Definíció. Legyen $\mathcal{H} \neq \emptyset$. Ekkor az

$$x : \mathbb{N}_0 \to \mathcal{H}$$

függvényt **$\mathcal{H}$-beli sorozat**nak nevezzük. Ha

$$\mathcal{H} = \mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\},$$

akkor valós vagy komplex számsorozatról beszélünk.

Definíció. Azt mondtuk, hogy az $(x_n) : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ sorozat

1. **korlátos**, ha (x_n) értékkészlete, pontosabban a

$$\{x_n \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N}_0\}$$

halmaz korlátos, azaz alkalmas $M \in \mathbb{R}$ esetén

$$|x_n| \leq M \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

teljesül. A korlátos sorozatok halmazát az l_∞ szimbólummal jelöljük.

2. **alulról korlátos**, ha (x_n) értékkészlete alulról korlátos, azaz alkalmas $k \in \mathbb{R}$ esetén

$$x_n \geq k \qquad (n \in \mathbb{N}_0);$$

3. **felülről korlátos**, ha (x_n) értékkészlete felülről korlátos, azaz alkalmas $K \in \mathbb{R}$ esetén

$$x_n \leq K \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Definíció. Az $x := (x_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat értékkészletének

1. felső határát a **sorozat felső határá**nak vagy **szuprémumá**nak nevevezzük:

$$\sup(x) := \sup\{x_n \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N}_0\};$$

2. alsó határát a **sorozat alsó határá**nak vagy **infimumá**nak nevevezzük:

$$\inf(x) := \inf\{x_n \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Definíció. Tetszőleges $x = (x_n) \in l_\infty$ sorozat esetén az

$$\|x\| := \sup\{|x_n| \in \mathbb{R} : \ n \in \mathbb{N}_0\}$$

valós számot az $x = (x_n) \in l_\infty$ sorozat **normá**jának nevezzük.

Definíció. Azt mondjuk, hogy az $(x_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat

1. **monoton növő**, ha bármely $n \in \mathbb{N}$ indexre $x_n \leq x_{n+1}$;
2. **szigorúan monoton növő**, ha bármely $n \in \mathbb{N}$ indexre $x_n < x_{n+1}$;
3. **monoton fogyó** vagy **monoton csökkenő**, ha bármely $n \in \mathbb{N}$ indexre $x_n \geq x_{n+1}$;
4. **szigorúan monoton fogyó**, ha bármely $n \in \mathbb{N}$ indexre $x_n > x_{n+1}$.

Definíció. Ha valamely $\nu : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ sorozat szigorúan monoton növekedő, akkor ν-t **indexsorozat**nak nevezzük. Az indexsorozatok összességét az $\mathcal{I}$ szimbólummal jelöljük.

Definíció. Az $x : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ sorozat **részsorozat**ának nevezzük az $y : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ sorozatot, ha van olyan $\nu \in \mathcal{I}$, hogy $y = x \circ \nu$.

Definíció. Legyen $x = (x_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Ekkor

- az (x_n) sorozat **konvergens**, ha

$$\exists A \in \mathbb{R} \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} : \qquad (n \geq N \quad \Longrightarrow \quad |x_n - A| < \varepsilon);$$

  Ekkor az A számot az (x_n) sorozat **határérték**ének vagy **limesz**ének nevezzük és az

$$A =: \lim(x) =: \lim(x_n) := \lim_{n \to \infty}(x_n) \qquad \text{vagy az} \qquad x_n \longrightarrow A \quad (n \to \infty)$$

  jelölést használjuk.

