A számításelmélet alapjai II.

1. előadás

előadó: Tichler Krisztián
ktichler@inf.elte.hu

Vázlatos tematika

- nulladrendű logika

Vázlatos tematika

- nulladrendű logika
- elsőrendű logika

Vázlatos tematika

- nulladrendű logika
- elsőrendű logika
- függvények aszimptotikus viselkedése

Vázlatos tematika

- nulladrendű logika
- elsőrendű logika
- függvények aszimptotikus viselkedése
- Turing gépek (TG), alapfogalmak

Vázlatos tematika

- nulladrendű logika
- elsőrendű logika
- függvények aszimptotikus viselkedése
- Turing gépek (TG), alapfogalmak
- TG változatok (többszalagos, nemdet., számító, ...)

Vázlatos tematika

- nulladrendű logika
- elsőrendű logika
- függvények aszimptotikus viselkedése
- Turing gépek (TG), alapfogalmak
- TG változatok (többszalagos, nemdet., számító, ...)
- számosság

Vázlatos tematika

- nulladrendű logika
- elsőrendű logika
- függvények aszimptotikus viselkedése
- Turing gépek (TG), alapfogalmak
- TG változatok (többszalagos, nemdet., számító, ...)
- számosság
- eldönthetetlenség, R és RE

Vázlatos tematika

- nulladrendű logika
- elsőrendű logika
- függvények aszimptotikus viselkedése
- Turing gépek (TG), alapfogalmak
- TG változatok (többszalagos, nemdet., számító, ...)
- számosság
- eldönthetetlenség, R és RE
- eldönthetetlen problémák

Vázlatos tematika

- nulladrendű logika
- elsőrendű logika
- függvények aszimptotikus viselkedése
- Turing gépek (TG), alapfogalmak
- TG változatok (többszalagos, nemdet., számító, ...)
- számosság
- eldönthetetlenség, R és RE
- eldönthetetlen problémák
- bonyultságelmélet, idő- és tárbonyolultság

Vázlatos tematika

- nulladrendű logika
- elsőrendű logika
- függvények aszimptotikus viselkedése
- Turing gépek (TG), alapfogalmak
- TG változatok (többszalagos, nemdet., számító, ...)
- számosság
- eldönthetetlenség, R és RE
- eldönthetetlen problémák
- bonyultságelmélet, idő- és tárbonyolultság
- NP-teljesség, NP-teljes problémák

Vázlatos tematika

- nulladrendű logika
- elsőrendű logika
- függvények aszimptotikus viselkedése
- Turing gépek (TG), alapfogalmak
- TG változatok (többszalagos, nemdet., számító, ...)
- számosság
- eldönthetetlenség, R és RE
- eldönthetetlen problémák
- bonyultságelmélet, idő- és tárbonyolultság
- NP-teljesség, NP-teljes problémák
- további bonyolultsági osztályok

Vázlatos tematika

- nulladrendű logika
- elsőrendű logika
- függvények aszimptotikus viselkedése
- Turing gépek (TG), alapfogalmak
- TG változatok (többszalagos, nemdet., számító, ...)
- számosság
- eldönthetetlenség, R és RE
- eldönthetetlen problémák
- bonyultságelmélet, idő- és tárbonyolultság
- NP-teljesség, NP-teljes problémák
- további bonyolultsági osztályok
- kitekintés, összefoglaló

Ítéletkalkulus (nulladrendű logika)

A modell formális kereteket biztosít olyan következtetések helyességének eldöntésére, melyek elemi állításokból (ítéletekből) épülnek fel. Az ítéletek fontos jellemzője, hogy igazságértékük (igaz/hamis) egyértelműen eldönthető.

Ítéletkalkulus (nulladrendű logika)

A modell formális kereteket biztosít olyan következtetések helyességének eldöntésére, melyek elemi állításokból (ítéletekből) épülnek fel. Az ítéletek fontos jellemzője, hogy igazságértékük (igaz/hamis) egyértelműen eldönthető. Ítéletek például a „Süt a nap" vagy a „Lemegyek a térre" de nem tekinthető ítéletnek például a „Laci magas" (mihez képest?), „Lejössz a térre?" (kérdő mondat) vagy „Bárcsak itt lennél" (óhajtó mondat).

Ítéletkalkulus (nulladrendű logika)

A modell formális kereteket biztosít olyan következtetések helyességének eldöntésére, melyek elemi állításokból (ítéletekből) épülnek fel. Az ítéletek fontos jellemzője, hogy igazságértékük (igaz/hamis) egyértelműen eldönthető. Ítéletek például a „Süt a nap” vagy a „Lemegyek a térre” de nem tekinthető ítéletnek például a „Laci magas” (mihez képest?), „Lejössz a térre?” (kérdő mondat) vagy „Bárcsak itt lennél” (óhajtó mondat). Az elemi állításokból logikai műveleteknek megfeleltethető nyelvi összekötők segítségével összetett állítások építhetők. Például „Süt a nap, de mégis otthon maradok.” (logikai és kapcsolat, konjunkció) vagy „Ha süt a nap, lemegyek a térre.” (ha ... akkor, implikáció).

Ítéletkalkulus (nulladrendű logika)

A modell formális kereteket biztosít olyan következtetések helyességének eldöntésére, melyek elemi állításokból (ítéletekből) épülnek fel. Az ítéletek fontos jellemzője, hogy igazságértékük (igaz/hamis) egyértelműen eldönthető. Ítéletek például a „Süt a nap" vagy a „Lemegyek a térre" de nem tekinthető ítéletnek például a „Laci magas" (mihez képest?), „Lejössz a térre?" (kérdő mondat) vagy „Bárcsak itt lennél" (óhajtó mondat). Az elemi állításokból logikai műveleteknek megfeleltethető nyelvi összekötők segítségével összetett állítások építhetők. Például „Süt a nap, de mégis otthon maradok." (logikai és kapcsolat, konjunkció) vagy „Ha süt a nap, lemegyek a térre." (ha ... akkor, implikáció).

Beláthatók olyan következtetések, mint:

(1) ‚Ha süt a nap, lemegyek a térre."
(2) „Süt a nap."
Tehát (3) „Lemegyek a térre."

Formulák

Definíció

Adott **ítéletváltozók** egy előre rögzített megszámlálhatóan végtelen $\mathrm{Var} = \{x_1, x_2, \ldots\}$ halmaza. Az **ítéletlogikai formulák** Form halmaza a legszűkebb halmaz melyre

- Minden $x \in \mathrm{Var}$ esetén $x \in \mathrm{Form}$,
- Ha $\varphi \in \mathrm{Form}$, akkor $\neg\varphi \in \mathrm{Form}$,
- Ha $\varphi, \psi \in \mathrm{Form}$, akkor $(\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \to \psi) \in \mathrm{Form}$.

Formulák

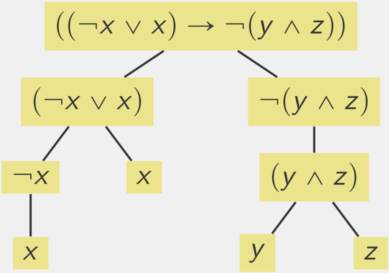
Definíció

Adott **ítéletváltozók** egy előre rögzített megszámlálhatóan végtelen $\mathrm{Var} = \{x_1, x_2, \ldots\}$ halmaza. Az **ítéletlogikai formulák** Form halmaza a legszűkebb halmaz melyre

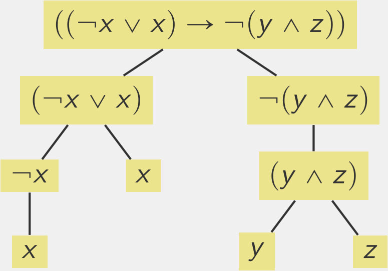
- Minden $x \in \mathrm{Var}$ esetén $x \in \mathrm{Form}$,
- Ha $\varphi \in \mathrm{Form}$, akkor $\neg\varphi \in \mathrm{Form}$,
- Ha $\varphi, \psi \in \mathrm{Form}$, akkor $(\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \to \psi) \in \mathrm{Form}$.

A műveleti jelek elnevezése: **negáció** ($\neg$), **konjukció** ($\wedge$), **diszjunkció** ($\vee$), **implikáció** ($\to$).
Jelölés: Jelölje $\mathrm{Var}(\varphi)$ a φ-ben előforduló ítéletváltozók halmazát. Ha $\mathcal{F}$ egy formulahalmaz, akkor $\mathrm{Var}(\mathcal{F}) := \bigcup_{\varphi \in \mathcal{F}} \mathrm{Var}(\varphi)$.

