Emlékeztető. Legyen $n \in \mathbb{N}$. Ekkor tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$ esetén fennáll az

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right) = (a-b)\sum_{k=1}^{n} a^{n-k}b^{k-1} \tag{1}$$

egyenlőség.

Emlékeztető (binomiális tétel). Legyen $n \in \mathbb{N}_0$. Ekkor bármely $a, b \in \mathbb{R}$ szám esetén

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k. \tag{2}$$

Emlékeztető. Az $x \in \mathbb{R}$ szám **abszolútértékén**, ill. **előjelén** az

$$|x| := \begin{cases} x & (x \geq 0), \\ -x & (x < 0) \end{cases}, \qquad \text{ill. a} \qquad \operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 0 & (x = 0), \\ \dfrac{x}{|x|} & (x \neq 0) \end{cases}$$

valós számot értjük.

Definíció. Adott $n \in \mathbb{N}$ esetén

1. az $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ számok **számtani** vagy **aritmetikai közep**ének nevezzük az

$$A_n := A(x_1, \ldots, x_n) := \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$

számot;

2. a $0 \leq x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ számok **mértani** vagy **geometriai közep**ének nevezzük az

$$G_n := G(x_1, \ldots, x_n) := \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k}$$

számot;

3. a $0 < x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ számok **harmonikus közep**ének nevezzük a

$$H_n := H(x_1, \ldots, x_n) := \frac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \ldots + \dfrac{1}{x_n}} = \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{x_k}}$$

számot.

Tétel (A mértani közép és a számtani közép közötti egyenlőtlenség.)
Bármely $n \in \mathbb{N}$, ill. $0 \leq x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ esetén

$$x_1 \cdot \ldots \cdot x_n = \boxed{\prod_{k=1}^{n} x_k \leq \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^n} = \left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right)^n,$$

és egyenlőség pontosan az $x_1 = \ldots = x_n$ esetben teljesül.

Tétel (A harmonikus közép és a mértani közép közötti egyenlőtlenség.)
Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$, ill. $0 < x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ esetén

$$x_1 \cdot \ldots \cdot x_n = \boxed{\prod_{k=1}^{n} x_k \geq \left(\frac{n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}}\right)^n} = \left(\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}}\right)^n,$$

és egyenlőség pontosan az $x_1 = \ldots = x_n$ esetben van.

Tétel (a teljes indukció elve.) Legyen $m \in \mathbb{Z}$ rögzített egész szám, és tegyük fel, hogy $\mathcal{A}(n)$ az $m \leq n \in \mathbb{Z}$ (m-nél nem kisebb egész) számokra vonatkozó olyan állítás, amelyre:

(a) $\mathcal{A}(m)$ igaz, és

(b) ha valamely $m \leq n \in \mathbb{Z}$ esetén $\mathcal{A}(n)$ igaz, akkor $\mathcal{A}(n+1)$ is igaz.

Ekkor $\mathcal{A}(n)$ igaz minden $m \leq n \in \mathbb{Z}$ számra.

Tétel. Bármely $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

1. $|x| \geq 0$ és $|x| = 0 \iff x = 0$;
2. $|x| = |-x|$;
3. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$, ill. ha $y \neq 0$, úgy $\left|\frac{1}{y}\right| = \frac{1}{|y|}$;
4. ha $a \geq 0$, akkor

$$|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a, \qquad \text{ill.} \qquad |x| \geq a \iff (x \leq -a \text{ vagy } x \geq a);$$

5. $|x \pm y| \leq |x| + |y|$ (**háromszög-egyenlőtlenség**);
6. $|x \pm y| \geq ||x| - |y||$ (**háromszög-egyenlőtlenség**).

Tétel (Barrow-Bernoulli-egyenlőtlenség). Ha $n \in \mathbb{N}_0$ és $h \in [-2, +\infty)$, akkor

$$(1+h)^n \geq 1 + nh,$$

és egyenlőség pontosan akkor van, ha $h = 0$ vagy $n \in \{0; 1\}$.

