Emlékeztető. Valamely $f \in A \to B$ függvény

- és $\mathcal{H} \subset \mathcal{D}_f$ halmaz esetén a $\mathcal{H}$ halmaz f által létesített **kép**én az

$$f[\mathcal{H}] := \{f(x) \in B : \ x \in \mathcal{H}\} = \{y \in B \mid \exists x \in \mathcal{H} : \ y = f(x)\}$$

halmazt értettük (speciálisan $f[\emptyset] := \emptyset$).

- és $\mathcal{H} \subset B$ halmaz esetén a $\mathcal{H}$ halmaz f által létesített **ősképén** az

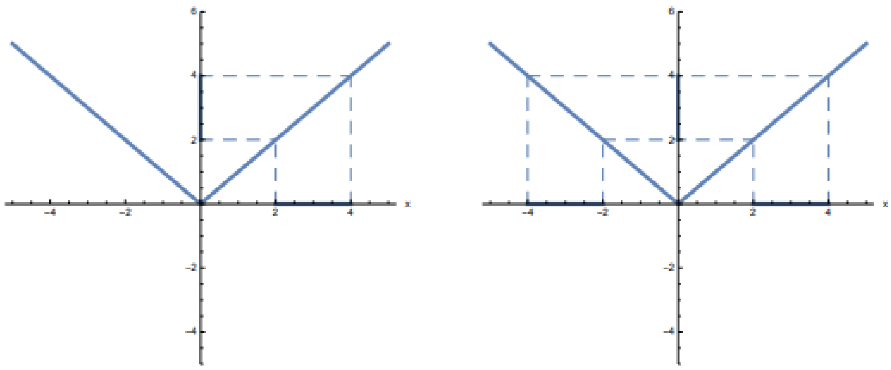
$$f^{-1}[\mathcal{H}] := \{x \in \mathcal{D}_f : \ f(x) \in \mathcal{H}\}$$

halmazt értettük (speciálisan $f^{-1}[\emptyset] := \emptyset$).

Megjegyezzük, hogy
$$f[\mathcal{D}_f] = \mathcal{R}_f \qquad \text{és} \qquad f^{-1}[\mathcal{R}_f] = \mathcal{D}_f.$$

Példa.

$$\mathrm{abs}[(2,4)] = (2,4) \quad \text{és} \quad \mathrm{abs}^{-1}[(2,4)] = \{x \in \mathbb{R} : \ |x| \in (2,4)\} = (-4,-2) \cup (2,4).$$



1. ábra. Az $\mathrm{abs}[(2,4)] = (2,4)$ és az $\mathrm{abs}^{-1}[(2,4)]$ halmazok.

Emlékeztető. Azt mondtuk, hgy az $f \in A \to B$ függvény **invertálható** vagy **injektív**, ha

$$\forall\, u, v \in \mathcal{D}_f : \qquad (u \neq v \quad \Longrightarrow \quad f(u) \neq f(v))\,. \tag{7}$$

Emlékeztető. Adott $f : A \to B$ invertálható függvény esetén az

$$f^{-1} : \mathcal{R}_f \to \mathcal{D}_f, \quad f^{-1}(y) = x : \quad f(x) = y$$

függvényt az f **inverz**ének nevezzük.

Emlékeztető. Legyen $f \in A \to B$, $g \in C \to D$, ill.

$$\mathcal{H} := \{x \in \mathcal{D}_g : \; g(x) \in \mathcal{D}_f\} \neq \emptyset.$$

Ekkor az f (külső) és a g (belső) függvény **összetett függvény**ét (**kompozíció**ját) az

$$f \circ g : \mathcal{H} \to \mathbb{R}, \qquad (f \circ g)(x) := f(g(x))$$

módon értelmezzük.

Feladat. Az

$$f(x) := 3 + 2x - x^2 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény és a $\mathcal{H} := \{0\}$ halmaz esetében határozzuk meg az $f[\mathcal{H}]$ és az $f^{-1}[\mathcal{H}]$ halmazt!

Mivel $0 \in \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, ezért

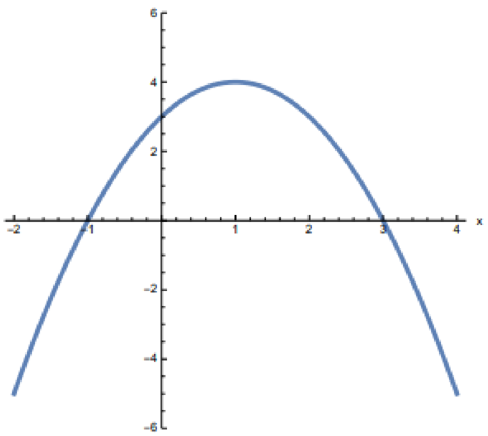
$$f[\{0\}] = \left\{3 + 2x - x^2 \in \mathbb{R} : \; x \in \{0\}\right\} = \left\{3 + 2x - x^2 \in \mathbb{R} : \; x = 0\right\} = \{3\},$$

továbbá

$$f^{-1}[\{0\}] = \left\{x \in \mathbb{R} : \; 3 + 2x - x^2 \in \{0\}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} : \; 3 + 2x - x^2 = 0\right\} = \{-1; 3\},$$

hiszen

$$3 + 2x - x^2 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 1 \pm \sqrt{1 + 3}. \quad \blacksquare$$



2. ábra. Az $\mathbb{R} \ni x \mapsto 3 + 2x - x^2$ függvény grafikonja.

Feladat. Határozzuk meg a $\mathcal{H} := [-2, 2]$ halmaz

$$f(x) := 3 + 2x - x^2 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény által létesített képét!

