Emlékeztető (Cantor-tétel). Minden $n \in \mathbb{N}$ szám esetén legyenek adottak az $[a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$ (kompakt) intervallumok, és tegyük fel, hogy

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] := \bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n] \neq \emptyset.$$

Tétel. Legyen (x_n) olyan sorozat, amelyre $\lim(x_n) \in \{-\infty, +\infty\}$. Ekkor fennáll a

$$\left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \longrightarrow e \qquad (n \to \infty).$$

határérték-reláció.

Tétel. Legyen $A \in \mathbb{R}$, (x_n) olyan sorozat, amelyre $\lim(x_n) = +\infty$. Ekkor fennáll a

$$\left(1 + \frac{A}{x_n}\right)^{x_n} \longrightarrow e^A \qquad (n \to \infty).$$

határérték-reláció.

Definíció. Legyen valamely $H \neq \emptyset$ halmaz esetén adott az $f : H \to H$ függvény, és legyen adott $a \in H$. Ekkor az

$$x_0 := a, \qquad x_{n+1} := f(x_n) \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

rekurzív összefüggésnek eleget tévő $(x_n) : \mathbb{N}_0 \to H$ sorozatot a **kezdőtagú rekurzív megadású sorozat**nak nevezzük.

Tétel (Rekurziótétel: Dedekind (1888)). Legyen H tetszőleges (nem-üres) halmaz, $h \in H$, $f : H \to H$. Ekkor pontosan egy olyan $\varphi : \mathbb{N}_0 \to H$ függvény (**sorozat**) van, amelyre

(i) $\varphi(0) = h$;

(ii) bármely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $\varphi(n + 1) = f(\varphi(n))$.

Feladat. Számítsuk ki az alábbi sorozatok határértékét!

(a) $x_n := \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1} \qquad (n \in \mathbb{N});$

$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \longrightarrow e \cdot 1 = 1 \ (n \to \infty).$

(b) $x_n := \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \quad (n \in \mathbb{N});$

Világos, hogy

$$x_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n} =$$

$$= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right)} \longrightarrow \frac{1}{e\cdot 1} = \frac{1}{e} \quad (n\to\infty).$$

(c) $x_n := \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n \quad (n \in \mathbb{N});$

Mivel

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \longrightarrow e > 0 \qquad (n\to\infty),$$

ezért

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}} \longrightarrow 1 \qquad (n\to\infty). \quad \blacksquare$$

Feladat. Számítsuk ki az alábbi sorozatok határértékét!

1. $x_n := \left(\frac{6n-7}{6n+4}\right)^{3n+2} \quad (n \in \mathbb{N}_0);$

Világos, hogy

$$x_n = \left(\frac{6n-7}{6n+4}\right)^{3n+2} = \left(\frac{6n+4-11}{6n+4}\right)^{3n+2} = \left(1-\frac{11}{6n+4}\right)^{3n+2} =$$

$$= \sqrt{\left(1+\frac{-11}{6n+4}\right)^{6n+4}} \longrightarrow \sqrt{\frac{1}{e^{11}}} \qquad (n\to\infty).$$

2. $x_n := \left(\dfrac{4n+3}{5n}\right)^{5n} \qquad (n \in \mathbb{N});$

Mivel bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left(\frac{4n+3}{5n}\right)^n = \left(\frac{4}{5}\right)^n \cdot \left(\frac{n+3/4}{n}\right)^n = \left(\frac{4}{5}\right)^n \cdot \left(\left(1+\frac{1}{\frac{4n}{3}}\right)^{\frac{4n}{3}}\right)^{\frac{3}{4}},$$

ezért

$$x_n \longrightarrow \left(0 \cdot e^{3/4}\right)^5 = 0 \qquad (n \to \infty).$$

3. $x_n := \left(\dfrac{3n+1}{n+2}\right)^{2n+3} \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$

Mivel

$$\frac{3n+1}{n+2} \longrightarrow 3 \qquad (n \to \infty),$$

ezért az $\varepsilon := 1$ számhoz van olyan $N \in \mathbb{N}$ (küszöb)index, hogy bármely $N \leq n \in \mathbb{N}$ indexre

$$\frac{3n+1}{n+2} > 2.$$

Következésképpen az ilyen n-ekre

$$x_n = \left(\frac{3n+1}{n+2}\right)^{2n+3} > 2^{2n+3} \longrightarrow +\infty \qquad (n \to \infty),$$

$$\lim(x_n) = +\infty$$

következik.

4. $x_n := \left(\dfrac{2n^2+3}{2n^2-2}\right)^{n^2-1} \qquad (n \in \mathbb{N}).$

Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor

$$\left|\frac{2n^2+14n+19}{1+(n+3)^2} - 2\right| = \left|\frac{2n^2+14n+19}{n^2+6n+10} - \frac{2(n^2+6n+10)}{n^2+6n+10}\right| = \frac{2n-1}{1+(n+3)^2} \leq \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n},$$

és
$$\frac{2}{n} < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{2}{\varepsilon} < n,$$
ezért tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén, ha
$$N := \left[\frac{2}{\varepsilon}\right] + 1,$$
akkor elmondható, hogy bármely $N \leq n \in \mathbb{N}$ indexre
$$\left|\frac{2n^2+14n+19}{1+(n+3)^2} - 2\right| < \varepsilon, \qquad \text{azaz} \qquad \lim\left(\frac{2n^2+14n+19}{1+(n+3)^2}\right) = 2.$$

Feladat. Határozzuk meg azoknak a lépéseknek a minimális l_n számát, amelyek n korong ($n \in \mathbb{N}$) átrakásához szükségesek!

$n = 1$ esetén nyilván $l_1 = 1$. Ha $n = 2$, akkor ahhoz, hogy az első korongot átrakhassuk az első rudacskáról a másikra, előbb a felső korongot át kell tenni egy harmadikra. Ezután átrakhatjuk az első korongot a második rúdra és a tetejére a másik korongot. Eszerint tehát $l_2 = 3$. Hasonló módon három korong közül a legalsó átrakásához előbb a két felsőt kell áttenni a harmadik rúdra, amihez az előbbi gondolatmenet alapján $l_2 = 3$ áthelyezést kell végrehajtanunk. Ezután átrakhatjuk a legalsó korongot a második rúdra, majd ismét két korongot kell áthoznunk a harmadik rúdról a másodikra, újabb $l_2 = 3$ lépésben. Látható tehát, hogy
$$l_3 = 2 \cdot l_2 + 1 = 7.$$
Ugyanilyen módon látható be, hogy
$$l_4 = 2 \cdot l_3 + 1 = 15, \qquad l_5 = 2 \cdot l_4 + 1 = 31,$$
és általában
$$l_n = 2 \cdot l_{n-1} + 1 \qquad (n \in \mathbb{N}).$$
Az (l_n) sorozat első néhány tagjának felírásával nem neház megsejteni, majd teljes indukcióval igazolni, hogy
$$l_n = 2^n - 1 \qquad (n \in \mathbb{N}).$$
Így tehát
$$l_{64} = 18446744073709551615 > 1.8 \cdot 10^{19}$$
lépés szükséges s korongoknak a fenti feltételek mellett az egyik rúdról a másikra való átpakolásához. Ha meggondoljuk, hogy l_{64} másodperc 585 milliárd év körül van, és a Naprendszer kb. $4,6$ milliárd éves, akkor a világvégével kapcsolatos jóslat nem is annyira elképzelhetetlen. ☺

Feladat. Egy ivarérett nyúlpár minden hónapban egy új nyúlpárnak ad életet: egy hímnek és egy nősténynek. A nyulak két hónapos korukra válnak ivaréretté. Egy ivarérett nyúlpártól származó nemzetségnek mekkora lesz a létszáma egy év múlva?

