Algoritmus stabilitása

Algoritmus stabilitása

Definíció:

A *numerikus algoritmus* aritmetikai és logikai műveletek véges sorozata.

Definíció:

A numerikus algoritmus *stabil*, ha létezik olyan $C > 0$ konstans, hogy a kétféle B_1, B_2 bemenő adatból kapott K_1, K_2 kimenő adatokra

$$\|K_1 - K_2\| \leq C \cdot \|B_1 - B_2\|.$$

Példa

A Fibonacci sorozat rekurziója instabil. Lásd gyakorlaton.

lebegőpontos szám

Definíció: Normalizált lebegőpontos szám

Legyen $m = \sum_{i=1}^{t} m_i \cdot 2^{-i}$, ahol $t \in \mathbb{N}$, $m_1 = 1, m_i \in \{0, 1\}$.
Ekkor az $a = \pm m \cdot 2^k$ $(k \in \mathbb{Z})$ alakú számot *normalizált lebegőpontos számnak* nevezzük.
m: a szám *mantisszája*, hossza t
k: a szám *karakterisztikája*, $k^- \leq k \leq k^+$

gépi szám

Jelölés: $a = \pm[m_1 \dots m_t|k] = \pm 0.m_1 \dots m_t \cdot 2^k$.

Jelölés: $M = M(t, k^-, k^+)$ a gépi számok halmaza, adott $k^-, k^+ \in \mathbb{Z}$ és $t \in \mathbb{N}$ esetén. (Általában $k^- < 0$ és $k^+ > 0$.)

Definíció: Gépi számok halmaza

$$M(t, k^-, k^+) =$$
$$= \left\{ a = \pm 2^k \cdot \sum_{i=1}^{t} m_i \cdot 2^{-i} \;:\; \begin{array}{l} k^- \le k \le k^+, \\ m_i \in \{0, 1\}, m_1 = 1 \end{array} \right\} \bigcup \{0\}$$

Gyakorlatban még hozzávesszük: ∞, $-\infty$, `NaN`, ...

input hiba

Tehát már az is egyfajta hibát okoz számításkor, hogy valós számokat számítógépre viszünk... de mekkorát?

Tétel: Input hiba

Minden $x \in \mathbb{R}_M$ esetén

$$|x - fl(x)| \le \begin{cases} \varepsilon_0 & \text{ha } |x| < \varepsilon_0, \\ \frac{1}{2}|x| \cdot \varepsilon_1 & \text{ha } \varepsilon_0 \le |x| \le M_\infty, \end{cases}$$

Következmény: Input hiba

Ha $\varepsilon_0 \le |x| \le M_\infty$, akkor

$$\frac{|x - fl(x)|}{|x|} \le \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_1 = 2^{-t}.$$

A hiba tehát lényegében ε_1-től, azaz t-től függ.

hiba jellemzés

Definíció: Hibák jellemzése

Legyen A egy pontos érték, a pedig egy közelítő értéke. Ekkor:

$\Delta a := A - a$	a közelítő érték (pontos) hibája,
$\lvert\Delta a\rvert := \lvert A - a\rvert$	a közelítő érték abszolút hibája,
$\Delta_a \geq \lvert\Delta a\rvert$	az a egy abszolút hibakorlátja,
$\delta a := \frac{\Delta a}{A} \approx \frac{\Delta a}{a}$	az a relatív hibája,
$\delta_a \geq \lvert\delta a\rvert$	az a egy relatív hibakorlátja.

Példa

Nézzük végig a fogalmakat π két tizedesjegyre kerekített értékén, vagyis a 3.14 közelítésen!

hibakorlát

Tétel: az alapműveletek hibakorlátai

$$\Delta_{a \pm b} = \Delta_a + \Delta_b \qquad \delta_{a \pm b} = \frac{|a| \cdot \delta_a + |b| \cdot \delta_b}{|a \pm b|}$$

$$\Delta_{a \cdot b} = |b| \cdot \Delta_a + |a| \cdot \Delta_b \qquad \delta_{a \cdot b} = \delta_a + \delta_b$$

$$\Delta_{a/b} = \frac{|b| \cdot \Delta_a + |a| \cdot \Delta_b}{b^2} \qquad \delta_{a/b} = \delta_a + \delta_b$$

Megjegyzés: a kapott korlátok két esetben lehetnek nagyságrendileg nagyobbak, mint a kiindulási értékek hibái:

1. $\delta_{a \pm b}$ esetén, amikor közeli számokat vonunk ki egymásból.
2. $\Delta_{a/b}$ esetén, amikor kicsi számmal osztunk.

Ezeket az eseteket az algoritmusok implementálásakor el kell kerülni.

függvényérték hibája

1. Tétel: a függvényérték hibája

Ha $f \in C^1(k_{\Delta_a}(a))$ és $k_{\Delta_a}(a) = [a - \Delta_a; a + \Delta_a]$, akkor

$$\Delta_{f(a)} = M_1 \cdot \Delta_a,$$

ahol $M_1 = \max \{ |f'(\xi)| : \xi \in k_{\Delta_a}(a) \}$.

2. Tétel: a függvényérték hibája

Ha $f \in C^2(k_{\Delta_a}(a))$ és $k_{\Delta_a}(a) = [a - \Delta_a; a + \Delta_a]$, akkor

$$\Delta_{f(a)} = |f'(a)| \, \Delta_a + \frac{M_2}{2} \cdot \Delta_a^2,$$

ahol $M_2 = \max \{ |f''(\xi)| : \xi \in k_{\Delta_a}(a) \}$.

Következmény: függvényérték relatív hibája

Ha Δ_a kicsi, akkor $\delta_{f(a)} = \frac{|a||f'(a)|}{|f(a)|} \cdot \delta_a$.

