1. előadás

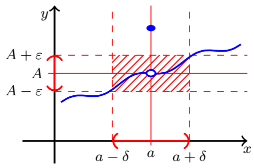
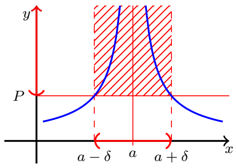
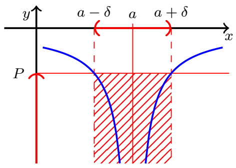
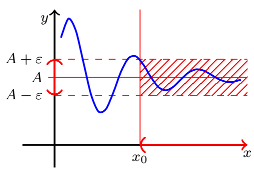
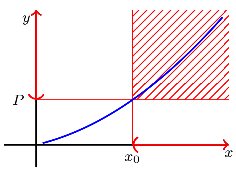
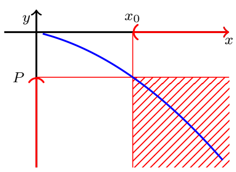
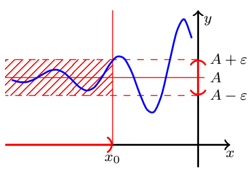
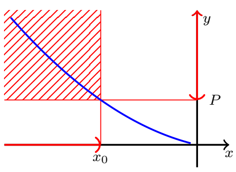
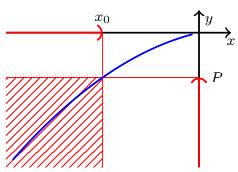
DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS 1.

A differenciálszámítás a matematikai analízis egyik legfontosabb eszköze, amellyel meg tudjuk vizsgálni milyen gyorsan változik a függvény értéke az egyes helyeken, és ez egy jóval részletesebb függvénymegismerésre ad lehetőséget. Segítségével fontos gyakorlati alkalmazhatósággal bíró tulajdonságokat is meghatározhatunk, mint például a függvény monotonitását, szélsőértékhelyeit, a függvényhez húzott érintőegyenes meredekségét, stb. Ezek olyan fontos alkalmazási területek, melyeknek már az ókorban is komoly hagyományai voltak, igaz akkor még végtelen kicsiny mennyiségekkel, ún. infinitezimálisokkal próbáltak számolni. Sőt, még a XVIII. században is olyan módszereket alkalmaztak, melyek mai szemmel nézve nem voltak elég precízek. Csak a határérték fogalmának tisztázása tette lehetővé a pontos számítások elvégzését.

Emlékeztető a függvény határértékéről

Az Analízis I. kurzuson megismertük a matematikai analízis egyik legfontosabb fogalmát, nevezetesen a valós–valós függvények pontbeli határértékének definícióját. Emlékeztetünk arra, hogy ezzel a fogalommal egy függvénynek azt a – szemléletünk alapján eléggé világos – tulajdonságát fogalmaztuk meg matematikai szempontból pontos formában, hogy egy adott a ponthoz „közeli” helyeken a függvényértékek „közel” vannak valamely A értékhez.

Azonban, egy ennél általánosabb fogalmat adtunk meg, ahol a és A nem csak valós értékek, hanem $\pm\infty$ is lehetnek. Környezetek segítségével sikerült egy egységes fogalmat alkotni, ami egyenlőtlenségekkel kilenc speciális esetre át lehetett fogalmazni. Ezek a következő ábrán szemléltethetők.

$\boldsymbol{A = \lim_a f}$	$A \in \mathbb{R}$	$A = +\infty$	$A = -\infty$
$a \in \mathbb{R}$	 $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta > 0, \forall \in \mathcal{D}_f, 0 < \lvert x-a \rvert < \delta \colon \lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$	 $\forall P > 0$-hoz $\exists \delta > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, 0 < \lvert x-a \rvert < \delta \colon f(x) > P$	 $\forall P < 0$-hoz $\exists \delta > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, 0 < \lvert x-a \rvert < \delta \colon x) < P$
$a = +\infty$	 $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists x_0 > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, x > x_0 \colon \lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$	 $\forall P > 0$-hoz $\exists x_0 > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, x > x_0 \colon f(x) > P$	 $\forall P < 0$-hoz $\exists x_0 > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, x > x_0 \colon f(x) < P$
$a = -\infty$	 $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists x_0 < 0, \forall \in \mathcal{D}_f, x < x_0 \colon \lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$	 $\forall P > 0$-hoz $\exists x_0 < 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, x < x_0 \colon f(x) > P$	 $\forall P < 0$-hoz $\exists x_0 < 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, x < x_0 \colon f(x) < P$

A fenti esetek közül nézzük meg közelebbről azt az esetet, amikor a és A valós számok. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathcal{D}_f'$. Azt mondjuk, hogy ***az f függvénynek az a pontban vett határértéke az A szám***, ha

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0,\ \forall x \in \mathcal{D}_f, 0 < |x - a| < \delta\colon |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Ezt az alábbi szimbólumok valamelyikével jelöljük:

$$\lim_a f = A, \qquad \lim_{x \to a} f(x) = A, \qquad f(x) \to A, \text{ ha } x \to a.$$

A függvény határértékének definíciójának van egy vele ekvivalens állítás, amelyet ***átviteli elvnek*** nevezzük:

$$\lim_a f = A \quad \iff \quad \forall (x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f \setminus \{a\},\ \lim_{n \to +\infty} x_n = a \text{ esetén } \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = A.$$

Gyakorlaton konkrét határértékek kiszámításában nagy segítséget jelentet ***a határérték és a műveletek kapcsolata***, amely lényegében azt mondja ki, hogy az algebrai műveletek és a határérték képzési sorrendje felcserélhető, ha a műveletek elvégezhetők az $\overline{\mathbb{R}}$ kibővített valós számok halmazán. Így többek között nem tudjuk alkalmazni az előbbi kapcsolatot, ha olyan hányados határértékéről van szó, amelynek számlálójában és nevezőjében szereplő függvények határértéke az adott pontban egyszerre nulla. Ekkor $0/0$ típusú kritikus határértékről beszélünk.