Feladat. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$: $a > b > 0$, $n \in \mathbb{N}$ esetén fennáll az

$$a^n \left[a - (n+1)(a-b)\right] < b^{n+1}$$

egyenlőtlenség!

$$\begin{aligned} a^{n+1} - b^{n+1} &= (a-b)(a^n + a^{n-1}b + \ldots + ab^{n-1} + b^n) < \\ &< (a-b)(a^n + a^{n-1}a + \ldots + aa^{n-1} + a^n) = (a-b)(n+1)a^n, \end{aligned}$$

ezért

$$a^{n+1} - a^n(n+1)(a-b) < b^{n+1},$$

amiből pedig kiemeléssel a kívánt egyenlőtlenséget kapjuk. ■

1. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$

Legyen

$$a := 1 + \frac{1}{n}, \qquad \text{ill.} \qquad b := 1 + \frac{1}{n+1}.$$

Ekkor $a > b > 0$, így az előző feladat alapján

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n} - (n+1)\left(1 + \frac{1}{n} - 1 - \frac{1}{n+1}\right)\right)}_{=1} < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

A bal oldalon a második tényező 1, így a kívánt egyenlőtlenséget kapjuk.

2. $2 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 4$

1. lépés. $n = 1$ esetén

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2,$$

és az előző egyenlőtlenség alapján minden $2 < n \in \mathbb{N}$ számra

$$2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

2. lépés. Legyen

$$a := 1 + \frac{1}{2n} \qquad \text{és} \qquad b := 1.$$

Ekkor $a > b > 0$, ezért az előző feladat alapján

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n \underbrace{\left(1+\frac{1}{2n} - (n+1)\left(1+\frac{1}{2n}-1\right)\right)}_{=\frac{1}{2}} < 1.$$

A bal oldalon a második tényező $\frac{1}{2}$. Kettővel szorozva és négyzetre emelve

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n} < 4$$

adódik. Az első feladat miatt minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^{2n-1} < \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n} < 4$$

teljesül. Ebből pedig már következik a bizonyítandó egyenlőtlenség. ■

Feladat. Döntsük el, hogy melyik szám nagyobb! 1000^{1000} vagy 1001^{999}

$$\boxed{1001^{999}} = \frac{1001^{999}}{1000^{1000}} \cdot 1000^{1000} = \left(\frac{1001}{1000}\right)^{1000} \cdot \frac{1000^{1000}}{1001} = \left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000} \cdot \frac{1000^{1000}}{1001} \boxed{<}$$

$$\boxed{<} \; 3 \cdot \frac{1000^{1000}}{1001} < \boxed{1000^{1000}}. \quad ■$$

Feladat. Bizonyítsuk be, hogy minden $-\frac{1}{2} \leq a \in \mathbb{R}$ esetén fennáll az

$$(1-a)^5(1+a)(1+2a)^2 \leq 1$$

egyenlőtlenség! Mely esetben van itt egyenlőség?

1. lépés. Ha $a \geq 1$, akkor

$$(1-a)^5(1+a)(1+2a)^2 \leq 0 \leq 1.$$

2. lépés. Ha $a \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$, és $a \neq 0$, akkor

$$1-a, \qquad 1+a, \qquad \text{ill.} \qquad 1+2a$$

különböző pozitív számok, ha pedig $a = 0$, akkor egyenlőség áll fenn: $1 \leq 1$. Így $0 \neq a \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$ esetén

$$(1-a)^5(1+a)(1+2a)^2 < \left(\frac{5(1-a)+1+a+2(1+2a)}{8}\right)^8 = \left(\frac{8}{8}\right)^8 = 1. \quad \blacksquare$$

Feladat. Alkalmazzuk a mértani és a számtani közép közötti egyenlőtlenséget az alábbi számokra!

1. $x_k := 1 + \frac{1}{n} \quad (k \in \{1, \ldots, n\}), \qquad x_{n+1} := 1;$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot 1 < \left(\frac{n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+1+1}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

2. $x_k := 1 + \frac{1}{n} \quad (k \in \{1, \ldots, n\}), \qquad x_{n+1} := x_{n+2} := \frac{1}{2}.$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 4\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} < 4 \cdot \left(\frac{n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{n+2}\right)^{n+2} =$$

$$= 4 \cdot \left(\frac{n+1+1}{n+2}\right)^{n+2} = 4.$$

Feladat. Mutassuk meg, hogy ha

1. $n \in \mathbb{N}$ és $\alpha \in (1, +\infty)$, akkor

$$\boxed{\frac{\alpha - 1}{\alpha n} \leq \sqrt[n]{\alpha} - 1 \leq \frac{\alpha - 1}{n}};$$