Definíció: Az f függvény a-beli kondíciószáma

A $c(f, a) = \frac{|a||f'(a)|}{|f(a)|}$ mennyiséget az f függvény a-beli kondíciószámának nevezzük.

LER

Tétel: emlékeztető Mat.alapokból

- LER megoldható $\iff$ b felírható az A oszlopvektorainak lineáris kombinációjaként.
- Egyértelműen létezik megoldás $\iff$ A oszlopai lineárisan függetlenek $\iff$ $\text{rang}(A) = n$ $\iff$ $\det(A) \neq 0$ $\iff$ A invertálható ($x = A^{-1}b$).

Gauss elim

Tétel: A Gauss-elimináció általános lépése

Ha $a_{k,k}^{(k-1)} \neq 0$, akkor a k. lépés képletei

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \cdot a_{kj}^{(k-1)} \qquad \begin{aligned} &k = 1, \dots, n-1; \\ &i = k+1, \dots, n; \\ &j = k+1, \dots, n, n+1. \end{aligned}$$

A visszahelyettesítés

$$x_n = \frac{a_{nn+1}^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}},$$

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}^{(i-1)}} \left(a_{in+1}^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i-1)} \cdot x_j \right) \qquad (i = n-1, \dots, 1).$$

Tétel:

A GE elvégezhető sor és oszlopcsere nélkül
$\Leftrightarrow \quad a_{kk}^{(k-1)} \neq 0 \;\; (k = 1, 2, \dots, n-1)$.

Tétel: A Gauss-elimináció műveletigénye

$$\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$$

Tétel: A visszahelyettesítés műveletigénye

$$n^2 + \mathcal{O}(n)$$

LU

Tétel: *LU*-felbontás létezése

Ha a Gauss-elimináció végrehajtható sor és oszlopcsere nélkül (azaz $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$ $(k = 1, \ldots, n-1)$), akkor az A mátrix LU-felbontása létezik.

Tétel: *LU*-felbontás létezése és egyértelműsége (főminorokkal)

- Ha $D_k \neq 0$ $(k = 1, \ldots, n-1)$, akkor létezik az A mátrix LU-felbontása és $u_{kk} \neq 0$ $(k = 1, \ldots, n-1)$.
- Ha $\det(A) \neq 0$, akkor a felbontás egyértelmű.

Tétel: az *LU*-felbontás „közvetlen" kiszámítása

Az L és U mátrixok elemei a következő képletekkel számolhatók:

$$i \leq j \text{ (felső)} \qquad u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj},$$

$$i > j \text{ (alsó)} \qquad l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot u_{kj} \right).$$

Ha jó sorrendben számolunk, mindig ismert az egész jobb oldal.

Tétel: Az LU-felbontás műveletigénye

$$\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$$

Tétel: Az $Ux = y$ megoldásának műveletigénye

$$n^2 + \mathcal{O}(n)$$

pozitiv definit matrix

Definíció: szimmetrikus mátrixok

Az A mátrix szimmetrikus, ha $A = A^\top$.

Definíció: pozitív definit mátrixok

Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrix *pozitív definit*, ha

1. $\langle Ax, x\rangle = x^\top Ax > 0$ bármely $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ esetén; vagy
2. minden főminorára $D_k = \det(A_k) > 0$; vagy
3. minden sajátértéke pozitív.

Állítás: pozitív definit mátrixok ekvivalens jellemzése

Az előző **1. 2. 3.** feltételek ekvivalensek.

matrix

Definíció:

Az A mátrix **szigorúan diagonálisan domináns a soraira**, ha $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i} |a_{ij}| \quad (i = 1, \ldots, n)$.

Definíció:

Az A mátrix **szigorúan diagonálisan domináns az oszlopaira**, ha $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i} |a_{ji}| \quad (i = 1, \ldots, n)$.

Definíció:

Az A mátrix **fél sávszélessége** $s \in \mathbb{N}$, ha

$$\forall\ i,j : |i-j| > s : \quad a_{ij} = 0 \ \text{ és}$$
$$\exists\ k,l : |k-l| = s : a_{kl} \neq 0.$$

Definíció:

Az A mátrix **profilja** sorokra a $(k_1, \ldots, k_n)$, oszlopokra az $(l_1, \ldots, l_n)$ szám n-sek, melyekre

$$\forall\ j = 1, \ldots, k_i : \quad a_{ij} = 0 \ \text{ és } \ a_{i,k_i+1} \neq 0,$$
$$\forall\ i = 1, \ldots, l_j : \quad a_{ij} = 0 \ \text{ és } \ a_{l_j+1,j} \neq 0.$$

Soronként és oszloponként az első nem nulla elemig a nullák száma.

Schur

Definíció: Schur-komplementer

Tegyük fel, hogy $A_{11} \in \mathbb{R}^{k\times k}$ invertálható mátrix. Az A mátrix A_{11}**-re vonatkozó Schur-komplementere** az

$$[A|A_{11}] := A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$$

$(n-k) \times (n-k)$-s mátrix.

megmaradási tétel

Tétel: megmaradási tételek a GE-ra

A GE során a következő tulajdonságok öröklődnek A-ról a Schur-komplementerre:

1. $\det(A) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \det([A|A_{11}]) \neq 0$
2. A szimmetrikus $\Rightarrow$ $[A|A_{11}]$ szimmetrikus
3. A pozitív definit $\Rightarrow$ $[A|A_{11}]$ pozitív definit
4. A szig. diag. dom. $\Rightarrow$ $[A|A_{11}]$ szig. diag. dom.
5. $[A|A_{11}]$ fél sávszélessége $\leq$ A fél sávszélessége
6. A GE során a profilnál a soronkénti és oszloponkénti nullák az első nem nulla elemig megmaradnak.