Több nevezetes határértéket is tanultunk az Analízis I. kurzuson. Ezek közül szeretnék kiemelne a következő

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

határértékeket. Nem nehéz igazolni ezeket, ha kiindulunk a szinusz és exponenciális függvény hatványsoros definíciójából, és alkalmazzuk ***a hatványsor összegfüggvényének a határértékéről*** szóló tételt. Ez azt mondja ki, hogy egy pozitív konvergenciasugárral rendelkező hatványsor összegfüggvénynek van határértéke a konvergenciahalmazának minden pontjában, és ez a határérték megegyezik az összegfüggvény pontbeli értékével.

Az előbbi tulajdonság a ***függvény pontbeli folytonossághoz*** vezet. Akkor mondjuk, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény folytonos az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban, ha

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0,\ \forall x \in \mathcal{D}_f, |x - a| < \delta\colon |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Jelölés: $f \in C\{a\}$. Két lehetőség adódik:

- ha $a \in \mathcal{D}_f$, de $a \notin \mathcal{D}_f'$, azaz a izolált pont, akkor $f \in C\{a\}$.
- ha $a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_f'$, akkor $\qquad f \in C\{a\} \quad \iff \quad \exists \lim_a f$ és $\lim_a f = f(a)$.

Ezért, ha egy függvény értelmezési tartományának nincsenek izolált pontjai, pl. egy intervallum, akkor a függvény akkor és csak akkor folytonos valamely pontjában, ha ott létezik határértéke, és ez megegyezik a függvény pontbeli értékével. Az előbbiek szerint egy hatványsor összegfüggvénye folytonos a konvergenciahalmazának minden pontjában. Ezért az exponenciális, a szinusz és a koszinusz függvények folytonosak a valós számok halmazán.

Egyoldali határértékeket is értelmeztünk. Lényegében akkor mondjuk, hogy egy f függvénynek van jobb oldali határértéke az a pontban, ha az f a $\mathcal{D}_f \cap (a, +\infty)$ halmazra való leszűkítésének van határértéke az a pontban. Bal oldali határérték esetén a $\mathcal{D}_f \cap (-\infty, a)$ halmazra való leszűkítést nézzük. A határértékre vonatkozó alaptételek az egyoldali határértékekre is érvényesek. Továbbá, ha az a pont bal és jobb oldali torlódási pontja $\mathcal{D}_f$-nek, akkor

$$\exists \lim_a f \quad \iff \quad \exists \lim_{a-0} f,\ \exists \lim_{a+0} f \ \text{ és } \ \lim_{a-0} f = \lim_{a+0} f \ \left(= \lim_a f\right).$$

Két szemléletes probléma

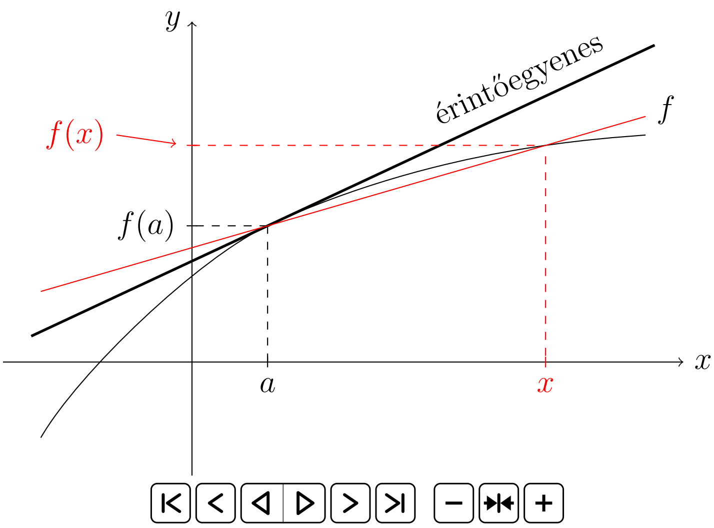
A derivált definíciójának értelmezése előtt két olyan problémát vázolunk, amelyek jól megvilágítják a derivált értelmezésének szükségességét, sőt a definíció célszerű módját is sugallják.

Az ún. ***érintő problémával*** fogjuk elkezdeni. Tegyük fel, hogy I egy nyílt intervallum, illetve $f : I \to \mathbb{R}$ és $a \in I$. A kérdés az, hogy hogyan határozhatjuk meg az f függvény görbéjéhez az a abszcisszájú pontban húzott érintőegyenes (vagy egyszerűen érintő) egyenletét. Az előző kérdés egy másikat vet fel, mégpedig az érintő fogalmát az analízisben. A geometriából olyan intuitív fogalom alakul ki bennünk az érintőről, amely igazán csak olyan speciális görbéknél alkalmazható, mint a kör és további másodrendű görbék. Olyan fogalomra van szükségünk, amivel el tudjuk dönteni, hogy létezik-e az érintő a megadott a abszcisszájú pontban, és ha igen, akkor meg tudjuk vele határozni az érintő egyenletét.

Induljunk ki abból, hogy az (x_0, y_0) ponton átmenő m meredekségű egyenes egyenlete

$$y = m(x - x_0) + y_0.$$

Az érintő az f függvény görbéjét az $(a, f(a))$ pontban metszi, azaz $x_0 = a$ és $y_0 = f(a)$. Ha még az m meredekséget is ismernénk, akkor fel tudnánk írni az érintő egyenletét. Ehhez tekintsük meg a következő animációt.



