \qquad (\text{mm. } n \in \mathbb{N})},$$
akkor $\sum(x_n)$ konvergens, míg
- $\alpha \leq 1$ és
$$\boxed{\frac{y_{n+1}}{y_n} \geq \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha} \qquad (\text{mm. } n \in \mathbb{N})}$$
esetén $\sum(y_n)$ divergens.

Feladat. Mutassuk meg, hogy

1. a $\sum\limits_{n=0} \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)$ sor konvergens, viszont önmagával vett Cauchy-szorzata divergens;

A $\sum\limits_{n=0} \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)$ sor a Leibniz-kritérium következtében konvergens, továbbá

$$\sum_{n=0}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)\times\sum_{n=0}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)=\sum_{n=0}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}\frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}}\right)=:$$

$$=:\sum_{n=0}\left((-1)^n c_n\right)$$

folytán

$$c_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1}}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}\geq$$

$$\geq\sum_{k=0}^{n}\frac{2}{n+2}=\frac{2(n+1)}{n+2}\to 2\neq 0\quad(n\to\infty).$$

2. az $1-\sum_{n=1}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n\right)$ és az $1+\sum_{n=1}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n+\frac{1}{2^{n+1}}\right)\right)$ sorok divergensek, de Cauchy-szorzatuk konvergens!

Világos, hogy a feladatbeli két sor Cauchy-szorzatára $\sum_{n=0}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}c_n\right)$, ahol

$$\begin{aligned}
c_n &= \left(2^n+\frac{1}{2^{n+1}}\right)-\left(2^{n-1}+\frac{1}{2^n}\right)-\ldots-\left(2+\frac{1}{2^2}\right)-\frac{3}{2}=\\
&= 2^n+\frac{1}{2^{n+1}}-(1+2+\ldots+2^{n-1})-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)=\\
&= 2^n+\frac{1}{2^{n+1}}-(2^n-1)-\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=\\
&= \frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^n}=\frac{3}{2^{n+1}},
\end{aligned}$$

azaz

$$\sum_{n=0}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}c_n\right)=\sum_{n=0}\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n\right). \quad \blacksquare$$

Házi feladatok.

1. Vizsgáljuk meg az alábbi sorokat konvergencia szempontjából!

(a) $\sum_{n=1} \left(\frac{n^2-1}{3n^2+1}\right)$;

Mivel

$$\lim \left(\frac{n^2-1}{3n^2+1}\right) = \frac{1}{3} \neq 0,$$

ezért a

$$\sum_{n=1} \left(\frac{n^2-1}{3n^2+1}\right)$$

sor divergens.

(b) $\sum_{n=1} \left(\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n-1}\right)$;

Mivel

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n-1} \quad = \quad \left(\frac{n+1+1}{n+1}\right)^{n-1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-2} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \quad e \cdot \frac{1}{(1+0)^2} = e \neq \quad (n \to \infty),$$

ezért a

$$\sum_{n=1} \left(\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n-1}\right)$$

sor divergens.

(c) $\sum_{n=1} \left(\frac{n^2+n+1}{\sqrt{n^4+1}+n^5}\right)$;

Mivel nagy $n \in \mathbb{N}$ indexekre

$$\frac{n^2+n+1}{\sqrt{n^4+1}+n^5} = \frac{\frac{n^2+n+1}{n^2}}{\frac{\sqrt{n^4+1}+n^5}{n^2}} = \frac{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}+n^3} \approx \frac{1}{n^3} \qquad \text{és} \qquad \sum_{n=1} \left(\frac{1}{n^3}\right) \quad \text{konvergens,}$$

ezért a majoránskritériumot kíséreljük meg alkalmazni. Mivel tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$\frac{n^2+n+1}{\sqrt{n^4+1}+n^5} \le \frac{3n^2}{n^5} = \frac{3}{n^3}$$

és a

$$\sum_{n=1}\left(\frac{3}{n^3}\right)$$

sor konvergens, ezért a kérdéses sor a majoránskritérium alapján konvergens.

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}\left(\frac{1}{n^{n+1/n}}\right)$;

Mivel $\lim(\sqrt[n]{n}) = 1$, ezért alkalmas $N \in \mathbb{N}$ indexre

$$\sqrt[n]{n} \le 2 \qquad (N \le n \in \mathbb{N}).$$

Következésképpen

$$\frac{1}{n^{n+1/n}} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \ge \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2},$$

így a minoránskritérium alkalmazásával látható, hogy a kérdéses sor divergens.

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}\left(\frac{100^n}{n!}\right)$;

Ha

$$x_n := \frac{100^n}{n!} \qquad (n \in \mathbb{N}_0),$$

akkor

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \frac{100^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{100^n} = \frac{100}{n+1} \longrightarrow 0 < 1 \qquad (n \to \infty),$$

így a hányadoskritérium következményeként a kérdéses sor konvergens.

