

Analízis1–ABC, 1. zárthelyi dolgozat (minta)

1. Adott az $A := \left\{ \frac{4x+7}{10x+5} \in \mathbb{R} \mid x \in [2; +\infty) \right\}$ halmaz. Határozzuk meg $\sup A$, $\inf A$, $\min A$, $\max A$ -t ha léteznek.

2. Bizonyítsuk be, hogy minden $x \in (0; 7/2)$ és $y \in (0; +\infty)$ számok esetén :

$$\frac{x \cdot (7 - 2x) \cdot (x + 2)}{1 + \left(y + \frac{3}{y}\right)^2} \leq \frac{27}{13}.$$

3. Adott az $f(x) := \frac{\sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$ ($x \in (1; +\infty)$) függvény. Igazolja, hogy f invertálható és adja meg a $D_{f^{-1}}$; $R_{f^{-1}}$ halmazokat és $x \in D_{f^{-1}}$ esetén $f^{-1}(x)$ -et.

4. A definíció alapján határozza meg a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n-1)^3}{3n^3 + n + 1}$ határértéket.

5. Számítsa ki a következő határértékeket :

$$a) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4n^4 + n^3 + 1} - 2n^2}{1 - n}; \quad b) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n + (1 + \sqrt{2})^n}{((\sqrt{3})^n - n)^2}.$$