

5. előadás

TAYLOR POLINOMOK ÉS TAYLOR-SOROK

Lineáris közelítés

Gyakori jelenség, hogy valamely problémánál fellépő függvénnyel dolgozva egyszerűbb és áttekinthetőbb eredményhez juthatunk, ha a függvény helyett egy másik, az eredetit „jól közelítő”, de egyszerűbb típusú függvényt tekintünk. Az egyik legegyszerűbb függvénytípus az elsőfokú polinom (vagyis az $mx + b$ ($x \in \mathbb{R}$) függvény). Megmutatjuk, hogy *egy f függvény deriválhatósága az $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$ pontban éppen azt jelenti, hogy a függvény bizonyos értelemben „jól közelíthető” elsőfokú polinommal.*

1. Tétel (Lineáris közelítés). Legyen $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $a \in \mathcal{D}_f$. Ekkor

$$f \in D\{a\} \iff \begin{cases} \exists A \in \mathbb{R} \quad \text{és} \quad \exists \varepsilon : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}, \lim_a \varepsilon = 0: \\ f(x) - f(a) = A(x - a) + \varepsilon(x)(x - a) \quad (x \in \mathcal{D}_f). \end{cases}$$

Az A szám az f függvény $a \in \mathcal{D}_f$ pontbeli deriváltja, vagyis $A = f'(a)$.

Bizonyítás. \Rightarrow

$$f \in D\{a\} \implies \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \in \mathbb{R} \iff \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right) = 0.$$

Ha $\varepsilon(a) := 0$ és

$$\varepsilon(x) := \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \quad (x \in \mathcal{D}_f \setminus \{a\}),$$

akkor $\lim_a \varepsilon = 0$ és

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x - a) + \varepsilon(x)(x - a) \quad (x \in \mathcal{D}_f),$$

ezért a feltétel az $A = f'(a)$ választással teljesül.

\Leftarrow Most tegyük fel, hogy $\exists A \in \mathbb{R}$ és $\exists \varepsilon : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}, \lim_a \varepsilon = 0$, hogy

$$f(x) - f(a) = A(x - a) + \varepsilon(x)(x - a) \quad (x \in \mathcal{D}_f).$$

Ebből

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = A + \varepsilon(x) \rightarrow A + 0 = A, \quad \text{ha } x \rightarrow a$$

adódik, ami azt jelenti, hogy $f \in D\{a\}$ és $f'(a) = A$.

Megjegyzés. Az

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \varepsilon(x)(x - a) \quad (x \in \mathcal{D}_f)$$

felírásban a jobb oldal az $f(a) + f'(a)(x - a)$ lineáris függvény és az $\varepsilon(x)(x - a)$ tag összegéből áll, amely tag $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon = 0$ és $\lim_{x \rightarrow a} (x - a) = 0$ miatt „meglehetősen gyorsan” tart nullához, ha $x \rightarrow a$. Az f függvény ***a pontbeli deriválhatósága tehát azt jelenti, hogy a függvény az a pont környezetében „jól” közelíthető lineáris függvénnyel.*** Ezt a közelítést gyakran az

$$f(x) \sim f(a) + f'(a)(x - a) \quad (\text{ha } x \sim a)$$

jelöléssel fejezzük ki. A szóban forgó lineáris függvény grafikonja az

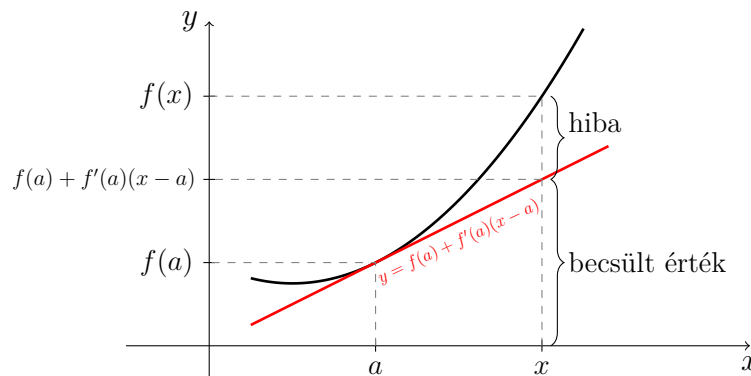
$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

egyenletű egyenes, ami az f függvény grafikonjának $(a, f(a))$ pontbeli érintője.

