Emlékeztető. Az alábbi nevezetes határértékeket ismertnek tételezzük fel.

1. Ha $k \in \mathbb{N}$ tetszőlegesen rögzített, akkor

$$\text{(a) } \lim\left(\frac{1}{n^k}\right) = 0, \qquad \text{(b) } \lim\left(n^k\right) = +\infty, \qquad \text{(c) } \lim\left(\sqrt[k]{n}\right) = +\infty.$$

2. Ha $m \in \mathbb{N}$ és az $x_n \in [0, +\infty)$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozat konvergens, továbbá $\lim(x_n) =: A$, akkor

$$\lim\left(\sqrt[m]{x_n}\right) = \sqrt[m]{A}.$$

3. Ha $q \in \mathbb{R}$, akkor

$$\lim(q^n) \begin{cases} = 0 & (|q| < 1), \\ = 1 & (q = 1), \\ = +\infty & (q > 1), \\ \nexists & (q \leq -1). \end{cases}$$

4. Ha $0 < \alpha \in \mathbb{R}$, illetve $x_n \in [0, +\infty)$ $(n \in \mathbb{N})$ olyan sorozat, amelyre $\lim(x_n) \in (0, +\infty)$, akkor

$$\text{(a) } \lim\left(\sqrt[n]{\alpha}\right) = 1, \qquad \text{(b) } \lim\left(\sqrt[n]{n}\right) = 1, \qquad \text{(c) } \lim\left(\sqrt[n]{x_n}\right) = 1.$$

5. Ha $x \in \mathbb{Q}$, akkor

$$\lim\left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right) = e^x.$$

6. További nevezetes nullsorozatok:

   (a) $x_n := \dfrac{n^k}{a^n} \quad (n \in \mathbb{N},\ a \in (1, +\infty))$;

   (b) $x_n := \dfrac{a^n}{n!} \quad (n \in \mathbb{N},\ a \in \mathbb{R})$;

   (c) $x_n := \dfrac{n!}{n^n} \quad (n \in \mathbb{N},\ a \in (1, +\infty))$.

Emlékeztető. A határértékszámítás során felhasználható eredmények.

1. **A műveletek és a határéerték kapcsolata.** Tegyük fel, hogy az

$$x := (x_n), y := (y_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

sorozatoknak van határértéke. Ha

$$* \in \{+, -, \cdot, /\} \qquad \text{és} \qquad \lim(x_n) * \lim(y_n) \in \overline{\mathbb{R}},$$

akkor az $x * y$ sorozatnak is van határértéke és

$$\lim(x * y) = \lim(x_n) * \lim(y_n).$$

2. **Sandwich-tétel.** Tegyük fel, hogy az $u, v, w : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozatokra teljesülnek a következők:

   (i) van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy bármely $N \leq n \in \mathbb{N}$ indexre $u_n \leq v_n \leq w_n$;

   (ii) $\exists \lim(u_n) = \lim(w_n) =: A \in \overline{\mathbb{R}}$.

   Ekkor a közrefogott (v_n) sorozatnak is van határértéke: $\lim(v_n) = A$.

3. **A határéreték és a rendezés közötti kapcsolat.** Tegyük fel, hogy az $(u_n), (v_n)$ sorozatoknak van határértékük és

$$\lim(u_n) =: A \in \overline{\mathbb{R}}, \qquad \lim(v_n) =: B \in \overline{\mathbb{R}}.$$

   (1) Ha $A > B$, akkor $\exists\, N \in \mathbb{N}: \ \forall\, N \leq n \in \mathbb{N}$-re $u_n > v_n$.

   (2) Ha $\exists\, N \in \mathbb{N}: \ \forall\, N \leq n \in \mathbb{N}$-re $u_n \geq v_n$, akkor $A \geq B$.

4. **Monoton sorozatok határértéke (mozgólépcső-elv).** Minden monoton sorozatnak van határértéke. Ha

   - $(x_n) \nearrow$, akkor $\lim(x_n) = \sup(x_n)$;
   - $(x_n) \searrow$, akkor $\lim(x_n) = \inf(x_n)$.