Kezdjük az összeszámlálást egy újszülött nyúlpárból kiindulva és tételezzük fel, hogy közben egyetlen nyúl sem pusztul el. Az első hónapban egyetlen pár nyulunk van, a másodikban szintén. A harmadik hónapban már nyilván két pár nyulunk lesz: az eredeti pár és ezeknek két hónapos korukban született újszülött párja. A negyedik hónapban az eredeti nyúlpár újabb nyúlpárnak ad életet, az elsőszülött ivadékaik még nem szülnek, így három nyúlpárunk lesz összesen. Az ötödik hónapban meglesz a negyedik hónap három nyúlpárja valamint az újszülöttek, és ezek pontosan annyiakn lesznek, ahány nyúlpár a harmadik hónapban volt, hiszen a negyedik hónap újszülöttei még nem szülnek, de a harmadik hónap újszülöttei (az öregekkel együtt) már igen E gondolatsort folytatva az n -edik hónapban lévő nyúlpárok F_n száma adódik egyrészt az $(n-1)$-edik hónapban meglévő nyúlpárok F_{n-1} számából, másrészt az újszülöttekből. Az újszülöttek száma viszont megegyezik az $(n-2)$-dik hónapban levő nyúlpárok számával, ugyanis pontosan azok fognak az n-edik hónapban szülni, amelyek (akár öreg, akár újszülött nyulak) az $(n-2)$-dik hónapban megvoltak.

A létszám alakulását a következő áblázat mutatja:

hónap	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
megszületett párok:	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Megjegyzések.

(a) Az F_n számokat **Fibonacci-számok**nak, az

$$F_0 := 0, \quad F_1 := 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \qquad (2 \leq n \in \mathbb{N}_0)$$

rekurzív sorozatot **Fibonacci-sorozat**nak nevezzük. Az (F_n) sorozat tagjainak explicit alakja:

$$\boxed{F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)} \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

(b) **Aranymetszés**nek nevezzük egy szakasz olyan kettéosztását, ahol a nagyobbik rész hossza úgy aránylik a kisebbik rész hosszához, mint a szakasz hossza a nagyobbik rész hosszához. Könnyen megmutatható, hogy egységnyi hosszú szakasz esetében ez az arány nem más, mint a

$$\lim\left(\frac{F_{n+1}}{F_n}\right)$$

határérték. Legyen ui. ha a nagyobbik rész x, akkor egységnyi hosszú szakaszra:

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}, \qquad \text{amiből} \qquad x^2 + x - 1 = 0,$$

és ennek az egyenletnek egyetlen pozitív gyöke van:

$$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2},$$

amire

$$\frac{1}{x} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{4} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Az

$$u := \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \text{ill.} \qquad v := \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

számokkal

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{u^{n+1} - v^{n+1}}{u^n - v^n} = \frac{u - v \cdot \left(\frac{v}{u}\right)^n}{1 - \left(\frac{v}{u}\right)^n} \longrightarrow \frac{u-0}{1-0} = u \qquad (n \to \infty).$$ [10]

Feladat. Vizsgáljuk meg a következő sorozatokat konvergencia szempontjából!

1. $a \in \mathbb{R}$, $x_0 := a$, $x_{n+1} := \dfrac{2x_n}{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}_0)$;

A rekurziót „kibontva" könnyen **megsejthető**, hogy

$$x_n = \frac{2^n}{n!} \cdot a \qquad (n \in \mathbb{N}_0),$$

hiszen

$$x_1 = \frac{2a}{1}, \quad x_2 = \frac{4a}{1\cdot 2}, \quad x_3 = \frac{8a}{1\cdot 2\cdot 3}, \quad x_4 = \frac{16a}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}, \quad x_5 = \frac{32a}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}.$$

Ezután ezt az összefüggést a következőképpen igazoljuk. Ha

(a) $a = 0$, akkor tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $x_n = 0$, hiszen

- $n = 0$ esetén $x_0 = 0$, továbbá
- ha valamely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $x_n = 0$, akkor

$$x_{n+1} = \frac{2x_n}{n+1} = \frac{2\cdot 0}{n+1} = 0.$$

(b) $a \neq 0$, akkor persze bármely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $x_n \neq 0$ (**HF.** teljes indukcióval igazolni!), és így

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot a}{\dfrac{2^n}{n!} \cdot a} = \frac{2}{n+1}, \qquad \text{azaz} \qquad x_{n+1} = \frac{2x_n}{n+1} \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Tudjuk, hogy $0 \neq a \in \mathbb{R}$ esetén

$$\lim \left(\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} \right) = \lim \left(\frac{2}{n+1} \right) = 0 < 1,$$

következésképpen (vö. 5. $\boxed{\textbf{GY}}$)

$$\lim (x_n) = \lim (|x_n|) = 0.$$

2. $x_0 := 2, \; x_{n+1} := \dfrac{2x_n}{x_n + 1} \quad (n \in \mathbb{N}_0);$

Világos (**HF.** teljes indukcióval igazolni!), hogy

$$x_n > 0 \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

A sorozat első néhány tagja:

$$x_0 = 2, \qquad x_1 = \frac{4}{3} = 1.\dot{3}, \qquad x_2 = \frac{8}{7} = 1.142857.$$

Az (x_n) sorozat pontosan akkor monoton csökkenő, ha

$$x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{2x_n}{x_n + 1} = x_n \cdot \frac{x_n - 1}{x_n + 1} \geq 0 \qquad (n \in \mathbb{N}_0),$$

azaz, ha fennáll az

$$x_n \geq 1 \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

egyenlőtlenség. Ez viszont igaz, ui.