A lineáris közelítés alkalmazható értékbecslésben. Ha ismerjük egy differenciálható f függvény és f' deriváltja pontos értékeit egy „nevezetes” a pontban, akkor az

$$f(a) + f'(a)(x - a)$$

értékkel becsülhetjük az f függvény értékét minden olyan x pontban, amely az a pont „kis sugarú” környezetében van.



1. Feladat. Milyen lineáris becslést tudunk adni az $f(x) = \sqrt{1+x}$ függvényre az $a = 0$ pont környezetében? Becsüljük vele a $\sqrt{1,1}$ értéket!

Megoldás. $\mathcal{D}_f = [-1, +\infty)$, $a = 0 \in \text{int } \mathcal{D}_f$, $f \in D(-1, +\infty)$ és

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}.$$

Mivel $f(0) = 1$ és a $f'(0) = 1/2$, így a keresett becslés

$$\sqrt{1+x} \sim f(a) + f'(a)(x - a) = 1 + \frac{x}{2}.$$

Ha $x = 0,1$, akkor

$$\sqrt{1,1} = \sqrt{1+0,1} \approx 1 + \frac{0,1}{2} = 1,05.$$

Megjegyzés. A kapott 1,05 eredmény nem olyan rossz közelítés, hiszen a valódi érték első 10 tizedesjegye 1,0488088480.

Taylor-polinomok

Ha a lineáris közelítés nem elég pontos, akkor magasabb fokszámú polinomokkal is próbálkozunk. Jobbnak tűnik az

$$(*) \quad f(x) = P_n(x) + \varepsilon(x)(x-a)^n \quad (x \in \mathcal{D}_f),$$

típusú közelítés, ahol $\varepsilon : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$, $\lim_a \varepsilon = 0$ és P_n egy legfeljebb n -ed fokú polinom, hiszen az a pont közelében $(x-a)^n$ „jobban tart” nullához, mint $x-a$. Ez persze függ az új ε függvénytől is, ezért fogjuk közelebről megvizsgálni a fenti közelítést. Mindenesetre, a polinomokkal történő közelítés azért jó választás, mert a polinomok értékeinek kiszámításához csak az alpműveletek kellenek.

A vizsgálathoz feltételezzük, hogy az f függvény n -szer differenciálható az a pontban. Ekkor értelmezhető az alábbi polinom.

1. Definíció. Ha $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathcal{D}_f$ és $f \in D^n\{a\}$, akkor a

$$\begin{aligned} T_{n,a}f(x) &:= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \quad (x \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

polinomot az f függvény a ponthoz tartozó n -edik Taylor-polinomjának nevezzük.

Megjegyzések.

1. Ne felejtjük el, hogy az f^0 jelölés maga az f függvényt jelenti.
2. A Taylor-polinom úgy van úgyesen kialakítva, hogy i -dik deriváltja megegyezzen a függvény i -dik deriváltjával az a pontban minden $i = 0, 1, \dots, n$ esetén, azaz

$$(\#) \quad (T_{n,a}f)^{(i)}(a) = f^{(i)}(a) \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

Valóban, ha $x = a$, akkor $T_{n,a}f(x)$ mindegyik tagja nulla a nulladik tag ($k = 0$) kivételével, azaz $T_{n,a}f(a) = f^{(0)}(a) = f(a)$. Mivel

$$(T_{n,a}f)'(x) = \sum_{k=0}^n \frac{k \cdot f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^{k-1} = \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(a)}{(k-1)!}(x-a)^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}(x-a)^k,$$

így ha $x = a$, akkor $(T_{n,a}f)'(x)$ mindegyik tagja nulla a nulladik tag ($k = 0$) kivételével, azaz $(T_{n,a}f)'(a) = f^{(0+1)}(a) = f'(a)$. Ha egymás után deriválunk i -szer, akkor

$$(T_{n,a}f)^{(i)}(x) = \sum_{k=0}^{n-i} \frac{f^{(k+i)}(a)}{k!}(x-a)^k \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

Ha $x = a$, akkor $(T_{n,a}f)^{(i)}(x)$ mindegyik tagja nulla a nulladik tag ($k = 0$) kivételével, azaz $(T_{n,a}f)^{(i)}(a) = f^{(0+i)}(a) = f^{(i)}(a)$.