<table>
<tr><th>összeg</th><th>$a > 0$</th><th>$a = 0$</th><th>$a < 0$</th><th>$a = +\infty$</th><th>$a = -\infty$</th></tr>
<tr><td>$b > 0$</td><td rowspan="3" colspan="3">$a + b$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td>$b = 0$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td>$b < 0$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td>$b = +\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$+\infty$</td><td></td></tr>
<tr><td>$b = -\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>$-\infty$</td></tr>
</table>

szorzat	$a > 0$	$a = 0$	$a < 0$	$a = +\infty$	$a = -\infty$
$b > 0$				$+\infty$	$-\infty$
$b = 0$		$a \cdot b$			
$b < 0$				$-\infty$	$+\infty$
$b = +\infty$	$+\infty$		$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$b = -\infty$	$-\infty$		$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

hányados	$a > 0$	$a = 0$	$a < 0$	$a = +\infty$	$a = -\infty$
$b > 0$		a/b		$+\infty$	$-\infty$
$b = 0$					
$b < 0$		a/b		$-\infty$	$+\infty$
$b = +\infty$		0			
$b = -\infty$		0			

Tétel. Tegyük fel, hogy az

$$x_n \in (0, +\infty) \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

sorozat esetében

$$0 \leq \lim \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) < 1 \qquad \text{vagy} \qquad 0 \leq \lim \left(\sqrt[n]{x_n}\right) < 1$$

teljesül. Ekkor fennál a

$$\lim (x_n) = 0$$

határérték-reláció.

Számítsuk ki az (x_n) sorozat határértékét!

1. $x_n := \dfrac{n^3-3n^2+n-1}{1-2n^3+n} \quad (n\in\mathbb{N})$;

Világos, hogy tetszőleges $n\in\mathbb{N}$ esetén

$$x_n = \frac{n^3\cdot\left(1-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}\right)}{n^3\cdot\left(\frac{1}{n^3}-2+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^3}-2+\frac{1}{n^2}} \longrightarrow \frac{1-0+0-0}{0-2+0} = -\frac{1}{2} \qquad (n\to\infty).$$

2. $x_n := \dfrac{(2-n)^7+(2+n)^7}{(n^2+n+1)(2n+1)^5} \quad (n\in\mathbb{N})$.

Bármely $n\in\mathbb{N}$ indexre az $n\to\infty$ határátmenetben

$$x_n = \frac{n^7\cdot\left(\frac{(2-n)^7+(2+n)^7}{n^7}\right)}{n^7\cdot\left(\frac{(n^2+n+1)(2n+1)^5}{n^7}\right)} = \frac{\left(\frac{2}{n}-1\right)^7+\left(\frac{2}{n}+1\right)^7}{\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\cdot\left(2+\frac{1}{n}\right)^5} \longrightarrow \frac{(0-1)^7+(0+1)^7}{(1+0+0)\cdot(2+0)^5} = 0. \quad \blacksquare$$

Feladat. Számítsuk ki a következő határértékeket!

1. $\lim\left(\dfrac{1}{n^2}\cdot\sum_{k=1}^{n} k\right)$;

$$\frac{1}{n^2}\cdot\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1+1/n}{2} \longrightarrow \frac{1}{2} \quad (n\to\infty).$$

2. $\lim\left(\dfrac{P(n)}{Q(n)}\right)$, ahol P, Q polinom.

Legyen

$$P(x) := \sum_{i=0}^{k}\alpha_i x^i, \quad Q(x) := \sum_{j=0}^{l}\beta_j x^j \qquad (x\in\mathbb{R}),$$

ahol

$$\alpha_i,\beta_j\in\mathbb{R} \quad (i\in\{0,1,\ldots,k\};\ j\in\{0,1,\ldots,l\}): \qquad \alpha_k\cdot\beta_l\neq 0.$$