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}\left(\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}\right)$;

Legyen

$$x_n := \frac{(n!)^2}{2^{n^2}} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor hányadoskritérium következtében a kérdéses sor konvergens, hiszen az $n \to \infty$ határátmenetben

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \frac{((n+1)!)^2}{2^{(n+1)^2}} \cdot \frac{2^{n^2}}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}} = \frac{1}{2} \cdot (n^2+2n+1) \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n \longrightarrow 0+0+0 = 0 < 1.$$

(g) $\sum\limits_{n=1} \left(\frac{3^n \cdot (n+2)!}{(n+1)^n}\right)$;

Legyen

$$x_n := \frac{3^n \cdot (n+2)!}{(n+1)^n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor hányadoskritérium következtében a kérdéses sor divergens, hiszen

$$\begin{aligned}
\frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{3^{n+1} \cdot (n+3)!}{(n+2)^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)^n}{3^n \cdot (n+2)!} = 3 \cdot \frac{n+3}{n+2} \cdot \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n = \\
&= 3 \cdot \frac{n+3}{n+2} \cdot \left(\frac{n+2-1}{n+2}\right)^n = \\
&= 3 \cdot \frac{n+3}{n+2} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{n+2} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{-2} \longrightarrow 3 \cdot 1 \cdot e^{-1} \cdot 1^{-2} = \frac{3}{e} > 1.
\end{aligned}$$

(h) $\sum\limits_{n=1} \left(\frac{2+(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$.

Mivel bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{2+(-1)^n}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}},$$

ezért a kérdéses sor a minoránskritérium következtében divergens.

2. Mely $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén konvergens a
$$\sum_{n=1} \left(\frac{(\alpha - 2)^n}{n} \right)$$
sor?

Ha $\alpha = 2$, akkor a sor nyilvánvalóan konvergens, és az összege 0. Legyen $2 \neq \alpha \in \mathbb{R}$ és
$$x_n := \frac{(\alpha - 2)^n}{n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$
Ekkor
$$\lim \left(\left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| \right) = \lim \left(\left| \frac{(\alpha - 2)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{(\alpha - 2)^n} \right| \right) = |\alpha - 2| \cdot \lim \left(\frac{n}{n+1} \right) = |\alpha - 2|.$$
Mindez azt jelenti, hogy a sor
$$|\alpha - 2| < 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -1 < \alpha - 2 < 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in (1, 3)$$
esetén konvergens,
$$|\alpha - 2| > 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$$
esetén pedig divergens. Ha $|\alpha - 2| = 1$, azaz $\alpha \in \{1; 3\}$, akkor a következőképpen járunk el:

- $\alpha = 1$ esetén a
$$\sum_{n=1} \left(\frac{(\alpha - 2)^n}{n} \right) = \sum_{n=1} \left(\frac{(-1)^n}{n} \right)$$
sor nem más, mint az alternáló harmonikus sor (vö. 4. gyakorlat), így a Lebniz-kritérium (vö. 10. gakorlat) következtében konvergens;
- $x = 3$ esetén a
$$\sum_{n=1} \left(\frac{(\alpha - 2)^n}{n} \right) = \sum_{n=1} \left(\frac{1}{n} \right)$$
sor nem más, mint a harmonikus sor (vö. 4. gyakorlat), így divergens.

Következésképpen a kérdéses sor pontosan az $\alpha \in [1, 3)$ esetben konvergens.

3. Igazoljuk, hogy fennáll a
$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{2} \right)^n \cdot \frac{1}{n!}$$
egyenlőség!

Világos, hogy

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{k!}\cdot\frac{1}{2^{n-k}(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{2^{2k}}{k!(n-k)!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{n!}\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\cdot 4^k = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{n!}\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}4^k =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{n!}\cdot(1+4)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(5/2)^n}{n!} = \sqrt{e^5}.$$

4. Számítsuk ki a

$$\sum_{n=0}\frac{2^n}{n!}\times\sum_{n=0}(-1)^n\frac{2^n}{n!}$$

Cauchy-szorzatot, majd annak összegét!

A Mertens-tétel következtében elmondható, hogy

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^k}{k!}\cdot\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{2^{n-k}}{(n-k)!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}2^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{1}{k!(n-k)!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{n!}{k!(n-k)!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}(-1+1)^n = 1.$$

5. Adjunk becslést a

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k - \sum_{k=1}^{n} x_k\right| \qquad (n \in \mathbb{N})$$

maradékra!

1. $x_k := \dfrac{1}{k(k+1)} \quad (k \in \mathbb{N});$ 2. $x_k := \dfrac{1}{k^2} \quad (k \in \mathbb{N}).$

(a) $$\left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k - \sum_{k=1}^{n} x_k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} x_k\right| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{n+1};$$

(b) $$\left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k - \sum_{k=1}^{n} x_k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} x_k\right| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n+1}. \blacksquare$$