Szerkezeti fa, részformula, fő logikai összekötő

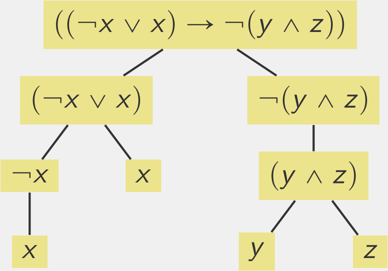


Szerkezeti fa, részformula, fő logikai összekötő



A **szerkezeti fa** egy csúcscímkézett bináris fa. Egy csúcs gyerekei a csúcshoz tartozó formula **közvetlen részformuláival** címkézettek. ($\neg\varphi$ esetén φ-vel címkézett az egyetlen gyerek. $(\varphi \circ \psi)$ esetén két gyerek van, melyek φ-vel és ψ-vel címkézettek $\circ \in \{\wedge, \vee, \to\}$.)

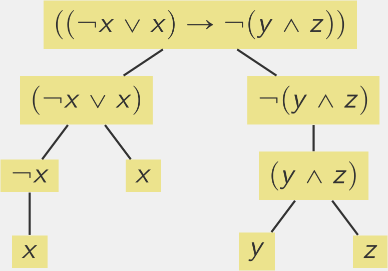
Szerkezeti fa, részformula, fő logikai összekötő



A **szerkezeti fa** egy csúcscímkézett bináris fa. Egy csúcs gyerekei a csúcshoz tartozó formula **közvetlen részformuláival** címkézettek. ($\neg\varphi$ esetén φ-vel címkézett az egyetlen gyerek. $(\varphi \circ \psi)$ esetén két gyerek van, melyek φ-vel és ψ-vel címkézettek $\circ \in \{\wedge, \vee, \to\}$.)

Az előforduló címkék a formula **részformulái**. (A példában a sárgával megjelölt formulák.)

Szerkezeti fa, részformula, fő logikai összekötő



A **szerkezeti fa** egy csúcscímkézett bináris fa. Egy csúcs gyerekei a csúcshoz tartozó formula **közvetlen részformuláival** címkézettek. ($\neg\varphi$ esetén φ-vel címkézett az egyetlen gyerek. $(\varphi \circ \psi)$ esetén két gyerek van, melyek φ-vel és ψ-vel címkézettek $\circ \in \{\wedge, \vee, \to\}$.)

Az előforduló címkék a formula **részformulái**. (A példában a sárgával megjelölt formulák.)

A **fő logikai összekötő** az az összekötő, amelyik csak a gyökérben szerepel. (A példában az $\to$ ez az összekötő.)

Zárójelelhagyás

A zárójelelhagyás célja a formulából a lehető legtöbb zárójel elhagyása a formula szerkezetének visszaállíthatósága mellett.

Zárójelelhagyás

A zárójelelhagyás célja a formulából a lehető legtöbb zárójel elhagyása a formula szerkezetének visszaállíthatósága mellett.

$\neg,\ \wedge,\ \vee,\ \rightarrow$ csökkenő precedenciasorrend

Zárójelelhagyás

A zárójelelhagyás célja a formulából a lehető legtöbb zárójel elhagyása a formula szerkezetének visszaállíthatósága mellett.

$\neg,\ \wedge,\ \vee,\ \rightarrow$ csökkenő precedenciasorrend

- a formula külső zárójel párja elhagyható (ha van ilyen)

Zárójelelhagyás

A zárójelelhagyás célja a formulából a lehető legtöbb zárójel elhagyása a formula szerkezetének visszaállíthatósága mellett.

$\neg, \ \wedge, \ \vee, \ \rightarrow$ csökkenő precedenciasorrend

- a formula külső zárójel párja elhagyható (ha van ilyen)
- egy binér fő logikai összekötővel rendelkező részformula zárójelei elhagyhatók, ha ennek a fő logikai összekötőnek a precedenciája nagyobb, mint a szerkezeti fában szülő formula fő logikai összekötőjének precedenciája

Zárójelelhagyás

A zárójelelhagyás célja a formulából a lehető legtöbb zárójel elhagyása a formula szerkezetének visszaállíthatósága mellett.

$\neg, \ \wedge, \ \vee, \ \rightarrow$ csökkenő precedenciasorrend

- a formula külső zárójel párja elhagyható (ha van ilyen)
- egy binér fő logikai összekötővel rendelkező részformula zárójelei elhagyhatók, ha ennek a fő logikai összekötőnek a precedenciája nagyobb, mint a szerkezeti fában szülő formula fő logikai összekötőjének precedenciája

Láncformulák zárójelelhagyása:

- Konjunkció illetve diszjunkciólánc esetén minden belső zárójelpár elhagyható. (Ennek a magyarázata a konjunkció és a diszjunkció műveletek asszociativitása, lásd mindjárt)

Zárójelelhagyás

A zárójelelhagyás célja a formulából a lehető legtöbb zárójel elhagyása a formula szerkezetének visszaállíthatósága mellett.

$\neg, \ \wedge, \ \vee, \ \rightarrow$ csökkenő precedenciasorrend

- a formula külső zárójel párja elhagyható (ha van ilyen)
- egy binér fő logikai összekötővel rendelkező részformula zárójelei elhagyhatók, ha ennek a fő logikai összekötőnek a precedenciája nagyobb, mint a szerkezeti fában szülő formula fő logikai összekötőjének precedenciája

Láncformulák zárójelelhagyása:

- Konjunkció illetve diszjunkciólánc esetén minden belső zárójelpár elhagyható. (Ennek a magyarázata a konjunkció és a diszjunkció műveletek asszociativitása, lásd mindjárt)
- Implikációlánc: $(X_1 \rightarrow (X_2 \rightarrow (X_3 \rightarrow \ldots X_n)))$ az alapértelmezett zárójelezés. Csakis akkor hagyhatók el a zárójelek, ha a formula zárójelezése alapértelmezett. (Ennek az a magyarázata, hogy $\rightarrow$ nem asszociatív.)

Zárójelelhagyás

1. **Példa:**

$(\neg((x \to y) \wedge z) \vee (\neg x \wedge z))$

Zárójelelhagyás

1. **Példa:**

$(\neg((x \rightarrow y) \wedge z) \vee (\neg x \wedge z))$

$\neg((x \rightarrow y) \wedge z) \vee \neg x \wedge z$

Zárójelelhagyás

1. Példa:

$(\neg((x \rightarrow y) \wedge z) \vee (\neg x \wedge z))$

$\neg((x \rightarrow y) \wedge z) \vee \neg x \wedge z$

2. Példa:

$x \rightarrow y \vee \neg z \rightarrow y \wedge x.$
Melyik a fő logikai összekötő?

Zárójelelhagyás

1. Példa:

$(\neg((x \to y) \wedge z) \vee (\neg x \wedge z))$

$\neg((x \to y) \wedge z) \vee \neg x \wedge z$

2. Példa:

$x \to y \vee \neg z \to y \wedge x$.
Melyik a fő logikai összekötő?

Visszazárójelezve:

$(x \to ((y \vee \neg z) \to (y \wedge x)))$.
Az első $\to$.

Interpretáció

Definíció

Egy $I : \mathrm{Var}(\varphi) \to \{i, h\}$ függvényt φ egy **interpretációjának** (változókiértékelésének) nevezünk.

Ha $\mathcal{F}$ egy formulahalmaz, akkor egy $I : \mathrm{Var}(\mathcal{F}) \to \{i, h\}$ függvényt $\mathcal{F}$ egy **interpretációjának** (változókiértékelésének) nevezünk.

Interpretáció

Definíció

Egy $I : \mathrm{Var}(\varphi) \to \{i, h\}$ függvényt φ egy **interpretációjának** (változókiértékelésének) nevezünk.

Ha $\mathcal{F}$ egy formulahalmaz, akkor egy $I : \mathrm{Var}(\mathcal{F}) \to \{i, h\}$ függvényt $\mathcal{F}$ egy **interpretációjának** (változókiértékelésének) nevezünk.

Példa: $\varphi = x \to \neg y$. Ekkor például $I(x) = i, I(y) = h$ φ egy interpretációja.

Interpretáció

Definíció

Egy $I : \mathrm{Var}(\varphi) \to \{i, h\}$ függvényt φ egy **interpretációjának** (változókiértékelésének) nevezünk.

Ha $\mathcal{F}$ egy formulahalmaz, akkor egy $I : \mathrm{Var}(\mathcal{F}) \to \{i, h\}$ függvényt $\mathcal{F}$ egy **interpretációjának** (változókiértékelésének) nevezünk.

Példa: $\varphi = x \to \neg y$. Ekkor például $I(x) = i, I(y) = h$ φ egy interpretációja.

Ha $\mathcal{F} = \{x \to y, y \to z\}$, akkor $I(x) = i, I(y) = h, I(z) = h$ $\mathcal{F}$ egy interpretációja.