Legyen

$$x_n := \frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{\alpha_k n^k + \alpha_{k-1} n^{k-1} + \ldots + \alpha_1 n + \alpha_0}{\beta_l n^l + \beta_{l-1} n^{l-1} + \ldots + \beta_1 n + \beta_0} = \frac{n^k}{n^l} \cdot \frac{\alpha_k + \frac{\alpha_{k-1}}{n} + \ldots + \frac{\alpha_0}{n^k}}{\beta_l + \frac{\beta_{l-1}}{n} + \ldots + \frac{\beta_0}{n^l}} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

$$y_n := n^{k-l} \quad \text{és} \quad z_n := \frac{\alpha_k + \frac{\alpha_{k-1}}{n} + \ldots + \frac{\alpha_0}{n^k}}{\beta_l + \frac{\beta_{l-1}}{n} + \ldots + \frac{\beta_0}{n^l}} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor

$$\lim(z_n) = \frac{\alpha_k}{\beta_l} \qquad \text{és} \qquad \lim(y_n) = \begin{cases} 1 & (k = l) \\ +\infty & (k > l) \\ 0 & (k < l). \end{cases}$$

Így

$$\lim(x_n) = \begin{cases} \dfrac{\alpha_k}{\beta_l} & (k = l), \\ 0 & (k < l), \\ \operatorname{sgn}\left(\dfrac{\alpha_k}{\beta_l}\right)\infty & (k > l). \end{cases}$$

Számítsuk ki az (x_n) sorozat határértékét!

1. $x_n := \dfrac{n^4 + n^2 + n + 1}{2n^5 + n - 4} \quad (n \in \mathbb{N});$

$\lim(x_n) = 0;$

2. $x_n := \dfrac{n^4 - 2n^3 + n + 1}{n^3 - 4n + 3} \quad (n \in \mathbb{N});$

$\lim(x_n) = +\infty;$

3. $x_n := \dfrac{n^7 + n - 12}{1 - n^2 + 3n} \quad (n \in \mathbb{N}).$

$\lim(x_n) = -\infty.$

Feladat. Számítsuk ki az lábbi sorozatok határértékét!

1. $x_n := n^2 \cdot \left(n - \sqrt{n^2+1}\right) \qquad (n \in \mathbb{N}_0);$

Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor

$$x_n = n^2 \cdot \left(n - \sqrt{n^2+1}\right) \cdot \frac{n+\sqrt{n^2+1}}{n+\sqrt{n^2+1}} = n^2 \cdot \frac{n^2-(n^2+1)}{n+\sqrt{n^2+1}} =$$

$$= \frac{-n^2}{n+\sqrt{n^2+1}} = \frac{-n}{0+\sqrt{0+\frac{1}{n^2}}} \longrightarrow \frac{-\infty}{1+\sqrt{1+0}} = \frac{-\infty}{2} = -\infty \quad (n \to \infty).$$

2. $x_n := \sqrt{n^2+2n+3} - \sqrt{n^2-n+1} \qquad (n \in \mathbb{N}_0);$

Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor

$$x_n = \left(\sqrt{n^2+2n+3} - \sqrt{n^2-n+1}\right) \cdot \frac{\sqrt{n^2+2n+3}+\sqrt{n^2-n+1}}{\sqrt{n^2+2n+3}+\sqrt{n^2-n+1}} =$$

$$= \frac{(n^2+2n+3)-(n^2-n+1)}{\sqrt{n^2+2n+3}+\sqrt{n^2-n+1}} = \frac{3n+2}{\sqrt{n^2+2n+3}+\sqrt{n^2-n+1}} =$$

$$= \frac{\frac{3n+2}{n}}{\frac{\sqrt{n^2+2n+3}+\sqrt{n^2-n+1}}{n}} = \frac{3+\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \frac{3+0}{\sqrt{1+0+0}+\sqrt{1-0+0}} = \frac{3}{2} \quad (n \to \infty). \quad \blacksquare$$

3. $x_n := \sqrt{\alpha \cdot n^2+2n+1} - 2n \qquad (n \in \mathbb{N}_0,\ \alpha \in [0, +\infty));$