- az (x_n) sorozat **divergens**, ha nem konvergens, azaz

$$\forall A \in \mathbb{R} \ \exists \varepsilon > 0 \ \forall N \in \mathbb{N} \ \exists n \in \mathbb{N} : \qquad (n \geq N \quad \wedge \quad |x_n - A| \geq \varepsilon);$$

- az (x_n) sorozat **határértéke** $+\infty$ ($\lim(x_n) = +\infty$), ha

$$\forall \omega \in \mathbb{R} \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} : \qquad (n \geq N \quad \Longrightarrow \quad x_n > \omega);$$

- az (x_n) sorozat **határértéke** $-\infty$ ($\lim(x_n) = -\infty$), ha

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} : \qquad (n \geq N \quad \Longrightarrow \quad x_n < \alpha);$$

- az (x_n) sorozatnak **van határértéke** ($\lim(x_n) \in \overline{\mathbb{R}}$), ha

$$(x_n) \quad \text{konvergens} \qquad \text{VAGY} \qquad \lim(x_n) \in \{-\infty, +\infty\}.$$

Feladat. Sejtsük meg az alábbi sorozatok határértékét, majd a definíció alapján igazoljuk sejtésünket!

1. $x_n := \dfrac{3n+4}{2n-1} \quad (n \in \mathbb{N});$

Mivel bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{3n+4}{2n-1} = \frac{3+\frac{4}{n}}{2-\frac{1}{n}}$$

és „igen nagy n esetén $\dfrac{1}{n}$ igen kicsi", ezért azt sejtjük, hogy

$$\lim(x_n) = \frac{3-0}{2-0} = \frac{3}{2}.$$

Valóban, ha $1 \leq n \in \mathbb{N}_0$, azaz $n \in \mathbb{N}$, akkor

$$\left|\frac{3n+4}{2n-1} - \frac{3}{2}\right| = \frac{11}{4n-2} < \frac{11}{n} < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{11}{\varepsilon} < n,$$

ezért tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén a

$$N := \left[\frac{11}{\varepsilon}\right] + 1$$

választás megfelelő.

2. $x_n := \dfrac{n}{2n-3} \quad (n \in \mathbb{N});$

Mivel bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{n}{2n-3} = \frac{1}{2-\frac{3}{n}}$$

és „igen nagy n esetén $\dfrac{1}{n}$ igen kicsi", ezért azt sejtjük, hogy

$$\lim(x_n) = \frac{1}{2-0} = \frac{1}{2}.$$

Valóban, ha $6 < n \in \mathbb{N}_0$, akkor

$$\left|\frac{n}{2n-3} - \frac{1}{2}\right| = \frac{3}{4n-6} < \frac{3}{3n} = \frac{1}{n} < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad n > \frac{1}{\varepsilon},$$

hiszen

$$4n-6 > 3n \qquad \Longleftrightarrow \qquad n > 6.$$

Ezért tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén az

$$N := \max\left\{7, \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1\right\}$$

választás megfelelő.

3. $x_n := \dfrac{1}{n^2 - 3} \qquad (n \in \mathbb{N});$

Mivel bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén x_n „igen nagy n esetén igen kicsi", ezért azt sejtjük, hogy

$$\lim(x_n) = 0.$$

Valóban, ha $3 \leq n \in \mathbb{N}$, akkor

$$\left|\frac{1}{n^2 - 3} - 0\right| = \frac{1}{n^2 - 3} < \frac{1}{n}\varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad n > \frac{1}{\varepsilon},,$$

hiszen ekkor

$$\frac{1}{n^2 - 3} < \frac{1}{n} \qquad \Longleftrightarrow \qquad n < n^2 - 3$$

és

$$n^2 - 3 - n = n^2 - n - 3 = n(n-1) - 3 > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad n \geq 3.$$

Ezért tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén az

$$N := \max\left\{3, \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1\right\}$$

választás megfelelő.

