8. Newton-módszer

8.1. Feladat

Tekintsük az $f(x) = e^{2x} + 4x = 0$ nemlineáris egyenletet.

(a) Írjuk fel az egyenlet megoldásának közelítésére a Newton-módszert!

(b) Igazoljuk a módszer konvergenciáját a gyök valamely környezetében!

(a) A Newton-módszert az

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

képlet segítségével írhatjuk fel. Mivel jelen esetben $f'(x) = 2e^{2x} + 4$, ezért a függvényre felírt iteráció az

$$x_{n+1} = x_n - \frac{e^{2x_n} + 4x_n}{2e^{2x_n} + 4}$$

alakot ölti.

(b) A Bolzano-tétel segítségével keressünk egy intervallumot amely tartalmazza a gyököt. A $[-1, 1]$ jó választás, ugyanis

$$\begin{aligned} f(-1) &= e^{-2} - 4 < 0 \\ f(1) &= e^2 + 4 \cdot 1 = e^2 + 4 > 0. \end{aligned}$$

Használjuk a Newton-módszerre vonatkozó monoton konvergencia tételt. Vizsgáljuk meg f első, és második deriváltjainak viselkedését a $[-1, 1]$ intervallumon:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2e^{2x} + 4 > 0 \qquad && (x \in [-1, 1]), \\ f''(x) &= 4e^{2x} > 0 \qquad && (x \in [-1, 1]). \end{aligned}$$

Az első és második derivált tehát állandó előjelű. Ellenőriznünk kell még a tételben szereplő kezdőpontra vonatkozó feltételt. Felhasználva, hogy $f''(x) > 0$ bármely $x \in [-1, 1]$ esetén:

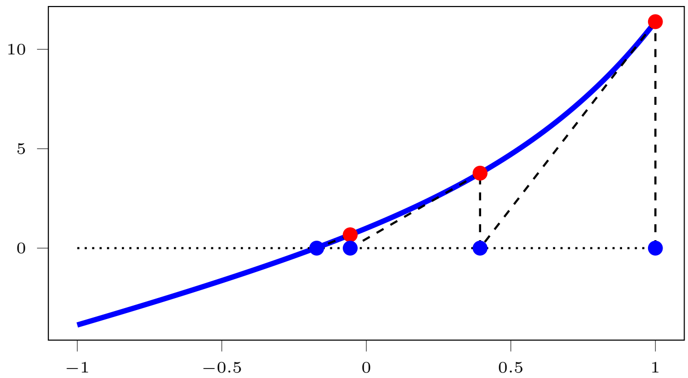
$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0 \quad \iff \quad f(x_0) > 0.$$

Mivel azonban $f'(x) > 0$, azaz f szigorúan monoton növekvő

$$f(x_0) > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_0 > x^*.$$

vagyis $x_0 > x^*$ esetén a Newton-módszer által generált (x_n) sorozat monoton fogyóan konvergál az x^* gyökhöz.

A Newton-módszer működése megtekinthető a következő ábrán.



8.2. Feladat*

Az előző feladatban felírt Newton-módszerre milyen kezdőértékek esetén garantálhatunk másodrendű konvergenciát?

Az előző feladatban megmutattuk, hogy az f függvénynek van gyöke a $[-1,1]$ intervallumon, továbbá f' állandó előjelű. A Newton-módszer lokális konvergenciatétele értelmében az (x_n) sorozat másodrendben konvergál, ha

$$|x_0 - x^*| < r := \min\left\{\frac{1}{M},\quad |x^*+1|,\quad |x^*-1|\right\},$$

ahol

$$M = \frac{M_2}{2m_1}, \qquad M_2 = \max_{x\in[-1,1]} |f''(x)|, \qquad m_1 = \min_{x\in[-1,1]} |f'(x)|.$$

Becsüljük tehát az első és második deriváltat a kijelölt intervallumon:

$$\begin{aligned} |f'(x)| &= |2e^{2x}+4| = 2e^{2x}+4 \geq 2e^{-2}+4 = m_1 && (x\in[-1,1]),\\ |f''(x)| &= |4e^{2x}| = 4e^{2x} \leq 4e^2 = M_2 && (x\in[-1,1]). \end{aligned}$$