Látható, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$x_n = \left(\sqrt{\alpha \cdot n^2+2n+1} - 2n\right) \cdot \frac{\sqrt{\alpha \cdot n^2+2n+1}+2n}{\sqrt{\alpha \cdot n^2+2n+1}+2n} =$$

$$= \frac{(\alpha-4)n^2+2n+1}{\sqrt{\alpha\cdot n^2+2n+1}+2n} = \frac{\frac{(\alpha-4)n^2+2n+1}{n}}{\frac{\sqrt{\alpha\cdot n^2+2n+1}+2n}{n}} = \frac{(\alpha-4)n+2+\frac{1}{n}}{\sqrt{\alpha+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}+2}.$$

Világos, hogy

$$\alpha-4=0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha=4.$$

Következésképpen

- $0\le\alpha<4$ esetén

$$\lim\left(\sqrt{\alpha\cdot n^2+2n+1}-2n\right)=\frac{(-\infty)+2+0}{\sqrt{\alpha+0+0}+2}=-\infty;$$

- $\alpha=4$ esetén

$$\lim\left(\sqrt{\alpha\cdot n^2+2n+1}-2n\right)=\frac{2+0}{\sqrt{4+0+0}+2}=\frac{1}{2};$$

- $\alpha>4$ esetén

$$\lim\left(\sqrt{\alpha\cdot n^2+2n+1}-2n\right)=\frac{(+\infty)+2+0}{\sqrt{\alpha+0+0}+2}=+\infty.$$

4. $x_n:=\sqrt{n^2+n+1}-\alpha n \qquad (n\in\mathbb{N}_0,\ \alpha\in\mathbb{R}).$

- $\alpha<0$ esetén

$$\lim(x_n)=(+\infty)-\alpha\cdot(+\infty)=(+\infty)-(-\infty)=+\infty.$$

- $\alpha=0$ esetén

$$\lim(x_n)=\lim(\sqrt{n^2+n+1})=+\infty.$$

Ha viszont $\alpha>0$, akkor

$$x_n = \left(\sqrt{n^2+n+1}-\alpha n\right)\cdot\frac{\sqrt{n^2+n+1}+\alpha n}{\sqrt{n^2+n+1}+\alpha n}=\frac{n^2+n+1-\alpha^2n^2}{\sqrt{n^2+n+1}+\alpha n}=$$

$$= \frac{(1-\alpha^2)n^2+n+1}{\sqrt{n^2+n+1}+\alpha n}=\frac{\frac{(1-\alpha^2)n^2+n+1}{n}}{\frac{\sqrt{n^2+n+1}+\alpha n}{n}}=\frac{(1-\alpha^2)n+1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\alpha}.$$

Világos, hogy ekkor

$$1-\alpha^2=0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha=1.$$

Következésképpen

- $0 < \alpha < 1$ esetén
$$\lim(x_n) = \frac{(+\infty) + 1 + 0}{\sqrt{1+0+0} + \alpha} = +\infty;$$
- $\alpha = 1$ esetén bármely $n \in \mathbb{N}$ indexre
$$\lim(x_n) = \frac{1 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + 1} = \frac{1+0}{\sqrt{1+0+0}+1} = \frac{1}{2}.$$
- $\alpha > 1$ esetén
$$\lim(x_n) = \frac{(-\infty) + 1 + 0}{\sqrt{1+0+0} + \alpha} = -\infty. \quad \blacksquare$$

Feladat. Igazoljuk, hogy fenáll a

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \longrightarrow 1 \quad (n \to \infty).$$

hatrérték-reláció!

A Bernoulli-egyenlőtlenség felhasználásával

$$1 - \frac{1}{n} \leq \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \leq 1 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

adódik, így a Sandwich tétel következtében az igazolandó állítást kapjuk. $\blacksquare$

Feladat. Legyen $(x_n) : \mathbb{N} \to [0, +\infty)$ olyan sorozat, amelyre $\lim(x_n) \in (0, +\infty)$. Mutassuk meg, hogy ekkor fennáll a

$$\lim\left(\sqrt[n]{x_n}\right) = 1$$

határérték-reláció!

