Emlékeztető.

1° Adott $(x_n) : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ sorozat esetén az

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} x_k \qquad (n \in \mathbb{N}_0),$$

azaz az

$$\begin{aligned} s_0 &:= x_0, \\ s_1 &:= x_0 + x_1, \\ s_2 &:= x_0 + x_1 + x_2, \\ &\vdots \\ s_n &:= x_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-2} + x_{n-1} + x_n \quad (n \in \mathbb{N}_0) \end{aligned}$$

sorozatot **végtelen numerikus sor**nak vagy végtelen számsornak (röviden: **végtelen sor**nak vagy egyszerűen csak **sor**nak) neveztük, és a $\sum_{n=0}(x_n) := \sum(x_n) := (s_n)$ szimbólummal jelöltük. Az s_n a $\sum(x_n)$ végtelen sor n**-edik részletösszege**, x_n pedig a $\sum(x_n)$ végtelen sor n**-edik tag**ja.

2° Azt mondtuk, hogy a $\sum(x_n)$ konvergens, ha részletösszegeinek a sorozata konvergens, azaz

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n := \lim(s_n) = A \in \mathbb{R}.$$

Az A számot a $\sum(x_n)$ **végtelen sor összegé**nek neveztük.

3° Ha $\sum(x_n)$ divergens, azaz (s_n) divergens, akkor $\lim(s_n) \in \{-\infty, +\infty\}$ esetén azt mondtuk, hogy a $\sum(x_n)$ végtelen sor összege $+\infty$, ill. $-\infty$, és erre a

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n := +\infty, \qquad \text{ill. a} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} x_n := -\infty$$

jelölést használtuk.

Emlékeztető. Ha $a, q \in \mathbb{R}$, úgy

- a
$$\sum_{n=0}(a \cdot q^n)$$
sor pontosan akkor konvergens, ha $|q| < 1$ vagy $a = 0$:
$$\sum_{n=0}^{\infty} a \cdot q^n \in \mathbb{R} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (q \in (-1,1) \quad \text{vagy} \quad a = 0),$$
- $|q| < 1$ vagy $a = 0$ esetén

$$\sum_{n=0}^{\infty} a \cdot q^n = a \cdot \sum_{n=0}^{\infty} q^n = a \cdot \frac{1}{1-q},$$

hiszen az

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a \cdot q^k = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + aq^n = a\left(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + q^n\right) \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

sorozatra

$$s_n = a \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1-q} \longrightarrow \frac{a}{1-q} \qquad (n \to \infty).$$

Megjegyzés. Ha $q \in (-1, 1)$, akkor bármely $m \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$\boxed{\sum_{n=m}^{\infty} q^n} = q^m + q^{m+1} + q^{m+2} + \ldots = q^m(1 + q + q^2 + \ldots) = q^m \cdot \sum_{n=0}^{\infty} q^n = q^m \cdot \frac{1}{1-q} = \boxed{\frac{q^m}{1-q}}.$$

Emlékeztető. Tegyük fel, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n =: A \in \overline{\mathbb{R}} \qquad \text{és} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} y_n =: B \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ha az $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ számokra $\alpha A + \beta B \in \overline{\mathbb{R}}$, akkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha A + \beta B.$$

Definíció. A $p := 2$, ill. a $p := 3$ esetben a (16) előállítást az x szám **diadikus tört**, ill. **triadikus tört** alakjának nevezzük.

Emlékeztető. Tegyük fel, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $x_n \in (0, +\infty)$. Ekkor igaz az

$$\sum (x_n) \text{ konvergens} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (s_n) \text{ korlátos}$$

ekvivalencia, hiszen ebben az esetben (s_n) szigorúan monoton növekedő:

$$s_{n+1} - s_n = \sum_{k=1}^{n+1} x_k - \sum_{k=1}^{n} x_k = x_{n+1} > 0 \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Feladat. Számítsuk ki az alábbi sorösszegeket, amennyiben azok léteznek!

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$;

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

ezért

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \longrightarrow 1 \quad (n \to \infty). \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$;

$$\begin{aligned} \frac{1}{4k^2-1} &= \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2k+1)-(2k-1)}{(2k-1)(2k+1)} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right), \end{aligned}$$

ezért

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1}\right)+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{1-\frac{1}{2n+1}\right\} \longrightarrow \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2} \quad (n\to\infty).$$

Így

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2}.$$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9n^2-3n-2}$;

$$\frac{1}{9k^2-3k-2}=\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{(3k+1)-(3k-2)}{(3k-2)(3k+1)}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3k-2}-\frac{1}{3k+1}\right),$$

ezért

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{9k^2-3k-2}=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3k-2}-\frac{1}{3k+1}\right)=$$

$$= \frac{1}{3}\left\{\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{3n-5}-\frac{1}{3n-2}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)\right\}=\frac{1}{3}\left\{1-\frac{1}{3n+1}\right\}\longrightarrow\frac{1}{3} \quad (n\to\infty).$$