A formulák igazságértéke

Egy I interpretációban egy $\varphi \in \mathrm{Form}$ formula $\mathcal{B}_I(\varphi)$ **igazságértékét** (helyettesítési értékét, Boole értékét) a következő rekurzióval definiáljuk:

Definíció

- ha $x \in \mathrm{Var}$ akkor $\mathcal{B}_I(x) := I(x)$,

A formulák igazságértéke

Egy I interpretációban egy $\varphi \in \text{Form}$ formula $\mathcal{B}_I(\varphi)$ **igazságértékét** (helyettesítési értékét, Boole értékét) a következő rekurzióval definiáljuk:

Definíció

- ha $x \in \text{Var}$ akkor $\mathcal{B}_I(x) := I(x)$,
- ha $\varphi \in \text{Form}$ formula, akkor $\mathcal{B}_I(\neg\varphi) := \neg\mathcal{B}_I(\varphi)$,

A formulák igazságértéke

Egy I interpretációban egy $\varphi \in \mathrm{Form}$ formula $\mathcal{B}_I(\varphi)$ **igazságértékét** (helyettesítési értékét, Boole értékét) a következő rekurzóval definiáljuk:

Definíció

- ha $x \in \mathrm{Var}$ akkor $\mathcal{B}_I(x) := I(x)$,
- ha $\varphi \in \mathrm{Form}$ formula, akkor $\mathcal{B}_I(\neg\varphi) := \neg\mathcal{B}_I(\varphi)$,
- ha $\varphi, \psi \in \mathrm{Form}$ formulák, akkor $\mathcal{B}_I(\varphi \circ \psi) := \mathcal{B}_I(\varphi) \circ \mathcal{B}_I(\psi)$, ahol $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$,

A formulák igazságértéke

Egy I interpretációban egy $\varphi \in$ Form formula $\mathcal{B}_I(\varphi)$ **igazságértékét** (helyettesítési értékét, Boole értékét) a következő rekurzóval definiáljuk:

Definíció

- ha $x \in$ Var akkor $\mathcal{B}_I(x) := I(x)$,
- ha $\varphi \in$ Form formula, akkor $\mathcal{B}_I(\neg\varphi) := \neg\mathcal{B}_I(\varphi)$,
- ha $\varphi, \psi \in$ Form formulák, akkor $\mathcal{B}_I(\varphi \circ \psi) := \mathcal{B}_I(\varphi) \circ \mathcal{B}_I(\psi)$, ahol $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$,

ahol a műveletek eredményét az alábbi táblázat definiálja.

$\mathcal{B}_I(\varphi)$	$\mathcal{B}_I(\psi)$	$\mathcal{B}_I(\neg\varphi)$	$\mathcal{B}_I(\varphi \wedge \psi)$	$\mathcal{B}_I(\varphi \vee \psi)$	$\mathcal{B}_I(\varphi \rightarrow \psi)$
i	i	h	i	i	i
i	h	h	h	i	h
h	i	i	h	i	i
h	h	i	h	h	i

Az ítélettábla

$|\operatorname{Var}(\varphi)| = n$ esetén φ-nek 2^n lehetséges interpretációja van.

Az ítélettábla

$|\mathrm{Var}(\varphi)| = n$ esetén φ-nek 2^n lehetséges interpretációja van.

Definíció

Egy φ ítéletlogikai formula **ítélettáblája** egy $2^n \times (n+1)$-es táblázat, ahol $n = |\mathrm{Var}(\varphi)|$. A sorok megfelelnek a lehetséges interpretációknak. Az I interpretációnak megfelelő sor az első n oszlopban tartalmazza az ítéletváltozók I szerinti kiértékelését, míg utolsó, $n+1$. oszlopa $\mathcal{B}_I(\varphi)$-t.

Az ítélettábla

$|\mathrm{Var}(\varphi)| = n$ esetén φ-nek 2^n lehetséges interpretációja van.

Definíció

Egy φ ítéletlogikai formula **ítélettáblája** egy $2^n \times (n+1)$-es táblázat, ahol $n = |\mathrm{Var}(\varphi)|$. A sorok megfelelnek a lehetséges interpretációknak. Az I interpretációnak megfelelő sor az első n oszlopban tartalmazza az ítéletváltozók I szerinti kiértékelését, míg utolsó, $n+1$. oszlopa $\mathcal{B}_I(\varphi)$-t.

Példa:

x	y	$\neg x \vee y$
i	i	i
i	h	h
h	i	i
h	h	i

Formulák szemantikus tulajdonságai

Definíció

- Egy I interpretáció **kielégít** egy φ formulát ($I \models_0 \varphi$) ha a formula helyettesítési értéke i az I interpretációban.

Formulák szemantikus tulajdonságai

Definíció

- Egy I interpretáció **kielégít** egy φ formulát ($I \models_0 \varphi$) ha a formula helyettesítési értéke i az I interpretációban.
- Egy φ formula **kielégíthető**, ha legalább egy interpretáció kielégíti.

Formulák szemantikus tulajdonságai

Definíció

- Egy I interpretáció **kielégít** egy φ formulát ($I \models_0 \varphi$) ha a formula helyettesítési értéke i az I interpretációban.
- Egy φ formula **kielégíthető**, ha legalább egy interpretáció kielégíti.
- Egy φ formula **kielégíthetetlen**, ha egyetlen interpretáció sem elégíti ki.

Formulák szemantikus tulajdonságai

Definíció

- Egy I interpretáció **kielégít** egy φ formulát ($I \models_0 \varphi$) ha a formula helyettesítési értéke i az I interpretációban.
- Egy φ formula **kielégíthető**, ha legalább egy interpretáció kielégíti.
- Egy φ formula **kielégíthetetlen**, ha egyetlen interpretáció sem elégíti ki.
- Egy φ formula **tautologia** (ítéletlogikai törvény) ($\models_0 \varphi$), ha minden interpretáció kielégíti.

Formulák szemantikus tulajdonságai

Definíció

- Egy I interpretáció **kielégít** egy φ formulát ($I \models_0 \varphi$) ha a formula helyettesítési értéke i az I interpretációban.
- Egy φ formula **kielégíthető**, ha legalább egy interpretáció kielégíti.
- Egy φ formula **kielégíthetetlen**, ha egyetlen interpretáció sem elégíti ki.
- Egy φ formula **tautologia** (ítéletlogikai törvény) ($\models_0 \varphi$), ha minden interpretáció kielégíti.
- Egy φ formulának a ψ formula **tautologikus következménye**($\varphi \models_0 \psi$), ha minden φ-t kielégítő interpretáció kielégíti ψ-t is.

Formulák szemantikus tulajdonságai

Definíció

- Egy I interpretáció **kielégít** egy φ formulát ($I \models_0 \varphi$) ha a formula helyettesítési értéke i az I interpretációban.
- Egy φ formula **kielégíthető**, ha legalább egy interpretáció kielégíti.
- Egy φ formula **kielégíthetetlen**, ha egyetlen interpretáció sem elégíti ki.
- Egy φ formula **tautologia** (ítéletlogikai törvény) ($\models_0 \varphi$), ha minden interpretáció kielégíti.
- Egy φ formulának a ψ formula **tautologikus következménye**($\varphi \models_0 \psi$), ha minden φ-t kielégítő interpretáció kielégíti ψ-t is.
- φ és ψ **tautologikusan ekvivalensek** ($\varphi \sim_0 \psi$), ha $\varphi \models_0 \psi$ és $\psi \models_0 \varphi$ is teljesül.

Formulák szemantikus tulajdonságai

- Egy I interpretáció kielégít egy φ formulát ha φ ítélettáblájában I sorában az utolsó oszlopban i áll.

Formulák szemantikus tulajdonságai

- Egy I interpretáció kielégít egy φ formulát ha φ ítélettáblájában I sorában az utolsó oszlopban i áll.
- Egy φ formula kielégíthető, ha ítélettáblájának van i sora.

Formulák szemantikus tulajdonságai

- Egy I interpretáció kielégít egy φ formulát ha φ ítélettáblájában I sorában az utolsó oszlopban i áll.
- Egy φ formula kielégíthető, ha ítélettáblájának van i sora.
- Egy φ formula kielégíthetetlen, ha ítélettáblájának csak h sora van.

Formulák szemantikus tulajdonságai

- Egy I interpretáció kielégít egy φ formulát ha φ ítélettáblájában I sorában az utolsó oszlopban i áll.
- Egy φ formula kielégíthető, ha ítélettáblájának van i sora.
- Egy φ formula kielégíthetetlen, ha ítélettáblájának csak h sora van.
- Egy φ formula tautologia, ha ítélettáblájának csak i sora van.

Formulák szemantikus tulajdonságai

- Egy I interpretáció kielégít egy φ formulát ha φ ítélettáblájában I sorában az utolsó oszlopban i áll.
- Egy φ formula kielégíthető, ha ítélettáblájának van i sora.
- Egy φ formula kielégíthetetlen, ha ítélettáblájának csak h sora van.
- Egy φ formula tautologia, ha ítélettáblájának csak i sora van.
- Egy φ formulának a ψ formula tautologikus következménye, ha minden olyan I-re, amelyre φ igazságtáblájában i áll ott ψ is igaz.