A deffiníció alapján világos, hogy

$$f[\mathcal{H}] = \left\{3 + 2x - x^2 \in \mathbb{R} : \; x \in [-2, 2]\right\} = \left\{y \in \mathbb{R} \mid \; \exists x \in [-2, 2] : \; y = 3 + 2x - x^2\right\}.$$

Mivel

$$f(x) = 3 + 2x - x^2 = -(x-1)^2 + 4 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

és

$$x \in [-2, 2] \iff -2 \leq x \leq 2 \implies -3 \leq x - 1 \leq 1 \implies 0 \leq (x-1)^2 \leq 9 \implies$$

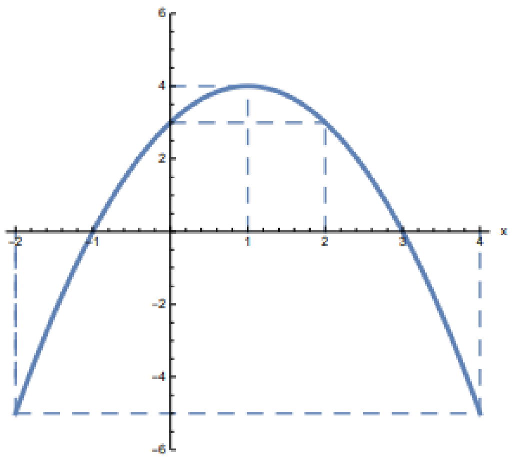
$$\implies -9 \leq -(x-1)^2 \leq 0 \implies -5 \leq -(x-1)^2 + 4 \leq 4,$$

ezért

$$x \in [-2, 2] \implies f(x) = -(x-1)^2 + 4 \in [-5, 4], \qquad \text{azaz} \qquad f[[-2, 2]] \subset [-5, 4].$$

Az f grafikonjának ismeretében (vö. 3. ábra) **sejthető**, hogy a fordított irányú

$$f[[-2, 2]] \supset [-5, 4] \tag{3}$$



3. ábra. Az $\mathbb{R} \ni x \mapsto 3 + 2x - x^2$ függvény grafikonja.

tartalmazás is igaz, azaz igaz az

$$y \in [-5,4] \qquad \Longrightarrow \qquad \exists\, x \in [-2,2]: \; y = -(x-1)^2 + 4$$

implikáció. Az

$$y = -(x-1)^2 + 4 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x-1)^2 = 4 - y$$

egyenlet megoldása:

$$x_{\pm} = 1 \pm \sqrt{4-y}.$$

Mivel

$$y \in [-5,4] \quad \Rightarrow \quad -5 \leq y \leq 4 \quad \Rightarrow \quad -4 \leq -y \leq 5 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq 4-y \leq 9 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \sqrt{4-y} \leq 3,$$

ezért

$$-2 = 1-3 \leq x_- = 1 - \sqrt{4-y} \leq 1+0 = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad x_- \in [-2,1] \subset [-2,2].$$

Ezzel beláttuk az (4), azaz a (3) állítást, amelynek következményeként azt kapjuk, hogy

$$f\,[[-2,2]] = [-5,4]. \quad \blacksquare$$

Feladat. Határozzuk meg a $\mathcal{H} := [1,2]$ halmaz

$$f(x) := |x-1| - 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény által létesített ősképét!

Mivel

$$\begin{aligned} f^{-1}[[1,2]] &= \{x \in \mathbb{R}: \; |x-1| - 1 \in [1,2]\} = \{x \in \mathbb{R}: \; 1 \leq |x-1| - 1 \leq 2\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R}: \; 2 \leq |x-1| \leq 3\}, \end{aligned}$$

ezért a

$$2 \leq |x-1| \leq 3$$

egyenlőtlenség-rendszer megoldáshalmazának meghatározása a feladat.

- A $\leq$ megoldása. Mivel

$$2 \leq |x-1| \quad \Longleftrightarrow \quad (x-1 \geq 2 \text{ vagy } x-1 \leq -2) \quad \Longleftrightarrow \quad (x \geq 3 \quad \text{vagy} \quad x \leq -1),$$

ezért

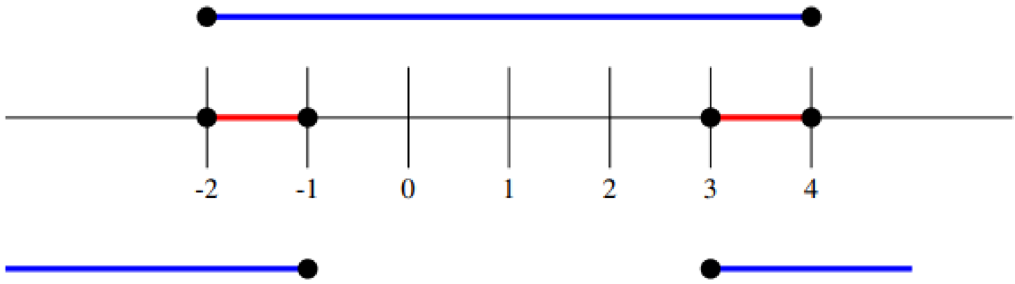
$$2 \leq |x-1| \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in (-\infty,-1] \cup [3,+\infty) =: \mathcal{B}$$

- A $\leq$ megoldása. Mivel

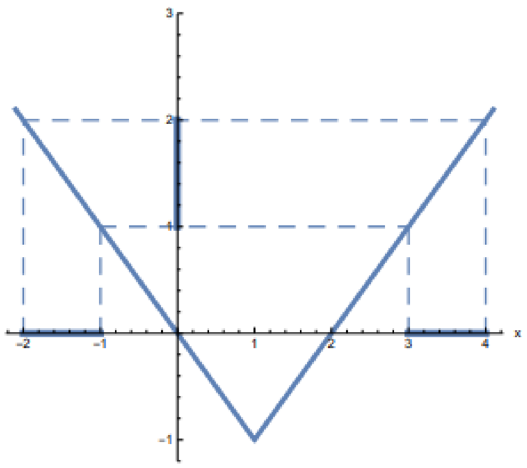
$$|x-1|\leq 3 \quad\iff\quad -3\leq x-1\leq 3 \quad\iff\quad -2\leq x\leq 4 \quad\iff\quad x\in[-2,4]=:\mathcal{J}.$$

Az (5) egyenlőtlenség megoldáshalmaza és egyben a keresett őskép:

$$\begin{aligned} f^{-1}[[1,2]] &= \mathcal{B}\cap\mathcal{J}=\{(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)\}\cap[-2,4]= \\ &= \{(-\infty,-1]\cap[-2,4]\}\cup\{[3,+\infty)\cap[-2,4]\}=[-2,-1]\cup[3,4]. \quad\blacksquare \end{aligned}$$



A megoldást szemlélteti a 4. ábra.