Így

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9n^2-3n-2}=\frac{1}{3}.$$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$;

Mivel
$$\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \frac{(k+1)^2 - k^2}{k^2(k+1)^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2},$$
ezért
$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \\ &= \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2}\right) + \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \\ &= 1 - \frac{1}{(n+1)^2} \longrightarrow 1 \quad (n \to \infty). \end{aligned}$$
Így
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1.$$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$;

Mivel
$$\frac{k}{(k+1)!} = \frac{k+1-1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!},$$
ezért
$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) = \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}\right) + \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right) = \end{aligned}$$

$$= 1 - \frac{1}{(n+1)!} \longrightarrow 1 \quad (n \to \infty).$$

Így

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1.$$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + 3n^2 + 2n}$;

Mivel

$$\frac{1}{k^3+3k^2+2k} = \frac{1}{k(k^2+3k+2)} = \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{k+2-k}{k(k+1)(k+2)} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right),$$

ezért

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3+3k^2+2k} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left\{ \left(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} \right) + \left(\frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} \right) + \ldots + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{(n-1)n} - \frac{1}{n(n+1)} \right) + \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left\{ \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right\} \longrightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad (n \to \infty).$$

Így

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+3n^2+2n} = \frac{1}{4}.$$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n});$

Világos, hogy

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) = (\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\ldots+$$

$$+(\sqrt{n-1}-\sqrt{n-2})+(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) =$$

$$\overset{\text{HF}}{=} \sqrt{n+1}-1 \longrightarrow +\infty \quad (n\to\infty),$$

így a sor divergens, pontosabban

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \lim(s_n) = +\infty.$$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n});$

Nem nehéz belátni, hogy

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+2}-2\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right) =$$

$$= (\sqrt{3}-2\sqrt{2}+\sqrt{1})+(\sqrt{4}-2\sqrt{3}+\sqrt{2})+(\sqrt{5}-2\sqrt{4}+\sqrt{3})+\ldots+$$

$$+(\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}+\sqrt{n-2})+(\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}+\sqrt{n-1})+(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}) =$$

$$\overset{\text{HF}}{=} 1-\sqrt{2}+\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1} \quad (n\in\mathbb{N})$$

és tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}=(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})\cdot\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}},$$

így a sor konvergens:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)=\lim(s_n)=1-\sqrt{2}+0=1-\sqrt{2}.$$

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}$;

Mivel

$$\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}}=\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}}=\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}},$$

ezért

$$\begin{aligned}
s_n &= \sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)= \\
&= \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)= \\
&\overset{\text{HF}}{=} 1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\longrightarrow 1 \quad (n\to\infty).
\end{aligned}$$

Így

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}=1.$$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{n(n+1)}$;

Mivel

$$(-1)^k\frac{2k+1}{k(k+1)}=(-1)^k\frac{k+(k+1)}{k(k+1)}=(-1)^k\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k}\right),$$

ezért

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{2k+1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k}\right) =$$

$$= -\left(\frac{1}{2}+1\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)+\ldots+(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}\right)+(-1)^n\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}\right) =$$

$$\stackrel{\text{HF}}{=} -1+\frac{(-1)^n}{n+1} \longrightarrow -1 \quad (n\to\infty).$$

Így

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{n(n+1)} = -1.$$

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})\sqrt{n(n+1)}}$.

Mivel

$$\frac{1}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})\sqrt{k(k+1)}} = \frac{1}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})\sqrt{k(k+1)}}\cdot\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}} =$$

$$= \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}} = \frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}},$$

ezért

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})\sqrt{k(k+1)}} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) =$$

$$= \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) =$$

$$\stackrel{\text{HF}}{=} 1-\frac{1}{\sqrt{n+1}} \longrightarrow 1 \qquad (n\to\infty).$$

Így

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})\sqrt{n(n+1)}} = 1.$$

12. $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} \frac{3}{4-5n+n^2}$;

Mivel

$$\frac{3}{4-5k+k^2} = \frac{3}{(k-1)(k-4)} = \frac{(k-1)-(k-4)}{(k-1)(k-4)} = \frac{1}{k-4} - \frac{1}{k-1},$$

ezért

$$\begin{aligned} s_n = &= \sum_{k=5}^{n} \frac{3}{4-5k+k^2} = \sum_{k=5}^{n} \left(\frac{1}{k-4} - \frac{1}{k-1}\right) = \\ &= \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right) + \ldots + \\ &= \left(\frac{1}{n-6}-\frac{1}{n-3}\right) + \left(\frac{1}{n-5}-\frac{1}{n-2}\right) + \left(\frac{1}{n-4}-\frac{1}{n-1}\right) = \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n-3} - \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} \longrightarrow 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \quad (n \to \infty). \end{aligned}$$