Formulák szemantikus tulajdonságai

- Egy I interpretáció kielégít egy φ formulát ha φ ítélettáblájában I sorában az utolsó oszlopban i áll.
- Egy φ formula kielégíthető, ha ítélettáblájának van i sora.
- Egy φ formula kielégíthetetlen, ha ítélettáblájának csak h sora van.
- Egy φ formula tautologia, ha ítélettáblájának csak i sora van.
- Egy φ formulának a ψ formula tautologikus következménye, ha minden olyan I-re, amelyre φ igazságtáblájában i áll ott ψ is igaz.
- φ és ψ tautologikusan ekvivalensek, ha sorról sorra megegyezik az ítélettáblájuk.

Fontosabb logikai törvények

$\top$: tautológia, $\bot$: kielégíthetetlen formula.

(a) $\neg\neg\varphi \sim_0 \varphi$,

Fontosabb logikai törvények

$\top$: tautológia, $\bot$: kielégíthetetlen formula.

(a) $\neg\neg\varphi \sim_0 \varphi$,

(b) $\varphi \vee \varphi \sim_0 \varphi$ valamint $\varphi \wedge \varphi \sim_0 \varphi$,

Fontosabb logikai törvények

$\top$: tautológia, $\bot$: kielégíthetetlen formula.

(a) $\neg\neg\varphi \sim_0 \varphi$,

(b) $\varphi \vee \varphi \sim_0 \varphi$ valamint $\varphi \wedge \varphi \sim_0 \varphi$,

(c) $\varphi \vee \psi \sim_0 \psi \vee \varphi$ valamint $\varphi \wedge \psi \sim_0 \psi \wedge \varphi$,

Fontosabb logikai törvények

$\top$: tautológia, $\bot$: kielégíthetetlen formula.

(a) $\neg\neg\varphi \sim_0 \varphi$,

(b) $\varphi \vee \varphi \sim_0 \varphi$ valamint $\varphi \wedge \varphi \sim_0 \varphi$,

(c) $\varphi \vee \psi \sim_0 \psi \vee \varphi$ valamint $\varphi \wedge \psi \sim_0 \psi \wedge \varphi$,

(d) $(\varphi \vee \psi) \vee \xi \sim_0 \varphi \vee (\psi \vee \xi)$ valamint
$(\varphi \wedge \psi) \wedge \xi \sim_0 \varphi \wedge (\psi \wedge \xi)$,

Fontosabb logikai törvények

$\top$: tautológia, $\bot$: kielégíthetetlen formula.

(a) $\neg\neg\varphi \sim_0 \varphi$,

(b) $\varphi \vee \varphi \sim_0 \varphi$ valamint $\varphi \wedge \varphi \sim_0 \varphi$,

(c) $\varphi \vee \psi \sim_0 \psi \vee \varphi$ valamint $\varphi \wedge \psi \sim_0 \psi \wedge \varphi$,

(d) $(\varphi \vee \psi) \vee \xi \sim_0 \varphi \vee (\psi \vee \xi)$ valamint $(\varphi \wedge \psi) \wedge \xi \sim_0 \varphi \wedge (\psi \wedge \xi)$,

(e) $(\varphi \vee \psi) \wedge \xi \sim_0 (\varphi \wedge \xi) \vee (\psi \wedge \xi)$ valamint $(\varphi \wedge \psi) \vee \xi \sim_0 (\varphi \vee \xi) \wedge (\psi \vee \xi)$,

Fontosabb logikai törvények

$\top$: tautológia, $\bot$: kielégíthetetlen formula.

(a) $\neg\neg\varphi \sim_0 \varphi$,

(b) $\varphi \vee \varphi \sim_0 \varphi$ valamint $\varphi \wedge \varphi \sim_0 \varphi$,

(c) $\varphi \vee \psi \sim_0 \psi \vee \varphi$ valamint $\varphi \wedge \psi \sim_0 \psi \wedge \varphi$,

(d) $(\varphi \vee \psi) \vee \xi \sim_0 \varphi \vee (\psi \vee \xi)$ valamint
$(\varphi \wedge \psi) \wedge \xi \sim_0 \varphi \wedge (\psi \wedge \xi)$,

(e) $(\varphi \vee \psi) \wedge \xi \sim_0 (\varphi \wedge \xi) \vee (\psi \wedge \xi)$ valamint
$(\varphi \wedge \psi) \vee \xi \sim_0 (\varphi \vee \xi) \wedge (\psi \vee \xi)$,

(f) $(\varphi \vee \psi) \wedge \psi \sim_0 \psi$ valamint $(\varphi \wedge \psi) \vee \psi \sim_0 \psi$,

Fontosabb logikai törvények

$\top$: tautológia, $\bot$: kielégíthetetlen formula.

(a) $\neg\neg\varphi \sim_0 \varphi$,

(b) $\varphi \vee \varphi \sim_0 \varphi$ valamint $\varphi \wedge \varphi \sim_0 \varphi$,

(c) $\varphi \vee \psi \sim_0 \psi \vee \varphi$ valamint $\varphi \wedge \psi \sim_0 \psi \wedge \varphi$,

(d) $(\varphi \vee \psi) \vee \xi \sim_0 \varphi \vee (\psi \vee \xi)$ valamint
$(\varphi \wedge \psi) \wedge \xi \sim_0 \varphi \wedge (\psi \wedge \xi)$,

(e) $(\varphi \vee \psi) \wedge \xi \sim_0 (\varphi \wedge \xi) \vee (\psi \wedge \xi)$ valamint
$(\varphi \wedge \psi) \vee \xi \sim_0 (\varphi \vee \xi) \wedge (\psi \vee \xi)$,

(f) $(\varphi \vee \psi) \wedge \psi \sim_0 \psi$ valamint $(\varphi \wedge \psi) \vee \psi \sim_0 \psi$,

(g) $\varphi \to \psi \sim_0 \neg\varphi \vee \psi$,

Fontosabb logikai törvények

$\top$: tautológia, $\bot$: kielégíthetetlen formula.

(a) $\neg\neg\varphi \sim_0 \varphi$,

(b) $\varphi \vee \varphi \sim_0 \varphi$ valamint $\varphi \wedge \varphi \sim_0 \varphi$,

(c) $\varphi \vee \psi \sim_0 \psi \vee \varphi$ valamint $\varphi \wedge \psi \sim_0 \psi \wedge \varphi$,

(d) $(\varphi \vee \psi) \vee \xi \sim_0 \varphi \vee (\psi \vee \xi)$ valamint
$(\varphi \wedge \psi) \wedge \xi \sim_0 \varphi \wedge (\psi \wedge \xi)$,

(e) $(\varphi \vee \psi) \wedge \xi \sim_0 (\varphi \wedge \xi) \vee (\psi \wedge \xi)$ valamint
$(\varphi \wedge \psi) \vee \xi \sim_0 (\varphi \vee \xi) \wedge (\psi \vee \xi)$,

(f) $(\varphi \vee \psi) \wedge \psi \sim_0 \psi$ valamint $(\varphi \wedge \psi) \vee \psi \sim_0 \psi$,

(g) $\varphi \to \psi \sim_0 \neg\varphi \vee \psi$,

(h) $\neg(\varphi \wedge \psi) \sim_0 \neg\varphi \vee \neg\psi$ valamint $\neg(\varphi \vee \psi) \sim_0 \neg\varphi \wedge \neg\psi$,

Fontosabb logikai törvények

$\top$: tautológia, $\bot$: kielégíthetetlen formula.

(a) $\neg\neg\varphi \sim_0 \varphi$,

(b) $\varphi \vee \varphi \sim_0 \varphi$ valamint $\varphi \wedge \varphi \sim_0 \varphi$,

(c) $\varphi \vee \psi \sim_0 \psi \vee \varphi$ valamint $\varphi \wedge \psi \sim_0 \psi \wedge \varphi$,

(d) $(\varphi \vee \psi) \vee \xi \sim_0 \varphi \vee (\psi \vee \xi)$ valamint $(\varphi \wedge \psi) \wedge \xi \sim_0 \varphi \wedge (\psi \wedge \xi)$,

(e) $(\varphi \vee \psi) \wedge \xi \sim_0 (\varphi \wedge \xi) \vee (\psi \wedge \xi)$ valamint $(\varphi \wedge \psi) \vee \xi \sim_0 (\varphi \vee \xi) \wedge (\psi \vee \xi)$,

(f) $(\varphi \vee \psi) \wedge \psi \sim_0 \psi$ valamint $(\varphi \wedge \psi) \vee \psi \sim_0 \psi$,

(g) $\varphi \rightarrow \psi \sim_0 \neg\varphi \vee \psi$,

(h) $\neg(\varphi \wedge \psi) \sim_0 \neg\varphi \vee \neg\psi$ valamint $\neg(\varphi \vee \psi) \sim_0 \neg\varphi \wedge \neg\psi$,

(i) $\varphi \vee \neg\varphi \sim_0 \top$ valamint $\varphi \wedge \neg\varphi \sim_0 \bot$,

Fontosabb logikai törvények

$\top$: tautológia, $\bot$: kielégíthetetlen formula.