4. ábra. Az $f^{-1}[[1,2]]=[-2,-1]\cup[3,4]$ halmaz.

Megjegyzés. Adott $f\in A\to B$ függvény és $b\in B$ esetén az

$$f(x)=b \quad (x\in A)$$

egyenlet megoldásainak nevezzük az $f^{-1}[\{b\}]$ halmaz elemeit. Azt mondjuk továbbá, hogy

- az (6) egyenletnek **nincsen megoldása** ((6) **nem oldható meg**), ha $f^{-1}[\{b\}]=\emptyset$;
- (6) megoldása egyértelmű, ha $f^{-1}[\{b\}]$ egyelemű halmaz.

Megjegyezzük, hogy

1. az alábbi állítások bármelyike egyenértékű (7)-tel:

   - $\forall\, u, v \in \mathcal{D}_f: \qquad (f(u) = f(v) \quad\Longrightarrow\quad u = v);$
   - $\forall y \in \mathcal{R}_f\ \exists!\, x \in \mathcal{D}_f: \quad f(x) = y.$

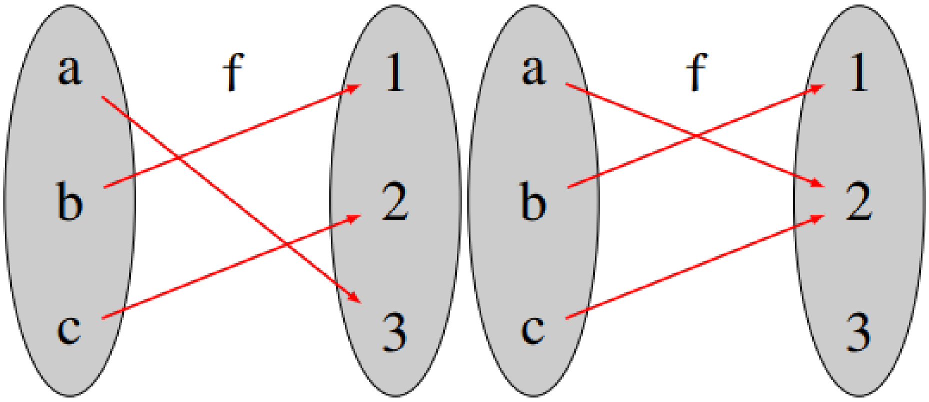
2. ha alkamas $u, v \in \mathcal{D}_f$, $u \neq v$ esetén $f(u) = f(v)$, akkor f nem invertálható (nem injektív).

3. ha $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton (növekvő/csökkenő), akkor f invertálható. Mindez fordítva nem igaz, ui. pl. az

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} x & (x \in [0, \frac{1}{2}))\,, \\ \frac{3}{2} - x & (x \in [\frac{1}{2}, 1)) \end{cases}$$

   függvény ugyan injektív, de nem szigorúan monoton.

Az alábbi ábra bal oldala példa injektív függvényre, a jobb oldalán lévő f pedig nem injektív.



Feladat. Döntsük el, hogy az alábbi függvények közül melyek invertálhatók!

1. $f(x) := 3x + 2\ (x \in \mathbb{R});$

f invertálható, hiszen szigorúan monoton (növekedő):

$$\forall\, u, v \in \mathbb{R},\ u < v: \qquad 3u < 3v \quad\Longleftrightarrow\quad 3u + 2 < 3u + 2 \quad\Longleftrightarrow\quad f(u) < f(v).$$

2. $f(x) := x^2\ (x \in \mathbb{R});$

f nem invertálható, hiszen $f(-1) = (-1)^2 = 1^2 = f(1)$.

3. $f(x) := \sqrt{9-x^2} \quad (x \in [-3,3]);$

f nem invertálható, hiszen $f(-3) = \sqrt{9-(-3)^2} = \sqrt{9-3^2} = f(3)$.
Megjegyzés. Ha f (nemtrivi) páros függvény, akkor f nyilvánvalóan nem invertálható.

4. $f(x) := \left(\frac{x-1}{1+x}\right)^2 - 1 \; (x \in (-1,1)).$

f invertálható, hiszen tetszőleges $x, y \in (-1,1)$ esetén

$$f(x) = f(y) \iff \left(\frac{x-1}{1+x}\right)^2 - 1 = \left(\frac{y-1}{1+y}\right)^2 - 1 \iff \underbrace{\left(\frac{x-1}{1+x}\right)^2 - \left(\frac{y-1}{1+y}\right)^2 = 0}$$

$$\Updownarrow$$

$$\overbrace{\left[\frac{x-1}{1+x} - \frac{y-1}{1+y}\right] \cdot \left[\frac{x-1}{1+x} + \frac{y-1}{1+y}\right] = 0}$$

és

$$\frac{x-1}{1+x} - \frac{y-1}{1+y} = \frac{(x-1)(1+y)-(y-1)(1+x)}{(1+x)(1+y)} = \frac{2(x-y)}{(1+x)(1+y)}$$

ill.

$$\frac{x-1}{1+x} + \frac{y-1}{1+y} = \frac{(x-1)(1+y)+(y-1)(1+x)}{(1+x)(1+y)} = \frac{2(xy-1)}{(1+x)(1+y)} \neq 0,$$

így

$$f(x) = f(y) \iff x = y. \quad \blacksquare$$

Feladat. Invertálhatóak-e az alábbi fügvények? Ha igen, akkor számítsuk ki f^{-1}-et!

1. $f(x) := \dfrac{1}{1+|x-1|} \quad (x \in \mathbb{R});$

Az f függvény nem injektív, ui.

$$0 \neq 2 \qquad \text{és} \qquad f(0) = \frac{1}{1+|0-1|} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+|2-1|} = f(2).$$

2. $a, b \in \mathbb{R}, f(x) := ax + b \quad (x \in \mathbb{R});$

- $a = 0$, akkor $\mathcal{R}_f = \{b\}$, de $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, így f nem invertálható.