Így

$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{3}{4-5n+n^2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}.$$

13. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)}$;

Ha $2^k =: x$, akkor

$$\frac{2^k}{(2^k+1)(2^{k+1}+1)} = \frac{x}{(x+1)(2x+1)} = \frac{(2x+1)-(x+1)}{(x+1)(2x+1)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2x+1},$$

ezért

$$\frac{2^k}{(2^k+1)(2^{k+1}+1)} = \frac{1}{2^k+1} - \frac{1}{2^{k+1}+1}.$$

Így

$$\begin{aligned}
s_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{(2^k+1)(2^{k+1}+1)} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2^k+1} - \frac{1}{2^{k+1}+1}\right) = \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9}\right) + \ldots + \\
&\quad + \left(\frac{1}{2^{n-2}+1} - \frac{1}{2^{n-1}+1}\right) + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} - \frac{1}{2^n+1}\right) + \left(\frac{1}{2^n+1} - \frac{1}{2^{n+1}+1}\right) = \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}+1} \longrightarrow \frac{1}{2} \quad (n \to \infty),
\end{aligned}$$

ahonnan

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)} = \frac{1}{2}$$

következik.

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-2}{n(n+1)(n+2)}$;

Mivel

$$\begin{aligned}
\frac{2k-2}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{2\cdot\{(k+1)-(k+2)+k\}}{k(k+1)(k+2)} = \frac{2}{k(k+2)} - \frac{2}{k(k+1)} + \frac{2}{(k+1)(k+2)} = \\
&= \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} - \frac{2}{k} + \frac{2}{k+1} + \frac{2}{k+1} - \frac{2}{k+2} = -\frac{1}{k} + \frac{4}{k+1} - \frac{3}{k+2},
\end{aligned}$$

ezért

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k-2}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{1}{k} + \frac{4}{k+1} - \frac{3}{k+2}\right) \overset{\text{HF}}{=} \frac{n^2-n}{2(n+1)(n+2)} \longrightarrow \frac{1}{2} \quad (n \to \infty),$$

ahonnan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-2}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}$$

következik.

15. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{n^2-n-1}{n!}$.

Mivel

$$\frac{k^2-k-1}{k!} = \frac{k(k-1)-1}{k!} = \frac{1}{(k-2)!} - \frac{1}{k!},$$

ezért

$$\begin{aligned}
s_n &= \sum_{k=2}^{n} \frac{k^2-k-1}{k!} = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{(k-2)!} - \frac{1}{k!} \right) = \\
&= \left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{2!} \right) + \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{3!} \right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{4!} \right) + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{5!} \right) + \ldots + \\
&= \left(\frac{1}{(k-4)!} - \frac{1}{(k-2)!} \right) + \left(\frac{1}{(k-3)!} - \frac{1}{(k-1)!} \right) + \left(\frac{1}{(k-2)!} - \frac{1}{k!} \right) = \\
&= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} - \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} \longrightarrow 1 + 1 \quad (n \to \infty),
\end{aligned}$$

ahonnan

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2-n-1}{n!} = 2$$

Feladat. Igazoljuk, hogy a következő sorok konvergensek és határozzuk meg az összegüket!

1. $\sum\limits_{n=0} \left(\dfrac{(-3)^{n+2}}{2^{3n-1}} \right)$;

Mivel
$$\sum_{n=0}\left(\frac{(-3)^{n+2}}{2^{3n-1}}\right)=18\cdot\sum_{n=0}\left(\left(\frac{-3}{8}\right)^{n}\right),$$
ezért konvergens geometriai sorról van szó:
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^{n+2}}{2^{3n-1}}=\frac{18}{1+\frac{3}{8}}=\frac{8\cdot 18}{11}.$$

2. $\sum\limits_{n=1}\left(\frac{(-3)^n+4}{5^n}\right)$;

Mivel
$$\sum_{n=1}\left(\frac{(-3)^n+4}{5^n}\right)=\sum_{n=1}\left(\left(\frac{-3}{5}\right)^{n}\right)+4\cdot\sum_{n=1}\left(\left(\frac{1}{5}\right)^{n}\right),$$
ezért a sor konvergens:
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n+4}{5^n}=\frac{\frac{-3}{5}}{1+\frac{3}{5}}+4\cdot\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}=-\frac{3}{8}+1=\frac{5}{8}.$$

3. $\sum\limits_{n=1}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)$;

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=\frac{1/2}{1-1/2}+\frac{1/3}{1-1/3}=\frac{1}{2-1}+\frac{1}{3-1}=\frac{3}{2}.$$