3. Igazolható, hogy ha $f \in D^n\{a\}$, akkor $T_{n,a}f$ az egyetlen legfeljebb n -edfokú polinom, amire $(*)$ teljesül.

Ahhoz, hogy becsülni tudjuk a Taylor-polinommal történő közelítést, szükségünk lenne a következő állításra.

2. Tétel (Taylor-formula). Legyen $n \in \mathbb{N}$, és tegyük fel, hogy $f \in D^{n+1}(K(a))$. Ekkor

$\forall x \in K(a)$ ponthoz $\exists \xi$ a és x között, hogy

$$f(x) - T_{n,a}f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

A fenti képlet jobb oldalán álló függvényt **Lagrange-féle maradéktagnak** nevezzük.

Bizonyítás. A Cauchy-féle középértéktételt fogjuk felhasználni. Legyen

$$F(x) := f(x) - T_{n,a}f(x) \quad (x \in K(a)).$$

(#)-ből következik, hogy

$$F^{(i)}(a) = f^{(i)}(a) - (T_{n,a}f)^{(i)}(a) = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

Továbbá, $F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$, hiszen $(T_{n,a}f)^{(n+1)} \equiv 0$, mert $T_{n,a}f$ egy legfeljebb n -edfokú polinom.

Másrészt, legyen $G(x) := (x-a)^{n+1}$ ($x \in K(a)$). Ekkor minden $x \in K(a)$ esetén

$$G'(x) = (n+1)(x-a)^n, \quad G''(x) = n(n+1)(x-a)^{n-1}, \quad \dots, \quad G^{(n)}(x) = (n+1)!(x-a),$$

amiből következik, hogy $G^{(i)}(a) = 0$ ($i = 0, 1, \dots, n$), és $G^{(n+1)}(x) = (n+1)!$.

Tegyük fel, hogy $x \in K(a)$ és például $x > a$. (Az $x < a$ eset hasonlóan vizsgálható.) Az F és a G függvényekre az $[a, x]$ intervallumon alkalmazható a Cauchy-féle középértéktétel, következésképpen

$$\exists \xi_1 \in (a, x): \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{f(x) - T_{n,a}f(x)}{(x-a)^{n+1}}.$$

A Cauchy-féle középértéktételt most az F' és a G' függvényekre az $[a, \xi_1]$ intervallumon alkalmazzuk:

$$\exists \xi_2 \in (a, \xi_1) \subset (a, x): \frac{F''(\xi_2)}{G''(\xi_2)} = \frac{F'(\xi_1) - F'(a)}{G'(\xi_1) - G'(a)} = \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)}.$$

Ha a fenti gondolatmenetet n -szer megismételjük, akkor a k -dik lépésben ($k = 1, 2, \dots, n$):

$$\exists \xi_{k+1} \in (a, \xi_k) \subset (a, x): \frac{F^{(k+1)}(\xi_{k+1})}{G^{(k+1)}(\xi_{k+1})} = \frac{F^{(k)}(\xi_k) - F^{(k)}(a)}{G^{(k)}(\xi_k) - G^{(k)}(a)} = \frac{F^{(k)}(\xi_k)}{G^{(k)}(\xi_k)}.$$

Az n darab lépés során kapott egyenlőségeket egybevetve azt kapjuk, hogy

$$\frac{f(x) - T_{n,a}(f, x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)} = \dots = \frac{F^{(n)}(\xi_n)}{G^{(n)}(\xi_n)} = \frac{F^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{G^{(n+1)}(\xi_{n+1})} = \frac{f^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!},$$

hiszen minden $x \in K(a)$ esetén $F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$ és $G^{(n+1)}(x) = (n+1)!$. A konstrukcióból látható, hogy ξ_{n+1} az a pont és x között van, ezért a $\xi := \xi_{n+1}$ választással a bizonyítandó állítást kapjuk.

2. Feladat. Írjuk fel az

$$f(x) := \sqrt{1+x} \quad (x > -1)$$

függvény 0 pont körüli másodfokú Taylor-polinomját! Becsüljük vele a $\sqrt{1,1}$ értéket és a közelítés hibáját!