- $x_0 = 2 \geq 1$;
- ha valamely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $x_n \geq 1$, akkor

$$x_{n+1} = \frac{2x_n}{x_n + 1} = \frac{2}{1 + \frac{1}{x_n}} \geq \frac{2}{1 + \frac{1}{1}} = 1 \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Az (x_n) sorozat tehát monoton csökkenő, alulról korlátos, így konvergens is. Legyen $A := \lim(x_n)$. Az

$$x_{n+1} := \frac{2x_n}{x_n + 1} \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

rekurzív összefüggésben az $n \to \infty$ határátmenet elvégzése után azt kapjuk, hogy

$$A = \frac{2A}{A+1}, \qquad \text{azaz} \qquad A(A-1) = 0.$$

Világos, hogy $A = 0$ nem lehet a sorozat határértéke, ezért $A = 1$.

3. $x_0 := 6, \;\; x_{n+1} := 5 - \dfrac{6}{x_n} \;\; (n \in \mathbb{N}_0)$;

1. lépés. Ha az (x_n) sorozat konvergens, és $A := \lim(x_n)$, akkor $\lim(x_{n+1}) = A$, és így

$$A = 5 - \frac{6}{A} \qquad \Longrightarrow \qquad A^2 - 5A + 6 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad A = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} \in \{2, 3\}.$$

2. lépés. Mivel a kezdőtag: $x_0 = 6$, kézenfekvőnek tűnik belátni azt, hogy

$$x_n > 3 \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Valóban,

- $n = 0$ esetén $x_0 = 6 > 3$;
- ha valamely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $x_n > 3$, akkor

$$x_{n+1} = 5 - \frac{6}{x_n} > 5 - \frac{6}{3} = 5 - 2 = 3.$$

3. lépés. Megmutatjuk, hogy az (x_n) sorozat szigorúan monoton csökkenő. Ezt teljes is indukcióval igazoljuk. Világos, hogy

- $n = 0$ esetén

$$x_0 = 6 > 4 = x_1;$$

- ha valamely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $3 < x_{n+1} < x_n$, akkor

$$x_{n+2} = 5 - \frac{6}{x_{n+1}} > 5 - \frac{6}{x_n} = x_{n+1}.$$

4. lépés. Mivel a sorozat (szigorúan) monoton csökkenő és alulról korlátos, ezért konvergens. A fentiek következtében tehát (x_n) konvergens és

$$\lim(x_n) = 3.$$

$4.\ x_0 := 0,\ \ x_{n+1} := \dfrac{1+x_n^2}{2}\ \ (n \in \mathbb{N}_0);$

A sorozat első néhány tagját meghatározva –

$$x_0 = 0, \qquad x_1 = \frac{1}{2}, \qquad x_2 = \frac{5}{8}$$

– az a „gyanúnk” támad, hogy az (x_n) sorozat szigorúan monoton növekedő. Ezt teljes indukcióval igazoljuk. Mivel

$$x_0 = 0 < \frac{1}{2} = x_1,$$

ezért csak azt kell megmutatnunk, hogy ha valamilyen $n \in \mathbb{N}_0$ mellett

$$0 \le x_n < x_{n+1},$$

akkor $0 \le x_{n+1} < x_{n+2}$ is igaz. Valóban, $0 \le x_n < x_{n+1}$-ből $x_n^2 < x_{n+1}^2$, és így

$$1 + x_n^2 < 1 + x_{n+1}^2, \qquad \text{azaz} \qquad x_{n+1} = \frac{1+x_n^2}{2} < \frac{1+x_{n+1}^2}{2} = x_{n+2}$$

következik. Tudjuk, hogy ha egy monoton növekedő sorozat felülről korlátos, akkor konvergens és

$$\lim(x_n) = \sup\{x_n \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Azt kellene tehát belátni, hogy egy alkalmas $A \in \mathbb{R}$ számmal $x_n \le A$ $(n \in \mathbb{N}_0)$. Egy ilyen A „megsejtésére” a következő gondolatmenetet alkalmazhatjuk: ha $x_n \le A$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ valamilyen A-ra fenáll, akkor A helyébe $\lim(x_n)$ is írható. Tegyük fel tehát, hogy (x_n) konvergens és legyen $A := \lim(x_n)$; ekkor $\lim(x_{n+1}) = A$, így

$$\lim\left(\frac{1+x_n^2}{2}\right) = \frac{1+A^2}{2}.$$

Következésképpen az (x_n)-et meghatározó rekurzív összefüggés miatt

$$A = \frac{1+A^2}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad A^2 - 2A + 1 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (A-1)^2 = 0,$$

amiből $A = 1$ adódik. Lássuk be tehát, hogy fennáll az $x_n \le 1$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ becslés. Ezt újból teljes indukcióval bizonyítjuk: $x_0 = 0 \le 1$ triviálisan igaz; ha pedig $x_n \le 1$ fennáll valamilyen $\mathbb{N}_0 \ni n$-re, akkor

$$x_{n+1} = \frac{1+x_n^2}{2} \le 1.$$

Összefoglalva tehát, az (x_n) sorozat konvergens és $\lim(x_n) = 1$.

5. $x_n := \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\dots}}}$ $(n \in \mathbb{N})$ és itt n darab gyökvonás szerepel;

A sorozat első néhány tagját meghatározva:

$$x_1 = \sqrt{2}, \qquad x_2 = \sqrt{2\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2}\sqrt{2}, \qquad x_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$$

azaz

$$x_1 := \sqrt{2}, \qquad x_{n+1} := \sqrt{2x_n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Az a „gyanúnk” támad, hogy az (x_n) sorozat szigorúan monoton növekedő. Ezt teljes indukcióval igazoljuk. Mivel

$$x_1 = \sqrt{2} < \sqrt[4]{2}\sqrt{2} = x_2,$$

ezért csak azt kell megmutatnunk, hogy ha valamilyen $n \in \mathbb{N}$ mellett

$$0 < x_n < x_{n+1}, \qquad \text{akkor} \qquad 0 < x_{n+1} < x_{n+2}$$

is igaz. Valóban, a $0 < x_n < x_{n+1}$ egyenlőtlenségpárból $2x_n < 2x_{n+1}$ és így

$$\sqrt{2x_n} < \sqrt{2x_{n+1}}, \qquad \text{azaz} \qquad x_{n+1} = \sqrt{2x_n} < \sqrt{2x_{n+1}} = x_{n+2}$$

következik. Tudjuk, hogy ha egy monoton növekedő sorozat felülről korlátos, akkor konvergens és

$$\lim(x_n) = \sup\{x_n \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Azt kellene tehát belátni, hogy egy alkalmas $A \in \mathbb{R}$ számmal $x_n \le A$ $(n \in \mathbb{N})$. Egy ilyen A „megsejtésére” a következő gondolatmenetet alkalmazhatjuk: ha $x_n \le A$ valamilyen A-ra fenáll, akkor A helyébe $\lim(x_n)$ is írható. Tegyük fel tehát, hogy (x_n) konvergens és legyen $A := \lim(x_n)$; ekkor

$$\lim(x_{n+1}) = A, \qquad \lim(\sqrt{2x_n}) = \sqrt{2A}.$$

Következésképpen az (x_n)-et meghatározó rekurzív összefüggés miatt $A = \sqrt{2A}$, amiből $A \in \{0; 2\}$ adódik. Mivel $0 < x_n$ $(n \in \mathbb{N})$ és (x_n) szigorúan monoton növekedő, ezért az $A = 0$ eset nem lehetséges, legfeljebb csak $A = 2$. Lássuk be tehát, hogy ezzel az A-val teljesül az

$$x_n \le A \qquad (n \in \mathbb{N})$$

becslés. Ezt újból teljes indukcióval bizonyítjuk: $x_1 = \sqrt{2} \le 2 = A$ triviálisan igaz; ha pedig $x_n \le A$ fennáll valamilyen $\mathbb{N} \ni n$-re, akkor

$$x_{n+1} = \sqrt{2x_n} \le \sqrt{2A} = A.$$

Összefoglalva tehát, az (x_n) sorozat konvergens és $\lim(x_n) = 2$.

