Programtervező informatikus szak I. évfolyam
Matematikai alapok javító zárthelyi $\boxed{\textit{az 1. zh anyagából}}$
2022. január 4.

$\boxed{\textit{Minden feladathoz indoklást, levezetést kérünk.}}$

1. *(3+5 pont)* Tekintsük az
$$x^2 - ax + a - 1 = 0.$$
másodfokú egyenletet, ahol $a \in \mathbb{R}$ paraméter.

   a) Adjuk meg a valós ($x \in \mathbb{R}$) megoldások számát az a paraméter függvényében.

   b) Az a paraméter mely értékeire igaz, hogy
$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 + x_2} > x_1 \cdot x_2$$
ahol x_1 és x_2 az egyenlet két különböző valós megoldását jelöli.

2. *(8 pont)* Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán:
$$\sqrt{5x - 17} - \sqrt{2} > \sqrt{3x - 13}$$

3. *(3+8= 11 pont)*

   a) Igazoljuk, hogy $x_0 = -1$ gyöke az alábbi polinomnak, és emeljük ki a hozzá tartozó gyöktényezőt:
$$P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6 \quad (x \in \mathbb{R})$$

   b) Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:
$$\log_{2022}(27^x - 4 \cdot 9^x + 3^x + 6) - \log_{2022}(9^x - 4) = \frac{\log_2(3^x - 2)}{1 + \log_2(1011)}$$

4. *(8 pont)* Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán
$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$$

5. *(7+1= 8 pont)*

   a) Egy megfelelő $N \in \mathbb{N}$ szám meghatározásával igazoljuk az alábbi állítást:
$$\exists\, N \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\, n > N : \quad \frac{21n^4 - 2n^3 + 7n^2 - 10n + 7}{3n^3 + n^2 - 40n + 96} > 2022$$

   b) Írjuk fel "pozitív" kijelentés formájában az állítás tagadását.

6. *(7 pont)* Igazoljuk teljes indukcióval:
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^+ : \qquad \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k+1}\right) = 1 + \frac{n}{2}$$