4. $\sum\limits_{n=1}\left(\frac{(-1)^n}{2^n}\right)$;

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}=\frac{-1/2}{1+1/2}=-\frac{1}{3}.$$

5. $\sum_{n=10} \left(\frac{((-1)^n + 2^n)^2}{5^{n+2}} \right);$

Világos, hogy

$$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{((-1)^n + 2^n)^2}{5^{n+2}} = \sum_{n=10}^{\infty} \frac{1 + 2 \cdot (-2)^n + 4^n}{5^{n+2}} =$$

$$= \sum_{n=10}^{\infty} \left\{ \frac{1}{25} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{2}{25} \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^n + \frac{1}{25} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^n \right\} =$$

$$= \frac{1}{25} \cdot \sum_{n=10}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{2}{25} \cdot \sum_{n=10}^{\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^n + \frac{1}{25} \cdot \sum_{n=10}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{25} \cdot \frac{(1/5)^{10}}{1 - 1/5} + \frac{2}{25} \cdot \frac{(-2/5)^{10}}{1 + 2/5} + \frac{1}{25} \cdot \frac{(4/5)^{10}}{1 - 4/5} =$$

$$= \left(\frac{1}{5}\right)^{12} \cdot \left\{ \frac{5}{4} + 2048 \cdot \frac{5}{7} + 4^{10} \cdot 5 \right\} = \left(\frac{1}{5}\right)^{11} \cdot \frac{7 + 2^{13} + 4^{11} \cdot 7}{28}.$$

6. $\sum_{n=2} \left(\frac{(-5)^n}{3^{2n}} \right).$

$$\sum_{n=2} \left(\frac{(-5)^n}{3^{2n}} \right) = \sum_{n=2} \left(\left(-\frac{5}{9}\right)^n \right),$$

ezért konvergens geometriai sorról van szó:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-5)^n}{3^{2n}} = \frac{\left(-\frac{5}{9}\right)^2}{1 + \frac{5}{9}} = \frac{5^2}{9^2} \cdot \frac{9}{14} = \frac{25}{126}. \quad \blacksquare$$

Feladat. Mely $x \in \mathbb{R}$ esetén konvergens a $\sum(x_n)$ sor?

1. $x_n := \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - 1\right)^n \quad (n \in \mathbb{N}_0;\ 0 \le x \in \mathbb{R});$

A $\sum\limits_{n=0}(x_n)$ sor pontosan akkor konvergens, ha

$$\left|\frac{\sqrt{x}}{2} - 1\right| < 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in (0, 16),$$

és minden $x \in (0, 16)$ esetén

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \frac{1}{1 - \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - 1\right)} = \frac{1}{2 - \frac{\sqrt{x}}{2}} = \frac{2}{4 - \sqrt{x}}.$$

2. $x_n := (\ln(x))^n \quad (n \in \mathbb{N};\ 0 < x \in \mathbb{R});$

A $\sum\limits_{n=1}(x_n)$ sor pontosan akkor konvergens, ha

$$|\ln(x)| < 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in \left(\frac{1}{e}, e\right),$$

és minden $x \in \left(\frac{1}{e}, e\right)$ esetén

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \frac{\ln(x)}{1 - \ln(x)}.$$

3. $x_n := \left(\frac{x^2+1}{3}\right)^n \quad (n \in \mathbb{N}_0;\ x \in \mathbb{R});$

A $\sum\limits_{n=0}(x_n)$ sor pontosan akkor konvergens, ha

$$\left|\frac{x^2+1}{3}\right| < 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

és minden $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ esetén

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \frac{1}{1 - \frac{x^2+1}{3}} = \frac{3}{2-x^2}.$$

4. $x_n := \dfrac{x}{(1+x)^n} \qquad (n \in \mathbb{N}_0;\ -1 \neq x \in \mathbb{R});$

A $\sum (x_n)$ sor pontosan akkor konvergens, ha $x = 0$ vagy

$$\frac{1}{|1+x|} < 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty).$$

A sor összege pedig:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n} = \begin{cases} 0 & (x = 0), \\ \\ x \cdot \dfrac{1}{1 - \frac{1}{1+x}} = x + 1 & (x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)). \end{cases}$$

5. $x_n := (x^n - x^{n-1})(x^n + x^{n-1}) \qquad (n \in \mathbb{N};\ x \in \mathbb{R});$

Világos, hogy $x = 0$ esetén a sor konvergens. Legyen most $x \neq 0$, így

$$(x^n - x^{n-1})(x^n + x^{n-1}) = x^n \left(1 - \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{x}\right),$$

tehát a sor pontosan akkor konvergens, ha $|x| < 1$ és ekkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \begin{cases} \dfrac{x}{1-x}\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = -\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) & (x \neq 0), \\ \\ -1 & (x = 0). \end{cases}$$

