7. feladatsor: Polinomok

1. Határozzuk meg a $\mathbb{Z}$ feletti $3x^8 + 5x^6 - 11x^3 + 7x^2 - 15x + 8$ és $16x^7 - 13x^6 + 6x^3 - 13x + 21$ polinomok szorzatában a 0-ad, 9-ed, 14-ed, 15-öd és 20-ad fokú tag együtthatóját! Oldjuk meg ugyanezt $\mathbb{Z}_{24}$ felett is! Mennyi lesz ekkor a szorzatpolinom foka?

2. Adjuk meg $\mathbb{Z}_{72}$ felett a $8x^2 + 12$ és a $18x + 36$ polinomok szorzatát!

3. Osszuk el az $f(x)$ polinomot $g(x)$-szel maradékosan $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_7$ és $\mathbb{Z}_6$ felett, ha lehet
a) $f(x) = 42x^4 - 7x^3 + 13x^2 + 43x - 12,\ \ g(x) = x^2 - x + 1;$
b) $f(x) = x^3 - 3x^2 - x - 1,\ \ g(x) = 3x^2 - 2x + 1;$
c) $f(x) = 5x^4 + 2x - 3,\ \ g(x) = 2x^2 - 3x + 4;$
d) $f(x) = x^3,\ \ g(x) = 2x + 3;$
e) $f(x) = x^2 + 3x - 2,\ \ g(x) = 6x^4 + 5x^2 - 3x + 2;$
f) $f(x) = x^3 + x^2 + 3x + 2,\ \ g(x) = 2x^2 + 4.$

Polinomok helyettesítési értékei, gyökei, Horner-elrendezés

4. Keressük meg az $f(x) = x^4 - 3x^3 + x + 6$ polinom helyettesítési értékét a $3, -1, 2, -2$ helyeken!

5. Az $x - c$-vel való maradékos osztás segítségével határozzuk meg az alábbi $\mathbb{C}[x]$-beli polinomok helyettesítési értékét az adott helyen:
a) $x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 10x + 16, \quad c = 4;$
b) $x^5 + (1 + 2i)x^4 - (1 + 3i)x^2 + 7, \quad c = -2 - i;$
c) $x^4 - 3ix^3 - 4x^2 + 5ix - 1, \quad c = 1 + 2i.$

6. Határozzuk meg az alábbi maradékos osztások hányadosát és maradékát az R gyűrű felett a Horner-módszer segítségével: $f(x) = 3x^5 + 2x^2 - 7x + 2$
a) $g(x) = x - 3, R = \mathbb{Z};$ **b)** $g(x) = x + 2, R = \mathbb{Z};$ **c)** $g(x) = x - 1/2, R = \mathbb{Q};$
d) $g(x) = x - 3, R = \mathbb{Z}_3;$ **e)** $g(x) = x - 3, R = \mathbb{Z}_5.$

7. Határozzuk meg az alábbi maradékos osztások hányadosát és maradékát a Horner-módszer segítségével: **a)** $f(x) = 4x^3 + x^2$, $g(x) = x + 1 + i;$ **b)** $f(x) = x^3 - x^2 - x$, $g(x) = x - 1 + 2i.$

8. Határozzuk meg a p értékét úgy, hogy az $f(x) = x^5 + 3x^4 + 5x + p$ polinom osztható legyen $x - 2$-vel!

9. Hogyan kell megválasztani a p, q, m értékeket, hogy az $x^3 + px + q$ polinom $\mathbb{C}$ felett osztható legyen az $x^2 + mx - 1$ polinommal?

10. Az $x - c$-vel való ismételt maradékos osztás segítségével írjuk fel a következõ $\mathbb{C}[x]$-beli polinomokat $x - c$ hatványai segítségével: **a)** $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1, c = -1;$ **b)** $x^5, c = 1.$

11. Határozzuk meg az $x^2 + 4x + 3 \in \mathbb{Z}_8[x]$ polinom összes gyökét!

12. Hányszoros gyöke 2 az $x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8 \in \mathbb{Z}[x]$ polinomnak?

13. Határozzuk meg az a együtthatót úgy, hogy -1 legalább kétszeres gyöke legyen az $x^5 - ax^2 - ax + 1 \in \mathbb{R}[x]$ polinomnak.

14. Határozzuk meg a legalacsonyabb fokú olyan $h \in K[x]$ polinomot, amely az f-fel osztva u, a g-vel osztva v maradékot ad, ha
a) $f = x^3 + 1, g = x^3 + x^2 - 2, u = -x^2, v = x^2 - 2x + 2, K = \mathbb{Q}$;
b) $f = x^2 - 2x + 1, g = x^3 - 3x^2 + 2, u = x, v = x^2 + x + 1, K = \mathbb{R}$;
c) $f = x^3 + x^2 + 1, g = x^3 + x^2 + 1, u = x + 1, v = x^2 + x + 1, K = \mathbb{Z}_2$.