Tehát:

$$M = \frac{M_2}{2m_1} = \frac{4e^2}{2(2e^{-2}+4)}.$$

A tétel értelmében ha x_0 közelebb van x^*-hoz, mint az intervallum végpontjai és $\frac{1}{M}$, akkor a konvergencia másodrendű. Azonban ez a becslés ebben a formában kevéssé használható, ezért tegyünk néhány egszerűsítést. Először is becsüljük felülről M-et:

$$M = \frac{4e^2}{2(2e^{-2}+4)} < \frac{4e^2}{8} < \frac{e^2}{2} < 4.$$

Emiatt $|x_0 - x^*| < \frac{1}{4}$ esetén $|x_0 - x^*| < \frac{1}{M}$ is teljesül. Próbáljuk most meghatározni, hogy az $\frac{1}{M}, |x^*+1|, |x^*-1|$ számok közül melyik a legkisebb. Gondolkodhatunk például a következőképpen. Az előzőek szerint f-nek van gyöke -1-en, mivel $f(-1) < 0$ és $f(1) > 0$, továbbá $f' > 0$ a teljes intervallumon, ezért a gyök egyértelmű. Továbbá

$$\begin{aligned} &f\left(-1+\tfrac{1}{4}\right) = f\left(-\tfrac{3}{4}\right) = e^{-3/2} - 3 < 0 && \Longrightarrow \quad x^* \notin [-1, -\tfrac{3}{4}] && \Longrightarrow \quad |x^*+1| > \frac{1}{4},\\ &f\left(1-\tfrac{1}{4}\right) = f\left(\tfrac{3}{4}\right) = e^{3/2} + 3 > 0 && \Longrightarrow \quad x^* \notin [\tfrac{3}{4}, 1] && \Longrightarrow \quad |x^*-1| > \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Ezért

$$|x_0 - x^*| < \frac{1}{4} \qquad \Longrightarrow \qquad |x_0 - x^*| < r,$$

vagyis, ha x_0 közelebb van a keresett gyökhöz, mint $\frac{1}{4}$, akkor a lokális konvergenciatétel feltételei fennálnak. Ha konkrét x_0-ra van szükségünk, akkor elegendő például egy olyan $\frac{1}{4}$ hosszúságú intervallumot keresni, amely tartalmazza a gyököt. Könnyen ellenőrizhető, hogy esetünkben például a $[-\frac{1}{4}, 0]$ intervallum ilyen, hiszen

$$\begin{aligned} f\left(-\tfrac{1}{4}\right) &= e^{-1/2} - 1 < 0, \\ f(0) &= e^0 + 0 = 1 > 0. \end{aligned}$$

Mivel a fentiek szerint $x^* \in (-\frac{1}{4}, 0)$, ezért tetszőleges $x_0 \in [-\frac{1}{4}, 0]$ választás esetén

$$|x_0 - x^*| < \frac{1}{4} < r,$$

így a konvergencia másodrendű, és a következő hibabecslés érvényes:

$$|x_{n+1} - x^*| \leq M \cdot |x_n - x^*|^2 \leq 4 \cdot |x_n - x^*|^2.$$

8.1. Megjegyzés

A lokális konvergenciatétel feltételeit nem szoktuk ellenőrizni, hiszen

$$\lim x_n = x^* \quad \iff \quad \forall r > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geq N \; : \; |x_n - x^*| < r,$$

tehát bármi is legyen a konvergenciatételbeli r értéke, létezik olyan N, hogy a sorozat ennél nagyobb indexű tagjai közelebb kerülnek x^*-hoz, mint r. Elegendő tehát meggyőződni a Newton-módszer által generált sorozat konvergenciájáról, a másodrendű konvergencia feltételei elegendően nagy indexek esetén ,,automatikusan teljesülnek”.

8.3. Feladat

Írjuk fel az $f(x) = \cos x - 4x + 2 = 0$ nemlineáris egyenlet megoldásának közelítésére a Newton-módszert! Igazoljuk a módszer konvergenciáját valamely intervallumon!

Írjuk fel a Newton-módszer képletét. Mivel $f'(x) = -\sin(x) - 4$, ezért az iteráció

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\cos x_n - 4x_n + 2}{-\sin x_n - 4}$$

alakú. A Bolzano-tétel segítségével adjunk meg egy intervallumot, amely tartalmazza f gyökét. A $[0, \frac{\pi}{2}]$ jó választás, ugyanis

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 + 2 = 3 > 0, \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0 - 2 \cdot \pi + 2 < 0. \end{aligned}$$