Ha x az I intervallum egy a-tól különböző pontja, akkor tekintsük azt a szelőegyenest, amely az $\big(a, f(a)\big)$ és az $\big(x, f(x)\big)$ pontokon megy át (piros színnel ábrázolva). Mivel ismerjük a szelőegyenes két pontját, ezért ki tudjuk számolni a meredekségét. Ez természetesen függ az x érték megválasztásától, így értékét a következő függvény adja:

$$F(x) := \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad (x \in I,\ x \neq a).$$

Az animációban látható, hogy ha az x érték elég közel van az a értékéhez, akkor a szelőegyenes egy „határegyenes” közelébe kerül. Ezt fogjuk majd érintőnek nevezni. Meredeksége a szelőegyenesek meredekségének határértéke, ha $x \to a$. Ez precízen kifejezhető az F függvény a pontban vett határértékkel:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Célszerűnek tűnik tehát ezzel a határértékkel értelmezni az érintő meredekségét, ha a határérték létezik.

Tekintsük most a következő fizikai problémát. Egy pontszerű test akkor végez egyenletes mozgást egy egyenes pályán, hogy ha bármely megtett szakasz hosszát elosztjuk a szakasz megtételére szükséges idő nagyságával, akkor ugyanazt az értéket kapjuk. Ezt a hányadost a test ***sebességének*** nevezzük. Ha egy test nem egyenletesen mozog, akkor is beszélhetünk a test ***átlagsebességéről*** egy adott szakaszon, ami nem más, mint a szakasz hossza és az ennek megtételéhez szükséges idő hányadosa. Hogyan tudnánk egy test sebességét értelmezni egy adott időpontban?

Ha egy egészen kicsi időintervallumot nézünk, akkor azt várjuk, hogy ez idő alatt a sebesség nem változik jelentősen, így a mozgás közelítőleg egyenletes lesz. Ezért egy test sebességét egy adott időpontban úgy kellene értelmezni, mint egy kellően kis időtartamra vett átlagsebesség, de ez így nem elég precíz. A pontos értelmezéshez ismernünk kell a test mozgását az egyenes pályán a vizsgált I időintervallumban, azaz tudnunk kell milyen távolságban van a test egy, a pályán található referenciaponttól a t időpillanatban, ahol $t \in I$. Jelölje $s(t)$ ezt a távolságot, de mivel két irány van, meg kell őket különböztetni. Legyen az $s(t)$ értéke pozitív, ha a t időpillanatban a test a referenciapont jobb oldalán, és negatív, ha a bal oldalán van. Ezt a függvényt a test ***elmozdulásfüggvényének*** hívjuk.

Vegyünk egy t_0 időpontot az I intervallum belsejéből! Ha $t \in I$ egy másik időpont, akkor $\Delta t := t - t_0$ a két időpont között eltelt idő előjelesen, azaz pozitív, ha $t > t_0$, és negatív, ha $t < t_0$. Ez idő alatt a test egy $\Delta s := s(t) - s(t_0)$ hosszúságú szakaszt tesz meg, ami szintén előjeles mennyiség. Ezért a

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

különbséghányados a két időpont között eltelt időintervallumban megtett szakaszra vonatkozó átlagsebesség. Ez pozitív, ha a test pozitív irányba halad, és negatív, ha az ellenkező irányba. Az elvárás szerint a test sebessége a t_0 időpontban egy kellően kis Δt időtartamra vett átlagsebesség. Ezért célszerű lenne egy egyenes pályán mozgó test ***pillanatnyi sebességét*** a t_0 időpontban a

$$\lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

határértékkel értelmezni, ami „figyel” a test haladási irányára, azaz pozitív, ha a test pozitív irányba halad, és negatív, ha az ellenkező irányba.

Vegyük észre, hogy a fenti határérték azonos az érintő problémában kapott határértékkel, ezért a továbbiakban kiemelten fogunk ilyen típusú határértékekkel foglalkozni.

A pontbeli derivált fogalma

Egy adott függvény pontbeli deriváltját a függvény értelmezési tartományának olyan pontjaiban értelmezzük, amelyek valamely környezete is az értelmezési tartományhoz tartozik. Az ilyen pontokat belső pontoknak fogjuk nevezni.

1. Definíció. *Tegyük fel, hogy* $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$. *Az* $a \in A$ *pont az* A *halmaz* **belső pontja**, *ha*

$$\exists K(a), \ \text{hogy}\ K(a) \subset A.$$

Az **int** $\boldsymbol{A}$ *szimbólummal jelöljük* **az** $\boldsymbol{A}$ **halmaz belső pontjainak a halmazát**.

Példák: a) Ha $A = [0, 1]$, akkor $\operatorname{int} A = (0, 1)$.

b) Ha $A = (5, 6] \cup \{7\}$, akkor $\operatorname{int} A = (5, 6)$.

c) Ha $A = \{2, 3, 4\}$, akkor $\operatorname{int} A = \emptyset$.

Megjegyzés. Nem nehéz igazolni, hogy

$$\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B.$$

2. Definíció. *Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban* **differenciálható** (*vagy* **deriválható**)*, ha*

$$\textit{létezik és véges a} \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \textit{határérték.}$$

Ezt a határértéket az $f'(a)$ szimbólummal jelöljük, és **az f függvény a pontbeli deriváltjának** (*vagy* **differenciálhányadosának**) *nevezzük, azaz*

$$f'(a) := \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}.$$

Ezt a tényt a következőképpen fogjuk jelölni: $\boldsymbol{f \in D\{a\}}$.