Progonka

Algoritmus: progonka módszer

1. lépés: $f_1 := -\frac{\gamma_1}{\alpha_1}, \quad g_1 := \frac{b_1}{\alpha_1}$

$$i = 2, \ldots, n-1: \quad f_i := -\frac{\gamma_i}{\alpha_i + \beta_{i-1} f_{i-1}}$$

$$g_i := \frac{b_i - \beta_{i-1} g_{i-1}}{\alpha_i + \beta_{i-1} f_{i-1}}$$

$$g_n := \frac{b_i - \beta_{n-1} g_{n-1}}{\alpha_n + \beta_{n-1} f_{n-1}}$$

2. lépés: $x_n := g_n$

$i = n-1, n-2, \ldots, 1: \quad x_i = f_i x_{i+1} + g_i$

Összesen:

$2 + 6(n-2) + 5 + 2(n-1) = 8n - 7 = 8n + \mathcal{O}(1)$ művelet.

vector

Definíció: vektorok „hossza”

Az $x \in \mathbb{R}^n$ vektor hagyományos értelemben vett hosszát, avagy „kettes normáját” jelölje $\|.\|_2$.
A következőképpen számolható:

$$\|x\|_2 := \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x^\top x} = \left(\sum_{k=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Definíció: vektornorma

Legyen $n \in \mathbb{N}$ rögzített. Az $\|.\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ leképezést vektornormának nevezzük, ha:

1. $\|x\| \geq 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n)$,
2. $\|x\| = 0 \iff x = 0$,
3. $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad (\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}^n)$,
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\forall x, y \in \mathbb{R}^n)$.

Állítás: skaláris szorzat által generált vektornorma

Ha adott az $\langle .,. \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ skaláris szorzat, akkor az $f(x) := \sqrt{\langle x, x\rangle}$ függvény *norma*. Jele: $\|x\|_2$.

Állítás: Cauchy–Bunyakovszki–Schwarz-egyenlőtlenség (CBS)

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2 \quad (x, y \in \mathbb{R}^n)$$

cauchy

Állítás: Gyakori vektornormák $(1, 2, \infty)$

A következő formulák vektornormákat **definiálnak** $\mathbb{R}^n$ felett:

- $\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ (Manhattan-norma),
- $\|x\|_2 := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}$ (Euklideszi-norma),
- $\|x\|_\infty := \max_{i=1}^{n} |x_i|$ (Csebisev-norma).

Állítás: p-normák

A következő $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvények is vektornormákat **definiálnak**:

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \qquad (p \in \mathbb{R},\ 1 \le p < \infty).$$

Állítás: normák közötti egyenlőtlenségek

- $\|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le n \cdot \|x\|_\infty$,
- $\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{n} \cdot \|x\|_\infty$,
- $\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le \sqrt{n} \cdot \|x\|_2$,
- sőt ezek alapján $\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \|x\|_1$.

Definíció: ekvivalens normák

Az $\|.\|_a$ és $\|.\|_b$ vektornormák *ekvivalensek*, ha $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$c_1 \cdot \|x\|_b \leq \|x\|_a \leq c_2 \cdot \|x\|_b \qquad (\forall x \in \mathbb{R}^n).$$

Állítás: végesdimenziós normák ekvivalenciája

Tetszőleges $\mathbb{R}^n$-en értelmezett vektornorma ekvivalens az Euklideszi-vektornormával. (Azaz adott végesdimenziós térben minden norma ekvivalens.)

Definíció: konvergencia vektornormában

Az $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$ sorozat konvergens, ha létezik $x^* \in \mathbb{R}^n$ melyre

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k - x^*\| = 0.$$

x^* a sorozat határértéke.

Ekvivalens átfogalmazások a konvergenciára:

- Az $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$ sorozat konvergens, ha létezik $x^* \in \mathbb{R}^n$ melyre

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_0 \in \mathbb{N} \ \forall k \geq N_0 : \ \|x_k - x^*\| < \varepsilon.$$

- Az $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$ sorozat konvergens, ha létezik $x^* \in \mathbb{R}^n$ melyre

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_0 \in \mathbb{N} \ \forall k \geq N_0 : \ x_k \in K_\varepsilon(x^*).$$

Mátrixnorma

Definíció: mátrixnorma

Legyen $n \in \mathbb{N}$ rögzített. Az $\|.\| : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ leképezést mátrixnormának nevezzük, ha:

1. $\|A\| \geq 0 \quad (\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n})$,
2. $\|A\| = 0 \iff A = 0$,
3. $\|\lambda \cdot A\| = |\lambda| \cdot \|A\| \quad (\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n})$,
4. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad (\forall A, B \in \mathbb{R}^{n\times n})$,
5. $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \quad (\forall A, B \in \mathbb{R}^{n\times n})$.

Definíció: Frobenius-norma

A következő függvényt *Frobenius-normának* nevezzük:

$$\|.\|_F : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}, \qquad \|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}.$$

Állítás: Frobenius-norma

A $\|.\|_F$ függvény valóban mátrixnorma.

Definíció: indukált norma, természetes mátrixnormák

Legyen $\|.\|_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tetszőleges vektornorma. Ekkor a

$$\|.\| : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}, \qquad \|A\| := \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v}$$

függvényt a $\|.\|_v$ *vektornorma által indukált mátrixnormának* hívjuk. Egy mátrixnormát *természetesnek* nevezünk, ha van olyan vektornorma, ami indukálja.

Tétel: indukált normák

Az „indukált mátrixnormák” valóban mátrixnormák.

Definíció: illeszkedő normák

Ha egy mátrix- és egy vektornormára

$$\|Ax\|_v \le \|A\| \cdot \|x\|_v \qquad (\forall x \in \mathbb{R}^n,\ A \in \mathbb{R}^{n\times n})$$

teljesül, akkor *illeszkedőknek* nevezzük őket.