- $a \neq 0$, akkor nyilván $\mathcal{R}_f = \mathbb{R}$ és

$$f(x) = f(y) \qquad \Longleftrightarrow \qquad ax + b = ay + b \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = y,$$

azaz f invertálható és

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a},$$

hiszen

$$ax + b = y \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \frac{y-b}{a}.$$

3. $f(x) := \dfrac{x+1}{x-2} \quad (2 \neq x \in \mathbb{R});$

Mivel minden $2 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$(*) \qquad f(x) = \frac{x-2+3}{x-2} = 1 + \frac{3}{x-2},$$

ezért

$$f(x) = f(y) \qquad \Longleftrightarrow \qquad 1 + \frac{3}{x-2} = 1 + \frac{3}{y-2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = y,$$

azaz f invertálható. Az inverz függvény meghatározásához f értékkészletét kell megállapítani. $(*)$ alapján sejthető, hogy

$$\mathcal{R}_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}.$$

Biz.:

- Világos, hogy $1 \notin \mathcal{R}_f$, hiszen bármely $2 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén $\dfrac{3}{x-2} \neq 0$, így $(*)$ alapján

$$\mathcal{R}_f \subset \mathbb{R}\backslash\{1\}.$$

- Most megmutatjuk, hogy $\mathcal{R}_f \supset \mathbb{R}\backslash\{1\}$, azaz bármely $y \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ esetén van olyan $x \in \mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{2\}$, hogy $f(x) = y$. Valóban, ha $y \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$, akkor

$$f(x) = y \qquad \Longleftrightarrow \qquad 1 + \frac{3}{x-2} = y \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 2 + \frac{3}{y-1} = \frac{2y+1}{y-1}$$

és $x \neq 2$ miatt $x \in \mathcal{D}_f$.

Tehát

$$f^{-1} : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}\backslash\{2\}, \qquad f^{-1}(y) := \frac{2y+1}{y-1}.$$

4. $f8x) := \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 - 1 \quad (x \in (-1,1))$. <-f(x)

Korábbról tudjuk, hogy f invertálható. Világos, hogy bármely $x \in (-1,1)$ estén $f(x) > -1$, azaz

$$\mathcal{R}_f \subset (-1,+\infty).$$

Mivel $f(x)$ a (-1)-hez közeli x pontokban tetszőlegesen nagy értéket felvesz, ezért sejthető, hogy a

fordított irányú

$$\mathcal{R}_f \supset (-1,+\infty).$$

tartalmazás is igaz, azaz

$$\forall\, y \in (-1,+\infty)\ \exists x \in (-1,1): \quad f(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 - 1 = y.$$

Ha tehát $y \in (-1,+\infty)$, akkor

$$f(x) = y \iff \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 - 1 = y \iff \left|\frac{x-1}{x+1}\right| = \sqrt{y+1} \overset{x\in(-1,1)}{\iff}$$

$$\overset{x\in(-1,1)}{\iff} \frac{1-x}{x+1} = \sqrt{y+1} \iff x = \frac{1-\sqrt{y+1}}{1+\sqrt{y+1}}.$$

Mivel $y \in (-1,+\infty)$, ezért

$$-1 < x = \frac{1-\sqrt{y+1}}{1+\sqrt{y+1}} < 1 \qquad \iff \qquad -1-\sqrt{y+1} < 1-\sqrt{y+1} < 1+\sqrt{y+1},$$

ez utóbbi egyenlőtlenség-rendszer pedig nyilvánvaló. Így (8), ill. (9) alapján $\mathcal{R}_f = (-1,+\infty)$. Így $x = f^{-1}(y)$ következtében az inverz függvény:

$$f^{-1}(y) = \frac{1-\sqrt{y+1}}{1+\sqrt{y+1}} \qquad (y \in (-1,+\infty)). \quad \blacksquare$$

Megjegyzések.

1. A definícióból nyilvánvaló, hogy

$$\mathcal{D}_{f\circ g} = g^{-1}\left[\mathcal{R}_g \cap \mathcal{D}_f\right],$$

illetve $\mathcal{R}_g \subset \mathcal{D}_f$ esetén $\mathcal{D}_{f\circ g} = \mathcal{D}_g$.

2. Ha $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ invertálható függvény, akkor

$$\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x \qquad (x \in \mathcal{D}_f), \qquad\qquad \left(f \circ f^{-1}\right)(y) = y \qquad (y \in \mathcal{R}_f).$$

3. Ha $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan invertálható függvények, amelyekre $\mathcal{R}_g = \mathcal{D}_f$ és $\mathcal{R}_f = \mathcal{D}_g$ teljesül, akkor $f \circ g$ is invertálható és

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}.$$

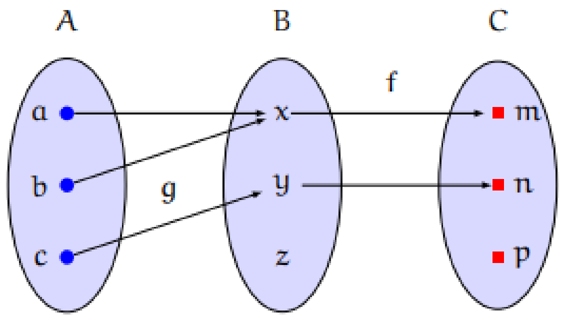
4. A kompozíció-képzés nem kommutatív, hiszen pl. az

$$f(x) := \sqrt{1-x} \quad (x \in (-\infty, 1]) \qquad \text{és a} \qquad g8x) := x^2 \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvények esetében $f \circ g \neq g \circ f$. Valóban,