4. $x_n := \sqrt{n^2 + 1} - n \qquad (n \in \mathbb{N}_0);$

Mivel bármely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$\sqrt{n^2 + 1} - n = \left(\sqrt{n^2 + 1} - n\right) \cdot \frac{\sqrt{n^2 + 1} + n}{\sqrt{n^2 + 1} + n} = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} + n}$$

és az utóbbi tört számlálója korlátos, nevezője edig nem, ezért azt sejtjük, hogy $\lim(x_n) = 0$. Valóban, ha $n \in \mathbb{N}$, akkor

$$\left|\sqrt{n^2 + 1} - n - 0\right| = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} + n} < \frac{1}{n} < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad n > \frac{1}{\varepsilon},$$

ezért tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén

$$N := \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1. \quad \blacksquare$$

5. $x_n := \dfrac{1+n^2}{2+n+2n^2} \quad (n \in \mathbb{N});$

Mivel bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{1+n^2}{2+n+2n^2} = \frac{\frac{1+n^2}{n^2}}{\frac{2+n+2n^2}{n^2}} = \frac{\frac{1}{n}+1}{\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n}+2},$$

és „igen nagy n esetén $\frac{1}{n^k}$ igen kicsi, ahol $k \in \{1;2\}$", ezért azt sejtjük, hogy

$$\lim(x_n) = \frac{1+0}{0+0+2} = \frac{1}{2}.$$

Valóban,

$$\left|\frac{1+n^2}{2+n+2n^2} - \frac{1}{2}\right| = \frac{|-n|}{2(2n^2+n+2)} < \frac{n}{4n^2} = \frac{1}{4n} < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{4\varepsilon} < n,$$

ezért tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén

$$N := \left[\frac{1}{4\varepsilon}\right] + 1.$$

6. $x_n := \sqrt{n+3} - \sqrt{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}_0);$

Mivel bármely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$\sqrt{n+3} - \sqrt{n+1} = \left(\sqrt{n+3} - \sqrt{n+1}\right) \cdot \frac{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}} = \frac{2}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}}$$

és az utóbbi tört számlálója korlátos, nevezője edig nem, ezért azt sejtjük, hogy $\lim(x_n) = 0$. Valóban, ha $n \in \mathbb{N}$, akkor

$$\left|\sqrt{n+3} - \sqrt{n+1} - 0\right| = \frac{2}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}} < \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}},$$

ezért tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén az

$$N := \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right] + 1$$

választás megfelelő.

7. $x_n := \dfrac{3n^2-1}{2n^2+n+3} \quad (n \in \mathbb{N}_0).$

Mivel bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{3n^2-1}{2n^2+n+3} = \frac{\frac{3n^2-1}{n^2}}{\frac{2n^2+n+3}{n^2}} = \frac{3-\frac{1}{n^2}}{2+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}},$$

és „igen nagy n esetén $\frac{1}{n^k}$ igen kicsi, ahol $k \in \{1;2\}$", ezért azt sejtjük, hogy

$$\lim(x_n) = \frac{3-0}{2+0+0} = \frac{3}{2}.$$

Valóban,

$$\left|\frac{3n^2-1}{2n^2+n+3} - \frac{3}{2}\right| = \frac{|-3n-11|}{4n^2+2n+6} < \frac{3n+11}{4n^2} < \frac{14n}{4n^2} = \frac{7}{2n} < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{7}{2\varepsilon} < n,$$

ezért tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén az

$$N := \left[\frac{7}{2\varepsilon}\right] + 1$$

választás megfelelő. ■

Feladat. A határérték definíciója alapján lássa be, hogy igaz a

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+14n+19}{1+(n+3)^2}\right) = 2$$

állítás!

Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor

$$\left|\frac{2n^2+14n+19}{1+(n+3)^2} - 2\right| = \left|\frac{2n^2+14n+19}{n^2+6n+10} - \frac{2(n^2+6n+10)}{n^2+6n+10}\right| = \frac{2n-1}{1+(n+3)^2} \leq \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n},$$

és

$$\frac{2}{n} < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{2}{\varepsilon} < n,$$

ezért tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén, ha

$$N := \left[\frac{2}{\varepsilon}\right] + 1,$$

akkor elmondható, hogy bármely $N \leq n \in \mathbb{N}$ indexre

$$\left|\frac{2n^2+14n+19}{1+(n+3)^2} - 2\right| < \varepsilon, \qquad \text{azaz} \qquad \lim\left(\frac{2n^2+14n+19}{1+(n+3)^2}\right) = 2.$$