Állítás: természetes mátrixnormák illeszkedéséről

A természetes mátrixnormák illeszkednek az őket indukáló vektornormákhoz.

Tétel: Nevezetes mátrixnormák $(1, 2, \infty)$

A $\|.\|_p$ $(p = 1, 2, \infty)$ vektornormák által indukált mátrixnormák:

- $\|A\|_1 = \max\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ (oszlopnorma),
- $\|A\|_\infty = \max\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ (sornorma),
- $\|A\|_2 = \left(\max\limits_{i=1}^{n} \lambda_i(A^\top A)\right)^{1/2}$ (spektrálnorma).

Definíció: spektrálsugár

Egy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix *spektrálsugara* $\varrho(A) := \max_{i=1}^{n} |\lambda_i(A)|$.

Megj.: A spektrálnormát a spektrálsugárral is meg tudjuk adni:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\varrho(A^\top A)}.$$

Állítás:

Egy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus (önadjungált) mátrix spektrálnormája

$$\|A\|_2 = \varrho(A).$$

Biz.: Trivi.

Mátrixnormák további tulajdonsága

Állítás:

Ha A normális ($A^*A = AA^*$), akkor $\|A\|_2 = \varrho(A)$.
(Spec.: ha A önadjungált, akkor normális.)

Definíció: mátrixok kondíciószáma

Adott $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertálható mátrix és $\|.\|$ mátrixnorma esetén a $\operatorname{cond}(A) := \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ mennyiséget az A mátrix *kondíciószámának* nevezzük. (Jele néha $\kappa(A)$. [kappa])

Állítás: a kondíciószám tulajdonságai – 1. rész

- a) Indukált mátrixnorma esetén $\operatorname{cond}(A) \geq 1$.
- b) $\operatorname{cond}(c \cdot A) = \operatorname{cond}(A), \quad (c \in \mathbb{R}, c \neq 0)$.
- c) Ha Q ortogonális, akkor $\operatorname{cond}_2(Q) = 1$.

Állítás: a kondíciószám tulajdonságai – 2. rész

- (d) Ha A szimmetrikus, akkor $\mathrm{cond}_2(A) = \dfrac{\max|\lambda_i(A)|}{\min|\lambda_i(A)|}$.
- (e) Ha A szimm., pozitív definit, akkor $\mathrm{cond}_2(A) = \frac{\max \lambda_i(A)}{\min \lambda_i(A)}$.
- (f) Ha A invertálható, akkor $\mathrm{cond}(A) \geq \frac{\max|\lambda_i(A)|}{\min|\lambda_i(A)|}$.

Tétel: LER érzékenysége a jobb oldal pontatlanságára

Ha A invertálható és $b \neq 0$, akkor illeszkedő normákban

$$\frac{1}{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \leq \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \left\|A^{-1}\right\| \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|},$$

azaz

$$\frac{1}{\mathrm{cond}(A)} \cdot \delta b \leq \delta x \leq \mathrm{cond}(A) \cdot \delta b.$$

Tétel: LER érzékenysége a mátrix pontatlanságára

Ha A invertálható, $b \neq 0$ és $\|\Delta A\| \cdot \left\|A^{-1}\right\| < 1$, akkor indukált mátrixnormában

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}{1 - \|\Delta A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}.$$

Lemma

Ha $\|M\| < 1$, akkor $(I + M)$ invertálható és indukált mátrixnormában

$$\left\|(I+M)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1 - \|M\|}.$$

polinom

Tétel: Becslés polinom gyökeinek elhelyezkedésére

A $P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot x + a_0$ polinom esetén, ha $a_0 \neq 0$ és $a_n \neq 0$, akkor P bármely x_k gyökére:

$$r < |x_k| < R,$$

ahol

$$R = 1 + \frac{\max_{i=0}^{n-1} |a_i|}{|a_n|}, \quad r = \frac{1}{1 + \frac{\max_{i=1}^{n} |a_i|}{|a_0|}}.$$

horner

Definíció: Horner-algoritmus

A $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ polinom adott ξ helyen vett helyettesítési értéke számolható a következő módon:

1. $a_n^{(1)} := a_n,$
2. $a_k^{(1)} := a_k + \xi \cdot a_{k+1}^{(1)} \quad (k = n-1, \ldots, 1, 0),$

ekkor $P(\xi) = a_0^{(1)}$.

Állítás: A Horner-algoritmus műveletigénye

Egy n-edfokú polinom adott helyen felvett értéke kiszámítható n szorzás és n összeadás által, azaz $\mathcal{O}(n)$ művelettel.

Állítás: Horner-algoritmus és a derivált

A P polinom felírható a következő alakban:

$$P(x) = a_0^{(1)} + (x-\xi)\cdot\overbrace{(a_1^{(1)} + \cdots + a_n^{(1)}x^{n-1})}^{P_1(x)},$$

ahol az $a_i^{(1)}$ $(i = 0, \ldots, n)$ értékeket a Horner-algoritmus adja.
Továbbá

$$P'(\xi) = P_1(\xi) = a_1^{(2)}.$$

Állítás: Horner-algoritmus és a magasabbrendű deriváltak

A P polinom felírható a következő alakban:

$$P(x) = a_0^{(1)} + a_1^{(2)}(x-\xi) + a_2^{(3)}(x-\xi)^2 + \cdots + a_n^{(n+1)}(x-\xi)^n,$$

ahol az $a_i^{(j+1)}$ $(j = 0, \ldots, n;\ i = j, \ldots, n)$ értékeket a Horner-módszer adja. Továbbá:

$$\frac{P^{(j)}(\xi)}{j!} = P_j(\xi) = a_j^{(j+1)},$$

ahol $P_j(x) = a_j^{(j)} + \cdots + a_n^{(j)}x^{n-j}$.