Legyen

$$\lim(x_n) =: \alpha \in (0, +\infty).$$

Ekkor

$$\exists N \in \mathbb{N}\ \forall N \leq n \in \mathbb{N}: \quad |x_n - \alpha| < \frac{\alpha}{2}.$$

Így
$$|x_n - \alpha| < \frac{\alpha}{2} \quad\Longleftrightarrow\quad -\frac{\alpha}{2} < x_n - \alpha < \frac{\alpha}{2} \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{\alpha}{2} < x_n < \frac{3\alpha}{2}$$
következtében, ha $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$, akkor
$$\sqrt[n]{\frac{\alpha}{2}} < \sqrt[n]{x_n} < \sqrt[n]{\frac{3\alpha}{2}},$$
tehát a Sandwich-tétel értelmében
$$\lim\left(\sqrt[n]{x_n}\right) = 1. \quad \blacksquare$$

Feladat. Számítsuk ki az alábbi sorozatok határértékét!

1. $x_n := \sqrt[n]{3n^5 + 2n + 1} \quad (n \in \mathbb{N});$

Mivel
$$\sqrt[n]{3n^5} \leq \sqrt[n]{3n^5 + 2n + 1} \leq \sqrt[n]{3n^5 + 2n^5 + n^5} = \sqrt[n]{6n^5} \quad (n \in \mathbb{N})$$
és
$$\sqrt[n]{3n^5} = \sqrt[n]{3} \cdot \left(\sqrt[n]{n}\right)^5 \overset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} 1 \cdot 1^5 = 1 = 1 \cdot 1^5 \overset{(n\to\infty)}{\longleftarrow} \sqrt[n]{6} \cdot \left(\sqrt[n]{n}\right)^5,$$
ezért a Sandwich-tétel felhasználásával azt kapjuk, hogy
$$\lim(x_n) = 1.$$

Megjegyzés. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ indexre
$$\begin{aligned} x_n &= \sqrt[n]{3n^5 + 2n + 1} = \sqrt[n]{n^5\left(3 + \frac{2}{n^4} + \frac{1}{n^5}\right)} = \\ &= \left(\sqrt[n]{n}\right)^5 \cdot \sqrt[n]{3 + \frac{2}{n^4} + \frac{1}{n^5}} \overset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} 1^5 \cdot 1 = 1, \end{aligned}$$
hiszen
$$\lim\left(3 + \frac{2}{n^4} + \frac{1}{n^5}\right) = 3 + 0 + 0 = 3 \in (0, +\infty).$$

2. $x_n := \sqrt[n]{\dfrac{n+1}{2n+3}} \quad (n \in \mathbb{N});$

Világos, hogy

$$\sqrt[n]{\frac{1}{5}} = \sqrt[n]{\frac{n}{5n}} = \sqrt[n]{\frac{n}{2n+3n}} \leq \sqrt[n]{\frac{n+1}{2n+3}} \leq \sqrt[n]{\frac{n+n}{2n}} = \sqrt[n]{1},$$

így

$$\lim\left(\sqrt[n]{\frac{1}{5}}\right) = 1 = \lim\left(\sqrt[n]{1}\right)$$

következtében

$$\lim(x_n) = 1.$$

Megjegyzés. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$\lim\left(\frac{n+1}{2n+3}\right) = \frac{1}{2}$$

így (vö. fenti feladat)

$$\lim(x_n) = 1.$$

3. $x_n := \sqrt[n]{\dfrac{3^n}{n!} + 2^n} \quad (n \in \mathbb{N});$

Mivel $\lim\left(\dfrac{3^n}{n!}\right) = 0$, ezért van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy bármely $N \leq n \in \mathbb{N}$ indexre $\dfrac{3^n}{n!} < 1$, így az ilyen n-ekre

$$2 = \sqrt[n]{2^n} \leq \sqrt[n]{\frac{3^n}{n!} + 2^n} \leq \sqrt[n]{1+2^n} \leq \sqrt[n]{2^n+2^n} = \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{2^n} = 2\sqrt[n]{2}.$$

Ezért

$$\lim\left(\sqrt[n]{2}\right) = 1$$

következtében

$$\lim(x_n) = 2.$$

Megjegyzés. Mivel tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$\lim\left(\frac{n+1}{2n+3}\right)=\frac{1}{2}$$