Feladat. Konvergens-e az $(x_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat, ha

1. $\exists A \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon > 0\ \forall n \in \mathbb{N}: \quad |x_n - A| < \varepsilon;$

Nem, ui. az

$$x_n := (-1)^n \quad (n \in \mathbb{N}), \qquad A := 0, \qquad \varepsilon := 2$$

választással tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén $|x_n - A| < \varepsilon$, de (x_n) divergens. Az állításból csak annyi következik, hogy (x_n) korlátos, ui. a feltétel szerint

$$\exists A \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon > 0: \qquad A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon \quad (n \in \mathbb{N}).$$

2. $\exists A \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}: \quad |x_N - A| < \varepsilon;$

Nem, hiszen a megadott feltételeknek minden sorozat eleget tesz, ui. válaszzuk meg az A valós számot

úgy, hogy

$$A \in \{x_n \in \mathbb{N}: \ n \in \mathbb{N}\}$$

teljesüljön. Ekkor ui. alkalmas $N \in \mathbb{N}$ insdexre $x_N - A = 0$.

3. $\exists A \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall N \leq n \in \mathbb{N}\ \forall \varepsilon > 0: \quad |x_n - A| < \varepsilon.$

Igen, ui. ez a felétel azt jelenti, hogy az (x_n) sorozat **kvázikonstans**: egy bizonyos indextől kezdve tagjai egyenlők. ■.

Feladat. Mutassuk meg, hogy ha az (x_n) sorozat konvergens és $A := \lim(x_n) \in \mathbb{R}$, akkor $(|x_n|)$ is konvergens és fennáll a

$$\lim(|x_n|) = |A|$$

határérték-reláció!

Mivel

$$\lim(x_n) = A,$$

ezért tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbb{N}$ index, hogy minden $N \leq n \in \mathbb{N}_0$ indexre $|x_n - A| < \varepsilon$, ahonnan

$$0 \leq \big||x_n| - |A|\big| \leq |x_n - A| < \varepsilon,$$

következik. Mindez azt jelenti, hogy

$$\lim\left(|x_n| - |A|\right) = 0, \qquad \text{azaz} \qquad \lim\left(|x_n|\right) = |A|. \quad \blacksquare$$

Feladat. Legyen

$$x_n \in [0, +\infty) \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

konvergens sorozat. Mutassuk meg, hogy ekkor igazak az alábbi állítások.

1. $\lim(x_n) =: A \in [0, +\infty)$;

A határérték és a rendezés kapcsolatáról szóló tétel (vö. EA) következtében

$$\lim(x_n) =: A \in [0, +\infty).$$

2. $(\sqrt{x_n})$ konvergens és $\lim(\sqrt{x_n}) = \sqrt{A}$.

Ha

- $A = 0$, akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbb{N}$ index, hogy minden $N \leq n \in \mathbb{N}_0$ indexre

  $$|x_n - 0| < \varepsilon^2,$$

  azaz a sorozat nemnegativitása következtében

  $$x_n < \varepsilon^2, \qquad \text{ill.} \qquad \sqrt{x_n} < \varepsilon,$$

  ahonnan

  $$|\sqrt{x_n} - 0| = \sqrt{x_n} < \varepsilon$$

  következik. Mindez azt jelenti, hogy $\lim(\sqrt{x_n}) = 0$.