Megoldás. A másodfokú Taylor-polinom

$$T_{2,a}f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 \quad (x \in \mathbb{R}),$$

ahol $a = 0$. Minden $x > -1$ esetén

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{1+x}, & f(0) &= 1, & f(a) &= 1, \\ f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{1+x}}, & f'(0) &= \frac{1}{2}, & f'(a) &= \frac{1}{2}, \\ f''(x) &= -\frac{1}{4\sqrt{(1+x)^3}}, & f''(0) &= -\frac{1}{4}, & \frac{f''(a)}{2} &= -\frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Ebből

$$T_{2,0}f(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

A keresett érték becslése:

$$\sqrt{1,1} = f(0,1) \approx T_{2,0}f(0,1) = 1 + \frac{1}{2} \cdot 0,1 - \frac{1}{8} \cdot (0,1)^2 = 1,04875.$$

A hibabecsléshez legyen $x = 0,1$. A Taylor-formula szerint $\exists 0 < \xi < 0,1$, hogy

$$f(x) - T_{2,0}f(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}x^3.$$

Mivel

$$f'''(x) = \frac{3}{8\sqrt{(1+x)^5}} \quad (x > -1),$$

így

$$\begin{aligned} |f(x) - T_{2,0}f(x)| &= \frac{|f'''(\xi)|}{3!}|x|^3 = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{8\sqrt{(1+\xi)^5}} \cdot (0,1)^3 < \\ &< \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{8\sqrt{(1+0)^5}} \cdot (0,1)^3 = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{1000} = 0,000375 \end{aligned}$$

Megjegyzés. A $\sqrt{1,1}$ érték becslésében alkalmazott másodfokú közelítés jobb, mint a lineáris közelítés. Felmerül a kérdés, hogy az n érték növelésével az n -edik Taylor-polinommal egyre kisebb hibakorlátot kapunk-e. Ez sajnos nem minden esetben igaz, ahogy az sem, hogy minden rögzített a pont esetén a Lagrange-féle maradéktag tart nullához a $K(a)$ környezet minden pontjában, ha $n \rightarrow +\infty$.

Taylor-sorok

A $\sum_{k=0} \alpha_k (x-a)^k$ hatványsor konvergenciahalmazán értelmezett

$$f(x) := \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k (x-a)^k$$

összegfüggvénynek nagyon jó tulajdonságai vannak. Ez a függvény többek között folytonos a konvergenciahalmaz minden pontjában, és tagonként differenciálható a belsejében. Helyettesítési értékeit (elvben) tetszőleges pontossággal meg lehet határozni csupán a négy alapművelet felhasználásával. Nem véletlen, hogy az exp, a sin, a cos, a sh, valamint a ch függvényeket hatványsorok összegfüggvényként értelmeztük. Ezért (is) fontos a következő kérdésfelvetés.

Probléma. Egy adott függvényt vajon elő lehet-e állítani hatványsor összegfüggvényeként? Ha igen, akkor a függvény ismeretében hogyan lehet az együtthatókat meghatározni?

A hatványsor összegfüggvényének deriváltjára vonatkozó tétel azt mondja ki, hogy ha a hatványsor R konvergenciasugara pozitív, akkor összegfüggvénye differenciálható minden $x \in K_R(a)$ pontban, és

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \alpha_k (x-a)^{k-1} \quad (x \in K_R(a)).$$

Így f' egy újabb hatványsor összegfüggvénye, ami a fenti tétel alapján szintén differenciálható $K_R(a)$ -n, vagyis $f \in D^2(K_R(a))$ és

$$f''(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) \alpha_k (x-a)^{k-2} \quad (x \in K_R(a)).$$

Világos, hogy f'' -re mindaz elmondható, ami f' -re. Ebben az esetben $f \in D^3(K_R(a))$ és

$$f'''(x) = \sum_{k=3}^{+\infty} k(k-1)(k-2) \alpha_k (x-a)^{k-3} \quad (x \in K_R(a)).$$

Ezt a gondolatmenetet folytatva azt kapjuk, hogy minden $n = 1, 2, \dots$ esetén $f \in D^n(K_R(a))$ és

$$(\star) \quad f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} k(k-1)(k-2) \cdots (k-n+1) \alpha_k (x-a)^{k-n} \quad (x \in K_R(a)).$$

Azt a tényt, hogy az f függvény n -szer deriválható minden $n \in \mathbb{N}$ esetén úgy fejeztünk ki, hogy f végtelen sokszor (vagy akárhányszor) deriválható. Ennek jelölésére az $f \in D^\infty$ szimbólumot vezettük be.