6. $x_n := \dfrac{(x+1)^{n+1}}{(x-1)^n} \qquad (n \in \mathbb{N}_0;\ 1 \neq x \in \mathbb{R});$

Mivel bármely $1 \neq x \in \mathbb{R}$, ill. $n \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$\frac{(x+1)^{n+1}}{(x-1)^n} = (x+1) \cdot \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^n,$$

ezért a $\sum(x_n)$ sor pontosan akkor konvergens, ha $x = -1$ vagy

$$\left|\frac{x+1}{x-1}\right| < 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in (-\infty, 0).$$

Tetszőleges $x \in (-\infty, 0)$ esetén a sor összege:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{n+1}}{(x-1)^n} = (x+1) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^n = (x+1) \cdot \frac{1}{1 - \frac{x+1}{x-1}} = \frac{1-x^2}{2}.$$

7. $x_n := \dfrac{x^{2n}}{(1+x^2)^{n-1}} \qquad (n \in \mathbb{N};\ x \in \mathbb{R}).$

Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sum_{n=1} \left(\frac{x^{2n}}{(1+x^2)^{n-1}}\right) = (1+x^2) \cdot \sum_{n=1} \left(\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^n\right)$$

konvergens mértani sor, továbbá

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(1+x^2)^{n-1}} = (1+x^2) \cdot \frac{\frac{x^2}{1+x^2}}{1 - \frac{x^2}{1+x^2}} = x^2 \cdot (1+x^2) \qquad (x \in \mathbb{R}). \quad \blacksquare$$

Feladat. Tetszőleges $q \in (-1,1)$ esetén határozzuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot q^n$ sorösszeget!

Legyen $q \in (-1,1)$ és

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} k \cdot q^k = q + 2 \cdot q^2 + 3 \cdot q^3 + \ldots + n \cdot q^n \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor

$$\begin{aligned} s_n - q \cdot s_n &= \sum_{k=1}^{n} k \cdot q^k - \sum_{k=1}^{n} k \cdot q^{k+1} = \\ &= (q + 2 \cdot q^2 + 3 \cdot q^3 + \ldots + n \cdot q^n) - (q^2 + 2 \cdot q^3 + \ldots + (n-1) \cdot q^n - n \cdot q^{n+1}) = \\ &= q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n - n \cdot q^{n+1} = \sum_{k=1}^{n} q^k - n \cdot q^{n+1} = q \cdot \frac{1-q^n}{1-q} - n \cdot q^{n+1}, \end{aligned}$$

ahonnan

$$s_n = q \cdot \frac{1-q^n}{(1-q)^2} - \frac{n}{1-q} \cdot q^{n+1} \longrightarrow \frac{q}{(1-q)^2} \qquad (n \to \infty),$$

ui. (vö. 5. $\boxed{\textbf{GY}}$)

$$\lim(q^n) = 0 = \lim(n \cdot q^n).$$

Igaz tehát a

$$q \in (-1,1) \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot q^n = \frac{q}{(1-q)^2}}$$

implikáció. ■

Feladat. Igazoljuk, hogy ha $2 \leq p \in \mathbb{N}$ és $\alpha \in [0,1]$, akkor van olyan

$$x_n \in \{0, 1, \ldots, p-1\} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

(együttható)sorozat, hogy

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{p^n} =: (0, x_1 x_2 \ldots)_p, \tag{16}$$

teljesül!

Ha

- $\alpha = 1$, akkor az $x_n := p - 1$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ választás megfelelő:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p-1}{p^n} = (p-1) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^n} = (p-1) \cdot \frac{\frac{1}{p}}{1-\frac{1}{p}} = \frac{p-1}{p} \cdot \frac{p}{p-1} = 1.$$

- $\alpha \in [0, 1)$, akkor pl. az

$$x_1 := [p\alpha], \ldots, x_{n+1} := \left[p^{n+1}\alpha - (p^n x_1 + \ldots + p x_n)\right] \qquad (n \in \mathbb{N})$$

rekurzív megadású sorozatra:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{p^n} = \alpha.$$

Biz. Ha $x_1 := [p\alpha]$, akkor $x_1 \in \{0, \ldots, p-1\}$ és a $x_1 \leq p\alpha < x_1 + 1$ egyenlőtlenségrendszerből

$$\frac{x_1}{p} \leq \alpha < \frac{x_1 + 1}{p};$$

ha pedig $x_2 := [p^2\alpha - p x_1]$, akkor $x_2 \in \{0, \ldots, p-1\}$ és a $x_2 \leq p^2\alpha - p x_1 < x_2 + 1$ egyenlőtlenségrendszerből

$$\frac{x_1}{p} + \frac{x_2}{p^2} \leq \alpha < \frac{x_1}{p} + \frac{x_2 + 1}{p^2};$$