így (vö. fenti feladat)

$$\lim(x_n)=1.$$

4. $x_n := \sqrt[n]{a^n+b^n} \quad (n \in \mathbb{N},\ 0 < a, b \in \mathbb{R})$

Mivel bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\max\{a,b\} = \sqrt[n]{\max\{a,b\}^n} \le \sqrt[n]{a^n+b^n} \le \sqrt[n]{2\cdot\max\{a,b\}^n} = \sqrt[n]{2}\cdot\max\{a,b\}$$

és

$$\sqrt[n]{2} \longrightarrow 1 \qquad (n\to\infty),$$

ezért a Sandwich-tétel felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\lim(x_n) = \max\{a,b\}.$$

5. $x_n := \sqrt[n]{1+3^{2n}} \quad (n \in \mathbb{N},\ 0 < a, b \in \mathbb{R}).$

Mivel

$$9 = \sqrt[n]{3^{2n}} \le \sqrt[n]{1+3^{2n}} \le \sqrt[n]{3^{2n}+3^{2n}} = \sqrt[n]{2}\cdot 9$$

és

$$\lim\left(\sqrt[n]{2}\right) = 1,$$

ezért a Sandwich-tétel felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\lim\left(\sqrt[n]{1+3^{2n}}\right) = 9. \quad \blacksquare$$

Feladat. Számítsuk ki az alábbi sorozatok határértékét!

1. $x_n := \dfrac{5^{n+1} + 2^n}{3 \cdot 5^n - 5^{-n}} \quad (n \in \mathbb{N});$

Az 5^n számmal egyszerűsítve azt kapjuk, hogy

$$x_n = \frac{5^{n+1} + 2^n}{3 \cdot 5^n - 5^{-n}} = \frac{5 + (2/5)^n}{3 - (25)^{-n}} \longrightarrow \frac{5+0}{3-0} = \frac{5}{3} \qquad (n \to \infty).$$

2. $x_n := \dfrac{n^2 \cdot 3^n + 2^{2n}}{4^{n+1} + 2^n} \quad (n \in \mathbb{N});$

A 4^n számmal egyszerűsítve azt kapjuk, hogy

$$x_n = \frac{n^2 \cdot 3^n + 2^{2n}}{4^{n+1} + 2^n} = \frac{n^2 \cdot (3/4)^n + 1}{4 + (1/2)^n} \longrightarrow \frac{0+1}{4+0} = \frac{1}{4} \qquad (n \to \infty).$$

3. $x_n := \sqrt{\dfrac{(-5)^n + 7^n}{7^{n+1} + n^7}} \quad (n \in \mathbb{N});$

A 7^n számmal egyszerűsítve azt kapjuk, hogy

$$x_n = \sqrt{\frac{(-5)^n + 7^n}{7^{n+1} + n^7}} = \sqrt{\frac{(-5/7)^n + 1}{7 + n^7(1/7)^n}} \longrightarrow \sqrt{\frac{0+1}{7+0}} = \frac{1}{\sqrt{7}} \qquad (n \to \infty).$$

4. $x_n := \dfrac{(-2)^n + n}{n! + 3^n} \quad (n \in \mathbb{N}).$

Az $n!$ számmal egyszerűsítve azt kapjuk, hogy

$$x_n = \frac{(-2)^n + n}{n! + 3^n} = \frac{\frac{(-2)^n}{n!} + \frac{1}{(n-1)!}}{1 + \frac{3^n}{n!}} \longrightarrow \frac{0+0}{1+0} = 0 \qquad (n \to \infty). \quad \blacksquare$$

Házi feladatok.