Ha (\star) -ban $x = a$, akkor a sor minden tagja nulla a $k = n$ -re vonatkozó tag kivételével. Ebből következik, hogy $f^{(n)}(a) = n! \cdot \alpha_n$, azaz

$$\boxed{\alpha_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad (n \in \mathbb{N}).}$$

Ezzel sikerült megoldanunk a kérdésfelvetés második részét, azaz az összegfüggvény ismeretében meghatározni a hatványsor együtthatóit. De ilyen együtthatókat már láttuk ezelőtt, ezek éppen a Taylor-polinom együtthatói. Olyan sorokkal van tehát dolgunk, amelynek részletösszegei a függvény Taylor-polinomjai.

2. Definíció. Ha $a \in \mathcal{D}_f$ és $f \in D^\infty\{a\}$, akkor a

$$\begin{aligned} T_a f(x) &:= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \cdots = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \quad (x \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

hatványsort az **f függvény a ponthoz tartozó Taylor-sorának** nevezzük.

Az $a = 0$ esetben használatos a **Maclaurin-sor** elnevezés is.

Megjegyzés. Az \exp , \sin , \cos , sh , ch függvények definícióiban megadott hatványsorok a szóban forgó függvények $a = 0$ ponthoz tartozó Taylor-sorai. Az animációban példaként látjuk, hogy a szinusz függvény 0 ponthoz tartozó Taylor-polinomjai milyen közel kerülnek a Taylor-sorhoz, azaz az $f(x) := \sin x$ ($x \in \mathbb{R}$) függvényhez a

$$\sin x = T_0 f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} T_{n,0} f(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

határérték értelmében.

Mindent összefoglalva a kérdésfelvetés második részére a következő választ adjuk.

3. Tétel. Minden pozitív konvergenciasugárral rendelkező hatványsor összegfüggvénye a Taylor-sorával egyenlő a konvergenciahalmaz belsejében.

Bizonyítás. Azonnal következik a fenti fogalmakból és eredményekből.

Azt mondjuk, hogy egy függvény **hatványsorba fejthető** egy intervallumon, ha megegyezik egy hatványsor összegfüggvényével ezen az intervallumon. A tétel tehát azt is állítja, hogy ha f hatványsorba fejthető egy nyílt intervallumon, akkor a szóban forgó hatványsor szükségképpen az f függvény Taylor-sora. Ez azt jelenti, hogy a kérdésfelvetés első részének megválaszolásához vizsgálni kell a Taylor-sorok tulajdonságait.

A sorfejtés problémája. Legyen $f \in D^\infty\{a\}$ egy adott függvény.

1. **A konvergencia problémája:** Konvergens-e a $T_a f$ Taylor-sor az a pont egyik környezetébe?
2. **Az előállítás problémája:** Ha a Taylor-sor konvergens egy $a \in I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumon, akkor vajon fennáll-e az

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \quad (x \in I)$$

egyenlőség? Ha ez igaz, akkor azt mondjuk, hogy a Taylor-sor előállítja az f függvényt az I intervallumon.

Sajnálatos módon a sorfejtés problémájára nem adhatunk pozitív választ minden akárhányszor deriválható függvény esetében.

- Bonyolult konstrukcióval lehet példát adni olyan akárhányszor deriválható f függvényre, amelynek bármely a ponthoz tartozó Taylor-sora az a ponton kívül sehol sem konvergens.
- Van olyan függvény, amelynek Taylor-sora konvergenciasugara végtelen, de csak egy pontban (a középpontban) állítja elő a függvényt. Legyen

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

Bebizonyítható, hogy $f \in D^\infty(\mathbb{R})$ és $f^{(n)}(0) = 0$ ($n \in \mathbb{N}$). Ebből következik, hogy f Taylor-sorának minden együtthatója 0, ezért az mindenütt konvergens, és az összegfüggvénye az azonosan 0 függvény, ami nyilván csak a 0 pontban egyenlő f -fel.