Megjegyzések.

1. A fenti definícióban szereplő határértéket az $h = x - a$ helyettesítéssel gyakran így írjuk fel:
$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$
2. Ha $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$, akkor az
$$F(x) := \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad \big(x \in \mathcal{D}_f \setminus \{a\}\big)$$
függvényt ***az f függvény az a ponthoz tartozó különbséghányados-függvényének*** vagy ***differenciahányados-függvényének*** nevezzük.
3. A derivált definíciójában $0/0$-típusú kritikus határértékről van szó. A számlaló a következő tétel állítása miatt fog tartani a nullához.

A differenciálhatóság erősebb megkötés, mint a folytonosság.

1. Tétel (A folytonosság és a deriválhatóság kapcsolata). *Tegyük fel, hogy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. Ekkor*

a) $f \in D\{a\} \quad \Longrightarrow \quad f \in C\{a\}$,

b) *Az állítás megfordítása nem igaz.*

Bizonyítás.

a) Ha $f \in D\{a\}$, akkor

$$\lim_{x \to a} \big(f(x) - f(a)\big) = \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a)\right) =$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \to a} (x - a) = f'(a) \cdot 0 = 0.$$

Ez éppen azt jelenti, hogy $f \in C\{a\}$.

b) Van olyan folytonos függvény, amelyik egy pontban folytonos, de ott nem deriválható. Például az

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := |x|$$

abszolút érték függvény az $a = 0$ pontban.

Valóban $f \in C\{0\}$, de $f \notin D\{0\}$, hiszen minden $x \neq 0$ esetén

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x| - |0|}{x} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ -1 & (x < 0), \end{cases}$$

és így

$$\lim_{x \to 0-0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1 \qquad \text{és} \qquad \lim_{x \to 0+0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1.$$

Ezért az f függvény 0 pontbeli differenciálhányadosa nem létezik.

Az érintő fogalma

Az előzőek alapján, ha $f \in D\{a\}$, akkor az $\big(a, f(a)\big)$ és az $\big(x, f(x)\big)$ pontokon átmenő szelőegyeneseknek van „határegyenese”, ha $x \to a$. Függvény grafikonjának (mint síkbeli halmaznak) az érintőjén éppen ezt az egyenest célszerű érteni. Az $f \in D\{a\}$ függvény esetén a szóban forgó egyenes átmegy az $\big(a, f(a)\big)$ pontban és a meredeksége $f'(a)$.

3. Definíció. *Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény grafikonjának az $\big(a, f(a)\big)$ pontban* **van érintője**, *ha $f \in D\{a\}$. Az f függvény grafikonjának $\big(a, f(a)\big)$ pontbeli* **érintőjén** *az*

$$y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$$

egyenletű egyenest értjük.

Vegyük észre, hogy a $f'(a)$ definíciójában szereplő határérték véges, ezért az érintő nem lehet párhuzamos az y-tengellyel.

Megjegyzés. Érdemes meggondolni, hogy a kör és a parabola érintőjének a fenti definíciója ekvivalens a középiskolában geometriai úton megadott definícióval.

1. Feladat. *A differenciálhányados fogalmának segítségével határozzuk meg az $f(x) = x^2$ függvény görbéjéhez az $x_0 = 1$ abszcisszájú pontban húzott érintőegyenes egyenletét!*

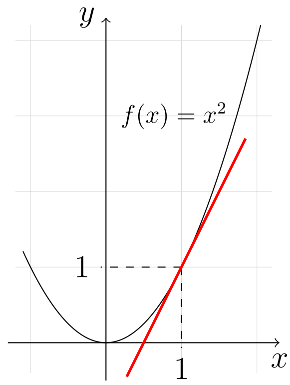
Megoldás. A differenciálhányados fogalma szerint

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{(1 + h)^2 - 1^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2h + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2 + h) = 2.$$

Másrészt $f(1) = 1^2 = 1$, így behelyettesíthetjük ezeket az érintő egyenes egyenletébe:

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) \qquad \Longrightarrow \qquad y = 2x - 1.$$



Deriválási szabályok

A definíció alapján annak eldöntése, hogy egy adott függvény deriválható-e valamilyen pontban, esetenként szinte reménytelen feladat. Éppen ezért különös jelentőséggel bírnak azok az állítások, amelyek ezt megkönnyítik. Ezek az ún. ***deriválási szabályok***, amelyek segítségével bizonyos függvények differenciálhatóságából és deriváltjának ismeretéből következtetni tudunk további függvények differenciálhatóságára és deriváltjára.

2. Tétel (Algebrai műveletekre vonatkozó deriválási szabályok). *Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $f, g \in D\{a\}$ valamilyen $a \in \operatorname{int}(\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g)$ pontban. Ekkor*

1. *a szorzó konstansokat ki tudjuk emelni a deriválásból, azaz*

$$cf \in D\{a\} \quad \textit{és} \quad (cf)'(a) = cf'(a) \qquad (c \in \mathbb{R})$$

2. *tagokból álló függvényeket tagonként deriválhatjuk, azaz*

$$f + g \in D\{a\} \quad \textit{és} \quad (f+g)'(a) = f'(a) + g'(a),$$

3. *egy szorzat deriváltja az az összeg, amelynek tagjai az egyik tényező deriváltja megszorozva a másik tényezővel, azaz*

$$f \cdot g \in D\{a\} \quad \textit{és} \quad (f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a),$$