Felhasználva a mértani közép és a számtani közép, ill. a harmonikus közép és a mértani közép közötti egyenlőtlenséget azt kapjuk, hogy

$$\sqrt[n]{\alpha} = \sqrt[n]{1 \cdots 1 \cdot \alpha} \leq \frac{(n-1) \cdot 1 + \alpha}{n} = 1 + \frac{\alpha - 1}{n}$$

és

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{\alpha} &= \sqrt[n]{1 \cdots 1 \cdot \alpha} \geq \frac{n}{(n-1) \cdot \frac{1}{1} + \frac{1}{\alpha}} = \frac{\alpha n}{\alpha n - \alpha + 1} = \frac{\alpha n - \alpha + 1 + \alpha - 1}{\alpha n - \alpha + 1} = \\
&= 1 + \frac{\alpha - 1}{\alpha n - \alpha + 1} > 1 + \frac{\alpha - 1}{\alpha n}.
\end{aligned}$$

2. $n \in \mathbb{N}$ és $\alpha \in (0, 1)$, akkor

$$\boxed{\frac{1 - \alpha}{n} \leq 1 - \sqrt[n]{\alpha} \leq \frac{1 - \alpha}{\alpha n}};$$

Ha $\alpha \in (0, 1)$, akkor

$$\frac{1}{\alpha} \in (1, +\infty),$$

így az 1. felhasználásával adódik a két becslés.

3. $n \in \mathbb{N}$, akkor

$$\boxed{1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1 + 2 \cdot \frac{\sqrt{n} - 1}{n}}.$$

Az első egyenlőtlenség triviális. A második:

$$\sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1} \leq \frac{2\sqrt{n} + (n-2) \cdot 1}{n} = 1 + 2 \cdot \frac{\sqrt{n} - 1}{n}. \quad \blacksquare$$

Feladat. Igazoljuk, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ számra fennáll a

$$2\sqrt{n+1} - 2 < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

egyenlőtlenség!

- Ha $n = 1$, akkor az állítás nyilvánvalóan igaz, ui.

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 > 2\sqrt{1+1} - 2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 3 > 2\sqrt{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 9 > 8.$$

- Tegyük fel, hogy valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > 2\sqrt{n+1} - 2$$

teljesül (indukciós feltevés). Mivel

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

ezért ha belátjuk, hogy

$$2\sqrt{n+1} - 2 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > 2\sqrt{n+1+1} - 2,$$

akkor igazoltuk az állítást. A fenti egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha

$$2\sqrt{n+1} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > 2\sqrt{n+2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2(n+1) + 1 > 2\sqrt{n+2}\sqrt{n+1}.$$

Ez utóbbi pedig nem más, mint

$$2n + 3 > 2\sqrt{n^2 + 3n + 2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 4n^2 + 12n + 9 > 4n^2 + 12n + 8 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 9 > 8,$$

ami igaz. ■

Feladat. Igazoljuk, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén fennállnak az alábbi egyenlőségek!

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \boxed{1 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}};$

- $n = 1$ esetén
$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}.$$
- Tegyük fel, hogy valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ekkor
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \\ &= \frac{n(n+1)+2n+2}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \boxed{1^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$;

- $n = 1$ esetén
$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1 = \frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}.$$
- Tegyük fel, hogy valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Ekkor
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)[2n^2+n+6n+6]}{6} = \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}. \end{aligned}$$

3. $$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \boxed{1^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}} = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2;$$

- $n = 1$ esetén
$$\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = 1 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}.$$

- Tegyük fel, hogy valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

  Ekkor
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \\ &= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2[n^2 + 4(n+1)]}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.\end{aligned}$$

4. $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \boxed{\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}}.$$

- $n = 1$ esetén
$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}.$$

- Tegyük fel, hogy valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

  Ekkor
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \\ &= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}.\end{aligned}$$

Feladat. Igazoljuk, hogy fennállnak az alábbi egyenlőtlenségek!