- a
$$\mathcal{D}_{f \circ g} = \{x \in \mathcal{D}_g : \; g(x) \in \mathcal{D}_f\} = \left\{x \in \mathbb{R} : \; x^2 \in (-\infty, 1]\right\} = [-1, 1] \neq \emptyset$$
halmazzal, ha $x \in \mathcal{D}_{f \circ g}$, akkor
$$(f \circ g)(x) = (f(g(x)) = \sqrt{1 - g(x)} = \sqrt{1 - x^2},$$
azaz az f és a g kompizíciója az
$$f \circ g : [-1, 1] \to \mathbb{R}, \qquad (f \circ g)(x) = \sqrt{1 - x^2}$$
függvény;
- a
$$\mathcal{D}_{g \circ f} = \{x \in \mathcal{D}_f : \; f(x) \in \mathcal{D}_g\} = \left\{x \in (-\infty, 1] : \; \sqrt{1-x} \in \mathbb{R}\right\} = (-\infty, 1] \neq \emptyset$$
halmazzal, ha $x \in \mathcal{D}_{g \circ f}$, akkor
$$(g \circ f)(x) = (g(f(x)) = g(\sqrt{1-x}) = (\sqrt{1-x})^2 = 1 - x,$$
azaz a g és az f függvény kompozícióka a
$$g \circ f : (-\infty, 1] \to \mathbb{R}, \qquad (g \circ f)(x) = 1 - x$$
függvény.

A $g \in A \to B$ és az $f \in B \to C$ függvények $f \circ g$ kompozícióját szemlélteti az alábbi ábra.



Feladat. Írjuk fel az $f \circ g$ kompozíciót a következő függvények esetében, amennyiben az képezhető!

1. $f(x) := \sqrt{x+1}$ $(-1 \leq x \in \mathbb{R})$, $g(x) := x^2 - 3x + 1$ $(x \in \mathbb{R})$;

Világos, hogy

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{f \circ g} &= \{x \in \mathcal{D}_g : \ g(x) \in \mathcal{D}_f\} = \left\{x \in \mathbb{R} : \ x^2 - 3x + 1 \in [-1, +\infty)\right\} = \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : \ x^2 - 3x + 1 \geq -1\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} : \ x^2 - 3x + 2 \geq 0\right\}. \end{aligned}$$

Mivel

$$x^2 - 3x + 2 \qquad \Longrightarrow \qquad x_{\pm} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \in \{1; 2\},$$

ezért

$$x^2 - 3x + 2 \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x-1)(x-2) \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in (-\infty, 1] \cup [2, +\infty).$$

Tehát

$$\mathcal{D}_{f \circ g} = (-\infty, 1] \cup [2, +\infty),$$

és bármely $x \in \mathcal{D}_{f \circ g}$ esetén

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x) + 1} = \sqrt{(x^2 - 3x + 1) + 1} = \sqrt{x^2 - 3x + 2}.$$

Az f és a g függvény kompozíciója így az

$$(f \circ g)(x) := \sqrt{x^2 - 3x + 2} \qquad (x \in (-\infty, 1] \cup [2, +\infty))$$

függvény.

2. $f(x) := \dfrac{1}{2x+1}$ $\left(-\frac{1}{2} \neq x \in \mathbb{R}\right)$, $g(x) := x^2 + 3x + \frac{3}{2}$ $(x \in \mathbb{R})$.

Látható, hogy

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{f \circ g} &= \{x \in \mathcal{D}_g : \ g(x) \in \mathcal{D}_f\} = \left\{x \in \mathbb{R} : \ x^2 + 3x + \frac{3}{2} \in \mathbb{R} \backslash \{-1/2\}\right\} = \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : \ x^2 + 3x + \frac{3}{2} \neq \frac{1}{2}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} : \ x^2 + 3x + +2 \neq 0\right\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} : \ (x+1)(x+2) \neq 0\} = \mathbb{R} \backslash \{-; -2\}. \end{aligned}$$

Ígí tetszőleges $x \in \mathcal{D}_{f \circ g}$ esetén

<-így

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{1}{2g(x)+1} = \frac{1}{2\left(x^2+3x+\frac{3}{2}\right)+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+3x+2}.$$

Mindez azt jelenti, hogy az f és a g függvény kompozíciója így az

$$(f \circ g)(x) := \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+3x+2} \qquad (x \in \mathbb{R} \backslash \{-;-2\})$$

függvény. ■

Feladat. Írjuk fel az $f \circ g$ és a $g \circ f$ kompozíciót a következő függvények esetében, amennyiben az képezhető!

1. $f(x) := \sqrt{2x+1}$ $\left(\frac{1}{2} \leq x \in \mathbb{R}\right)$, $g(x) := \frac{1}{x^2-2}$ $(2 < x \in \mathbb{R})$;

Ez azt jelenti, hogy

$$f \circ g \quad \text{nem képezhető.}$$

Mivel

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{g \circ f} &= \{x \in \mathcal{D}_f : f(x) \in \mathcal{D}_g\} = \left\{x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right) : \sqrt{2x+1} \in (2, +\infty)\right\} = \\ &= \left\{x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right) : 2x+1 \in (4, +\infty)\right\} = \left\{x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right) : x \in \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)\right\} = \\ &= \left(\frac{3}{2}, +\infty\right) \neq \emptyset, \end{aligned}$$

ezért tetszőleges $x \in \mathcal{D}_{g \circ f}$ esetén

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{1}{f^2(x)-2} = \frac{1}{(\sqrt{2x+1})^2-2} = \frac{1}{2x-1}.$$

Mindez azt jelenti, hogy a g és az f függvény kompozíciója így a

$$(g \circ f)(x) := \frac{1}{2x-1} \qquad \left(x \in \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)\right)$$

függvény.