1. Számítsuk ki az alábbo sorozatok határértékét!

(a) $x_n := \dfrac{n^3 - 2n - 1}{-3n^3 + n + 3} \quad (n \in \mathbb{N}_0);$

Világos, hogy tetszőlegs $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$x_n = \frac{n^3 - 2n - 1}{-3n^3 + n + 3} = \frac{\frac{n^3-2n-1}{n^3}}{\frac{-3n^3+n+3}{n^3}} = \frac{1 - \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^3}}{-3 + \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^3}} \longrightarrow \frac{1-0-0}{-3+0+0} = -\frac{1}{3} \quad (n \to \infty).$$

(b) $x_n := \dfrac{(n+1)^3 + (n-1)^3}{n^3 + 1} \quad (n \in \mathbb{N}_0).$

Bármely $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$x_n = \frac{(n+1)^3 + (n-1)^3}{n^3+1} = \frac{\frac{(n+1)^3+(n-1)^3}{n^3}}{\frac{n^3+1}{n^3}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3 + \left(1-\frac{1}{n}\right)^3}{1+\frac{1}{n^3}} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \frac{(1+0)^3 + (1-0)^3}{1+0} = \frac{2}{1} = 2 \quad (n \to \infty).$$

2. Konvergensek-e a következő sorozatok? Ha igen, akkor mi a határértékük?

(a) $x_n := \sqrt{n^2 + 3n + 1} - 2n \quad (n \in \mathbb{N}_0);$

Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor

$$x_n = \left(\sqrt{n^2+3n+1} - 2n\right) \cdot \frac{\sqrt{n^2+3n+1} + 2n}{\sqrt{n^2+3n+1} + 2n} = \frac{-3n^2 + 3n + 1}{\sqrt{n^2+3n+1} + 2n} =$$

$$= \frac{\frac{-3n^2+3n+1}{n}}{\frac{\sqrt{n^2+3n+1}+2n}{n}} = \frac{-3n + 3 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}} + 2} \longrightarrow \frac{(-\infty) + 3 + 0}{\sqrt{1+0+0} + 2} = -\infty \qquad (n \to \infty).$$

(b) $x_n := n \cdot \left(n - \sqrt{n^2+1}\right) \quad (n \in \mathbb{N}_0)$.

Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor

$$x_n = n \cdot \left(n - \sqrt{n^2+1}\right) \cdot \frac{n+\sqrt{n^2+1}}{n+\sqrt{n^2+1}} = n \cdot \frac{-1}{n+\sqrt{n^2+1}} =$$

$$= \frac{-1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \longrightarrow \frac{-1}{1+\sqrt{1+0}} = -\frac{1}{2} \qquad (n \to \infty).$$

3. Számítsuk ki az alábbi sorozatok határértékét!

(a) $x_n := \sqrt[n]{n^2+100} \quad (n \in \mathbb{N})$;

Mivel

$$(\sqrt[n]{n})^2 = \sqrt[n]{n^2} \leq \sqrt[n]{n^2+100} \leq \sqrt[n]{n^2+100n^2} = \sqrt[n]{101n^2} = \sqrt[n]{101} \cdot (\sqrt[n]{n})^2 \quad (n \in \mathbb{N})$$

és

$$\sqrt[n]{n} \overset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} 1 = 1 \overset{(n\to\infty)}{\longleftarrow} \sqrt[n]{101},$$

ezért a Sandwich-tétel felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\lim(x_n) = 1.$$

(b) $x_n := \sqrt[n]{2\cdot 5^n + 7^n} \quad (n \in \mathbb{N})$.

Mivel

$$7 = \sqrt[n]{7^n} \le \sqrt[n]{2\cdot 5^n + 7^n} \le \sqrt[n]{2\cdot 7^n + 7^n} = \sqrt[n]{3\cdot 7^n} = \sqrt[n]{3}\cdot 7 \quad (n \in \mathbb{N})$$

és

$$\sqrt[n]{3} \longrightarrow 1 \qquad (n \to \infty),$$

ezért a Sandwich-tétel felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\lim(x_n) = 7.$$

4. Számítsuk ki az

$$x_n := \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \frac{n}{n^2+3} + \ldots + \frac{n}{n^2+n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat határértékét!