Most igazoljuk a konvergenciát, a monoton konvergencia tétel segítségével. Először is ellenőrizzük, hogy a deriváltak nem tűnnek el a $[0, \frac{\pi}{2}]$ intervallumon:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \; -\sin x - 4 < 0 \qquad && \left(x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right), \\ f''(x) &= \; -\cos x \leq 0 \qquad && \left(x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right). \end{aligned}$$

Mivel $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, ezért kénytelenek vagyunk szűkíteni az intervallumot. Tekintsük a $[0, \frac{\pi}{2}]$ intervallum helyett a $[0, \frac{\pi}{2} - 0.1]$ intervallumot. Ez továbbra is tartalmazza a gyököt, ugyanis $f\left(\frac{\pi}{2} - 0.1\right) \approx -0.84176 < 0$. Ekkor azonban

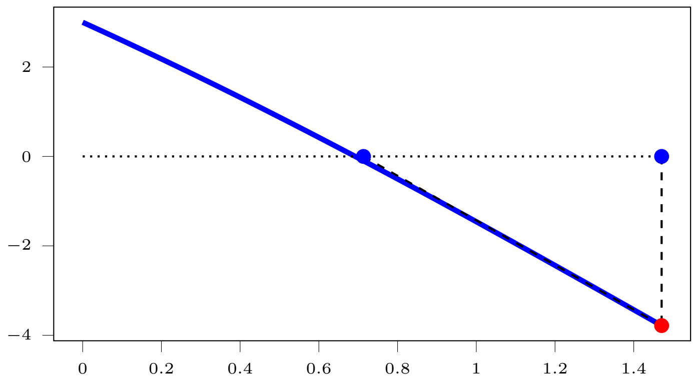
$$\begin{aligned} f'(x) &= \; -\sin x - 4 < 0 \qquad && \left(x \in \left[0, \frac{\pi}{2} - 0.1\right]\right), \\ f''(x) &= \; -\cos x < 0 \qquad && \left(x \in \left[0, \frac{\pi}{2} - 0.1\right]\right). \end{aligned}$$

azaz a deriváltak a kijelölt intervallumon állandó előjelűek. Hátra van még az x_0-ra vonatkozó feltétel. Itt felhasználva, hogy $f''(x) < 0$ és $f'(x) < 0$, azaz f monoton csökken:

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0 \iff f(x_0) < 0 \iff x_0 > x^*.$$

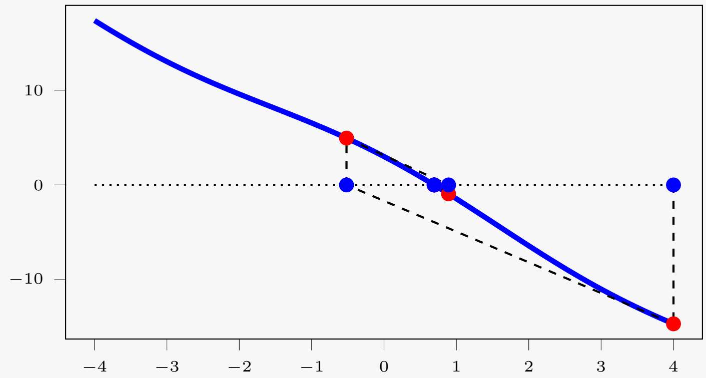
Tehát $x_0 > x^*$ esetén a Newton-módszer által generált (x_n) sorozat monoton fogyóan konvergál az x^* gyökhöz.

Az $x_0 = \frac{\pi}{2} - 0.1$ pontból indított Newton-módszer első lépése megtekinthető a következő ábrán.



8.2. Megjegyzés

Érdemes megjegyezni, hogy a Newton-módszer konvergenciatételei *elégséges* feltételt fogalmaznak meg a konvergenciára, nem szükséges azok teljesülése, hogy konvergens iterációs sorozatot nyerjünk. Előfordulhat például, hogy az $x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}$ sorozat semmi jelét nem mutatja a konvergenciának, majd az N-edik lépésben az x_N az f függvény egy gyökének ,,vonzáskörzetébe" kerül, és a sorozat hirtelen konvergálni kezd ezen gyökhöz. Az alábbi két ábrán például megtekinthető, hogy az előző feladatban a Newton-módszer a $[-4, 4]$ intervallumon is konvergál az $x_0 = 4$ kezdőpontból indítva, habár a függvény ezen az intervallumon láthatóan megsérti a monoton konvergenciatétel feltételeit (így nem is monoton a konvergencia).



Sőt, a konvergencia akkor is fennáll, ha ,,másik oldalról", a $x_0 = -4$ kezdőpontból indulunk.