Ettől függetlenül kereshetünk olyan függvényosztályokat, ahol pozitív válasz tudunk adni a sorfejtés problémájára. A következő tételben adunk erre egy jól kezelhető feltételt.

4. Tétel (Elégséges feltétel függvények Taylor-sorral történő előállítására).

Legyen $f \in D^\infty(K(a))$, és tegyük fel, hogy $\exists M > 0$ valós szám, amire

$$\forall x \in K(a), \forall n \in \mathbb{N}: |f^{(n)}(x)| \leq M$$

teljesül. Ekkor f -nek az a ponthoz tartozó Taylor-sora a $K(a)$ halmazon előállítja az f függvényt, vagyis fennáll a következő egyenlőség

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \quad (x \in K(a)).$$

Bizonyítás. Legyen $x \in K(a)$ egy tetszőleges pont. Azt kell igazolni, hogy

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_{n,a}(x) \quad (x \in K(a)).$$

Ez a Taylor-formula szerint igaz, hiszen létezik olyan ξ pont a és x között, hogy

$$|f(x) - T_{n,a}(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \right| \leq M \cdot \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0, \quad \text{ha } n \rightarrow +\infty.$$

Megjegyzések.

1. Az Analízis I. kurzuson tanultuk a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad (a \in \mathbb{R})$$

nevezetes határértéket. Ebből következik a tétel bizonyításában alkalmazott

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x - a|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

határérték.

2. A \sin és a \cos függvény teljesíti az előző tétel feltételeit $M = 1$ -re $\forall a \in \mathbb{R}$ és $\forall K(a)$ környezet esetén, hiszen

$$|\pm \sin x| \leq 1, \quad |\pm \cos x| \leq 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Ezért is tudjuk mindkét függvényt előállítani egy tetszőleges a ponthoz tartozó Taylor-sorral. Pl., ha $a = \pi/2$, akkor

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad \sin'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \sin''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1, \quad \sin'''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \dots,$$

és így minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sin(x) = 1 - \frac{1}{2!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4 - \frac{1}{6!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^6 + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2k}.$$

Ez az előállítás nem annyira meglepő, mert rögtön következik a

$$\sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \quad (x \in \mathbb{R})$$

azonosságból, és így a 3. Tételből következik, hogy ez a \sin függvény $\pi/2$ ponthoz tartozó Taylor-sora.

3. Az \exp függvény nem korlátos \mathbb{R} -n, de korlátos minden rögzített $K_R(a) = (a - R, a + R)$ intervallumon. Így $\exists M > 0$ valós szám, amire

$$\forall x \in K_R(a), \quad \forall n \in \mathbb{N}: |\exp^{(n)}(x)| = |\exp(x)| \leq M$$

teljesül. Tehát \exp teljesíti az előző tétel feltételeit, és így előállítható egy tetszőleges a ponthoz tartozó Taylor-sorral minden $(a - R, a + R)$ intervallumon. Ez azt jelenti, hogy előállítható ezzel a Taylor-sorral a teljes valós számok halmazán.

Egy f függvény a -hoz tartozó Taylor-sorának a felírásához kétféle módon járhatunk el.

- A definíció értelmében meghatározzuk a függvény *összes* magasabb rendű deriváltját az a pontban, azaz minden $n \in \mathbb{N}$ számra az $f^{(n)}(a)$ függvényértékeket. Ezek meghatározása általában nem egyszerű feladat, de néhány esetben ki lehet következtetni az első néhány deriválás után. Ezzel fel tudjuk írni a keresett Taylor-sort, de még meg kell határozni a konvergenciahalmazát, illetve megvizsgálni milyen pontokban állítja elő a függvényt.
- Egy ismert függvény hatványsoros előállításából kiindulva helyettesítéssel, tagonkénti deriválással vagy egyéb módon megkapjuk a függvény hatványsorba fejtését egy $K(a)$ környezetben, ami a 3. Tétel szerint a függvény Taylor-sora lesz. Ezzel rögtön kapunk egy konvergenciahalmazt, ahol a Taylor-sor előállítja a függvényt.

Hasonlítsuk össze a két módszert egyazon feladat megoldásában.

3. Feladat. Legyen

$$f(x) := \frac{1}{1+x} \quad (x \in (-1, +\infty)).$$

Állítsuk elő az f függvény $a = 0$ ponthoz tartozó Taylor-sorát, és vizsgáljuk meg az előállítás problémáját!