Megjegyzések.

(a) A sorozat első néhány

$$x_1 = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} = 2^{1-\frac{1}{2}}, \qquad x_2 = \sqrt{2\sqrt{2}} = \sqrt{\sqrt{8}} = \sqrt[4]{8} = 2^{\frac{3}{4}} = 2^{1-\frac{1}{4}},$$

$$x_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = \sqrt{2\sqrt[4]{8}} = \sqrt[8]{128} = 2^{\frac{7}{8}} = 2^{1-\frac{1}{8}}$$

tagjának meghatározásával sejthető, hogy

$$x_n = 2^{1-\frac{1}{2^n}} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

a mi teljes inducióval könnyen igazolható. Valóban,

- $n = 1$ esetén
$$x_1 = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} = 2^{1-\frac{1}{2^1}};$$
- ha pedig valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén
$$x_n = 2^{1-\frac{1}{2^n}},$$
akkor
$$x_{n+1} = \sqrt{2x_n} = \sqrt{2 \cdot 2^{1-\frac{1}{2^n}}} = 2^{\frac{2-\frac{1}{2^n}}{2}} = 2^{1-\frac{1}{2^{n+1}}}.$$

(b) Mivel

$$\lim\left(\sqrt[2^n]{\frac{1}{2}}\right) = \lim\left(\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\right) = 1,$$

ezért

$$x_n = 2^{1-\frac{1}{2^n}} = 2 \cdot \sqrt[2^n]{\frac{1}{2}} \longrightarrow 2 \cdot 1 = 2 \qquad (n \to \infty)$$

6. $x_n := \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}}$ $(n \in \mathbb{N})$ és itt n darab gyökvonás szerepel;

A sorozat első néhány tagját meghatározva:

$$x_1 = \sqrt{2}, \qquad x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \qquad x_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

látható, hogy

$$x_n = \sqrt{\ldots\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

azaz

$$x_1 := \sqrt{2}, \qquad x_{n+1} := \sqrt{2 + x_n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Az a „gyanúnk” támad, hogy az (x_n) sorozat szigorúan monoton növekedő. Ezt teljes indukcióval

igazoljuk. Mivel
$$\sqrt{2} < \sqrt{2+\sqrt{2}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2 < 2+\sqrt{2},$$
így
$$x_1 = \sqrt{2} < \sqrt{2+\sqrt{2}} = x_2,$$
ezért csak azt kell megmutatnunk, hogy ha valamilyen $n \in \mathbb{N}$ mellett
$$0 < x_n < x_{n+1}, \qquad \text{akkor} \qquad 0 < x_{n+1} < x_{n+2}$$
is igaz. Valóban, az $0 < x_n < x_{n+1}$ egyenlőtlenségpárból $2 + x_n < 2 + x_{n+1}$ és így
$$\sqrt{2+x_n} < \sqrt{2+x_{n+1}}, \qquad \text{azaz} \qquad x_{n+1} = \sqrt{2+x_n} < \sqrt{2+x_{n+1}} = x_{n+2}$$
következik. Tudjuk, hogy ha egy monoton növekedő sorozat felülről korlátos, akkor konvergens és
$$\lim(x_n) = \sup\{x_n \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N}\}.$$
Azt kellene tehát belátni, hogy egy alkalmas $A \in \mathbb{R}$ számmal $x_n \leq A$ $(n \in \mathbb{N})$. Egy ilyen A „megsejtésére" a következő gondolatmenetet alkalmazhatjuk: ha $x_n \leq A$ valamilyen A-ra fenáll, akkor A helyébe $\lim(x_n)$ is írható. Tegyük fel tehát, hogy (x_n) konvergens és legyen $A := \lim(x_n)$; ekkor
$$\lim(x_{n+1}) = A, \qquad \lim(\sqrt{2+x_n}) = \sqrt{2+A}.$$
Következésképpen az (x_n)-et meghatározó rekurzív összefüggés miatt $A = \sqrt{2+A}$, amiből $A \in \{-1; 2\}$ adódik. Mivel $0 < x_n$ $(n \in \mathbb{N})$ és (x_n) szigorúan monoton növekedő, ezért az $A = -1$ eset nem lehetséges, legfeljebb csak $A = 2$. Lássuk be tehát, hogy ezzel az A-val teljesül az
$$x_n \leq A \qquad (n \in \mathbb{N})$$
becslés. Ezt újból teljes indukcióval bizonyítjuk: $x_1 = \sqrt{2} \leq 2 = A$ triviálisan igaz; ha pedig $x_n \leq A$ fennáll valamilyen $\mathbb{N} \ni n$-re, akkor
$$x_{n+1} = \sqrt{2+x_n} \leq \sqrt{2+A} = A.$$
Összefoglalva tehát, az (x_n) sorozat konvergens és $\lim(x_n) = 2$.
Megjegyzések.

(a) Ha tudnánk, mi a cos, ill. a π jelentése, akkor elmondhatnánk, hogy
$$x_1 = \sqrt{2} = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right),$$
$$x_2 = \sqrt{2+x_1} = \sqrt{2+2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2\left[1+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]} = 2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right),$$

$$x_3 = \sqrt{2+x_1} = \sqrt{2+2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)} = \sqrt{2\left[1+\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right]} = 2\cos\left(\frac{\pi}{16}\right),$$

hiszen

$$\forall \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]: \qquad \boxed{1+\cos(\alpha)} = 1+\cos\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right) = \boxed{2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Így, ha valamely $2 \leq n \in \mathbb{N}$ esetén

$$x_{n-1} = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right),$$

akkor

$$\boxed{x_n} = \sqrt{2+x_{n-1}} = \sqrt{2+2\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)} = \boxed{2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

(b) Ha tudnánk, hogy a cos függvény folytonos, és ismernénk az átviteli elvet, akkor a következő kijelentést tehetnénk:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n) = 2\cos\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = 2\cos(0) = 2\cdot 1 = 2.$$