Bolzano

Tétel: Bolzano-tétel

Ha $f \in C[a;b]$ és $f(a)\cdot f(b) < 0$, akkor $\exists\, x^* \in (a;b) : f(x^*) = 0$.

Tétel: gyök egyértelmű létezéséről

1. Ha $f \in C[a;b]$, $f(a)\cdot f(b) < 0$,
2. valamint $f \in D(a;b)$ és $f' > 0$ (vagy < 0),

akkor $\exists!\, x^* \in (a;b) : f(x^*) = 0$.

fixpont

Emlékeztető: fixpont

Az $x^* \in \mathbb{R}^n$ pontot a $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ leképezés *fixpontjának* nevezzük, ha $x^* = \varphi(x^*)$.

Emlékeztető: kontrakció

A $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ leképezés *kontrakció*, ha $\exists\, q \in [0,1)$, hogy

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \le q \cdot \|x - y\|, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Állítás

1. $\varphi\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ függvény, $\varphi \in C^1[a;b]$ és
2. $|\varphi'(x)| < 1$ $(\forall\, x \in [a;b])$,

akkor φ kontrakció $[a;b]$-n.

Brouwer

Tétel: Brouwer-féle fixponttétel

1. Ha $\varphi\colon [a;b] \to [a;b]$
2. és $\varphi \in C[a;b]$,

akkor $\exists\, x^* \in [a;b] : \varphi(x^*) = x^*$.

Banach

Tétel: Banach-féle fixponttétel $[a; b]$-re

Ha a $\varphi\colon [a; b] \to [a; b]$ függvény kontrakció $[a; b]$-n q kontrakciós együtthatóval, akkor

1. $\exists!\, x^* \in [a; b] : x^* = \varphi(x^*)$, azaz létezik fixpont,
2. $\forall\, x_0 \in [a; b]$ esetén az $x_{k+1} = \varphi(x_k)$, $k \in \mathbb{N}_0$ sorozat konvergens és $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$,
3. továbbá a következő hibabecslések teljesülnek:
   - $|x_k - x^*| \le q^k \cdot |x_0 - x^*| \le q^k(b-a)$,
   - $|x_k - x^*| \le \dfrac{q^k}{1-q} \cdot |x_1 - x_0|$.

Következmény: iteráció konvergenciájának elégséges feltétele

1. Ha $\varphi\colon [a; b] \to [a; b]$,
2. $\varphi \in C^1[a; b]$ és
3. $|\varphi'(x)| < 1 \quad \forall\, x \in [a; b]$,

akkor az $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ iteráció konvergens $\forall x_0 \in [a; b]$ esetén.

lokális

Tétel Lokális fixponttétel

Legyen $\varphi\colon [a; b] \to \mathbb{R}$ függvény.

1. Ha $\varphi \in C^1[a; b]$ és
2. $\exists\, \xi \in [a; b]$ és $\delta > 0$, melyre

$$|\varphi'(x)| \le q < 1 \quad \forall\, x \in [\xi - \delta; \xi + \delta] \subset [a; b].$$

3. Ha $\exists\, r:\ 0 < r \le \delta$, melyre

$$|\varphi(\xi) - \xi| \le (1-q)r,$$

(azaz ξ a fixpont egy elég jó közelítése,)

akkor φ kontrakció $[\xi - r; \xi + r]$-n és

$$\forall\, x \in [\xi - r; \xi + r] :\ \ \varphi(x) \in [\xi - r; \xi + r].$$

Következmény:

Ha a lokális fixponttétel feltételei teljesülnek, akkor valójában a Banach-féle fixponttétel feltételei teljesülnek az $[\xi - r; \xi + r]$ intervallumra, így

1. $\exists!\, x^* \in [\xi - r; \xi + r] : x^* = \varphi(x^*)$, azaz létezik fixpont,
2. $\forall\, x_0 \in [\xi - r; \xi + r]$ esetén az $x_{k+1} = \varphi(x_k)$, $k \in \mathbb{N}_0$ sorozat konvergens és $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$,
3. továbbá a következő hibabecslések teljesülnek:
   - $|x_k - x^*| \leq q^k \cdot |x_0 - x^*| \leq q^k(b-a)$,
   - $|x_k - x^*| \leq \dfrac{q^k}{1-q} \cdot |x_1 - x_0|$.

konvergencia

Definíció: konvergencia rend

Az (x_k) konvergens sorozat – határértékét jelölje x^* – *p-edrendben konvergens*, ha $\exists c \in (0; +\infty) \subset \mathbb{R}$, hogy

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^p} = c.$$

Tétel: p-edrendben konvergens iterációk

1. Legyen $\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi \in C^p[a;b]$ és
2. az $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ sorozat konvergens, határértéke x^*.
3. Ha $\varphi'(x^*) = \cdots = \varphi^{(p-1)}(x^*) = 0$, de $\varphi^{(p)}(x^*) \neq 0$,

akkor a konvergencia p-edrendű és hibabecslése:

$$|x_{k+1} - x^*| \leq \frac{M_p}{p!}\, |x_k - x^*|^p,$$

ahol $M_p = \max\limits_{\xi\in[a;b]} \left|\varphi^{(p)}(\xi)\right|$.