1. $2^n > n^2$ $(5 \leq n \in \mathbb{N})$;

- $n = 5$ esetén $2^5 = 32 > 25 = 5^2$.
- Tegyük fel, hogy valamely $5 \leq n \in \mathbb{N}$ esetén $2^n > n^2$. Ekkor

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2 \cdot n^2.$$

Ha be tudjuk látni, hogy

$$2 \cdot n^2 > (n+1)^2 \qquad (5 \leq n \in \mathbb{N})$$

teljesül, akkor készen vagyunk. Ez utóbbi egyenlőtlenség az alábbi ekvivalencialánc következménye:

$$2 \cdot n^2 > (n+1)^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad n \cdot n > 2n+1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad n(n-2) > 1 \cdot 1 = 1. \quad \blacksquare$$

2. $2\sqrt{n+1} - 2 < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n} - 1$ $(2 \leq n \in \mathbb{N})$;

- Ha $n = 2$, akkor

$$2\sqrt{3} - 2 < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2\sqrt{6} < 3\sqrt{2} + 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 24 < 18 + 6\sqrt{2} + 1,$$

ami igaz, ui. $25 < 72$, továbbá

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2} - 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sqrt{2} + 1 < 4 - \sqrt{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2\sqrt{2} < 3,$$

ami igaz, ui. $8 < 9$.

- Tegyük fel, hogy valamely $2 \leq n \in \mathbb{N}$ esetén

$$2\sqrt{n+1} - 2 < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n} - 1.$$

Ekkor

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Ha belátjuk, hogy

$$2\sqrt{n+2} - 2 < 2\sqrt{n+1} - 2 + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

és

$$2\sqrt{n} - 1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1} - 1,$$

akkor igazoltuk az állítást. A fenti két egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha

$$4n + 8 < 4n + 4 + \frac{1}{n+1} + 4, \qquad \text{azaz} \qquad 0 < \frac{1}{n+1}$$

és

$$2\sqrt{n}\sqrt{n+1} < 2(n+1), \qquad \text{azaz} \qquad n^2 + n < n^2 + 2n + 1.$$

3. $\frac{1}{2\sqrt{n}} \leq \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ $(n \in \mathbb{N})$;

1. lépés.

- Ha $n = 1$, akkor

$$\frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot 1 - 1}{2 \cdot 1}.$$

- Tegyük fel, hogy valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} \leq \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}.$$

  Ekkor

$$\prod_{k=1}^{n+1} \frac{2k-1}{2k} = \frac{2n+1}{2n+2} \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}.$$

  Ha belátjuk, hogy

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \cdot \frac{2n+1}{2n+2},$$

  akkor igazoltuk az állítást. A fenti egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha

$$2\sqrt{n}(n+1) \leq \sqrt{n+1} \cdot (2n+1), \qquad \text{azaz} \qquad 4n^3 + 8n^2 + 4n \leq 4n^3 + 8n^2 + 5n + 1.$$

2. lépés.

- Ha $n = 1$, akkor

$$\frac{2 \cdot 1 - 1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sqrt{3} \leq 2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 3 \leq 4.$$

- Tegyük fel, hogy valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Ekkor
$$\prod_{k=1}^{n+1}\frac{2k-1}{2k}=\frac{2n+1}{2n+2}\cdot\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}.$$
Ha belátjuk, hogy
$$\frac{2n+1}{2n+2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\leq\frac{1}{\sqrt{2n+3}},$$
akkor igazoltuk az állítást. A fenti egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha
$$(2n+1)\sqrt{2n+3}\leq 2(n+1)\sqrt{2n+1},$$
azaz
$$8n^3+20n^2+14n+3\leq 8n^3+20n^2+16n+4. \quad \blacksquare$$

4. $(2n)! < 2^{2n}\cdot(n!)^2$ $(n\in\mathbb{N})$;

- Ha $n=1$, akkor
$$(2\cdot 1)! = 2 < 4 = 2^{2\cdot 1}\cdot(1!)^2.$$
- Tegyük fel, hogy valamely $n\in\mathbb{N}$ esetén $(2n)! < 2^{2n}\cdot(n!)^2$ teljesül. Ekkor
$$\begin{aligned}2^{2(n+1)}\cdot((n+1)!)^2 &= 2^{2n+2}\cdot((n+1)n!)^2 = 4\cdot 2^{2n}\cdot(n!)^2\cdot(n+1)^2 = \\ &= 4\cdot(n+1)^2\cdot 2^{2n}\cdot(n!)^2 > 4\cdot(n+1)^2\cdot(2n)!.\end{aligned}$$
  Ha belátjuk, hogy
$$4\cdot(n+1)^2\cdot(2n)! > ((2(n+1))!,$$
  akkor készen vagyunk. Mivel
$$((2(n+1))! = (2n+2)! = (2n)!\cdot(2n+1)\cdot(2n+2),$$
  ezért
$$4\cdot(n+1)^2\cdot(2n)! > ((2(n+1))! \quad\Longleftrightarrow\quad 4\cdot(n+1)^2 > (2n+1)\cdot(2n+2),$$
  azaz
$$4\cdot(n+1)^2\cdot(2n)! > ((2(n+1))! \quad\Longleftrightarrow\quad 4n^2+8n+4 > 4n^2+6n+2 \quad\Longleftrightarrow\quad 2n>2,$$
  ami igaz.