(a) $\neg\neg\varphi \sim_0 \varphi$,

(b) $\varphi \vee \varphi \sim_0 \varphi$ valamint $\varphi \wedge \varphi \sim_0 \varphi$,

(c) $\varphi \vee \psi \sim_0 \psi \vee \varphi$ valamint $\varphi \wedge \psi \sim_0 \psi \wedge \varphi$,

(d) $(\varphi \vee \psi) \vee \xi \sim_0 \varphi \vee (\psi \vee \xi)$ valamint $(\varphi \wedge \psi) \wedge \xi \sim_0 \varphi \wedge (\psi \wedge \xi)$,

(e) $(\varphi \vee \psi) \wedge \xi \sim_0 (\varphi \wedge \xi) \vee (\psi \wedge \xi)$ valamint $(\varphi \wedge \psi) \vee \xi \sim_0 (\varphi \vee \xi) \wedge (\psi \vee \xi)$,

(f) $(\varphi \vee \psi) \wedge \psi \sim_0 \psi$ valamint $(\varphi \wedge \psi) \vee \psi \sim_0 \psi$,

(g) $\varphi \to \psi \sim_0 \neg\varphi \vee \psi$,

(h) $\neg(\varphi \wedge \psi) \sim_0 \neg\varphi \vee \neg\psi$ valamint $\neg(\varphi \vee \psi) \sim_0 \neg\varphi \wedge \neg\psi$,

(i) $\varphi \vee \neg\varphi \sim_0 \top$ valamint $\varphi \wedge \neg\varphi \sim_0 \bot$,

(j) $\varphi \vee \top \sim_0 \top$ valamint $\varphi \wedge \bot \sim_0 \bot$,

Fontosabb logikai törvények

$\top$: tautológia, $\bot$: kielégíthetetlen formula.

(a) $\neg\neg\varphi \sim_0 \varphi$,

(b) $\varphi \vee \varphi \sim_0 \varphi$ valamint $\varphi \wedge \varphi \sim_0 \varphi$,

(c) $\varphi \vee \psi \sim_0 \psi \vee \varphi$ valamint $\varphi \wedge \psi \sim_0 \psi \wedge \varphi$,

(d) $(\varphi \vee \psi) \vee \xi \sim_0 \varphi \vee (\psi \vee \xi)$ valamint
$(\varphi \wedge \psi) \wedge \xi \sim_0 \varphi \wedge (\psi \wedge \xi)$,

(e) $(\varphi \vee \psi) \wedge \xi \sim_0 (\varphi \wedge \xi) \vee (\psi \wedge \xi)$ valamint
$(\varphi \wedge \psi) \vee \xi \sim_0 (\varphi \vee \xi) \wedge (\psi \vee \xi)$,

(f) $(\varphi \vee \psi) \wedge \psi \sim_0 \psi$ valamint $(\varphi \wedge \psi) \vee \psi \sim_0 \psi$,

(g) $\varphi \to \psi \sim_0 \neg\varphi \vee \psi$,

(h) $\neg(\varphi \wedge \psi) \sim_0 \neg\varphi \vee \neg\psi$ valamint $\neg(\varphi \vee \psi) \sim_0 \neg\varphi \wedge \neg\psi$,

(i) $\varphi \vee \neg\varphi \sim_0 \top$ valamint $\varphi \wedge \neg\varphi \sim_0 \bot$,

(j) $\varphi \vee \top \sim_0 \top$ valamint $\varphi \wedge \bot \sim_0 \bot$,

(k) $\varphi \vee \bot \sim_0 \varphi$ valamint $\varphi \wedge \top \sim_0 \varphi$.

Formulák szemantikus tulajdonságai

Állítás

Legyen φ egy formula és φ_0 egy részformulája. Tegyük fel, hogy $\varphi_0 \sim_0 \psi_0$ valamely ψ_0 formulára és legyen ψ az a formula, amit φ-ból úgy kapunk, hogy a φ_0 részformulát ψ_0-val helyettesítjük. (Például φ szerkezeti fájában az φ_0-nak megfelelő részfát ψ_0 szerkezeti fájával helyettesítjük.) Ekkor $\varphi \sim_0 \psi$.

Formulák szemantikus tulajdonságai

Állítás

Legyen φ egy formula és φ_0 egy részformulája. Tegyük fel, hogy $\varphi_0 \sim_0 \psi_0$ valamely ψ_0 formulára és legyen ψ az a formula, amit φ-ból úgy kapunk, hogy a φ_0 részformulát ψ_0-val helyettesítjük. (Például φ szerkezeti fájában az φ_0-nak megfelelő részfát ψ_0 szerkezeti fájával helyettesítjük.) Ekkor $\varphi \sim_0 \psi$.

Ötlet: A részformulákban szereplő műveletek számára vonatkozó teljes indukcióval belátható, hogy φ és ψ részformulái megfeleltethetők egymásnak úgy, hogy minden részformulának vele ekvivalens formula feleljen meg.

Formulák szemantikus tulajdonságai

Állítás

Legyen φ egy formula és φ_0 egy részformulája. Tegyük fel, hogy $\varphi_0 \sim_0 \psi_0$ valamely ψ_0 formulára és legyen ψ az a formula, amit φ-ból úgy kapunk, hogy a φ_0 részformulát ψ_0-val helyettesítjük. (Például φ szerkezeti fájában az φ_0-nak megfelelő részfát ψ_0 szerkezeti fájával helyettesítjük.) Ekkor $\varphi \sim_0 \psi$.

Ötlet: A részformulákban szereplő műveletek számára vonatkozó teljes indukcióval belátható, hogy φ és ψ részformulái megfeleltethetők egymásnak úgy, hogy minden részformulának vele ekvivalens formula feleljen meg.

Példa: Lássuk be hogy $\models_0 x \to (y \to x)$!

Formulák szemantikus tulajdonságai

Állítás

Legyen φ egy formula és φ_0 egy részformulája. Tegyük fel, hogy $\varphi_0 \sim_0 \psi_0$ valamely ψ_0 formulára és legyen ψ az a formula, amit φ-ból úgy kapunk, hogy a φ_0 részformulát ψ_0-val helyettesítjük. (Például φ szerkezeti fájában az φ_0-nak megfelelő részfát ψ_0 szerkezeti fájával helyettesítjük.) Ekkor $\varphi \sim_0 \psi$.

Ötlet: A részformulákban szereplő műveletek számára vonatkozó teljes indukcióval belátható, hogy φ és ψ részformulái megfeleltethetők egymásnak úgy, hogy minden részformulának vele ekvivalens formula feleljen meg.

Példa: Lássuk be hogy $\models_0 x \to (y \to x)$!

$x \to (y \to x) \sim_0 \neg x \vee (\neg y \vee x) \sim_0 \neg x \vee (x \vee \neg y) \sim_0 (\neg x \vee x) \vee \neg y \sim_0 (x \vee \neg x) \vee \neg y \sim_0 \top \vee \neg y \sim_0 \top$.

Formulahalmazok szemantikus tulajdonságai

Definíció

- Egy I interpretáció **kielégít** egy $\mathcal{F}$ formulahalmazt ($I \models_0 \mathcal{F}$), ha a formulahalmaz minden formuláját kielégíti.

Formulahalmazok szemantikus tulajdonságai

Definíció

- Egy I interpretáció **kielégít** egy $\mathcal{F}$ formulahalmazt ($I \models_0 \mathcal{F}$), ha a formulahalmaz minden formuláját kielégíti.
- Egy $\mathcal{F}$ formulahalmaz **kielégíthető**, ha legalább egy interpretáció kielégíti.

Formulahalmazok szemantikus tulajdonságai

Definíció

- Egy I interpretáció **kielégít** egy $\mathcal{F}$ formulahalmazt ($I \models_0 \mathcal{F}$), ha a formulahalmaz minden formuláját kielégíti.
- Egy $\mathcal{F}$ formulahalmaz **kielégíthető**, ha legalább egy interpretáció kielégíti.
- Egy $\mathcal{F}$ formulahalmaz **kielégíthetetlen**, ha nincs olyan interpretáció, ami egyszerre minden $\mathcal{F}$-beli formulát kielégít.

Formulahalmazok szemantikus tulajdonságai

Definíció

- Egy I interpretáció **kielégít** egy $\mathcal{F}$ formulahalmazt ($I \models_0 \mathcal{F}$), ha a formulahalmaz minden formuláját kielégíti.
- Egy $\mathcal{F}$ formulahalmaz **kielégíthető**, ha legalább egy interpretáció kielégíti.
- Egy $\mathcal{F}$ formulahalmaz **kielégíthetetlen**, ha nincs olyan interpretáció, ami egyszerre minden $\mathcal{F}$-beli formulát kielégít.
- Egy $\mathcal{F}$ formulahalmaznak a φ formula **tautologikus következménye**($\mathcal{F} \models_0 \varphi$), ha minden $\mathcal{F}$-t kielégítő interpretáció kielégíti φ-t is.