4. *ha még a $g(a) \neq 0$ feltétel is teljesül, akkor*

$$\frac{f}{g} \in D\{a\} \quad \textit{és} \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Bizonyítás. A bizonyításban többször alkalmazzuk az algebrai műveletek és a határérték felcserélhetőségéről szóló tételt, illetve azt a tényt, hogy ha $g \in D\{a\}$, akkor $g \in C\{a\}$, tehát

$$\lim_{x \to a} g(x) = g(a).$$

1. Nyilván $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_{cf}$, hiszen $\mathcal{D}_{cf} = \mathcal{D}_f$. Másrészt

$$(cf)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{cf(x) - cf(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} c \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = c \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = cf'(a).$$

2. Nyilván $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_{f+g}$, hiszen $\mathcal{D}_{f+g} = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$. Másrészt

$$(f+g)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) + g(x) - (f(a) + g(a))}{x - a} =$$
$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) + g(x) - g(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} =$$
$$= f'(a) + g'(a).$$

3. Nyilván $a \in \operatorname{int}\mathcal{D}_{fg}$, hiszen $\mathcal{D}_{fg} = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$. Másrészt

$$
\begin{aligned}
(fg)'(a) = \lim_{x\to a} \frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} = \\
&= \lim_{x\to a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(x) + f(a)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} = \\
&= \lim_{x\to a} \frac{(f(x)-f(a))g(x) + f(a)(g(x)-g(a))}{x-a} = \\
&= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \lim_{x\to a} g(x) + f(a) \lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).
\end{aligned}
$$

4. $\mathcal{D}_{f/g} = \Big\{x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \mid g(x) \neq 0\Big\}$. Ha $g \in D\{a\}$, akkor $g \in C\{a\}$, ezért a $g(a) \neq 0$ feltétel miatt

$$\exists K(a) \subset \mathcal{D}_g,\ \forall x \in K(a)\colon g(x) \neq 0,$$

hiszen a folytonos függvények előjeltartóak. Mivel $a \in \operatorname{int}\mathcal{D}_f$, így feltételezhetjük, hogy $K(a)$ sugara olyan kicsi, hogy a fentiek mellet $K(a) \subset \mathcal{D}_f$ is teljesül. Ekkor $K(a) \subset \mathcal{D}_{f/g}$, és így $a \in \operatorname{int}\mathcal{D}_{f/g}$. Másrészt

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \lim_{x\to a} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{g(a)g(x)(x-a)} = \\
&= \lim_{x\to a} \frac{f(x)g(a) - f(a)g(a) + f(a)g(a) - f(a)g(x)}{g(a)g(x)(x-a)} = \\
&= \lim_{x\to a} \left(\frac{1}{g(a)g(x)} \cdot \frac{(f(x)-f(a))g(a) - f(a)(g(x)-g(a))}{x-a}\right) = \\
&= \frac{1}{g(a)\lim\limits_{x\to a} g(x)} \left(\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} g(a) - f(a) \lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right) = \\
&= \frac{1}{g^2(a)} \left(f'(a)g(a) - f(a)g'(a)\right).
\end{aligned}
$$

Az összetett függvényre vonatkozó szabály azt mondja ki, hogy egy összetett függvény deriváltjához először a külső függvényt deriváljuk, miközben belseje érintetlen marad. Ezt utána még megszorozzuk a belső függvény deriváltjával.

3. Tétel (Összetett függvény deriváltja). *Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és valamilyen $a \in \operatorname{int}\mathcal{D}_g$ pontban $g \in D\{a\}$, továbbá $f \in D\{g(a)\}$. Ekkor $f \circ g \in D\{a\}$, és*

$$(f \circ g)'(a) = f'\big(g(a)\big) \cdot g'(a).$$

Bizonyítás. A tétel feltételei alapján

$$f \in D\{g(a)\} \quad\Longrightarrow\quad g(a) \in \operatorname{int}\mathcal{D}_f \quad\Longrightarrow\quad \exists \varepsilon > 0\colon K_\varepsilon\big(g(a)\big) \subset \mathcal{D}_f,$$

illetve az $a \in \operatorname{int}\mathcal{D}_g$ feltétel miatt

$$g \in D\{a\} \quad\Longrightarrow\quad g \in C\{a\} \quad\Longrightarrow\quad \varepsilon\text{-hoz } \exists \delta > 0,\ \forall x \in K_\delta(a) \subset \mathcal{D}_g\colon g(x) \in K_\varepsilon\big(g(a)\big) \subset \mathcal{D}_f.$$

Ebből következik, hogy $K_\delta(a) \subset \mathcal{D}_{f\circ g} = \{x \in \mathcal{D}_g \mid g(x) \in \mathcal{D}_f\}$, azaz $a \in \operatorname{int}\mathcal{D}_{f\circ g}$.

Másrészt, jelölje $b := g(a)$ és $\varepsilon_g : \mathcal{D}_g \to \mathbb{R}$, $\varepsilon_f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ a következő függvényeket:

$$\varepsilon_g(x) := \begin{cases} \dfrac{g(x)-g(a)}{x-a} - g'(a) & (x \neq a) \\ 0 & (x = a), \end{cases} \qquad \varepsilon_f(y) := \begin{cases} \dfrac{f(y)-f(b)}{y-b} - f'(b) & (y \neq b) \\ 0 & (y = b). \end{cases}$$

Mivel $g \in D\{a\}$ és $f \in D\{b\}$, így $\varepsilon_g \in C\{a\}$ és $\varepsilon_f \in C\{b\}$. Továbbá a fentiekből

$$\begin{aligned} g(x) - g(a) &= g'(a)(x-a) + \varepsilon_g(x)(x-a) \qquad (x \in \mathcal{D}_g), \\ f(y) - f(b) &= f'(b)(y-b) + \varepsilon_f(y)(y-b) \qquad (y \in \mathcal{D}_f). \end{aligned}$$