7. $\alpha \in [0, +\infty)$, $x_1 := 0$, $\quad x_{n+1} := \sqrt{\alpha + x_n}$ $(n \in \mathbb{N})$;

Világos (**HF.** teljes indukcióval igazolni!), hogy $\alpha = 0$ esetén $x_n = 0$ $(n \in \mathbb{N})$, így $\lim(x_n) = 0$. Tegyük fel most, hogy $\alpha > 0$ és határozzuk meg a sorozat első néhány tagját! Mivel

$$0 < \sqrt{\alpha} < \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha}}, \qquad \text{azaz} \qquad x_1 < x_2 < x_3,$$

így az a „gyanúnk” támad, hogy az (x_n) sorozat szigorúan monoton nővekedő. Ezt teljes indukcióval igazoljuk. Lévén, hogy $x_1 = 0 < \sqrt{\alpha} = x_2$, ezért csak azt kell megmutatnunk, hogy ha valamilyen $n \in \mathbb{N}$ mellett $x_n < x_{n+1}$, akkor $x_{n+1} < x_{n+2}$ is igaz. Valóban, $x_n < x_{n+1}$-ből $\alpha + x_n < \alpha + x_{n+1}$ és így

$$x_{n+1} = \sqrt{\alpha + x_n} < \sqrt{\alpha + x_{n+1}} = x_{n+2}$$

következik. Tudjuk, hogy ha egy monoton növekedő sorozat felülről korlátos, akkor konvergens. Teljes indukcióval igazoljuk, hogy (x_n) felülről korlátos. Olyan $K \in \mathbb{R}$ számot kellene keresni, amelyre $x_1 < K$ és

$$x_n < K \quad \Longrightarrow \quad x_{n+1} < K \qquad (n \in \mathbb{N})$$

teljesül. Ehhez az

$$x_{n+1} = \sqrt{\alpha + x_n} < \sqrt{\alpha + K}$$

egyenlőtlenség alapján – elég, ha

$$\sqrt{\alpha + K} < K$$

fennáll. Ez a feltétel az

$$\alpha + K < K^2, \qquad \text{azaz az} \qquad \alpha < K^2 - K$$

alakba írható, így a

$$K := 1 + \sqrt{\alpha}$$

választás megfelelő. A sorozat tehát konvergens. Legyen $A := \lim(x_n)$, ekkor

$$\alpha = \lim(x_{n+1}) = \sqrt{\alpha + A}\,,$$

ahonnan $\alpha > 0$ miatt

$$A = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\alpha}}{2}$$

következik.

Megjegyzés. A sorozat n-edik tagjának és határértékének eltérésére a következő, ún. hibabecslést kapjuk:

$$\begin{aligned}
|x_n - A| &= \left|\sqrt{\alpha + x_{n-1}} - \sqrt{\alpha + A}\right| = \\
&= \left|\sqrt{\alpha + x_{n-1}} - \sqrt{\alpha + A}\right| \cdot \frac{\sqrt{\alpha + x_{n-1}} + \sqrt{\alpha + A}}{\sqrt{\alpha + x_{n-1}} + \sqrt{\alpha + A}} = \\
&= \frac{|x_{n-1} - A|}{\sqrt{\alpha + x_{n-1}} + \sqrt{\alpha + A}} < \frac{|x_{n-1} - A|}{\sqrt{\alpha + A}} = \frac{|x_{n-1} - A|}{A} < \\
&< \frac{|x_{n-2} - A|}{A^2} < \quad \ldots \quad < \frac{|x_1 - A|}{A^n} = \frac{1}{A^{n-1}}.
\end{aligned}$$

8. $x_0 := 0, \;\; x_{n+1} := \alpha + x_n^2 \;\; (n \in \mathbb{N}_0;\, 0 \leq \alpha \in \mathbb{R});$

Világos (**HF.** teljes indukcióval igazolni!), hogy ha $\alpha = 0$, akkor bármel $n \in \mathbb{N}_0$ indexre $x_n = 0$, így

$\lim(x_n) = 0$. Tegyük fel, hogy $\alpha > 0$. A sorozat első néhány tagját meghatározva:

$$x_1 = \alpha < \alpha + \alpha^2 = x_2$$

$\lim(x_n) = 0$. Tegyük fel, hogy $\alpha > 0$. A sorozat első néhány tagját meghatározva:

$$x_1 = \alpha < \alpha + \alpha^2 = x_2$$

az a „gyanúnk” támad, hogy az (x_n) sorozat szigorúan monoton növekedő. Ezt teljes indukcióval igazoljuk. Mivel $x_0 = 0 < \alpha = x_1$, ezért csak azt kell megmutatnunk, hogy ha valamilyen $n \in \mathbb{N}_0$ mellett $0 < x_n < x_{n+1}$, akkor $x_{n+1} < x_{n+2}$ is igaz. Valóban, $x_n < x_{n+1}$-ből

$$0 < x_n^2 < x_{n+1}^2 \qquad \text{és így} \qquad x_{n+1} = \alpha + x_n^2 < \alpha + x_{n+1}^2 = x_{n+2}$$

következik. Tudjuk, hogy ha egy monoton növekedő sorozat felülről korlátos, akkor konvergens és

$$\lim(x_n) = \sup\{x_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Azt kellene tehát belátni, hogy egy alkalmas $A \in \mathbb{R}$ számmal $x_n < A$ $(n \in \mathbb{N}_0)$. Egy ilyen A „megsejtésére” a következő gondolatmenetet alkalmazhatjuk: ha $x_n < A$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ valamilyen A-ra fenáll, akkor A helyébe $\lim(x_n)$ is írható. Tegyük fel tehát, hogy (x_n) konvergens és legyen $A := \lim(x_n)$; ekkor

$$\lim(x_{n+1}) = A, \qquad \lim\left(\alpha + x_n^2\right) = \alpha + A^2.$$

Következésképpen az (x_n)-et meghatározó rekurzív összefüggés miatt

$$A = \alpha + A^2,$$

amiből A-ra

$$A = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\alpha}}{2}$$

adódik. Nyilvánvaló, hogy

$$A \in \mathbb{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha \le \frac{1}{4}.$$

Mivel (x_n) szigorúan monoton növekedő és $\lim(x_n)$ az

$$\{x_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}_0\}$$

halmaz legkisebb felső korlátja, ezért a fenti A-k esetén csak az

$$A = \frac{1 - \sqrt{1-4\alpha}}{2}$$

érték jön szóba. Lássuk be tehát, hogy ezzel az A-val teljesül az $x_n \le A$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ becslés. Ezt újból teljes indukcióval bizonyítjuk:

$$x_0 = 0 < \frac{1 - \sqrt{1-4\alpha}}{2} = A$$

triviálisan igaz. Ha pedig $x_n \le A$ fennáll valamilyen $\mathbb{N}_0 \ni n$-re, akkor

$$x_{n+1} = \alpha + x_n^2 \le \alpha + A^2 = A.$$

Összefoglalva tehát, $\alpha \leq \frac{1}{4}$ esetén az (x_n) sorozat konvergens és

$$\lim(x_n) = \frac{1-\sqrt{1-4\alpha}}{2}.$$

Megjegyezzük, hogy az $\alpha \in \left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$ esetben (x_n) nem kornvergens, így (szigorú) monotonitása miatt nem is korlátos, következésképen $\lim(x_n) = +\infty$.