- $A > 0$, akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbb{N}$ index, hogy minden $N \leq n \in \mathbb{N}_0$ indexre

  $$|x_n - A| < \varepsilon\sqrt{A},$$

  ahonnan

  $$\left|\sqrt{x_n} - \sqrt{A}\right| = \left|\sqrt{x_n} - \sqrt{A}\right| \cdot \frac{\sqrt{x_n} + \sqrt{A}}{\sqrt{x_n} + \sqrt{A}} = \frac{|x_n - A|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{A}} \leq \frac{|x_n - A|}{\sqrt{A}} < \frac{\varepsilon\sqrt{A}}{\sqrt{A}} = \varepsilon$$

  következik, ami azt jelenti, hogy

  $$\lim(\sqrt{x_n}) = \sqrt{A}. \quad \blacksquare$$

Feladat. A definíció a alapján lássa be, hogy igazak az alábbi határéreték-relációk!

2. $\lim_{n\to\infty}(n^2+3) = +\infty$

<-1)

Azt kell megmutatni, hogy az

$$x_n := n^2 + 3 \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

sorozatra

$$\forall \omega \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N}_0\ \forall n \in \mathbb{N}_0 : \qquad (n \geq N \quad \Longrightarrow \quad x_n > \omega)$$

teljesül. Valóban, ha $3 \leq \omega \in \mathbb{R}$, akkor

$$n^2 + 3 = x_n > \omega \qquad \Longleftrightarrow \qquad n^2 > \omega - 3.$$

Így az

$$N := [\omega - 3] + 1$$

választás megfelelő.

2. $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^2+3n+1}{n+3} = +\infty$

Azt kell megmutatni, hogy az

$$x_n := \frac{n^2+3n+1}{n+3} \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

sorozatra

$$\forall \omega \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N}_0\ \forall n \in \mathbb{N}_0 : \qquad (n \geq N \quad \Longrightarrow \quad x_n > \omega)$$

teljesül. Valóban, ha $0 < \omega \in \mathbb{R}$, akkor bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{n^2+3n+1}{n+3} > \frac{n^2}{n+3} \geq \frac{n^2}{n+3n} = \frac{n}{4} > \omega \qquad \Longleftrightarrow \qquad n > 4\omega,$$

így

$$N := \max\{1, [4\omega] + 1\} = 4[\omega] + 1.$$

3. $\lim_{n\to\infty}\dfrac{2-3n^2}{n+1} = -\infty.$

Azt kell megmutatni, hogy az

$$x_n := \frac{2-3n^2}{n+1} \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

sorozatra

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N}_0\ \forall n \in \mathbb{N}_0 : \qquad (n \geq N \quad \Longrightarrow \quad x_n < \alpha)$$

teljesül. Valóban, ha $0 > \alpha \in \mathbb{R}$, akkor bármely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$\frac{2-3n^2}{n+1} < \alpha \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{3n^2-2}{n+1} > -\alpha,$$

így tetszőleges $2 \leq n \in \mathbb{N}$ indexre

$$\frac{3n^2-2}{n+1} = \frac{2n^2+(n^2-2)}{n+1} \geq \frac{2n^2}{n+n} = \frac{2n^2}{2n} = n$$

következtében

$$N := \max\{2, [-\alpha]+1\}. \quad \blacksquare$$

Feladat. Lássuk be, hogy ha bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $x_n \in (0, +\infty)$, akkor igaz a

$$\lim(x_n) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lim\left(\frac{1}{x_n}\right) = +\infty$$

implikáció!

Mivel

$$\lim(x_n) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}_0\ \forall N \leq n \in \mathbb{N}_0 : \quad x_n = |x_n| = |x_n - 0| < \varepsilon$$

és

$$x_n < \varepsilon \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{x_n} > \frac{1}{\varepsilon} =: \omega,$$

ezért elmondható, hogy tetszőleges $0 < \omega \in \mathbb{R}$ számhoz van olyan $N \in \mathbb{N}_0$ (küszöb)index, hogy bármely $N \leq n \in \mathbb{N}_0$ indxre

$$\frac{1}{x_n} > \omega, \qquad \text{azaz} \qquad \lim\left(\frac{1}{x_n}\right) = +\infty. \quad \blacksquare$$

Feladat. Igaz-e, hogy az $(x_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozatra $\lim(x_n) = +\infty$, ha

$$\exists\, \omega \in \mathbb{R}\ \exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall\, n \in \mathbb{N} : \quad (n \geq N \quad \Longrightarrow \quad x_n > \omega) \tag{10}$$

teljesül?