Következmény

1. Ha $\varphi\colon [a;b] \to [a;b]$ kontrakció,
2. x^* a φ fixpontja és
3. $\varphi'(x^*) = \cdots = \varphi^{(p-1)}(x^*) = 0$, de $\varphi^{(p)}(x^*) \neq 0$,

akkor

1. a fixpont egyértelmű,
2. $\forall x_0 \in [a;b]$ esetén az $x_{k+1} = \varphi(x_k),\ k \in \mathbb{N}_0$ sorozat konvergens és $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$,
3. és a következő hibabecslés teljesül: $|x_{k+1} - x^*| \leq \frac{M_p}{p!} |x_k - x^*|^p$.

newton

Definíció: Newton-módszer

Adott $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény és $x_0 \in \mathbb{R}$ kezdőpont esetén a *Newton-módszer* alakja:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \qquad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Tétel: monoton konvergencia tétele

Ha $f \in C^2[a; b]$ és

1. $\exists\, x^* \in [a; b] : f(x^*) = 0$, azaz van gyök,
2. f' és f'' állandó előjelű,
3. $x_0 \in [a; b] : f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$,

akkor az x_0 pontból indított Newton-módszer (által adott (x_k) sorozat) monoton konvergál x^*-hoz.

Tétel: lokális konvergencia tétele

Ha $f \in C^2[a; b]$ és

1. $\exists\, x^* \in [a; b] : f(x^*) = 0$, azaz van gyök,
2. f' állandó előjelű,
3. $m_1 = \min\limits_{x \in [a;b]} |f'(x)| > 0$,
4. $M_2 = \max\limits_{x \in [a;b]} |f''(x)| < +\infty$, innen $M = \frac{M_2}{2 \cdot m_1}$.
5. $x_0 \in [a; b] : |x_0 - x^*| < r := \min\left\{ \frac{1}{M}, |x^* - a|\,, |x^* - b| \right\}$,

akkor az x_0 pontból indított Newton-módszer másodrendben konvergál a gyökhöz, és az

$$|x_{k+1} - x^*| \le M \cdot |x_k - x^*|^2$$

hibabecslés érvényes.

húr

Definíció: húrmódszer

Az $f \in C[a;b]$ függvény esetén, ha $f(a) \cdot f(b) < 0$, akkor a *húrmódszer* alakja:

$$x_0 := a, \quad x_1 := b,$$
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k) \cdot (x_k - x_s)}{f(x_k) - f(x_s)}$$
$$(k = 0, 1, 2, \dots),$$

ahol s a legnagyobb olyan index, amelyre $f(x_k) \cdot f(x_s) < 0$.

Tétel: a húrmódszer konvergenciája

Ha $f \in C^2[a;b]$ és

1. $f(a) \cdot f(b) < 0$,
2. $M \cdot (b - a) < 1$,

akkor a húrmódszer elsőrendben konvergál az x^* gyökhöz és

$$|x_k - x^*| \leq \frac{1}{M} \cdot (M \cdot |x_0 - x^*|)^k$$

teljesül, ahol $M = \frac{M_2}{2 \cdot m_1}$ ugyanúgy, mint korábban.

szelő

Definíció: szelőmódszer

Az $f \in C[a;b]$ függvény esetén a *szelőmódszer* alakja:

$$x_0, x_1 \in [a;b],$$
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k) \cdot (x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$
$$(k = 0, 1, 2, \dots).$$

Tétel: a szelőmódszer konvergenciája

Ha $f \in C^2[a;b]$ és

1. $\exists x^* \in [a;b] : f(x^*) = 0$, azaz van gyök,
2. f' állandó előjelű,
3. $x_0, x_1 \in [a;b]$:

$$\left.\begin{array}{l} |x_0 - x^*| \\ |x_1 - x^*| \end{array}\right\} < r := \min\left\{\frac{1}{M}, |x^* - a|, |x^* - b|\right\},$$

akkor a szelőmódszer $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ rendben konvergál az x^* gyökhöz. (M a szokásos.)

többváltozós newton

Definíció: a többváltozós Newton-módszer képlete

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \left(F'(x^{(k)})\right)^{-1} \cdot F(x^{(k)})$$

interpoláció

Definíció: Az interpoláció alapfeladata

Adottak az $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a; b]$ különböző alappontok, $y_0, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ függvényértékek. Olyan $p_n \in P_n$ polinomot keresünk, melyre

$$p_n(x_i) = y_i, \quad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

A feltételnek eleget tevő polinomot *interpolációs polinomnak* nevezzük. P_n a legfeljebb n-edfokú polinomok halmaza.

Tétel: Az interpolációs polinom létezése és egyértelműsége

$$\exists! \;\; p_n \in P_n : \quad p_n(x_i) = y_i, \;\; (i = 0, 1, \ldots, n)$$

lagrange

Definíció: Lagrange-alappolinomok

Az $x_0, x_1, \ldots, x_n$ különböző alappontok által meghatározott *Lagrange-alappolinomok* a következők:

$$\ell_k(x) = \prod_{j=0, j \neq k}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \quad (k = 0, 1 \ldots, n).$$

Tétel: A Lagrange-alappolinomok tulajdonságai

1. $$\ell_k(x_i) = \delta_{ki} = \begin{cases} 1 & k = i \\ 0 & k \neq i \end{cases}$$

2. $$\ell_k(x) = \frac{\omega_n(x)}{(x - x_k)\,\omega_n'(x_k)}, \;\; \text{ahol} \;\; \omega_n(x) = \prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$$

3. $$L_n(x) := \sum_{k=0}^{n} y_k \ell_k(x) \equiv p_n(x)$$

   L_n-t az interpolációs polinom *Lagrange-alakjának* nevezzük.

newton alak

Tétel: Newton-alak

$$N_n(x) := f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, \dots, x_k] \cdot \omega_{k-1}(x) \equiv L_n(x)$$

N_n-t az interpolációs polinom *Newton-alakjának* nevezzük.
A rekurzív formula új x_{n+1} alappont hozzávétele esetén:

$$N_{n+1}(x) = N_n(x) + f[x_0, x_1, \dots, x_{n+1}] \cdot \omega_n(x).$$

Tétel: Hibaformula

1. Legyen $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges,
2. $[a; b]$ az $x_0, x_1, \dots, x_n$ és x által kifeszített intervallum,
3. továbbá $f \in C^{n+1}[a; b]$.