9. $x_0 := 3,\ \ x_{n+1} := 3 - \dfrac{2}{x_n} \quad (n \in \mathbb{N}_0);$

1. lépés. Ha az (x_n) sorozat konvergens, és $\alpha := \lim(x_n)$, akkor $\lim(x_{n+1}) = \alpha$, és így

$$\alpha = 3 - \frac{2}{\alpha} \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \in \{2, 1\}.$$

2. lépés. Mivel a kezdőtag: $x_0 3 = 3$, kézenfekvőnek tűnik belátni azt, hogy

$$x_n > 2 \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Valóban,

- $n = 0$ esetén $x_0 = 3 > 2$;
- ha valamely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $x_n > 2$, akkor

$$x_{n+1} = 3 - \frac{2}{x_n} > 3 - \frac{2}{2} = 3 - 1 = 2.$$

3. lépés. Megmutatjuk, hogy az (x_n) sorozat szigorúan monoton csökkenő. Ezt teljes is indukcióval igazoljuk. Világos, hogy

- $n = 0$ esetén

$$x_0 = 3 > \frac{7}{3} = x_1;$$

- ha valamely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $2 < x_{n+1} < x_n$, akkor

$$x_{n+2} = 3 - \frac{2}{x_{n+1}} > 3 - \frac{2}{x_n} = x_{n+1}.$$

4. lépés. Mivel a sorozat (szigorúan) monoton csökkenő és alulról korlátos, ezért konvergens. A

fentiek következtában tehát (a_n) konvergens és

$$\lim(x_n) = 2.$$

Megjegyzés. A sorozat első néhány

$$x_1=3-\frac{2}{3}=\frac{7}{3},\quad x_2=3-\frac{2}{\frac{7}{3}}=\frac{15}{7},\quad x_3=3-\frac{2}{\frac{15}{7}}=\frac{31}{15},\quad x_4=3-\frac{2}{\frac{31}{15}}=\frac{63}{31},\quad x_5=3-\frac{2}{\frac{63}{31}}=\frac{127}{63}.$$

tagjának meghatározásával sejthető, hogy

$$x_n=\frac{2^{n+2}-1}{2^{n+1}-1}\qquad (n\in\mathbb{N}_0),$$

ami teljes indukcióval könnyen igazolható. Valóban,

- $n=0$ esetén
$$x_0=3=\frac{4-1}{2-1}=\frac{2^{0+2}-1}{2^{0+1}-1};$$
- ha pedig valamely $n\in\mathbb{N}_0$ esetén
$$x_n=\frac{2^{n+2}-1}{2^{n+1}-1},$$
akkor
$$x_{n+1}=3-\frac{2}{x_n}=3-2\cdot\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+2}-1}=\frac{3\cdot 2^{n+2}-3-2^{n+2}+2}{2^{n+2}-1}=\frac{2\cdot 2^{n+2}-1}{2^{n+2}-1}=\frac{2^{n+3}-1}{2^{n+2}-1}.$$

10. $x_0:=0,\ x_{n+1}:=\dfrac{2}{1+x_n}\quad(n\in\mathbb{N}_0).$

A sorozat első néhány tagját meghatározva –

$$x_0=0,\qquad x_1=2,\qquad x_2=\frac{2}{1+2}=\frac{2}{3}=0,\dot{6},\qquad x_3=\frac{2}{1+\frac{2}{3}}=\frac{6}{5}=1,2.$$

–látható, hogy (x_n) nem monoton. További tagokat kiszámítva –

$$\begin{array}{rclclcl}
x_4 &=& \frac{2}{1+\frac{6}{5}} &=& \frac{10}{11} &=& 0,\dot{9}\dot{0},\\
x_5 &=& \frac{2}{1+\frac{10}{11}} &=& \frac{22}{21} &\approx& 1,0476,\\
x_6 &=& \frac{2}{1+\frac{22}{21}} &=& \frac{42}{43} &\approx& 0,9767,\\
x_7 &=& \frac{2}{1+\frac{42}{43}} &=& \frac{86}{85} &\approx& 1,0118,\\
x_8 &=& \frac{2}{1+\frac{86}{85}} &=& \frac{170}{171} &\approx& 0,9942,\\
x_9 &=& \frac{2}{1+\frac{170}{171}} &=& \frac{342}{341} &\approx& 1,0029
\end{array}$$

sejthető, hogy

1° a páros indexű tagok 1-nél kisebbek, a páratlan indexűek pedig 1-nél nagyobbak:

$$x_n = x_{2k} < 1 \quad \text{és} \quad x_n = x_{2k+1} > 1 \qquad (k \in \mathbb{N});$$

2° a páros indexű (x_{2k}) részsorozata szigorúan monoton növekedő, a páratlan indexű (x_{2k+1}) részsorozat pedig szigorúan monoton csökkenő:

$$(x_{2k}) \uparrow \qquad \text{és} \qquad (x_{2k+1}) \downarrow .$$

Biz. Mivel bármely $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$x_{n+2} = \frac{2}{1 + x_{n+1}} = \frac{2}{1 + \frac{2}{1+x_n}} = 2 \cdot \frac{x_n + 1}{x_n + 3}, \tag{15}$$

ezért

$$x_{n+2} - x_n = 2 \cdot \frac{x_n + 1}{x_n + 3} - x_n = \frac{(x_n + 2)(1 - x_n)}{x_n + 3}.$$

Ha tehát

- n páros: $n = 2k$, akkor (15) következtében $1 - x_{2k} > 0$, tehát

$$(x_{2k}) \uparrow \text{ és felülről korlátos} \quad \Longrightarrow \quad \text{konvergens;} \quad A := \lim(x_{2k});$$

- n páratlan: $n = 2k+1$, akkor (15) következtében $1 - x_{2k+1} < 0$, tehát

$$(x_{2k+1}) \downarrow \text{ és alulról korlátos} \quad \Longrightarrow \quad \text{konvergens;} \quad B := \lim(x_{2k+1}).$$

Mindez azt jelenti (vö. (15)), hogy

$$A = 2 \cdot \frac{A+1}{A+3} \qquad \text{és} \qquad B = 2 \cdot \frac{B+1}{B+3}.$$

Mivel valamely $\xi \in \mathbb{R}$ számra

$$\xi = 2 \cdot \frac{\xi + 1}{\xi + 3} \iff \xi^2 + 3\xi = 2\xi + 2 \iff \xi^2 + \xi - 2 = 0 \iff \xi_{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \in \{-1; 0\}$$

és (x_n) nemnegatív tagú sorozat (**HF**. bizonyítani teljes indukcióval), ezért $A = b = 1$, azaz $(x_n$ konvergebs és $\lim(x_n) = 1$. ■

Feladat. Legyen $a, \alpha \in \mathbb{R}$ és

$$x_0 := a, \qquad x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\alpha}{x_n}\right) \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Konvergens-e az (x_n) sorozat? Ha igen, akkor mi a határértéke?