5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n+1} > 1 \ (n \in \mathbb{N})$.

- Ha $n = 1$, akkor
$$\sum_{k=1}^{2\cdot 1+1} \frac{1}{1+k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{6+4+3}{12} = \frac{13}{12} > 1.$$
- Ha valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén
$$\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{n+k} > 1,$$

akkor

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n+3} \frac{1}{n+1+k} &= \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{n+1+k} + \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+4} = \sum_{k=2}^{2n+2} \frac{1}{n+k} + \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+4} = \\
&= \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+4} > \\
&= 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+4}.
\end{aligned}$$

Ha belátjuk, hogy

$$1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+4} > 1, \qquad \text{azaz} \qquad -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+4} > 0$$

akkor készen vagyunk. Világos, hogy

$$-\frac{1}{n+1} + \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+4} = \frac{1}{3n+2} - \frac{2}{3(n+1)} + \frac{1}{3n+4} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3(n+1)(3n+4) - 2(3n+2)(3n+4) + 3(n+1)(3n+2)}{3(n+1)(3n+2)(3n+4)} = \\
&= \frac{3(n+1)(6n+6) - 2(3n+2)(3n+4)}{3(n+1)(3n+2)(3n+4)} = \frac{18(n+1)^2 - 2(3n+2)(3n+4)}{3(n+1)(3n+2)(3n+4)} = \\
&= \frac{18n^2 + 36n + 18 - 18n^2 - 36n - 16}{3(n+1)(3n+2)(3n+4)} = \frac{2}{3(n+1)(3n+2)(3n+4)} > 0. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

2. Bizonyítsuk be, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén fennállnak az alábbi egyenlőtlenségek!

(a) $\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n} < \left(1+\frac{3}{n+1}\right)^{n+1}$;

1. módszer Legyen

$$a := 1+\frac{3}{n}, \qquad \text{ill.} \qquad b := 1+\frac{3}{n+1}.$$

Ekkor $a > b > 0$, így az

$$a^{n}\left[a-(n+1)(a-b)\right] < b^{n+1}$$

egyenlőtlenség felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n} \underbrace{\left(1+\frac{3}{n}-(n+1)\left(1+\frac{3}{n}-1-\frac{3}{n+1}\right)\right)}_{=1} < \left(1+\frac{3}{n+1}\right)^{n+1}.$$

A bal oldalon a második tényező 1, így a kívánt egyenlőtlenséget kapjuk.

2. módszer A mértani és a számtani közép közötti egyenlőtlenséget alkalmazva

$$\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n} = 1\cdot\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n} < \left(\frac{1+n\left(1+\frac{3}{n}\right)}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{1+n+3}{n+1}\right)^{n+1} =$$

$$= \left(1+\frac{3}{n+1}\right)^{n+1}.$$

(b) $\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n} < 27\cdot\left(1+\frac{1}{n+3}\right)^{n+3}$.

(b) A mértani és a számtani közép közötti egyenlőtlenséget alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n} = 27\cdot\frac{1}{27}\cdot\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n} = 27\cdot\overset{1}{\frac{1}{3}}\cdot\overset{2}{\frac{1}{3}}\cdot\overset{3}{\frac{1}{3}}\cdot\overset{1}{\left(1+\frac{3}{n}\right)}\cdot\ldots\cdot\overset{n}{\left(1+\frac{3}{n}\right)} <$$

$$< 27\cdot\left(\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+n\cdot\left(1+\frac{3}{n}\right)}{n+3}\right)^{n+3} = 27\cdot\left(\frac{1+n+3}{n+3}\right)^{n+3} =$$

$$= 27\cdot\left(1+\frac{1}{n+3}\right)^{n+3}.$$

3. Igazoljuk, hogy bármely $2 \le n \in \mathbb{N}$ esetén fennáll a

$$2^n > 1 + n\sqrt{2^{n-1}}$$

egyenlőtlenség!