Ezért, ha $x \in \mathcal{D}_{f \circ g}$ és $y = g(x)$, akkor $y - b = g(x) - g(a)$ és

$$\begin{aligned} f\big(g(x)\big) - f\big(g(a)\big) &= f(y) - f(b) = f'(b)(y-b) + \varepsilon_f(y)(y-b) = \\ &= f'\big(g(a)\big)\big(g(x)-g(a)\big) + \varepsilon_f\big(g(x)\big)\big(g(x)-g(a)\big) = \\ &= f'\big(g(a)\big)\big(g'(a)(x-a) + \varepsilon_g(x)(x-a)\big) + \varepsilon_f\big(g(x)\big)\big(g'(a)(x-a) + \varepsilon_g(x)(x-a)\big) = \\ &= f'\big(g(a)\big)g'(a)(x-a) + \Big(f'(b)\varepsilon_g(x) + \varepsilon_f\big(g(x)\big)g'(a) + \varepsilon_f\big(g(x)\big)\varepsilon_g(x)\Big)\,(x-a). \end{aligned}$$

Tudjuk, hogy $\varepsilon_g \in C\{a\} \implies \lim\limits_{x\to a} \varepsilon_g(x) = \varepsilon_g(a) = 0$. Mivel $\varepsilon_f \in C\{b\}$, így alkalmazható az összetett függvény határértékére vonatkozó tételt: $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon_f\big(g(x)\big) = \lim\limits_{y\to b} \varepsilon_f(y) = \varepsilon_f(b) = 0$. Így

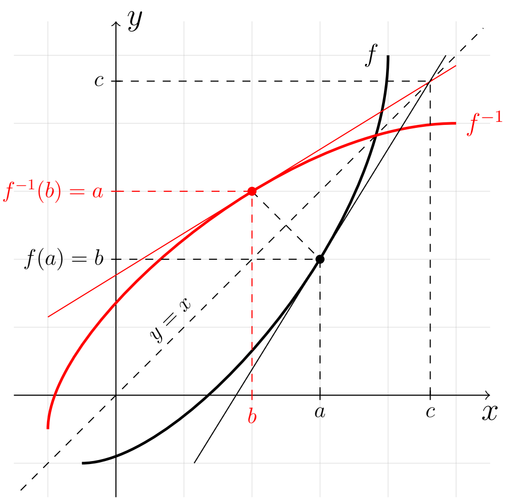
$$\begin{aligned} (f \circ g)'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{f\big(g(x)\big) - f\big(g(a)\big)}{x-a} = \\ &= f'\big(g(a)\big)g'(a) + \lim_{x\to a} \Big(f'(b)\varepsilon_g(x) + \varepsilon_f\big(g(x)\big)g'(a) + \varepsilon_f\big(g(x)\big)\varepsilon_g(x)\Big) = \\ &= f'\big(g(a)\big)g'(a) + f'(b)\cdot 0 + 0 \cdot g'(a) + 0 \cdot 0 = f'\big(g(a)\big)g'(a). \end{aligned}$$

Tegyük fel, hogy az f függvény invertálható. Emlékeztetünk arra, hogy az f és az f^{-1} függvények grafikonjai egymásnak az $y = x$ egyenletű egyenesre vonatkozó tükörképei.

Tekintsük az f függvény grafikonjának egy $\big(a, f(a)\big) = (a, b)$ pontját. Ennek tükörképe az $y = x$ egyenletű szögfelező egyenesre a (b, a) pont. Mivel $a = f^{-1}(b)$, ezért a (b, a) pont rajta van az f^{-1} függvény grafikonján.

Az f függvény grafikonjának $\big(a, f(a)\big) = (a, b)$ pontbeli érintőegyenesének tükörképe az f^{-1} függvény grafikonjának az $\big(f(a), a\big) = (b, a)$ pontbeli érintője. Ha az f-hez húzott érintő nem párhuzamos az x-tengellyel (vagyis $f^{-1}(a) \neq 0$), akkor a tükörképe nem párhuzamos az y-tengellyel. Ekkor a meredekségeik egymás reciprokai, vagyis

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$



$$f'(a) = \frac{c-b}{c-a}, \qquad \left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{c-a}{c-b}.$$

4. Tétel (Inverz függvény deriváltja). *Legyen I egy nyílt intervallum, és $f : I \to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy*

a) f szigorúan monoton és folytonos az I intervallumon,

b) valamilyen $a \in I$ pontban $f \in D\{a\}$ és $f'(a) \neq 0$.

Ekkor az f^{-1} függvény deriválható a $b = f(a)$ pontban és

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}.$$

Bizonyítás. Tudjuk, hogy ha f szigorúan monoton, akkor invertálható és inverze is szigorúan monoton. Mivel $\mathcal{D}_f = I$ egy nyílt intervallum, illetve f szigorúan monoton és folytonos függvény, így $\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f$ is egy nyílt intervallum, ezért $b \in \operatorname{int} \mathcal{D}_{f^{-1}}$, illetve f^{-1} folytonos ennek az $\mathcal{R}_f$ nyílt intervallum minden pontjában.

Legyen $y \in \mathcal{D}_{f^{-1}}$. Tudjuk, hogy $b = f(a)$ és $a = f^{-1}(b)$. Mivel f^{-1} szigorúan monoton, így egy-egyértelmű, ezért alkalmazhatjuk az $x = f^{-1}(y)$ helyettesítést az alábbi határértékben, ahol $x \to f^{-1}(b) = a$, ha $y \to b$, és $y = f(x)$ (f^{-1} folytonossága miatt).

$$(f^{-1})'(b) = \lim_{y\to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \lim_{x\to a} \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}} = \frac{1}{f'(a)},$$

hiszen $f \in D\{a\}$ és $f'(a) \neq 0$.