Tegyük fel, hogy (x_n) konvergens és $A := \lim(x_n)$. Ekkor $A = \lim(x_{n+1})$, azaz

$$A = \frac{1}{2}\left(A + \frac{\alpha}{A}\right),$$

így $A^2 = \alpha$. Tehát $\alpha < 0$ esetén (x_n) divergens. Legyen $\alpha \geq 0$. $\alpha = 0$ esetén (x_n) nem más, mint egy $\frac{1}{2}$ kvóciensű mértani sorozat, így konvergens és határértéke $0 = \alpha$. Legyen most $\alpha > 0$. Ekkor a mértani és a számtani közép közötti összefügést felhasználva megmutatjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $x_{n+1} \geq \sqrt{\alpha}$, azaz a sorozat alulról korlátos. Valóban, ha $n \in \mathbb{N}$, akkor

$$x_n = \frac{x_{n-1} + \dfrac{\alpha}{x_{n-1}}}{2} \geq \sqrt{x_{n-1} \cdot \frac{\alpha}{x_{n-1}}} = \sqrt{\alpha}.$$

A sorozat az 1-indexű tagjától kezdve monoton csökkenő, ugyanis

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x_n^2 + \alpha}{x_n} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{x_n^2 + x_n^2}{x_n} = x_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

A sorozat tehát konvergens és határértéke $\sqrt{\alpha}$. ■

1. Számítsuk ki az alábbi sorozatok határértékét!

(a) $x_n := \left(\dfrac{3n+1}{3n+2}\right)^{6n+5} \quad (n \in \mathbb{N});$

Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor az $n \to \infty$ határátmenetben

$$\begin{aligned}
x_n &= \left(\frac{3n+1}{3n+2}\right)^{6n+5} = \left(\frac{3n+1}{3n+2}\right)^{6n+4+1} = \\
&= \left(\frac{3n+1}{3n+2}\right)^{6n+4} \cdot \left(\frac{3n+1}{3n+2}\right) = \left(\left(\frac{3n+1}{3n+2}\right)^{3n+2}\right)^2 \cdot \left(\frac{3n+1}{3n+2}\right) = \\
&= \left(\left(\frac{3n+2-1}{3n+2}\right)^{3n+2}\right)^2 \cdot \left(\frac{3n+1}{3n+2}\right) = \left(\left(1 + \frac{-1}{3n+2}\right)^{3n+2}\right)^2 \cdot \left(\frac{3n+1}{3n+2}\right) \longrightarrow \\
&\longrightarrow \frac{1}{e^2} \cdot 1 = \frac{1}{e^2}.
\end{aligned}$$

(b) $x_n := \left(\dfrac{2n+3}{3n+1}\right)^{n-5} \qquad (n \in \mathbb{N}_0);$

Mivel az $n \to \infty$ határátmenetben

$$\begin{aligned}
\left(\frac{2n+3}{3n+1}\right)^n &= \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \left(\frac{n+\frac{3}{2}}{n+\frac{1}{3}}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \left(\frac{n+\frac{1}{3}+\frac{3}{2}-\frac{1}{3}}{n+\frac{1}{3}}\right)^n = \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \left(\frac{n+\frac{1}{3}+\frac{7}{6}}{n+\frac{1}{3}}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \left(1+\frac{7}{6n+2}\right)^n = \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \sqrt[6]{\left(1+\frac{7}{6n+2}\right)^{6n+2} \cdot \left(1+\frac{7}{6n+2}\right)^{-2}} \longrightarrow 0 \cdot \sqrt[6]{e^7 \cdot 1^{-2}} = 0
\end{aligned}$$

és

$$\left(\frac{2n+3}{3n+1}\right)^{-5} \longrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{-5} \qquad (n \to \infty),$$

ezért

$$\lim(x_n) = 0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-5} = 0.$$

(c) $x_n := \left(\dfrac{3n+3}{2n+4}\right)^{n} \qquad (n \in \mathbb{N});$

Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$\begin{aligned}
x_n &= \left(\frac{3n+3}{2n+4}\right)^n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n = \\
&= \left(\frac{3}{2}\right)^n \left(1-\frac{1}{n+2}\right)^{n+2} \left(1-\frac{1}{n+2}\right)^{-2} \longrightarrow +\infty \qquad (n \to \infty).
\end{aligned}$$

$$\text{(d)}\quad x_n := \left(\frac{2n+3}{3n+4}\right)^n \qquad (n \in \mathbb{N}_0);$$

Minden n indexre

$$x_n = \left(\frac{2n+3}{3n+4}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \left(\frac{n+3/2}{n+4/3}\right)^n =$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^n \left(1+\frac{1/6}{n+4/3}\right)^{n+4/3} \left(1+\frac{1/6}{n+4/3}\right)^{-4/3} \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty).$$

$$\text{(e)}\quad x_n := \left(\frac{n+1}{\sqrt{n^2+2n}}\right)^{2n^2+4n} \qquad (n \in \mathbb{N});$$

Bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$x_n = \left(\frac{n+1}{\sqrt{n^2+2n}}\right)^{2n^2+4n} = \left(\frac{(n+1)^2}{n^2+2n}\right)^{n^2+2n} =$$

$$= \left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n^2+2n} = \left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n^2+2n} \longrightarrow e \qquad (n \to \infty)$$

$$\text{(f)}\quad x_n := \left(1+\frac{1}{2^n-1}\right)^{2^{n+2}+3} \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Mivel tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$2^{n+2}+3 = 2^2 \cdot 2^n + 3 = 4 \cdot 2^n - 4 + 7 = 4 \cdot (2^n - 1) + 7,$$

ezért

$$x_n = \left(1+\frac{1}{2^n-1}\right)^{2^{n+2}+3} = \left(\left(1+\frac{1}{2^n-1}\right)^{2^n-1}\right)^4 \cdot \left(1+\frac{1}{2^n-1}\right)^7 \longrightarrow e^4 \cdot 1^7 \quad (n \to \infty).$$

2. Számítsuk ki az alábbi sorozatok határértékét!

(a) $x_0 := \sqrt{3},\ x_{n+1} := \sqrt{3+2x_n}\ (n \in \mathbb{N}_0)$;

1. lépés. A sorozat első két tagját meghatározva:

$$x_0 = \sqrt{3} < \sqrt{3+2\sqrt{3}} = x_1,$$

az a „gyanúnk” támad, hogy az (x_n) sorozat szigorúan monoton növekedő. Ezt teljes

indukcióval igazoljuk. Az iméntiek miatt elég azt igazolnunk, hogy ha valamilyen $n \in \mathbb{N}_0$ mellett $x_n < x_{n+1}$, akkor $x_{n+1} < x_{n+2}$ is teljesül. Valóban $x_n < x_{n+1}$-ből

$$3 + 2x_n < 3 + 2x_{n+1}, \qquad \text{azaz} \qquad x_{n+1} = \sqrt{3+2x_n} < \sqrt{3+2x_{n+1}} = x_{n+2}$$

következik.