Megoldás.

a) Világos, hogy $f \in D^\infty(-1, +\infty)$, és

$$f(x) = (1+x)^{-1}, \quad f'(x) = -(1+x)^{-2}, \quad f''(x) = 2(1+x)^{-3}, \quad f'''(x) = -6(1+x)^{-4}, \dots$$

Sejthető, hogy minden $n = 0, 1, 2, \dots$ esetén

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! (1+x)^{-n-1} \quad (x > -1), \quad \text{és így} \quad f^{(n)}(0) = (-1)^n n!,$$

ami teljes indukcióval könnyen igazolható. A keresett Taylor-sor tehát

$$T_0(f, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots,$$

ami konvergens a $(-1, 1)$ intervallumon (az intervallum határait nem vesszük figyelembe), hiszen a Cauchy–Hadamard-tétel szerint konvergenciasugara

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|(-1)^n|}} = 1.$$

Az előállítás problémájához alkalmazzuk a Taylor-formulát. Minden $|x| < 1$ számhoz létezik olyan ξ pont 0 és x között, hogy

$$\left| f(x) - T_{n,0}(x) \right| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| = \left| \frac{(-1)^{n+1} (n+1)! (1+\xi)^{-n-2}}{(n+1)!} x^{n+1} \right| = \frac{|x|^{n+1}}{(1+\xi)^{n+2}}.$$

Ekkor a mértani sorozat határértéke miatt ($q^n \rightarrow 0$, ha $|q| < 1$):

- ha $0 < \xi < x < 1$, akkor $\frac{1}{1+\xi} < 1$. Ezért

$$|f(x) - T_{n,0}(x)| < x^{n+1} \rightarrow 0,$$

- ha $-\frac{1}{2} < x < \xi < 0$, akkor $\frac{|x|}{1+\xi} < \frac{|x|}{1+x} = \frac{|x|}{1-|x|} < 1$. Ezért

$$|f(x) - T_{n,0}(x)| = \frac{1}{|x|} \cdot \left(\frac{|x|}{1+\xi} \right)^{n+2} < \frac{1}{|x|} \cdot \left(\frac{|x|}{1-|x|} \right)^{n+2} \rightarrow 0.$$

Ezért a Taylor-sor előállítja a függvényt a $(-1/2, 0)$ intervallumon.

Vegyük észre, hogy a Taylor-formula segítségével nem tudjuk igazolni az előállítást a teljes $(-1, 1)$ intervallumon.

b) Ismerjük a mértani sor összegfüggvényét:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \quad (-1 < x < 1)$$

Ha ebben x helyett $-x$ -et írunk, akkor

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n \quad \underbrace{(-1 < -x < 1)}_{-1 < x < 1}$$

Ezzel sikerült az f függvényt hatványsorba fejteni. Ekkor a 3. Tétel szerint ez a hatványsor a függvény 0 ponthoz tartozó Taylor-sora, ami előállítja a függvényt a $(-1, 1)$ intervallumon.

Megjegyzés. A helyettesítéssel módszert már alkalmaztuk az Analízis I. kurzuson hatványsorok előállítására. Ehhez most hozzájön a hatványsor összegfüggvényének deriváltjára vonatkozó tétel, amivel nagyon érdekes eredményekhez juthatunk.

4. Feladat. Legyen

$$f(x) := \ln(1+x) \quad (x \in (-1, +\infty)).$$

Állítsuk elő az f függvény $a = 0$ ponthoz tartozó Taylor-sorát, és vizsgáljuk meg az előállítás problémáját!