Hatványsor összegfüggvénye a konvergenciaintervallum belsejében differenciálható és a hatványsor deriválását szabad tagonként végezni.

5. Tétel (Hatványsor összegfüggvényének deriváltja). *Legyen $a \in \mathbb{R}$ és $\alpha_n \in \mathbb{R}$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Tegyük fel, hogy a*

$$\sum_{n=0} \alpha_n (x-a)^n \qquad (x \in \mathbb{R})$$

hatványsor R konvergenciasugara pozitív, és jelölje f az összegfüggvényét:

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (x-a)^n \qquad \left(x \in K_R(a)\right).$$

Ekkor minden $x \in K_R(a)$ pontban $f \in D\{x\}$ és

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\alpha_n (x-a)^{n-1} \qquad \left(x \in K_R(a)\right).$$

Bizonyítás. Nem bizonyítjuk.

A deriváltfüggvény

Látni fogjuk, hogy a derivált a leghatékonyabb segédeszköz egy függvény tulajdonságainak vizsgálatára. Ez lokálisan és globálisan is igaz. Az $f'(a)$ derivált létezése és értéke az f függvény a-beli (lokális) viselkedésére jellemző: $f'(a)$ értékéből az f függvény a pont körüli viselkedésére vonhatunk le következtetéseket. (Egy ilyen kapcsolatot már találtunk, amikor beláttuk, hogy a differenciálhatóságból következik a folytonosság.)

Ha viszont f egy A halmaz (például intervallum) minden pontjában deriválható, akkor az $f'(x)$ értékekből az f függvény globális viselkedésére következtethetünk. Erre azt mondjuk, hogy ***f* az *A* halmazon deriválható** vagy ***differenciálható***, és az $\boldsymbol{f \in D(A)}$ jelölést alkalmazzuk (vagy egyszerűen $\boldsymbol{f \in D(a,b)}$, ha $A = (a,b)$ egy intervallum).

Az alkalmazásokban legtöbbször olyan f függvények szerepelnek, amelyek valamely A halmazon (például intervallumon) deriválhatók. Célszerű tehát a deriválást olyan operációként felfogni, amely függvényekhez rendel függvényeket.

4. Definíció. *Ha $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $\Big\{x \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f \mid f \in D\{x\}\Big\} \neq \emptyset$, akkor az*

$$\Big\{x \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f \mid f \in D\{x\}\Big\} \ni x \mapsto f'(x)$$

függvényt az f **deriváltfüggvényének** *(vagy* **differenciálhányados-függvényének***) nevezzük, és az f' szimbólummal jelöljük.*

Néhány speciális függvény deriváltja

Ebben a táblázatban felsoroltuk azokat a speciális függvényeket, amelyek deriváltjait meg kell jegyezni. Ezek közül néhánynak a bizonyítását most megmutatjuk.

$\boxed{\textbf{1.}}$ ***Konstans függvények.*** Tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ esetén az

$$f(x) := c \qquad (x \in \mathbb{R})$$

konstans függvény minden $x \in \mathbb{R}$ pontban deriválható és deriváltja

$$\boxed{f'(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R})} \qquad \text{vagyis} \qquad \boxed{\Big(c\Big)' = 0 \quad (x \in \mathbb{R})}.$$

Bizonyítás. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $x \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, és

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = 0. \quad \blacksquare$$

$\boxed{\textbf{2.}}$ ***Hatványfüggvények.*** Tetszőleges n természetes szám esetén az

$$f(x) := x^n \qquad (x \in \mathbb{R})$$

hatványfüggvény minden $x \in \mathbb{R}$ pontban deriválható, és deriváltja

$$\boxed{\Big(x^n\Big)' = nx^{n-1} \quad (x \in \mathbb{R})}.$$

Bizonyítás. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $x \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, és

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h\Big[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \cdots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}\Big]}{h} = nx^{n-1}$$

a hatványfüggvény folytonossága alapján. Az előző határérték kiszámításában a következő azonosságot alkalmaztuk:

$$a^n - b^n = (a-b)\Big(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\Big). \quad \blacksquare$$

$\boxed{\textbf{3.}}$ ***A természetes alapú exponenciális függvény*** minden $x \in \mathbb{R}$ pontban deriválható, és

$$\boxed{\exp'(x) = (e^x)' = e^x \qquad \big(x \in \mathbb{R}\big)}.$$

Bizonyítás. Az exp függvényt az egész $\mathbb{R}$-en konvergens hatványsor összegfüggvényeként értelmeztük:

$$\exp(x) := e^x := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\, x^n \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

A hatványsor összegfüggvényének deriválására vonatkozó tételt alkalmazva azt kapjuk, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ pontban $\exp \in D\{x\}$, és

$$\exp'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot \frac{1}{n!}\, x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!}\, x^{n-1} = (k = n-1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\, x^k = \exp(x) = e^x. \qquad \blacksquare$$

Megjegyzés. Az állítás úgy is megfogalmazható, hogy az **exp *függvény deriváltfüggvénye önmaga***. Tulajdonképpen ez az összefüggés indokolja, hogy az e számot tekintjük az analízis (és általában a matematika) egyik legfontosabb állandójának.