Mivel

$$\{x \in \mathcal{D}_g : g(x) \in \mathcal{D}_f\} = \left\{x \in (2, +\infty) : \frac{1}{x^2-2} \geq \frac{1}{2}\right\} = \emptyset,$$

ui. $x \in (2, +\infty)$ következtében $x^2 - 2 > 0$, így

$$\frac{1}{x^2-2} \geq \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad 2 \geq x^2 - 2 \quad \Longrightarrow \quad 4 \geq x^2 \quad \Longrightarrow \quad |x| < 2.$$

2. $f(x) := 1 - x^2 \ (x \in \mathbb{R}),\ g(x) := \sqrt{x} \ (0 \le x \in \mathbb{R});$

Mivel

$$\mathcal{D}_{f\circ g} = \{x \in \mathcal{D}_g : \ g(x) \in \mathcal{D}_f\} = \left\{x \in [0,+\infty) : \ \sqrt{x} \in \mathbb{R}\right\} = [0,+\infty),$$

ill.

$$\mathcal{D}_{g\circ f} = \{x \in \mathcal{D}_f : \ f(x) \in \mathcal{D}_g\} = \left\{x \in \mathbb{R} : \ 1 - x^2 \in [0,+\infty)\right\} = [-1,1],$$

ezért

$$f \circ g : [0,+\infty) \to \mathbb{R}, \qquad (f \circ g)(x) = f(g(x)) = 1 - (g(x))^2 = 1 - (\sqrt{x})^2 = 1 - x,$$

ill.

$$g \circ f : [-1,1] \to \mathbb{R}, \qquad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{1 - x^2}.$$

3. $f(x) := x^2 \ (x \in \mathbb{R}),\ g(x) := 2^x \ (x \in \mathbb{R});$

Mivel

$$\mathcal{D}_{f\circ g} = \{x \in \mathcal{D}_g : \ g(x) \in \mathcal{D}_f\} = \{x \in \mathbb{R} : \ 2^x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R},$$

ill.

$$\{x \in \mathcal{D}_f : \ f(x) \in \mathcal{D}_g\} = \left\{x \in \mathbb{R} : \ x^2 \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R},$$

ezért

$$f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad (f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x))^2 = (2^x)^2 = 2^{2x};$$

ill.

$$g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2^{f(x)} = 2^{x^2}.$$

4. $f(x) := -x^2 \ (0 < x \in \mathbb{R}),\ g(x) := \dfrac{1}{x^2} \ (0 < x \in \mathbb{R}).$

Mivel

$$\mathcal{D}_{f\circ g} = \{x \in \mathcal{D}_g : \ g(x) \in \mathcal{D}_f\} = \left\{x \in (0,+\infty) : \ \frac{1}{x^2} \in (0,+\infty)\right\} = (0,+\infty),$$

ill.

$$\mathcal{D}_{g\circ f} = \{x \in \mathcal{D}_f : \ f(x) \in \mathcal{D}_g\} = \left\{x \in (0,+\infty) : \ -x^2 \in (0,+\infty)\right\} = \emptyset,$$

ezért

$$f \circ g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \qquad (f \circ g)(x) = f(g(x)) = -\frac{1}{(f(x))^2} = -\frac{1}{x^4},$$

ill.

$$g \circ f \quad \text{nem képezhető.} \quad \blacksquare$$

Gyakorló feladat.

1. Az

$$f(x) := 3x^2 - 2 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény és a $\mathcal{H} := [0, 1]$ halmaz esetén határozzuk meg az $f[\mathcal{H}]$ és az $f^{-1}[\mathcal{H}]$ halmazokat! Milyen A halmaz esetén áll fenn az $f[A] = \emptyset$ vagy az $f^{-1}[A] = \emptyset$ egyenlőség?

- Világos, hogy

$$f[\mathcal{H}] = \left\{ 3x^2 - 2 \in \mathbb{R} \middle| \, x \in [0, 1] \right\}.$$

Mivel minden $x \in [0, 1]$ számra

$$3 \cdot 0^2 - 2 = -2 \leq 3x^2 - 2 \leq 3 \cdot 1^2 - 2 = 1,$$

ezért

$$\left\{ 3x^2 - 2 \in \mathbb{R} \middle| \, x \in [0, 1] \right\} \subset [-2, 1],$$

azaz

$$f[\mathcal{H}] \subset [-2, 1].$$

Tegyük fel, hogy $y \in [-2, 1]$. Ekkor $3x^2 - 2 = y$, ha $x = \pm\sqrt{\frac{y+2}{3}}$. Mivel

$$\sqrt{\frac{y+2}{3}} \in [0, 1] \qquad \text{és} \qquad f\left(\sqrt{\frac{y+2}{3}}\right) = y,$$

ezért $y \in f[\mathcal{H}]$, azaz

$$[-2, 1] \subset f[\mathcal{H}].$$

Megjegyzés. Mivel

$$f[\mathcal{H}] = \left\{ 3x^2 - 2 \in \mathbb{R} \middle| \, x \in [0, 1] \right\} = 3 \cdot \left\{ x^2 \in \mathbb{R} \middle| \, x \in [0, 1] \right\} - 2,$$

és nem nehéz megmutatni, hogy

$$\left\{x^2 \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \in [0,1]\right\} = [0,1],$$

ezért

$$f[\mathcal{H}] = [-2,1].$$

- Világos, hogy

$$f^{-1}[\mathcal{H}] = \left\{x \in \mathbb{R} \,|\, 3x^2 - 2 \in [0,1]\right\}.$$

Az $f^{-1}[\mathcal{H}]$ halmaz tehát a

$$0 \leq 3x^2 - 2 \leq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{2}{3} \leq x^2 \leq 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

egyenlőtlenség-rendszer megoldáshalmaza, ezért

$$\begin{aligned}
f^{-1}[\mathcal{H}] &= \left(\left(-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{2}{3}}, +\infty\right)\right) \cap [-1,1] = \\
&= \left(\left(-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right] \cap [-1,1]\right) \cup \left(\left[\sqrt{\frac{2}{3}}, +\infty\right) \cap [-1,1]\right) = \\
&= \left[-1, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{2}{3}}, 1\right].
\end{aligned}$$

- A definíció alapján világos, hogy

$$f[A] = \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad A \cap \mathbb{R} = \emptyset \qquad \text{és} \qquad f^{-1}[A] = \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad A \cap [-2, +\infty) = \emptyset. \quad \blacksquare$$

2. Invertálhatóak-e az alábbi függvények?

   (a) $f(x) := |x-1| + |x+2| \quad (x \in \mathbb{R})$;

Mivel

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x - x - 2 = -1 - 2x & (x \in (-\infty, -2)), \\ 1 - x + x + 2 = 3 & (x \in [-2, 1)), \\ x - 1 + x + 2 = 2x + 1 & (x \in [1, +\infty)), \end{cases}$$

ezért f nem invertálható.