1. Ekkor $\exists\, \xi_x \in [a; b]$, melyre

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \cdot \omega_n(x).$$

2. A hibabecslés

$$|f(x) - p_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot |\omega_n(x)|, \text{ ahol}$$
$$M_{n+1} := \|f^{(n+1)}\|_\infty := \|f^{(n+1)}\|_{C[a;b]} := \max_{\xi \in [a;b]} |f^{(n+1)}(\xi)|.$$

Tétel: Hibaformula a Newton-alakra

- Legyen $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges, $x \neq x_i$.
- Ekkor

$$f(x) - N_n(x) = f[x, x_0, x_1, \dots, x_n] \cdot \omega_n(x).$$

Tétel: Következmény a hibaformulákból

1. Legyen $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges, $x \neq x_i$
2. $[a; b]$ az $x_0, x_1, \dots, x_n$ és x által kifeszített intervallum,
3. továbbá $f \in C^{n+1}[a; b]$.

Ekkor $\exists\, \xi_x \in [a; b]$, melyre

$$f[x, x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}.$$

csebisev

Definíció: Csebisev-polinom

A $T_n(x) := \cos(n \cdot \arccos(x))$, $x \in [-1; 1]$ függvényt n-edfokú (elsőfajú) Csebisev-polinomnak nevezzük.

1. Tétel: Rekurzió

$$T_0(x) := 1, \quad T_1(x) := x,$$
$$T_{n+1}(x) := 2x \cdot T_n(x) - T_{n-1}(x), \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

2. Tétel:

$T_n \in P_n$ és főegyütthatója: 2^{n-1} $(n \geq 1)$-re.

Definíció:

$$\widetilde{T}_n := \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$$

az 1 főegyütthatós Csebisev-polinom. $\widetilde{T}_n \in P_n^{(1)}$, ahol $P_n^{(1)}$: az 1 főegyütthatós n-edfokú polinomok halmaza.

3. Tétel:

- T_n-nek n db különböző valós gyöke van $[-1; 1]$-en.
- A gyökök a 0-ra szimmetrikusan helyezkednek el.
- Ha n páros, akkor T_n páros függvény,
  ha n páratlan, akkor T_n páratlan függvény.

4. Tétel:

T_n-nek $n + 1$ db szélsőérték helye van $[-1; 1]$-en.

5. Tétel: $(T_n, n \in \mathbb{N})$ ortogonális polinomrendszer

A Csebisev-polinomok ortogonális rendszert alkotnak $[-1;1]$-en a $w(x) := \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ súlyfüggvénnyel, azaz

$$\langle T_n, T_k \rangle_w = \int_{-1}^{1} \frac{T_n(x) \cdot T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = 0 \quad n \neq k.$$

6. Tétel: Csebisev-tétel

A $(T_n, n \in \mathbb{N})$ rendszer extremális tulajdonsága:

$$\min_{\widetilde{Q} \in P_n^{(1)}} \|\widetilde{Q}\|_\infty = \|\widetilde{T}_n\|_\infty = \frac{1}{2^{n-1}},$$

ahol $\|\widetilde{Q}\|_\infty := \|\widetilde{Q}\|_{C[-1;1]}$.

6. Tétel: Az interpoláció hibája $[-1;1]$-en

A $[-1;1]$-en vett interpoláció és $f \in C^{(n+1)}[-1;1]$ függvény esetén az interpoláció hibája pontosan akkor minimális, ha az alappontok a Csebisev-polinom gyökei. Ekkor

$$\|f - L_n\|_\infty \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \|\widetilde{T}_{n+1}\|_\infty = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{2^n}.$$

7. Tétel: Az interpoláció hibája $[a;b]$-n

Az $[a;b]$-n vett interpoláció és $f \in C^{(n+1)}[a;b]$ függvény esetén az interpoláció hibája pontosan akkor minimális, ha az alappontok az $[a;b]$-be transzformált Csebisev gyökök. Ekkor

$$\|f - L_n\|_\infty \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} \cdot \|\widetilde{T}_{n+1}\|_\infty =$$
$$= \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1}.$$

Tétel:

1. Tegyük fel, hogy $f \in C^\infty[a;b]$ és
2. $\exists\, M > 0: \quad \|f^{(n)}\|_\infty \leq M^n \quad (\forall\, n \in \mathbb{N})$.

Ekkor $\forall\, (x_k^{(n)} : k = 0, 1 \ldots, n)$ alappontrendszer sorozat esetén

$$\lim_{n\to\infty} \|f - L_n\|_\infty = 0.$$

Tétel: Marcinkiewicz

$\forall\, f \in C[a;b]$ esetén $\exists\, (x_k^{(n)} : k = 0, 1 \ldots, n)$ alappontrendszer sorozat, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \|f - L_n\|_\infty = 0.$$

Tétel: Faber

$\forall\, (x_k^{(n)} : k = 0, 1 \ldots, n)$ alappontrendszer sorozat esetén $\exists\, f \in C[a;b]$, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \|f - L_n\|_\infty \neq 0.$$

lebesque

Definíció: Lebesque-függvény

Legyen $x_0, \ldots, x_n \in [a;b]$, az

$$Ł_n(x) := \sum_{k=0}^{n} |\ell_k(x)|, \quad x \in [a;b].$$

függvényt Lebesque-függvénynek nevezzük.