Formulahalmazok szemantikus tulajdonságai

Definíció

- Egy I interpretáció **kielégít** egy $\mathcal{F}$ formulahalmazt ($I \models_0 \mathcal{F}$), ha a formulahalmaz minden formuláját kielégíti.
- Egy $\mathcal{F}$ formulahalmaz **kielégíthető**, ha legalább egy interpretáció kielégíti.
- Egy $\mathcal{F}$ formulahalmaz **kielégíthetetlen**, ha nincs olyan interpretáció, ami egyszerre minden $\mathcal{F}$-beli formulát kielégít.
- Egy $\mathcal{F}$ formulahalmaznak a φ formula **tautologikus következménye**($\mathcal{F} \models_0 \varphi$), ha minden $\mathcal{F}$-t kielégítő interpretáció kielégíti φ-t is.

Példa: $\{x \to y, x\} \models_0 y$

x	y	$x \to y$	x	y
i	i	i	i	i
i	h	h	i	h
h	i	i	h	i
h	h	i	h	h

A szemantikus fogalmak egymással való kapcsolata

Tétel

Legyen $\mathcal{F}$ egy formulahalmaz és φ egy formula. Akkor a következők teljesülnek.

- φ akkor és csak akkor kielégíthetetlen, ha $\neg\varphi$ tautológia.

A szemantikus fogalmak egymással való kapcsolata

Tétel

Legyen $\mathcal{F}$ egy formulahalmaz és φ egy formula. Akkor a következők teljesülnek.

- φ akkor és csak akkor kielégíthetetlen, ha $\neg\varphi$ tautológia.
- $\mathcal{F} \models_0 \varphi$ akkor és csak akkor, ha $\mathcal{F} \cup \{\neg\varphi\}$ kielégíthetetlen.

A szemantikus fogalmak egymással való kapcsolata

Tétel

Legyen $\mathcal{F}$ egy formulahalmaz és φ egy formula. Akkor a következők teljesülnek.

- φ akkor és csak akkor kielégíthetetlen, ha $\neg\varphi$ tautológia.
- $\mathcal{F} \models_0 \varphi$ akkor és csak akkor, ha $\mathcal{F} \cup \{\neg\varphi\}$ kielégíthetetlen.

Bizonyítás:

- ha $I \models_0 \varphi$ akkor és csak akkor $I \not\models_0 \neg\varphi$.

A szemantikus fogalmak egymással való kapcsolata

Tétel

Legyen $\mathcal{F}$ egy formulahalmaz és φ egy formula. Akkor a következők teljesülnek.

- φ akkor és csak akkor kielégíthetetlen, ha $\neg\varphi$ tautológia.
- $\mathcal{F} \models_0 \varphi$ akkor és csak akkor, ha $\mathcal{F} \cup \{\neg\varphi\}$ kielégíthetetlen.

Bizonyítás:

- ha $I \models_0 \varphi$ akkor és csak akkor $I \not\models_0 \neg\varphi$.
- $\mathcal{F} \models_0 \varphi$ akkor és csak akkor, ha minden olyan I interpretációra, amelyre $I \models_0 \mathcal{F}$ teljesül $I \models_0 \varphi$ is fennáll, azaz $I \not\models_0 \neg\varphi$. Tehát $\mathcal{F} \models_0 \varphi$ esetén nincs olyan interpretáció, amely $\mathcal{F}$-et és $\neg\varphi$-t egyszerre kielégítené.

A szemantikus fogalmak egymással való kapcsolata

Tétel

Legyen $\mathcal{F}$ egy formulahalmaz és φ egy formula. Akkor a következők teljesülnek.

- φ akkor és csak akkor kielégíthetetlen, ha $\neg\varphi$ tautológia.
- $\mathcal{F} \models_0 \varphi$ akkor és csak akkor, ha $\mathcal{F} \cup \{\neg\varphi\}$ kielégíthetetlen.

Bizonyítás:

- ha $I \models_0 \varphi$ akkor és csak akkor $I \not\models_0 \neg\varphi$.
- $\mathcal{F} \models_0 \varphi$ akkor és csak akkor, ha minden olyan I interpretációra, amelyre $I \models_0 \mathcal{F}$ teljesül $I \models_0 \varphi$ is fennáll, azaz $I \not\models_0 \neg\varphi$. Tehát $\mathcal{F} \models_0 \varphi$ esetén nincs olyan interpretáció, amely $\mathcal{F}$-et és $\neg\varphi$-t egyszerre kielégítené.
  Fordítva, ha nincs olyan interpretáció, amely $\mathcal{F}$-et és $\neg\varphi$-t egyszerre kielégítené, akkor minden $\mathcal{F}$-et kielégítő interpretáció $\neg\varphi$-t hamisra, így φ-t igazra értékeli, azaz $\mathcal{F} \models_0 \varphi$.

A konjunktív normálforma

Definíció

- **Literálnak** nevezünk egy x vagy $\neg x$ alakú formulát, ahol $x \in \mathrm{Var}$. x és $\neg x$ **komplemens literálpár**.

A konjunktív normálforma

Definíció

- **Literálnak** nevezünk egy x vagy $\neg x$ alakú formulát, ahol $x \in \mathrm{Var}$. x és $\neg x$ **komplemens literálpár**. Egy literál **alapja** az az ítéletváltozó, amelyik a literálban szerepel.

A konjunktív normálforma

Definíció

- **Literálnak** nevezünk egy x vagy $\neg x$ alakú formulát, ahol $x \in \mathrm{Var}$. x és $\neg x$ **komplemens literálpár**. Egy literál **alapja** az az ítéletváltozó, amelyik a literálban szerepel.
- **Elemi diszjunkciónak** (vagy röviden **klóznak**) hívunk egy $\ell_1 \vee \cdots \vee \ell_n$ alakú formulát ($n \in \mathbb{N}$), ahol $\ell_1, \ldots \ell_n$ páronként különböző alapú literálok.

A konjunktív normálforma

Definíció

- **Literálnak** nevezünk egy x vagy $\neg x$ alakú formulát, ahol $x \in \mathrm{Var}$. x és $\neg x$ **komplemens literálpár**. Egy literál **alapja** az az ítéletváltozó, amelyik a literálban szerepel.
- **Elemi diszjunkciónak** (vagy röviden **klóznak**) hívunk egy $\ell_1 \vee \dots \vee \ell_n$ alakú formulát ($n \in \mathbb{N}$), ahol $\ell_1, \dots \ell_n$ páronként különböző alapú literálok.
- **Konjunktív normálformának** (röviden KNF-nek) nevezünk egy $C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_m$ ($m \geqslant 1$) alakú formulát, ahol minden $1 \leqslant i \leqslant m$-re C_i egy klóz (a KNF egy **tagja**).

A konjunktív normálforma

Definíció

- **Literálnak** nevezünk egy x vagy $\neg x$ alakú formulát, ahol $x \in \mathrm{Var}$. x és $\neg x$ **komplemens literálpár**. Egy literál **alapja** az az ítéletváltozó, amelyik a literálban szerepel.
- **Elemi diszjunkciónak** (vagy röviden **klóznak**) hívunk egy $\ell_1 \vee \dots \vee \ell_n$ alakú formulát ($n \in \mathbb{N}$), ahol $\ell_1, \dots \ell_n$ páronként különböző alapú literálok.
- **Konjunktív normálformának** (röviden KNF-nek) nevezünk egy $C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_m$ ($m \geqslant 1$) alakú formulát, ahol minden $1 \leqslant i \leqslant m$-re C_i egy klóz (a KNF egy **tagja**).
- Az **elemi konjunkciót** és a **diszjunktív normálformát** (DNF) ezzel analóg módon definiáljuk $\wedge$ és $\vee$ szerepének felcserélésével.

A konjunktív normálforma

Definíció

- **Literálnak** nevezünk egy x vagy $\neg x$ alakú formulát, ahol $x \in \mathrm{Var}$. x és $\neg x$ **komplemens literálpár**. Egy literál **alapja** az az ítéletváltozó, amelyik a literálban szerepel.
- **Elemi diszjunkciónak** (vagy röviden **klóznak**) hívunk egy $\ell_1 \vee \cdots \vee \ell_n$ alakú formulát ($n \in \mathbb{N}$), ahol $\ell_1, \ldots \ell_n$ páronként különböző alapú literálok.
- **Konjunktív normálformának** (röviden KNF-nek) nevezünk egy $C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_m$ $(m \geqslant 1)$ alakú formulát, ahol minden $1 \leqslant i \leqslant m$-re C_i egy klóz (a KNF egy **tagja**).
- Az **elemi konjunkciót** és a **diszjunktív normálformát** (DNF) ezzel analóg módon definiáljuk $\wedge$ és $\vee$ szerepének felcserélésével.

Példa:

$x \vee \neg y \vee z$ egy klóz (és egy 1-tagú KNF egy 3 tagú DNF is egyben)
$(x \vee \neg y \vee z) \wedge (\neg x \vee z) \wedge \neg y$ egy 3-tagú KNF.