1. módszer. A mértani közép és a számtani közép közötti egyenlőtlenséget felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\frac{2^n - 1}{n} = \frac{2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 4 + 2 + 1}{n} > \sqrt[n]{2^{n(n-1)/2}} = \sqrt{2^{n-1}},$$

ahonnan átrendezéssel

$$2^n > 1 + n\sqrt{2^{n-1}}$$

adódik.

2. módszer. (Teljes indukcióval.)

- Ha $n = 2$, akkor

$$2^2 = 4 > 1 + 2\sqrt{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 3 > 2\sqrt{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 9 > 8.$$

- Ha valamely $2 \le n \in \mathbb{N}$ esetén

$$2^n > 1 + n\sqrt{2^{n-1}},$$

akkor

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2(1 + n\sqrt{2^{n-1}}).$$

Ha belátjuk, hogy

$$2(1 + n\sqrt{2^{n-1}}) > 1 + (n+1)\sqrt{2^n},$$

akkor igazoltuk az állítást. Mivel a

$$2(1 + n\sqrt{2^{n-1}}) > 1 + (n+1)\sqrt{2^n}$$

egyenlőtlenség a

$$2 + 2n\sqrt{2^{n-1}} = 2 + \sqrt{2}n\sqrt{2^n} > 1 + (n+1)\sqrt{2^n},$$

azaz a

$$(*) \qquad 1 + \sqrt{2}n\sqrt{2^n} > (n+1)\sqrt{2^n}$$

egyenlőtlenséggel egyenértékű, és az iménti egyenlőtlenségben $\sqrt{2^n}$ együtthatóira:

$$\sqrt{2}n > n+1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\sqrt{2}-1)n > 1,$$

azaz

$$n > \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{1}{\sqrt{2}-1}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}+1,$$

ezért a $(*)$ egyenlőtlenség minden $3 \leq n \in \mathbb{N}$ szám esetén fennáll. Ha pedig $n = 2$, akkor

$$1+\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2^2} > 3\cdot\sqrt{2^2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 4\cdot\sqrt{2} > 5 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 32 > 25.$$

4. Legyen

$$x \in [-1,+\infty), \qquad \text{ill.} \qquad r \in \mathbb{Q}.$$

Igazoljuk, hogy ha

(a) $0 \leq r \leq 1$, úgy

$$(1+x)^r \leq 1+rx;$$

A $0 \leq r \leq 1$ eset bizonyítása. Mivel $r \in \mathbb{Q}$, ezért alkalmas $p, q \in \mathbb{N}$, $p \leq q$ esetén $r = \frac{p}{q}$. Tekintsük az

$$\underbrace{1,\ldots,1}_{q-p\text{ darab}},\underbrace{(1+x),\ldots,(1+x)}_{p\text{ darab}}$$

q-darab valós számot. Ezeknek a számoknak a mértani közepe, ill. számtani közepe:

$$(1+x)^{p/q}, \qquad \text{ill.} \qquad 1+\frac{p}{q}x.$$

Így tehát

$$(1+x)^{p/q} \leq 1+\frac{p}{q}x, \qquad \text{azaz} \qquad (1+x)^r \leq 1+rx.$$

(b) $r \geq 1$, úgy

$$(1+x)^r \geq 1+rx.$$

Az $r \geq 1$ eset bizonyítása. Mivel $x \in [-1,+\infty)$, ezért a $0 \leq r \leq 1$ esetben

$$(1+x)^r \leq 1+rx \qquad \Longleftrightarrow \qquad 1+x \leq \left(1+\frac{p}{q}x\right)^{q/p}.$$

Ha most $y := \frac{p}{q}x$, akkor $x \geq -1$ következtében $y \geq -\frac{p}{q} \geq -1$. Innen $x = \frac{q}{p}y$, ill.

$$1 + \frac{q}{p}y \leq (1+y)^{q/p}$$

következik. Mivel $s := \frac{q}{p} \geq 1$, ezért a fentiek következtében

$$(1+y)^s \geq 1 + sy.$$

5. Igazoljuk, hogy fennállnak az alábbi egyenlőtlenségek!

(a) $\frac{1}{2} \leq \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n < \frac{2}{3} \qquad (n \in \mathbb{N});$

Külön-külön igazoljuk az alsó, ill. a felső becslést.