$\boxed{\textbf{4.}}$ ***A természetes alapú logaritmusfüggvény*** minden $x \in (0, +\infty)$ pontban deriválható, és

$$\boxed{\ln' x = \big(\ln x\big)' = \frac{1}{x} \qquad \big(x \in (0, +\infty)\big)}.$$

Bizonyítás. Emlékeztetünk arra, hogy az ln függvényt az exp függvény inverzeként értelmeztük:

$$\ln := \exp^{-1}.$$

Az exp függvényre az inverz függvény deriválására vonatkozó tétel valamennyi feltétele teljesül. Ezért minden $x \in (0, +\infty)$ $(\mathcal{D}_{\ln})$ pontban $\ln \in D\{x\}$, és

$$\ln' x = \big(\ln x\big)' = \frac{1}{\exp'\big(\ln x\big)} = \frac{1}{\exp\big(\ln x\big)} = \frac{1}{x}. \quad \blacksquare$$

$\boxed{5.}$ ***Exponenciális függvények.*** Ha $a > 0$ valós szám, akkor minden $x \in \mathbb{R}$ pontban $\exp_a \in D\{x\}$, és

$$\boxed{\exp_a'(x) = (a^x)' = a^x \ln a \qquad \big(x \in \mathbb{R}\big)}.$$

Bizonyítás. Emlékeztetünk arra, hogy $a > 0$ valós szám esetén az a alapú exponenciális függvényt így értelmeztük:

$$a^x := \exp_a(x) := \exp(x \cdot \ln a) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Ha $f := \exp$ és $g(x) := x \ln a$ $(x \in \mathbb{R})$, akkor

$$\exp_a = f \circ g.$$

Az exp és az összetett függvény deriválására vonatkozó állítások alapján azt kapjuk, hogy az $\exp_a$ függvény minden $x \in \mathbb{R} = \mathcal{D}_{\exp_a}$ pontban deriválható, és

$$\exp_a'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x) = \exp(x \ln a) \cdot \ln a = a^x \ln a. \quad \blacksquare$$

$\boxed{6.}$ ***Logaritmusfüggvények.*** Ha $a > 0$ valós szám és $a \neq 1$, akkor $\forall x \in (0, +\infty)\, (= \mathcal{D}_{\log_a})$ pontban $\log_a \in D\{x\}$, és

$$\boxed{\log_a' x = \big(\log_a x\big)' = \frac{1}{x \ln a} \qquad \big(x \in (0, +\infty)\big)}.$$

Bizonyítás. Emlékeztetünk arra, hogy $a \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$ esetén az a alapú logaritmusfüggvényt így értelmeztük:

$$\log_a := \big(\exp_a\big)^{-1}.$$

Az $\exp_a$ függvényre az inverz függvény deriválására vonatkozó tétel valamennyi feltétele teljesül. Ezért minden $x \in (0, +\infty)\, (= \mathcal{D}_{\log_a})$ pontban $\log_a \in D\{x\}$, és

$$\log_a' x = \big(\log_a x\big)' = \frac{1}{\exp_a'\big(\log_a x\big)} = \frac{1}{(\ln a) \cdot \exp_a\big(\log_a x\big)} = \frac{1}{x \ln a}. \quad \blacksquare$$

$\boxed{7.}$ ***Általánosított hatványfüggvények.*** Ha α tetszőleges valós szám, akkor a

$$h_\alpha : (0, +\infty) \ni x \mapsto x^\alpha$$

általánosított hatványfüggvény minden $x \in (0, +\infty)\, (= \mathcal{D}_{h_\alpha})$ pontban deriválható, és

$$\boxed{(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1} \qquad \big(x \in (0, +\infty)\big)}.$$

Bizonyítás. Rögzítsük az $\alpha \in \mathbb{R}$ számot. Írjuk fel az $x > 0$ alapot e-hatványként: $x = e^{\ln x}$. Ekkor

$$x^\alpha = \big(e^{\ln x}\big)^\alpha = e^{\alpha \ln x} \qquad \big(x > 0\big),$$

majd alkalmazzuk az összetett függvény deriválására vonatkozó állításunkat. Azt kapjuk, hogy minden $x > 0$ esetén $h_\alpha \in D\{x\}$ és

$$h_\alpha'(x) = (x^\alpha)' = \big(e^{\alpha \ln x}\big)' = e^{\alpha \ln x} \cdot (\alpha \ln x)' = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha\, x^{\alpha - 1}. \quad \blacksquare$$

$\boxed{8.}$ ***A szinuszfüggvény*** minden $x \in \mathbb{R}$ pontban deriválható, és

$$\boxed{\sin' x = \cos x \qquad \big(x \in \mathbb{R}\big)}.$$

Bizonyítás. A szinuszfüggvényt az egész $\mathbb{R}$-en konvergens hatványsor összegfüggvényeként értelmeztük:

$$\sin(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

A hatványsor összegfüggvényének deriválására vonatkozó tételt alkalmazva azt kapjuk, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ pontban $\sin \in D\{x\}$, és

$$\sin'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot (2n+1)\, \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos(x). \quad \blacksquare$$

$\boxed{9.}$ ***A koszinuszfüggvény*** minden $x \in \mathbb{R}$ pontban deriválható, és

$$\boxed{\cos' x = -\sin x \qquad \big(x \in \mathbb{R}\big)}.$$

Bizonyítás. A koszinuszfüggvényt az egész $\mathbb{R}$-en konvergens hatványsor összegfüggvényeként értelmeztük:

$$\cos(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

A hatványsor összegfüggvényének deriválására vonatkozó tételt alkalmazva azt kapjuk, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ pontban $\cos \in D\{x\}$, és

$$\cos'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot 2n\, \frac{x^{2n-1}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot 2n\, \frac{x^{2n-1}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n\, \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} =$$

$$= -\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\, \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = (k = n-1) = -\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k\, \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = -\sin(x). \quad \blacksquare$$