Nem, ui. pl. az

$$x_n := 1 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat teljesíti az (10) feltételt, de határértéke nem $+\infty$. ■

Feladat. Igazoljuk hogy ha $d \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_d \in \mathbb{R}$, továbbá

$$p(x) := a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_d x^d = \sum_{k=0}^{d} a_k x^k \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor igaz az alábbi állítás!

$$\lim(p(n)) = \begin{cases} +\infty & (a_d > 0), \\ -\infty & (a_d < 0). \end{cases}$$

Világos, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned} p(n) \quad &= \quad a_0 + a_1 n + \ldots + a_{d-1}n^{d-1} + a_d n^d = n^d \cdot \left(\frac{a_0}{n^d} + \frac{a_1}{n^{d-1}} + \ldots + \frac{a_{d-1}}{n} + a_d\right) \longrightarrow \\ &\stackrel{(n\to\infty)}{\longrightarrow} \quad (+\infty)^d \cdot (0 + 0 + \ldots + 0 + a_d) = \\ &= \quad (+\infty) \cdot \operatorname{sgn}(a_d) = \begin{cases} +\infty & (a_d > 0), \\ -\infty & (a_d < 0). \end{cases} \quad ■ \end{aligned}$$

Házi feladatok.

1. A határérték definíciója alapján mutassuk meg, hogy fennáll a

$$\lim\left(2 - n^3\right) = -\infty$$

határérték-reláció!

Azt kell megmutatni, hogy az

$$x_n := 2 - n^3 \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

sorozatra

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N}_0\ \forall n \in \mathbb{N}_0: \qquad (n \geq N \quad \Longrightarrow \quad x_n < \alpha)$$

teljesül. Valóban, ha $3 \leq \alpha \in \mathbb{R}$, akkor

$$2 - n^3 < \alpha \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2 - \alpha < n^3.$$

Így az

$$N := \max\left\{0, [\sqrt[3]{2-\alpha}] + 1\right\}$$

választás megfelelő.

2. Sejtsük meg az

$$x_n := \frac{n^4 + 2n^2 + 1}{n^2 + 1} \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

sorozat határértékét, majd a definíció alapján bizonyítsa be sejtését!

Az órán megmutattuk, hogy $\lim(x_n) = +\infty$. Valóban, ha $0 < \omega \in \mathbb{R}$, akkor bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{n^4 + 2n^2 + 1}{n^2 + 1} > \frac{n^4}{n^2 + 1} \geq \frac{n^4}{n^2 + n^2} = \frac{n^4}{2n^2} = \frac{n^2}{2} > \omega \qquad \Longleftrightarrow \qquad n > \sqrt{2\omega},$$

így

$$N := \max\left\{1, [\sqrt{2\omega}] + 1\right\} = [\sqrt{2\omega}] + 1.$$

3. Lássuk be, hogy ha bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $x_n \in (-\infty, 0)$, akkor igaz a

$$\lim(x_n) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lim\left(\frac{1}{x_n}\right) = -\infty$$

implikáció!

Mivel

$$\lim(x_n) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}_0\ \forall N \leq n \in \mathbb{N}_0: \quad -x_n = |x_n| = |x_n - 0| < \varepsilon$$

és

$$-x_n < \varepsilon \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{x_n} < -\frac{1}{\varepsilon} =: \alpha,$$

ezért elmondható, hogy tetszőleges $0 > \alpha \in \mathbb{R}$ számhoz van olyan $N \in \mathbb{N}_0$ (küszöb)index, hogy bármely $N \leq n \in \mathbb{N}_0$ indxre

$$\frac{1}{x_n} < \alpha, \qquad \text{azaz} \qquad \lim\left(\frac{1}{x_n}\right) = -\infty. \quad \blacksquare$$