- Az alsó becslés a következő módon látható be. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $-\frac{1}{2n} \geq -2$, ezért Bernoulli-egyenlőtlenségből

$$\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n \geq 1 - \frac{n}{2n} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

következik.

- A felső becsléshez azt használjuk fel, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n = \left(\frac{2n-1}{2n}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{2n}{2n-1}\right)^n} = \frac{1}{\left(\frac{2n-1+1}{2n-1}\right)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2n-1}\right)^n},$$

továbbá $\frac{1}{2n-1} \geq -2$, így a Bernoulli-egyenlőtlenséget felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2n-1}\right)^n} \leq \frac{1}{1 + \frac{n}{2n-1}} = \frac{2n-1}{3n-1} < \frac{2}{3} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 6n - 3 < 6n - 2.$$

(b) $n^n > (n+1)^{n-1} \qquad (2 \leq n \in \mathbb{N});$

Világos, hogy bármely $2 \leq n \in \mathbb{N}$ esetén

$$n^n > (n+1)^{n-1} \qquad \Longleftrightarrow \frac{n^n}{(n+1)^n} > \frac{1}{n+1}.$$

Így a nyilvánvaló

$$\frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n$$

állítást és a Bernoulli-egyenlőtlenséget felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n > 1-\frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1},$$

azaz igaz az állítás.

(c) $\sqrt[n]{(n!)^3} \leq \dfrac{n(n+1)^2}{4} \qquad (n \in \mathbb{N}).$

Az egyenlőtlenség a mértani közép és a számtani közép közötti egyenlőtlenség, ill. a **??**/3. gyakorló feladat triviális következménye:

$$\sqrt[n]{(n!)^3} = \sqrt[n]{(1\cdot\ldots\cdot n)^3} = \sqrt[n]{1^3\cdot\ldots\cdot n^3} \leq \frac{1^2+\ldots+n^3}{n} = \frac{n^2(n+1)^2}{4n} = \frac{n(n+1)^2}{4}.$$

Jól látható, hogy egyenlőség csak az $n=1$ esetben van.
Megjegyzés. Ha

$$a_n := \frac{n^n(n+1)^{2n}}{4^n(n!)^3} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor az (a_n) sorozatra tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \geq 1$ teljesül, hiszen $a_1 = 1$, továbbá az

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}(n+2)^{2n+2}}{4^{n+1}[(n+1)!]^3}\cdot\frac{4^n(n!)^3}{n^n(n+1)^{2n}} = \frac{1}{4}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\left(\frac{n+2}{n}\right)^n\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = \\ &= \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\end{aligned}$$

egyenlőségből, ill. a Bernoulli-egyenlőtlenség felhasználásából

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} &\geq \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{n+2}{n+1}\right)(1+2)(1+1) = \\ &= \frac{6}{4}\cdot\frac{n+2}{n+1} > \frac{6}{4} = \frac{3}{2} > 1\end{aligned}$$

következik, ami azt jelenti, hogy az (a_n) sorozat monoton növekedő.
Látható, hogy

$$a_2 = \frac{81}{32} > \left(\frac{3}{2}\right)^2,$$

$$a_n > \left(\frac{3}{2}\right)^n \qquad (2 \leq n \in \mathbb{N}). \quad \blacksquare$$

6. Lássuk be, hogy bármely $a, b, c \in (0, +\infty)$ fennáll az

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{c}\right)\left(c + \frac{1}{a}\right) > 7$$

becslés!

A mértani és a számtani közép közötti egyenlőtlenség következménye, hogy bármely $a, b, c \in (0, +\infty)$ számra

$$a + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{1}{b}}, \qquad b + \frac{1}{c} \geq 2\sqrt{b \cdot \frac{1}{c}}, \qquad c + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{c \cdot \frac{1}{a}}.$$

Így

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{c}\right)\left(c + \frac{1}{a}\right) \geq 8\sqrt{a \cdot \frac{1}{b} \cdot b \cdot \frac{1}{c} \cdot c \cdot \frac{1}{a}} = 8 > 7. \quad \blacksquare$$