Definíció: Lebesque-állandó

A Legesque-állandó a Lebesgue-függvény ∞ normája:

$$\Lambda_n := \max_{x\in[a;b]} Ł_n(x) = \|Ł_n\|_\infty.$$

Tétel: A Lebesque-állandó becslése

$$\Lambda_n \geq \frac{2}{\pi} \ln(n+1) + c, \quad (n \in \mathbb{N})$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ állandó.

legkisebb négyezetek

Definíció: A legkisebb négyzetek módszerének alapfeladata

Adottak az $x_1, \ldots, x_N \in [a; b]$ különböző alappontok, $y_1, \ldots, y_N \in \mathbb{R}$ függvényértékek vagy mérési eredmények. Olyan $p_n \in P_n$ polinomot keresünk $(n+1 \leq N$, általában $N \gg n)$, melyre

$$\sum_{i=1}^{N} (y_i - p_n(x_i))^2 \quad \text{minimális.}$$

A p_n polinomot *négyzetesen legjobban közelítő polinomnak* nevezzük.

kvadratúra

Definíció: Interpolációs kvadratúra formulák

1. A $\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ formulát *kvadratúra formulának* nevezzük.
2. A kvadratúra formula *interpolációs típusú*, ha $A_k = \int_a^b \ell_k(x) w(x)\, dx \quad (k = 0, \ldots, n)$.

Tétel: Pontossági tétel

$$\forall\, f \in P_n\text{-re} \quad \int_a^b f(x) w(x)\, dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

$$\Leftrightarrow \quad A_k = \int_a^b \ell_k(x) w(x)\, dx \quad (k = 0, \ldots, n)$$

Következmény:

1. $f \equiv 1$-re pontos a formula:

$$\sum_{k=0}^{n} A_k = \int_a^b w(x)\,dx =: \mu_0.$$

2. Ha $w(x) \equiv 1$, akkor

$$\sum_{k=0}^{n} A_k = b - a.$$

newton-cotes

Tétel:

1. $\sum_{k=0}^{n} B_k = 1$
2. $B_k = B_{n-k}, \quad k = 0, \dots, n$

érintő

Érintő formula (Ny(0))

$$\int_a^b f \approx (b-a) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) =: E(f)$$

trapéz

Trapéz formula (Z(1))

$$\int_a^b f \approx \frac{b-a}{2} \cdot (f(a) + f(b)) =: T(f)$$

Simpson

Simpson formula (Z(2))

$$\int_a^b f \approx \frac{b-a}{6} \cdot \left(f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) =: S(f)$$

Tétel (Emlékeztető): Az integrálszámítás középértéktétele

Ha $f \in C[a;b]$ és $g \geq 0$, ekkor $\exists\, \xi \in (a;b)$:

$$\int_a^b fg = f(\xi) \cdot \int_a^b g.$$

Tétel: Az érintő formula hibája

Ha $f \in C^2[a;b]$, ekkor $\exists\, \eta \in [a;b]$:

$$\int_a^b f - E(f) = \frac{(b-a)^3}{24} \cdot f''(\eta).$$

Tétel: A trapéz formula hibája

Ha $f \in C^2[a;b]$, ekkor $\exists\, \eta \in [a;b]$:

$$\int_a^b f - T(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} \cdot f''(\eta).$$

Tétel: A Simpson formula hibája

Ha $f \in C^4[a;b]$, ekkor $\exists\, \eta \in [a;b]$:

$$\int_a^b f - S(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880} \cdot f^{(4)}(\eta).$$

Tétel: A N-C formulák hibája

Jelölje $I(f)$ jelöli a N-C kvadratúra formulát.

1. Ha n páratlan és $f \in C^{n+1}[a;b]$, akkor létezik $\xi \in [a;b]$:

$$\int_a^b f - I(f) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_a^b \omega_n(x)\, dx.$$

2. Ha n páros és $f \in C^{n+2}[a;b]$, akkor létezik $\xi \in [a;b]$:

$$\int_a^b f - I(f) = \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_a^b x \cdot \omega_n(x)\, dx.$$

Trapéz összetett formula (Trapéz szabály)

$$\int_a^b f \approx \frac{b-a}{2m} \cdot \left(f(a) + 2\sum_{k=1}^{m-1} f(x_k) + f(b) \right) =: T_m(f)$$

Tétel: A trapéz összetett formula hibája

Ha $f \in C^2[a;b]$, ekkor $\exists\, \eta \in [a;b]$:

$$\int_a^b f - T_m(f) = -\frac{(b-a)^3}{12m^2} \cdot f''(\eta).$$

A Simpson összetett formula (Simpson szabály)

$$S_m(f) := \frac{b-a}{3m} \cdot \left(f(a) + 4\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} f(x_{2k-1}) + 2\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}-1} f(x_{2k}) + f(b) \right)$$

$$\int_a^b f \approx S_m(f)$$

Tétel: A Simpson összetett formula hibája

Ha $f \in C^4[a;b]$, ekkor $\exists \eta \in [a;b]$:

$$\int_a^b f - S_m(f) = -\frac{(b-a)^5}{180m^4} \cdot f^{(4)}(\eta).$$

A trapéz szabály javító formulája

$$\frac{1}{3}(4T_{2m}(f) - T_m(f)) = S_m(f)$$

A közelítés hibája $O(h^4)$.

A Simpson szabály javító formulája

$$\frac{1}{15}(16\,S_{2m}(f) - S_m(f))$$

A közelítés hibája $O(h^6)$.

Richardson

Tétel:

- Ha f'' korlátos $[a;b]$-n, akkor

$$\left|\int_a^b f - T_m(f)\right| \le |T_m(f) - T_{2m}(f)|.$$

- Ha $f^{(4)}$ korlátos $[a;b]$-n, akkor

$$\left|\int_a^b f - S_m(f)\right| \le |S_m(f) - S_{2m}(f)|.$$