(b) $f(x) := x^3 + 6x^2 + 12x \quad (x \in \mathbb{R})$;

Mivel bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 2^3 - 6 = (x+2)^3 - 8,$$

ezért f szigorúan monoton növekedő, következésképpen invertálható.

(c) $f(x) := x^3 - 3x^2 + 3x + 4 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Mivel bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 5 = (x-1)^3 + 5,$$

ezért f szigorúan monoton növekedő, következésképpen invertálható. ■

3. Invertálható-e az

$$f(x) := \frac{3x+2}{x-1} \qquad (1 \neq x \in \mathbb{R})$$

függvény? Ha igen, akkor számítsuk ki f^{-1}-et!

Mivel minden $1 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$(*) \qquad f(x) = 3 \cdot \frac{3x+2}{3x-3} = 3 \cdot \frac{3x-3+5}{3x-3} = 3 \cdot \left(1 + \frac{5}{3x-3}\right) = 3 + \frac{5}{x-1},$$

ezért

$$f(x) = f(y) \qquad \Longleftrightarrow \qquad 3 + \frac{5}{x-1} = 3 + \frac{5}{y-1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = y,$$

azaz f invertálható. Az inverz függvény meghatározásához f értékkészletét kell megállapítani. $(*)$ alapján sejthető, hogy

$$\mathcal{R}_f = \mathbb{R}\backslash\{3\}.$$

Biz.:

- Világos, hogy $3 \notin \mathcal{R}_f$, hiszen bármely $1 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén $\dfrac{5}{x-1} \neq 0$, így $(*)$ alapján

$$\mathcal{R}_f \subset \mathbb{R}\backslash\{3\}.$$

- Most megmutatjuk, hogy $\mathcal{R}_f \supset \mathbb{R}\backslash\{3\}$, azaz bármely $y \in \mathbb{R}\backslash\{3\}$ esetén van olyan $x \in \mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$, hogy $f(x) = y$. Valóban, ha $y \in \mathbb{R}\backslash\{3\}$, akkor

$$f(x) = y \qquad \Longleftrightarrow \qquad 3 + \frac{5}{x-1} = y \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 1 + \frac{5}{y-3} = \frac{y+2}{y-3}$$

  és $x \neq 1$ miatt $x \in \mathcal{D}_f$.

Tehát

$$f^{-1} : \mathbb{R}\backslash\{3\} \to \mathbb{R}\backslash\{1\}, \qquad f^{-1}(y) := \frac{y+2}{y-3}. \quad \blacksquare$$

4. Írjuk fel az $f \circ g$ és a $g \circ f$ kompozíciót az

$$f(x) := \sqrt{1-x} \quad (c \in (-\infty, 1]), \qquad g(x) := x^2 \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvények esetében!

Mivel

$$\{x \in \mathcal{D}_g : \ g(x) \in \mathcal{D}_f\} = \left\{x \in \mathbb{R} : \ x^2 \in (-\infty, 1]\right\} = [-1, 1]$$

ill.

$$\{x \in \mathcal{D}_f : \ f(x) \in \mathcal{D}_g\} = \left\{x \in (-\infty, 1] : \ \sqrt{1-x} \in \mathbb{R}\right\} = (-\infty, 1],$$

ezért

$$f \circ g : [-1, 1] \to \mathbb{R}, \qquad (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{1-x^2};$$

ill.

$$g \circ f : (-\infty, 1] \to \mathbb{R}, \qquad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = (\sqrt{1-x})^2 = 1 - x. \quad \blacksquare$$

5. Írjuk fel az $f \circ g$ kompozíciót a következő függvények esetében!

   (a) $f(x) := 2x + 1$ $(x \in \mathbb{R})$, $g(x) := x^2 - 3x + 2$ $(x \in \mathbb{R})$;

Világos, hogy

$$\mathcal{D}_{f \circ g} = \{x \in \mathcal{D}_g : \ g(x) \in \mathcal{D}_f\} = \left\{x \in \mathbb{R} : \ x^2 - 3x + 2 \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R},$$

továbbá

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2(x^2 - 3x + 2) + 1 = 2x^2 - 6x + 5 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

(b) $f(x) := \begin{cases} 0 & (-\infty < x \leq 0) \\ x & (0 < x < +\infty), \end{cases} \quad g(x) := \begin{cases} 0 & (-\infty < x \leq 0) \\ -x^2 & (0 < x < +\infty); \end{cases}$

Világos, hogy

$$\mathcal{D}_{f\circ g} = \{x \in \mathcal{D}_g : \ g(x) \in \mathcal{D}_f\} = \{x \in \mathbb{R} : \ g(x) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R},$$

továbbá

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} 0 & (-\infty < g(x) \leq 0), \\ \\ g(x) & (0 < g(x) < +\infty). \end{cases}$$

Mivel bármely $x \in \mathcal{D}_g$ esetén $-\infty < g(x) \leq 0$, ezért

$$(f \circ g)(x) = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

(c) $f(x) := \dfrac{1}{2x+1}$ $(-1/2 \neq x \in \mathbb{R})$, $g(x) := x^2 + 3x - 10$ $(x \in \mathbb{R})$.