így az eljárást folytatva, ha az $x_n \in \{0, \ldots, p-1\}$ számot meghatároztuk, úgy legyen

$$x_{n+1} := \left[p^{n+1}\alpha - p^n x_1 - \ldots - p x_n\right].$$

Ekkor $x_{n+1} \in \{0, \ldots, p-1\}$ és

$$s_n := \frac{x_1}{p} + \frac{x_2}{p^2} + \ldots + \frac{x_n}{p^n} \leq \alpha < \frac{x_1}{p} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{p^{n-1}} + \frac{x_n + 1}{p^n},$$

azaz

$$0 \leq \alpha - s_n \leq \frac{1}{p^n} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ahonnan

$$\lim(s_n) = \alpha, \qquad \text{ill.} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{p^n} = \alpha$$

következik.

Feladat. Adjuk meg a $(0,1\dot{4})_6$ szám diadikus tört alakját!

Mivel

$$(0,1\dot{4})_6 = \frac{1}{6} + \frac{4}{6^2} + \frac{4}{6^3} + \frac{4}{6^4} + \ldots = \frac{1}{6} + \frac{4}{6^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^3} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{4}{6^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{6}} = \frac{1}{6} + \frac{4}{6^2} \cdot \frac{6}{5} = \frac{1}{6} + \frac{4}{30} = \frac{90}{30} = \frac{3}{10},$$

és

$$\frac{3}{10} \xrightarrow{\times 2} \frac{6}{10} = \frac{3}{5} < 1\ (x_1 := 0) \xrightarrow{\times 2} \frac{6}{5} = 1 + \frac{1}{5}\ (x_2 := 1) \xrightarrow{\times 2} \frac{2}{5} < 1\ (x_3 := 0) \xrightarrow{\times 2}$$

$$\xrightarrow{\times 2} \frac{4}{5} < 1\ (x_4 := 0) \xrightarrow{\times 2} \frac{8}{5} = 1 + \frac{3}{5}\ (x_5 := 1)\ (\text{ismétlés}),$$

ezért

$$(0,1\dot{4})_6 = (0,0\dot{1}00\dot{1})_2. \quad \blacksquare$$

Feladat. Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$. Igazoljuk, hogy ha

1. $\alpha > 1$, akkor bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \ldots + \frac{1}{(n-1)^\alpha} + \frac{1}{n^\alpha} \boxed{<} \frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}-1} = \boxed{\frac{2^\alpha}{2^\alpha - 2}};$$

Legyen $m \in \mathbb{N}$. Ha $n \in \mathbb{N}$: $n < 2^{m+1}$, akkor

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha}\right) + \ldots +$$

$$+ \left(\frac{1}{(2^m)^\alpha} + \frac{1}{(2^m+1)^\alpha} + \ldots + \frac{1}{(2^{m+1}-1)^\alpha}\right) <$$

$$< 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha}\right) + \ldots +$$

$$+ \left(\frac{1}{(2^m)^\alpha} + \frac{1}{(2^m)^\alpha} + \ldots + \frac{1}{(2^m)^\alpha}\right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \frac{1}{4^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{1}{(2^m)^{\alpha-1}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^m = \frac{1 - \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^{m+1}}{1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}} =$$

$$= \frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1} - 1}\left\{1 - \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^{m+1}\right\} < \frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1} - 1}.$$

Mivel bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén van olyan $m \in \mathbb{N}$, hogy $n < 2^{m+1}$, ezért

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \ldots + \frac{1}{(n-1)^\alpha} + \frac{1}{n^\alpha} < \frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1} - 1}.$$

2. $\alpha \leq 1$, akkor bármely $c \in \mathbb{R}$ számhoz van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy igaz a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \ldots + \frac{1}{(n-1)^\alpha} + \frac{1}{n^\alpha} > c$$

becslés!

Ha $N \in \mathbb{N}$ és $n := 2^{2N+1}$, akkor

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \left(\frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha} + \frac{1}{8^\alpha}\right) + \ldots +$$

$$+ \left(\frac{1}{(2^N + 1)^\alpha} + \frac{1}{(2^N + 1)^\alpha} + \ldots + \frac{1}{(2^{N+1})^\alpha}\right) \geq$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots +$$

$$+ \left(\frac{1}{2^N + 1} + \frac{1}{2^N + 1} + \ldots + \frac{1}{2^{N+1}}\right) \geq$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \left\{2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \ldots + 2^N \cdot \frac{1}{2^{N+1}}\right\} = \frac{3}{2} + \frac{N}{2} = \frac{3+N}{2}.$$

Ez azt jelenti, hogy ha $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges, akkor van olyan N, ill. $n := 2^{2N+1}$, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \ldots + \frac{1}{(n-1)^\alpha} + \frac{1}{n^\alpha} > \frac{3+N}{2} > c. \quad \blacksquare$$

Feladat. Bizonyítsuk be, hogy a $\sum\limits_{k=0}\left(\frac{1}{k!}\right)$ konvergens sor összegére

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=\sup\left\{\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\in\mathbb{R}:\ n\in\mathbb{N}\right\}=e$$

teljesül!