Megoldás. Először vegyük észre, hogy $f \in D(-1, 1)$ és

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \quad (x \in (-1, 1)).$$

Legyen

$$g(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad (x \in (-1, 1]).$$

A fenti hatványsor konvergenciahalmaza valóban a $(-1, 1]$ intervallum, hiszen a Cauchy–Hadamard-tétel szerint konvergenciasugara

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|(-1)^{n+1}/n|}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1,$$

az $x = -1$ pontban divergens (harmonikus sor), és az $x = 1$ pontban konvergens (Leibniz-sor). A hatványsorok összegfüggvényének deriváltjára vonatkozó tétel szerint $g \in D(-1, 1)$ és

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n \quad (x \in (-1, 1)).$$

Ezért $f'(x) = g'(x)$ minden $x \in (-1, 1)$ pontban. A deriváltak egyenlőségére vonatkozó tételből következik, hogy van olyan $c \in \mathbb{R}$ állandó, hogy

$$f(x) - g(x) = c \quad (x \in (-1, 1)).$$

Ugyanakkor $f(0) - g(0) = 0$, így $c = 0$. Bebizonyítottuk tehát azt, hogy

$$f(x) = \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \quad \text{ha } x \in (-1, 1).$$

Ezzel sikerült az f függvényt hatványsorba fejteni. Ekkor a 3. Tétel szerint ez a hatványsor a függvény 0 ponthoz tartozó Taylor-sora, ami előállítja a függvényt a $(-1, 1)$ intervallumon.

Megjegyzés. Az előző feladat megoldásában szereplő

$$f(x) = \ln(1+x) \quad (x > -1) \quad \text{és} \quad g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \quad (-1 < x \leq 1)$$

függvények folytonosak az $x = 1$ pontban. A g függvény folytonossága abból következik, hogy minden hatványsor folytonos a konvergenciahalmazának bármely pontjában. Mivel $f(x) = g(x)$ minden $x \in (-1, 1)$ esetén, így a folytonosság miatt

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = g(1) = \lim_{x \rightarrow 1-0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = f(1) = \ln 2.$$

Tehát

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln 2.$$

Az Analízis I. kurzuson ennek a sornak a konvergenciáját már beláttuk (a Leibniz-sorról van szó), és most már a sor összegét is megismertük.

5. Feladat. Legyen

$$f(x) := \arctg(x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Állítsuk elő az f függvény $a = 0$ ponthoz tartozó Taylor-sorát, és vizsgáljuk meg az előállítás problémáját!

Megoldás. Az \arctg függvény 0 pont körüli Taylor-sorának előállítása a definíció alapján nem egyszerű feladat, mert a magasabb rendű deriváltak (az előző két példával ellentétben) kiszámolása jóval bonyolultabb.

Először vegyük észre, hogy $f \in D(-1, 1)$ és ha x helyett x^2 -et írunk az

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n \quad (-1 < x < 1)$$

egyenlőségbe, akkor azt kapjuk, hogy

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (x^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots \quad \underbrace{(-1 < x^2 < 1)}_{-1 < x < 1}.$$

Legyen

$$g(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \quad (x \in [-1, 1]).$$

A fenti hatványsor konvergenciahalmaza valóban a $[-1, 1]$ intervallum, hiszen ez hányadoskritériummal és a végpontokban Leibniz-kritériummal könnyen igazolható. A hatványsorok összefüggvényének deriváltjára vonatkozó tétel szerint $g \in D(-1, 1)$ és

$$g'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} (2n+1)x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} \quad (x \in (-1, 1)).$$

Ezért $f'(x) = g'(x)$ minden $x \in (-1, 1)$ pontban. A deriváltak egyenlőségére vonatkozó tételből következik, hogy van olyan $c \in \mathbb{R}$ állandó, hogy

$$f(x) - g(x) = c \quad (x \in (-1, 1)).$$

Ugyanakkor $f(0) - g(0) = 0$, így $c = 0$. Bebizonyítottuk tehát azt, hogy

$$f(x) = \arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad \text{ha } x \in (-1, 1).$$

Ezzel sikerült az f függvényt hatványsorba fejteni. Ekkor a 3. Tétel szerint ez a hatványsor a függvény 0 ponthoz tartozó Taylor-sora, ami előállítja a függvényt a $(-1, 1)$ intervallumon.

Megjegyzés. Az előző feladat megoldásában szereplő

$$f(x) = \arctan x \quad (x \in \mathbb{R}) \quad \text{és} \quad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

függvények folytonosak az $x = -1$ és az $x = 1$ pontokban. Mivel $f(x) = g(x)$ ($x \in (-1, 1)$), így a folytonosság miatt

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = g(1) = \lim_{x \rightarrow 1-0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = f(1) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Tehát

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}.}$$

A fenti képletek alapján a π értéke tetszőleges pontossággal számolható.