Világos, hogy

$$\mathcal{D}_{f\circ g} = \{x \in \mathcal{D}_g : \ g(x) \in \mathcal{D}_f\} = \left\{x \in \mathbb{R} : \ x^2 + 3x - 10 \in \mathbb{R}\backslash\{-1/2\}\right\} =$$

$$\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{-3-\sqrt{47}}{2}, \frac{-3+\sqrt{47}}{2}\right\},$$

továbbá

$$(f \circ g)(x) = \frac{1}{2(x^2+3x-10)+1} = \frac{1}{2x^2+6x-19} \qquad (x \in \mathcal{D}_{f\circ g}).$$

6. Tekintsük az alábbi függvényeket!

$$f(x) := \sqrt{\frac{1-x}{x+2}} \quad (x \in [0, 1]), \qquad g(x) := -x^2 - 4x - 3 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

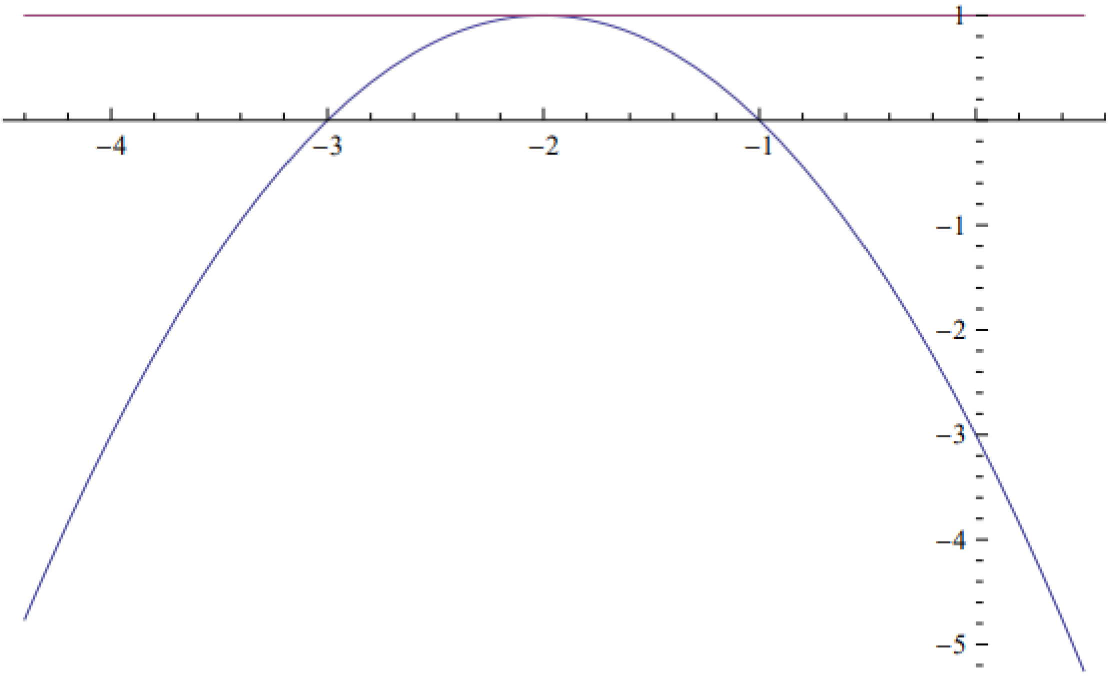
(a) Határozzuk meg az $f \circ g$ függvény!

Mivel tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$g(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = -2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 3} \in \{-1; -3\},$$

ezért

$$g(x) = -(x+1)(x+3) \qquad (x \in \mathbb{R})$$



6. ábra. A g függvény grafikonja.

Így

$$\{x \in \mathcal{D}_g : \ g(x) \in \mathcal{D}_f\} = \{x \in \mathbb{R} : \ -(x+1)(x+3) \in [0,1]\} = [-3,-1] \neq \emptyset$$

következtében

$$f \circ g : [-3,-1] \to \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = \sqrt{\frac{1+x^2+4x+3}{-x^2-4x-3+2}} = \sqrt{\frac{x^2+4x+4}{-x^2-4x-1}} = \\ &= \sqrt{\frac{(x+2)^2}{3-(x^2+4x+4)}} = \frac{|x+2|}{\sqrt{3-(x+2)^2}}.\end{aligned}$$

(b) Invertálható-e az f függvény? Ha igen, akkor határozzuk meg az f^{-1} inverzet!

Mivel

$$(*) \qquad \frac{1-x}{x+2} = -\frac{x-1}{x+2} = -\frac{x+2-3}{x+2} = -1 + \frac{3}{x+2} \qquad (x \in [0,1]),$$

ezért bármely $x, y \in [0,1]$ esetén

$$f(x) = f(y) \implies \sqrt{-1+\frac{3}{x+2}} = \sqrt{-1+\frac{3}{y+2}} \implies \ldots \implies x = y.$$

Mindez azt jelenti, hogy f invertálható. Az inverz függvény meghatározásához f értékkészletét kell megállapítani. $(*)$ alapján sejthető, hogy

$$\mathcal{R}_f = [f(1), f(0)] = \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right].$$

Biz.:

- $\mathcal{R}_f \subset [f(1), f(0)]$, ui. bármely $x \in [0,1]$ esetén

$$x+2 \in [2,3] \implies \frac{1}{x+2} \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right] \implies \frac{3}{x+2} \in \left[1, \frac{3}{2}\right] \implies -1+\frac{3}{x+2} \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

$$\implies f(x) = \sqrt{-1+\frac{3}{x+2}} \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right].$$

- $[f(1), f(0)] \subset \mathcal{R}_f$, hiszen bármely $y \in [f(1), f(0)]$ van olyan $x \in \mathcal{D}_f = [0,1]$, hogy $f(x) = y$, ui.

$$f(x) = y \iff \sqrt{-1+\frac{3}{x+2}} = y \iff x+2 = \frac{3}{y^2+1} \iff x = \frac{3}{y^2+1} - 2 = \frac{1-2y^2}{y^2+1}$$

és

$$0 \leq \frac{1-2y^2}{y^2+1} = -\frac{2y^2-1}{y^2+1} = -2 \cdot \frac{2y^2-1}{2y^2+2} = -2 \cdot \frac{2y^2+2-3}{2y^2+2} = -2 + \frac{3}{y^2+1} \leq 1$$

miatt $x \in [0,1] = \mathcal{D}_f$.

Tehát f invertálható és inverzére

$$f^{-1} : \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \to \mathbb{R}, \qquad f^{-1}(y) := \frac{1-2y^2}{y^2+1}.$$