A konjunktív normálforma

Definíció

- **Literálnak** nevezünk egy x vagy $\neg x$ alakú formulát, ahol $x \in \mathrm{Var}$. x és $\neg x$ **komplemens literálpár**. Egy literál **alapja** az az ítéletváltozó, amelyik a literálban szerepel.
- **Elemi diszjunkciónak** (vagy röviden **klóznak**) hívunk egy $\ell_1 \vee \cdots \vee \ell_n$ alakú formulát ($n \in \mathbb{N}$), ahol $\ell_1, \ldots \ell_n$ páronként különböző alapú literálok.
- **Konjunktív normálformának** (röviden KNF-nek) nevezünk egy $C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_m$ $(m \geqslant 1)$ alakú formulát, ahol minden $1 \leqslant i \leqslant m$-re C_i egy klóz (a KNF egy **tagja**).
- Az **elemi konjunkciót** és a **diszjunktív normálformát** (DNF) ezzel analóg módon definiáljuk $\wedge$ és $\vee$ szerepének felcserélésével.

Példa:

$x \vee \neg y \vee z$ egy klóz (és egy 1-tagú KNF egy 3 tagú DNF is egyben)
$(x \vee \neg y \vee z) \wedge (\neg x \vee z) \wedge \neg y$ egy 3-tagú KNF.

A diszjunktív normálforma

Tétel

Minden φ ítéletkalkulusbeli formulához megadható egy vele tautologikusan ekvivalens DNF.

A diszjunktív normálforma

Tétel

Minden φ ítéletkalkulusbeli formulához megadható egy vele tautologikusan ekvivalens DNF.

Bizonyítás: Legyen $\mathrm{Var}(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ a φ változói és $\varphi^i = \{I \mid \mathcal{B}_I(\varphi) = i\}$ a φ formula igaz halmaza.

A diszjunktív normálforma

Tétel

Minden φ ítéletkalkulusbeli formulához megadható egy vele tautológikusan ekvivalens DNF.

Bizonyítás: Legyen $\mathrm{Var}(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ a φ változói és $\varphi^i = \{I \mid \mathcal{B}_I(\varphi) = i\}$ a φ formula igaz halmaza.

Ekkor minden $I \in \varphi^i$ esetén

$$\psi_I := \bigwedge_{x:I(x)=i} x \wedge \bigwedge_{x:I(x)=h} \neg x$$

egy elemi konjunkció és $\psi_I^i = \{I\}$.

A diszjunktív normálforma

Tétel

Minden φ ítéletkalkulusbeli formulához megadható egy vele tautologikusan ekvivalens DNF.

Bizonyítás: Legyen $\mathrm{Var}(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ a φ változói és $\varphi^i = \{I \mid \mathcal{B}_I(\varphi) = i\}$ a φ formula igaz halmaza.

Ekkor minden $I \in \varphi^i$ esetén

$$\psi_I := \bigwedge_{x:I(x)=i} x \wedge \bigwedge_{x:I(x)=h} \neg x$$

egy elemi konjunkció és $\psi_I^i = \{I\}$.

Tehát a $\psi = \bigvee_{I \in \varphi^i} \psi_I$ formulára

$$\psi^i = \bigcup_{I \in \varphi^i} \psi_I^i = \bigcup_{I \in \varphi^i} \{I\} = \varphi^i.$$

Tehát $\psi \sim_0 \varphi$ és ψ diszjunktív normálformájú.

A konjunktív normálforma

Tétel

Minden φ ítéletkalkulusbeli formulához megadható egy vele tautologikusan ekvivalens KNF.

A konjunktív normálforma

Tétel

Minden φ ítéletkalkulusbeli formulához megadható egy vele tautologikusan ekvivalens KNF.

Bizonyítás: Legyen $\mathrm{Var}(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ a φ változói és $\varphi^h = \{I \mid \mathcal{B}_I(\varphi) = h\}$ a φ formula hamis halmaza.

A konjunktív normálforma

Tétel

Minden φ ítéletkalkulusbeli formulához megadható egy vele tautológikusan ekvivalens KNF.

Bizonyítás: Legyen $\mathrm{Var}(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ a φ változói és $\varphi^h = \{I \mid \mathcal{B}_I(\varphi) = h\}$ a φ formula hamis halmaza.

Ekkor minden $I \in \varphi^h$ esetén

$$\psi_I := \bigvee_{x:I(x)=i} \neg x \vee \bigvee_{x:I(x)=h} x$$

egy elemi diszjunkció és $\psi_I^h = \{I\}$.

A konjunktív normálforma

Tétel

Minden φ ítéletkalkulusbeli formulához megadható egy vele tautologikusan ekvivalens KNF.

Bizonyítás: Legyen $\mathrm{Var}(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ a φ változói és $\varphi^h = \{I \mid \mathcal{B}_I(\varphi) = h\}$ a φ formula hamis halmaza.

Ekkor minden $I \in \varphi^h$ esetén

$$\psi_I := \bigvee_{x:I(x)=i} \neg x \vee \bigvee_{x:I(x)=h} x$$

egy elemi diszjunkció és $\psi_I^h = \{I\}$.

Tehát a $\psi = \bigwedge_{I \in \varphi^h} \psi_I$ formulára

$$\psi^h = \bigcup_{I \in \varphi^h} \psi_I^h = \bigcup_{I \in \varphi^h} \{I\} = \varphi^h.$$

Tehát $\psi \sim_0 \varphi$ és ψ konjunktív normálformájú.

A konjunktív normálforma

Példa: Legyen $\varphi = (x \to y) \to z$. φ ítélettáblája:

x	y	z	φ
i	i	i	i
i	i	h	h
i	h	i	i
i	h	h	i
h	i	i	i
h	i	h	h
h	h	i	i
h	h	h	h

A konjunktív normálforma

Példa: Legyen $\varphi = (x \to y) \to z$. φ ítélettáblája:

x	y	z	φ
i	i	i	i
i	i	h	h
i	h	i	i
i	h	h	i
h	i	i	i
h	i	h	h
h	h	i	i
h	h	h	h

Tehát DNF:
$(x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \neg y \wedge z) \vee (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z) \vee (\neg x \wedge \neg y \wedge z)$.

A konjunktív normálforma

Példa: Legyen $\varphi = (x \to y) \to z$. φ ítélettáblája:

x	y	z	φ
i	i	i	i
i	i	h	h
i	h	i	i
i	h	h	i
h	i	i	i
h	i	h	h
h	h	i	i
h	h	h	h

Tehát DNF:
$(x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \neg y \wedge z) \vee (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z) \vee (\neg x \wedge \neg y \wedge z)$.

KNF: $(\neg x \vee \neg y \vee z) \wedge (x \vee \neg y \vee z) \wedge (x \vee y \vee z)$.

A konjunktív normálforma

A bizonyítás konstrukciója a gyakorlatban nem nagyon használható, mivel szükséges az igaz/hamis halmaz meghatározására és mert az eredmény az input méretében akár exponenciális is lehet.

A konjunktív normálforma

A bizonyítás konstrukciója a gyakorlatban nem nagyon használható, mivel szükséges az igaz/hamis halmaz meghatározására és mert az eredmény az input méretében akár exponenciális is lehet.

Sokszor praktikusabb az eredeti formulát átalakítani a kívánt alakra az alábbiak szerint

1. az $\rightarrow$ operátorok eliminálása ($\varphi \rightarrow \psi \sim_0 \neg\varphi \vee \psi$)
2. $\neg$ operátorok csak közvetlenül ítéletváltozók előtt forduljanak elő (De Morgan azonosságok és kettős tagadás törvénye)
3. a formula 2 szintűvé lapítása (disztributív szabályok)

A konjunktív normálforma

A bizonyítás konstrukciója a gyakorlatban nem nagyon használható, mivel szükséges az igaz/hamis halmaz meghatározására és mert az eredmény az input méretében akár exponenciális is lehet.

Sokszor praktikusabb az eredeti formulát átalakítani a kívánt alakra az alábbiak szerint

1. az $\to$ operátorok eliminálása ($\varphi \to \psi \sim_0 \neg\varphi \vee \psi$)
2. $\neg$ operátorok csak közvetlenül ítéletváltozók előtt forduljanak elő (De Morgan azonosságok és kettős tagadás törvénye)
3. a formula 2 szintűvé lapítása (disztributív szabályok)

Példa:
$(\neg x \to y) \to (x \wedge \neg(\neg y \wedge z)) \sim_0 \neg(x \vee y) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \sim_0 (\neg x \wedge \neg y) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \sim_0 (\neg x \vee x) \wedge (\neg x \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg y \vee x) \wedge (\neg y \vee y \vee \neg z) \sim_0 (\neg x \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg y \vee x)$.

Ez KNF.

A konjunktív normálforma

A bizonyítás konstrukciója a gyakorlatban nem nagyon használható, mivel szükséges az igaz/hamis halmaz meghatározására és mert az eredmény az input méretében akár exponenciális is lehet.