2. lépés. Ha az (x_n) sorozat konvergens, akkor $A := \lim(x_n)$ határértékére $\lim(x_{n+1}) = A$, és így

$$A = \sqrt{3+2A} \qquad \Longrightarrow \qquad A^2 - 2A - 3 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad A = 1 + \sqrt{1+3} = 3.$$

3. lépés. Mivel (x_n) szigorúan monoton növekedő, ezért ha felülről korlátos, akkor a 3 egy felső korlátja is. Világos, hogy

- $n = 0$ esetén $x_0 = \sqrt{3} < 3$;
- ha valamely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $x_n < 3$, akkor

$$x_{n+1} = \sqrt{3+2x_n} < \sqrt{3+2\cdot 3} = \sqrt{9} = 3.$$

4. lépés. Midez azt jelenti, hogy az (x_n) sorozat konvergens és $\lim(x_n) = 3$.

(b) $x_0 := 0,\ x_{n+1} := \dfrac{x_n^3+1}{2}\ (n \in \mathbb{N}_0)$.

1. lépés. A sorozat első néhány tagját meghatározva:

$$x_0 = 0, \qquad x_1 = \frac{1}{2}, \qquad x_2 = \frac{9}{16}$$

az a „gyanúnk” támad, hogy az (x_n) sorozat szigorúan monoton növekedő. Ezt teljes indukcióval igazoljuk. Mivel

$$x_0 < \frac{1}{2} = x_1,$$

ezért elég azt igazolnunk, hogy ha valamilyen $n \in \mathbb{N}_0$ mellett $x_n < x_{n+1}$, akkor $x_{n+1} < x_{n+2}$ is teljesül. Valóban $x_n < x_{n+1}$-ből

$$x_{n+1} = \frac{x_n^3 + 1}{2} < \frac{x_{n+1}^3 + 1}{2} = x_{n+2}$$

következik.

2. lépés. Ha az (x_n) sorozat konvergens, akkor $A := \lim(x_n)$ határértékére $\lim(x_{n+1}) = A$, és így

$$A = \frac{A^3 + 1}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad A^3 - 2A + 1 = 0.$$

Felhazsnálva az 1. gyakorlaton tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$, ill. $n \in \mathbb{N}$ számokra bizonyított (1) azonosság

$$\boxed{a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)}$$

speciális esetét, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} A^3 - 2A + 1 &= A^3 - 1 - 2A + 2 = A^3 - 1^3 - 2(A - 1) = (A - 1)(A^2 + A + 1) - 2(A - 1) \\ &= (A - 1)(A^2 + A - 1), \end{aligned}$$

következésképpen

$$A = \frac{A^3 + 1}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad A^3 - 2A + 1 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad A \in \left\{1, \ \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}.$$

Mivel $x_0 = 0$ és (x_n) szigorúan monoton növekedő, ezért a $\dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ szám nem lehet (x_n) határértéke.

3. lépés. Mivel (x_n) szigorúan monoton növekedő és $\lim(x_n)$ az

$$\{x_n \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N}_0\}$$

halmaz legkisebb felső korlátja, ezért az

$$A = 1 \qquad \text{és} \qquad A = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

értékek közül

$$\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} < 1$$

miatt csak az

$$A = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

érték jöhet szóba. Lássuk be tehát, hogy ezzel az A-val teljesül az $x_n \leq A$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ becslés. Ezt újból teljes indukcióval bizonyítjuk:

$$x_0 = 0 < \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = A$$

triviálisan igaz. Ha pedig $x_n \leq A$ fennáll valamilyen $\mathbb{N}_0 \ni n$-re, akkor

$$x_{n+1} = \frac{x_n^3+1}{2} \leq \frac{A^3+1}{2} = A.$$

4. lépés. Összefoglalva tehát, az (x_n) sorozat konvergens és

$$\lim(x_n) = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

3. Igazoljuk, hogy bármely $\alpha \in [0,1]$ esetén az

$$x_0 := \frac{\alpha}{2}, \qquad x_{n+1} := \frac{x_n^2+\alpha}{2} \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

sorozat konvergens, majd számítsuk ki a határértékét!

1. lépés. Mivel

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^2}{4}+\alpha\right) = \frac{\alpha^2+4\alpha}{8} > \frac{4\alpha}{8} = \frac{\alpha}{2} = x_0,$$

ezért sejthető, hogy (x_n) szigorúan monoton növekedő. Az iméntiek miatt elég belátni, hogy ha valamely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $0 < x_n < x_{n+1}$, akkor $0 < x_{n+1} < x_{n+2}$. Valóban, ha valamely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $0 < x_n < x_{n+1}$, akkor

$$0 < x_{n+1} = \frac{x_n^2+\alpha}{2} < \frac{x_{n+1}^2+\alpha}{2} = x_{n+2}.$$

2. lépés. Ha az (x_n) sorozat konvergens, akkor $A := \lim(x_n)$ határértékére $\lim(x_{n+1}) = A$, és így

$$A = \frac{A^2+\alpha}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad A^2 - 2A + \alpha = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad A = A_\pm := 1 \pm \sqrt{1-\alpha}.$$

3. lépés. Mivel (x_n) szigorúan monoton növekedő és $\lim(x_n)$ az

$$\{x_n \in \mathbb{R} : \; n \in \mathbb{N}_0\}$$

halmaz legkisebb felső korlátja, ezért az A_+ és A_- értékek közül $0 \leq A_- \leq A_+$ miatt miatt csak az

$$A_- = 1 - \sqrt{1-\alpha}$$

érték jöhet szóba ($\alpha = 1$ esetén persze $A_- = A_+$). Világos, hogy

- $n = 0$ esetén
$$x_0 = \frac{\alpha}{2} \leq \frac{\alpha + A_-^2}{2} = A_-;$$
- ha valamely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $x_n \leq A_-$, akkor
$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + \alpha}{2} \leq \frac{(A_-)^2 + \alpha}{2} = A_-.$$

  Következésképpen (x_n) felülről korlátos.

4. lépés. Összefoglalva tehát, az (x_n) sorozat konvergens és

$$\lim(x_n) = 1 - \sqrt{1-\alpha}. \quad \blacksquare$$