Az x_n-beli összeg minden tagját alulról, ill. felülről becsülhetjük az összeg legkisebb, ill. legnagyobb tagjával, azaz tetszőleges n indexre

$$\frac{n}{n^2+n} + \frac{n}{n^2+n} + \frac{n}{n^2+n} + \ldots + \frac{n}{n^2+n} \le x_n \le \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+1} + \ldots + \frac{n}{n^2+1}.$$

Mivel

$$\frac{n}{n^2+n} + \frac{n}{n^2+n} + \frac{n}{n^2+n} + \ldots + \frac{n}{n^2+n} = n\cdot\frac{n}{n^2+n} = \frac{n^2}{n^2+n} \longrightarrow 1 \quad (n \to \infty)$$

és

$$\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+1} + \ldots + \frac{n}{n^2+1} = n\cdot\frac{n}{n^2+1} = \frac{n^2}{n^2+1} \longrightarrow 1 \quad (n \to \infty),$$

ezért a Sandwich-tétel felhasználásával azt kapjuk, hogy $\lim(x_n) = 1$.

5. Számítsuk ki az alábbi sorozatok határértékét!

(a) $x_n := \sqrt{\dfrac{n^2+n+1}{n^2+2}} \quad (n \in \mathbb{N}_0);$

Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$x_n = \sqrt{\frac{n^2+n+1}{n^2+2}} = \sqrt{\frac{\frac{n^2+n+1}{n^2}}{\frac{n^2+2}{n^2}}} = \sqrt{\frac{\frac{n^2+n+1}{n^2}}{\frac{n^2+2}{n^2}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{2}{n^2}}} \longrightarrow \sqrt{\frac{1+0+0}{1+0}} = \sqrt{1} = 1 \qquad (n \to \infty).$$

(b) $x_n := \dfrac{n-\sqrt{n}-1}{n+\sqrt{n}+1} \quad (n \in \mathbb{N}_0)$

Bármely $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$x_n = \frac{n-\sqrt{n}-1}{n+\sqrt{n}+1} = \frac{\frac{n-\sqrt{n}-1}{n}}{\frac{n+\sqrt{n}+1}{n}} = \frac{1-\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}} \longrightarrow \frac{1-0-0}{1+0+0} = 1 \qquad (n \to \infty).$$

(c) $x_n := \dfrac{2^n+2^{-n}}{2^{-n}+3^n} \quad (n \in \mathbb{N}_0);$

A 3^n számmal egyszeűsítve

$$x_n = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{6}\right)^n}{\left(\frac{1}{6}\right)^n + 1} \longrightarrow \frac{0+0}{0+1} = 0 \qquad (n \to \infty).$$

(d) $x_n := \dfrac{n \cdot 2^{n+1} + 3^{2n}}{9^{n-1} + 3^n} \quad (n \in \mathbb{N}_0)$

A 9^n számmal egyszeűsítve

$$x_n = \frac{n \cdot 2^{n+1} + 3^{2n}}{9^{n-1} + 3^n} = \frac{2n \cdot 2^n + 9^n}{\frac{9^n}{9} + 3^n} = \frac{2n \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^n + 1}{\frac{1}{9} + \left(\frac{1}{3}\right)^n} \longrightarrow \frac{0+1}{\frac{1}{9}+0} = 9 \qquad (n \to \infty).$$

(e) $x_n := \sqrt{\dfrac{(-2)^n + 5^n}{5^{n+1} + n^5}} \quad (n \in \mathbb{N}_0);$

Az 5^n számmal egyszeűsítve

$$x_n = \sqrt{\frac{(-2)^n + 5^n}{5^{n+1} + n^5}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{-2}{5}\right)^n + 1}{5 + \frac{n^5}{5^n}}} \longrightarrow \sqrt{\frac{0+1}{5+0}} = \sqrt{\frac{1}{5}} \qquad (n \to \infty).$$

(f) $x_n := \dfrac{(-3)^n + n^3}{n! + 5^n} \quad (n \in \mathbb{N}_0).$

Az $n!$ számmal egyszeűsítve

$$x_n = \frac{(-3)^n + n^3}{n! + 5^n} = \frac{\frac{(-3)^n}{n!} + \frac{n^3}{n!}}{1 + \frac{5^n}{n!}} = \frac{\frac{(-3)^n}{n!} + \frac{n^2}{(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}}{1 + \frac{5^n}{n!}} \longrightarrow \frac{0+0}{1+0} = 0 \qquad (n \to \infty). \quad \blacksquare$$