1. lépés. Tudjuk, hogy a

$$s_n:=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\quad(n\in\mathbb{N}_0)\qquad\text{és}\qquad e_n:=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\quad(n\in\mathbb{N}).$$

sorozatok konvergensek és $\lim(e_n)=e$.

2. lépés. Világos, hogy

$$e_1=\left(1+\frac{1}{1}\right)^1=2=1+1=s_1,\qquad e_2=\left(1+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}<\frac{10}{4}=\frac{5}{2}=1+1+\frac{1}{2}=s_2,$$

továbbá tetszőleges $3\le n\in\mathbb{N}$ esetén és a binomiális tétel felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
e_n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot 1^{n-k}\cdot\frac{1}{n^k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}=1+1+\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\cdot\frac{1}{n^k}=\\
&= 2+\sum_{k=2}^{n}\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))}{k!}\cdot\frac{1}{n^k}=2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\cdot\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))}{n\cdot n\cdot\ldots\cdot n}=\\
&= 2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\cdot\left\{1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right\}<2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\cdot\{1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1\}=\\
&= 2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=s_n,
\end{aligned}$$

ezért

$$e_n\le s_n\qquad(n\in\mathbb{N}),$$

ahonnan

$$e=\lim(e_n)\le\lim(s_n)$$

következik.

3. lépés. Ha $m, n \in \mathbb{N}$: $2 \leq m < n$, akkor

$$e_n = 2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\cdot\prod_{j=1}^{k-1}\left(1-\frac{j}{n}\right) > 2+\sum_{k=2}^{m}\frac{1}{k!}\cdot\prod_{j=1}^{k-1}\left(1-\frac{j}{n}\right) \xrightarrow{n\to\infty}$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} 2+\sum_{k=2}^{m}\frac{1}{k!}\cdot\prod_{j=1}^{k-1}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{j}{n}\right) = 2+\sum_{k=2}^{m}\frac{1}{k!}\cdot\prod_{j=1}^{k-1}1 = \sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!} = s_m,$$

így a fentiek figyelembevételével azt kapjuk, hogy tetszőleges $m \in \mathbb{N}$ esetén $e > e_n \geq s_m$, ahonnan

$$e \geq \lim_{m\to\infty}(s_m)$$

következik. Ez pedig a korábbiak fényében azt jelenti, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} = \lim(s_n) = e. \quad \blacksquare$$

Feladat. Igazoljuk, hogy $e \notin \mathbb{Q}$, továbbá fennáll a

$$2.71825 < e < 2.71829$$

becslés!

Világos, hogy ha

$$s_n := \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \qquad (n \in \mathbb{N}_0),$$

akkor bármely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén

$$e - s_n = e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!}\cdot\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{k!} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\cdot\left(1+\sum_{k=n+2}^{\infty}\frac{(n+1)!}{k!}\right) = \frac{1}{(n+1)!}\cdot\left(1+\sum_{k=n+2}^{\infty}\prod_{j=n+2}^{k}\frac{1}{j}\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)!}\cdot\left(1+\sum_{k=n+2}^{\infty}\prod_{j=n+2}^{k}\frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{(n+1)!}\cdot\left\{1+\sum_{k=n+2}^{\infty}\left(\frac{1}{n+2}\right)^{k-n-1}\right\} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\cdot\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+2}\right)^{k-(n+1)} = \frac{1}{(n+1)!}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+2}\right)^{k} = \frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n+2}} =$$

$$= \frac{n+2}{(n+1)\cdot(n+1)!}.$$

Így

$$0 < \theta_n := n\cdot n!\cdot\left(e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right) \leq \frac{(n+2)\cdot n\cdot n!}{(n+1)\cdot(n+1)!} = \frac{(n+2)\cdot n}{(n+1)^2} = \frac{n^2+2n}{n^2+2n+1} < 1 \quad (n\in\mathbb{N}_0),$$

ahonnan

$$e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{n\cdot n!} \qquad (n\in\mathbb{N}_0)$$

következik.

2. lépés. Ha $e\in\mathbb{Q}$, akkor alkalmas $m, n\in\mathbb{N}$ számokkal $e=\frac{m}{n}$. Így a fentiek alapján van olyan

$$0<\theta_n<1,$$

hogy

$$\frac{m}{n}-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = \frac{\theta_n}{n\cdot n!}.$$

Innen

$$\theta_n = \frac{m\cdot n\cdot n!}{n} - \sum_{k=0}^{n}\frac{n\cdot n!}{k!} = m\cdot n! - n\cdot\sum_{k=0}^{n}\prod_{j=k+1}^{n} j \in \mathbb{Z}$$

ami nem lehetséges. Következésképpen $e\notin\mathbb{Q}$.

3. lépés. Az $n=7$ esetben

$$0 < e - s_7 < \frac{1}{7\cdot 7!} = \frac{1}{7\cdot 5040} < 0.00003,$$

azaz

$$s_7 < e < s_7 + 0,00003.$$

Mivel

$$s_7 = \sum_{k=0}^{7}\frac{1}{k!} = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\frac{1}{720}+\frac{1}{5040} =$$

$$= \frac{5040+5040+2520+840+210+42+7+1}{5040} = \frac{13700}{5040} = \frac{685}{252} = 2.71825\ldots$$

így

$$2.71825 < s_7 < e < s_7 + 0.00003 < 2.71826 + 0.00003 = 2.71829. \quad \blacksquare$$

Feladat. Igazoljuk, hogy a

$$\sum_{n=0} \left(\frac{n^2+3n}{(n+2)!} \right)$$

sor konvergens, majd számítsuk ki összegét!

Mivel

$$n^2+3n = n^2+3n+2-2 = (n+1)(n+2)-2 \qquad (n \in \mathbb{N}_0),$$

ezért

$$\frac{n^2+3n}{(n+2)!} = \frac{(n+1)(n+2)-2}{(n+2)!} = \frac{1}{n!} - \frac{2}{(n+2)!} \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Következésképpen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+3n}{(n+2)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} = e - 2 \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} \right) = e - 2 \cdot (e-2) = 4 - e. \quad \blacksquare$$

Házi feladat. Igazoljuk, hogy az alábbi sorok konvergensek, és határozzuk meg összegüket!

1. $\sum_{n=10} \left(\frac{5}{2^n} + \frac{1}{3^{2n}} \right)$;

Mivel

$$\left| \frac{1}{2} \right| < 1 \qquad \text{és} \qquad \left| \frac{1}{3^2} \right| = \left| \frac{1}{9} \right| < 1,$$

ezért konvergens geometriai sorról van szó, melynek összeg:

$$\sum_{n=10}^{\infty} \left(\frac{5}{2^n} + \frac{1}{3^{2n}} \right) = \sum_{n=10}^{\infty} \frac{5}{2^n} + \sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{3^{2n}} = 5 \cdot \sum_{n=10}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n + \sum_{n=10}^{\infty} \left(\frac{1}{9} \right)^n =$$

$$= 5 \cdot \frac{(1/2)^{10}}{1-1/2} + \frac{(1/9)^{10}}{1-1/9} = \frac{5}{2^9} + \frac{1}{8 \cdot 9^9}.$$

2. $\sum_{n=1} \left(\frac{2 \cdot (-1)^n + 2^{n+1}}{3^{2n+1}}\right);$

Mivel

$$\sum_{n=1} \left(\frac{2 \cdot (-1)^n + 2^{n+1}}{3^{2n+1}}\right) = \frac{2}{3} \cdot \sum_{n=1} \left(\left(\frac{-1}{9}\right)^n\right) + \frac{2}{3} \cdot \sum_{n=1} \left(\left(\frac{2}{9}\right)^n\right)$$

és

$$\left|-\frac{1}{9}\right| < 1, \qquad \text{ill.} \qquad \left|\frac{2}{9}\right| < 1,$$

ezért konvergens geometriai sorról van szó, melynek összege:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot (-1)^n + 2^{n+1}}{3^{2n+1}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{9}} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{9}} = \frac{3}{5} + \frac{6}{7} = \frac{51}{35}.$$

3. $\sum_{n=1} \left(\frac{1}{n^2 + 4n + 3}\right).$

Ha

$$\begin{aligned}
s_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 + 4k + 3} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+3)} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+3) - (k+1)}{(k+1)(k+3)} = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3}\right) = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left\{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + \ldots + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}\right)\right\} =
\end{aligned}$$

$$= \quad \frac{1}{2} \cdot \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right\} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

akor

$$\sum_{n=1} \left(\frac{1}{n^2+4n+3} \right) = (s_n),$$

így $\sum_{n=1} \left(\frac{1}{n^2+4n+3} \right)$ konvergens, továbbá

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4n+3} = \lim(s_n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 0 - 0 = \frac{5}{6}. \quad \blacksquare$$