Sokszor praktikusabb az eredeti formulát átalakítani a kívánt alakra az alábbiak szerint

1. az $\rightarrow$ operátorok eliminálása ($\varphi \rightarrow \psi \sim_0 \neg\varphi \vee \psi$)
2. $\neg$ operátorok csak közvetlenül ítéletváltozók előtt forduljanak elő (De Morgan azonosságok és kettős tagadás törvénye)
3. a formula 2 szintűvé lapítása (disztributív szabályok)

Példa:
$(\neg x \rightarrow y) \rightarrow (x \wedge \neg(\neg y \wedge z)) \sim_0 \neg(x \vee y) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \sim_0 (\neg x \wedge \neg y) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \sim_0 (\neg x \vee x) \wedge (\neg x \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg y \vee x) \wedge (\neg y \vee y \vee \neg z) \sim_0 (\neg x \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg y \vee x)$.

Ez KNF. A DNF ebből egy disztributív szabályalkalmazással adódik:
$(\neg x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge x) \vee (y \wedge \neg y) \vee (y \wedge x) \vee (\neg z \wedge \neg y) \vee (\neg z \wedge x) \sim_0 (\neg x \wedge \neg y) \vee (y \wedge x) \vee (\neg z \wedge \neg y) \vee (\neg z \wedge x)$.

KNF szerepe következmények bizonyításában

Láttuk, hogy $\mathcal{F} \models_0 \varphi$ akkor és csak akkor, ha $\mathcal{F} \cup \{\neg\varphi\}$ kielégíthetetlen.

KNF szerepe következmények bizonyításában

Láttuk, hogy $\mathcal{F} \models_0 \varphi$ akkor és csak akkor, ha $\mathcal{F} \cup \{\neg\varphi\}$ kielégíthetetlen.

Ha $\mathcal{F} = \{F_1, \ldots, F_n\}$ véges formulahalmaz, akkor $\mathcal{F} \cup \{\neg\varphi\}$ kielégíthetetlensége ekvivalens $F_1 \wedge \cdots \wedge F_n \wedge \neg\varphi$ kielégíthetetlenségével.

KNF szerepe következmények bizonyításában

Láttuk, hogy $\mathcal{F} \models_0 \varphi$ akkor és csak akkor, ha $\mathcal{F} \cup \{\neg\varphi\}$ kielégíthetetlen.

Ha $\mathcal{F} = \{F_1, \ldots, F_n\}$ véges formulahalmaz, akkor $\mathcal{F} \cup \{\neg\varphi\}$ kielégíthetetlensége ekvivalens $F_1 \wedge \cdots \wedge F_n \wedge \neg\varphi$ kielégíthetetlenségével.

Mivel a KNF külső operátora is $\wedge$, ezért ha a formulák KNF alakúak, akkor a feladat valójában egy klózhalmaz kielégíthetetlenségének eldöntése.

Rezolvens

Rezolvens

Legyenek C_1 és C_2 pontosan 1 komplemens literálpárt tartalmazó klózok. Tehát $C_1 = C_1' \vee \ell_1$, $C_2 = C_2' \vee \ell_2$, ahol ℓ_1 és ℓ_2 komplemens literálpár, C_1' és C_2' viszont nem tartalmaz ilyet. A $\mathrm{res}(C_1, C_2) := C_1' \vee C_2'$ klózt (esetleges egyszerűsítés után) a (C_1, C_2) klózpár rezolvensének nevezzük. (Ha $C_1 = \ell_1$, $C_2 = \ell_2$, akkor $\mathrm{res}(C_1, C_2) = \Box$.)

Rezolvens

Rezolvens

Legyenek C_1 és C_2 pontosan 1 komplemens literálpárt tartalmazó klózok. Tehát $C_1 = C_1' \vee \ell_1$, $C_2 = C_2' \vee \ell_2$, ahol ℓ_1 és ℓ_2 komplemens literálpár, C_1' és C_2' viszont nem tartalmaz ilyet. A $\mathrm{res}(C_1, C_2) := C_1' \vee C_2'$ klózt (esetleges egyszerűsítés után) a (C_1, C_2) klózpár rezolvensének nevezzük. (Ha $C_1 = \ell_1$, $C_2 = \ell_2$, akkor $\mathrm{res}(C_1, C_2) = \square$.)

Példa: Mi a rezolvensük?

Rezolvens

Rezolvens

Legyenek C_1 és C_2 pontosan 1 komplemens literálpárt tartalmazó klózok. Tehát $C_1 = C_1' \vee \ell_1$, $C_2 = C_2' \vee \ell_2$, ahol ℓ_1 és ℓ_2 komplemens literálpár, C_1' és C_2' viszont nem tartalmaz ilyet. A $\mathrm{res}(C_1, C_2) := C_1' \vee C_2'$ klózt (esetleges egyszerűsítés után) a (C_1, C_2) klózpár rezolvensének nevezzük. (Ha $C_1 = \ell_1$, $C_2 = \ell_2$, akkor $\mathrm{res}(C_1, C_2) = \square$.)

Példa: Mi a rezolvensük?

klózpár	rezolvens
$(x \vee y, \neg y \vee z)$	
$(x \vee y \vee z, \neg y \vee z)$	
$(x \vee \neg y, \neg y \vee z)$	
$(x \vee \neg y, z \vee \neg v)$	
$(x \vee y \vee z, \neg y \vee \neg z)$	
$(x, \neg x)$	

Rezolvens

Rezolvens

Legyenek C_1 és C_2 pontosan 1 komplemens literálpárt tartalmazó klózok. Tehát $C_1 = C_1' \vee \ell_1$, $C_2 = C_2' \vee \ell_2$, ahol ℓ_1 és ℓ_2 komplemens literálpár, C_1' és C_2' viszont nem tartalmaz ilyet. A $\mathrm{res}(C_1, C_2) := C_1' \vee C_2'$ klózt (esetleges egyszerűsítés után) a (C_1, C_2) klózpár rezolvensének nevezzük. (Ha $C_1 = \ell_1$, $C_2 = \ell_2$, akkor $\mathrm{res}(C_1, C_2) = \square$.)

Példa: Mi a rezolvensük?

klózpár	rezolvens
$(x \vee y, \neg y \vee z)$	
$(x \vee y \vee z, \neg y \vee z)$	
$(x \vee \neg y, \neg y \vee z)$	
$(x \vee \neg y, z \vee \neg v)$	
$(x \vee y \vee z, \neg y \vee \neg z)$	
$(x, \neg x)$	

Rezolvens

Rezolvens

Legyenek C_1 és C_2 pontosan 1 komplemens literálpárt tartalmazó klózok. Tehát $C_1 = C_1' \vee \ell_1$, $C_2 = C_2' \vee \ell_2$, ahol ℓ_1 és ℓ_2 komplemens literálpár, C_1' és C_2' viszont nem tartalmaz ilyet. A $\mathrm{res}(C_1, C_2) := C_1' \vee C_2'$ klózt (esetleges egyszerűsítés után) a (C_1, C_2) klózpár rezolvensének nevezzük. (Ha $C_1 = \ell_1$, $C_2 = \ell_2$, akkor $\mathrm{res}(C_1, C_2) = \square$.)

Példa: Mi a rezolvensük?

klózpár	rezolvens
$(x \vee y, \neg y \vee z)$	$x \vee z$
$(x \vee y \vee z, \neg y \vee z)$	
$(x \vee \neg y, \neg y \vee z)$	
$(x \vee \neg y, z \vee \neg v)$	
$(x \vee y \vee z, \neg y \vee \neg z)$	
$(x, \neg x)$	

Rezolvens

Rezolvens

Legyenek C_1 és C_2 pontosan 1 komplemens literálpárt tartalmazó klózok. Tehát $C_1 = C_1' \vee \ell_1$, $C_2 = C_2' \vee \ell_2$, ahol ℓ_1 és ℓ_2 komplemens literálpár, C_1' és C_2' viszont nem tartalmaz ilyet. A $\mathrm{res}(C_1, C_2) := C_1' \vee C_2'$ klózt (esetleges egyszerűsítés után) a (C_1, C_2) klózpár rezolvensének nevezzük. (Ha $C_1 = \ell_1$, $C_2 = \ell_2$, akkor $\mathrm{res}(C_1, C_2) = \square$.)

Példa: Mi a rezolvensük?

klózpár	rezolvens
$(x \vee y, \neg y \vee z)$	$x \vee z$
$(x \vee y \vee z, \neg y \vee z)$	
$(x \vee \neg y, \neg y \vee z)$	
$(x \vee \neg y, z \vee \neg v)$	
$(x \vee y \vee z, \neg y \vee \neg z)$	
$(x, \neg x)$	

Rezolvens

Rezolvens

Legyenek C_1 és C_2 pontosan 1 komplemens literálpárt tartalmazó klózok. Tehát $C_1 = C_1' \vee \ell_1$, $C_2 = C_2' \vee \ell_2$, ahol ℓ_1 és ℓ_2 komplemens literálpár, C_1' és C_2' viszont nem tartalmaz ilyet. A $\mathrm{res}(C_1, C_2) := C_1' \vee C_2'$ klózt (esetleges egyszerűsítés után) a (C_1, C_2) klózpár rezolvensének nevezzük. (Ha $C_1 = \ell_1$, $C_2 = \ell_2$, akkor $\mathrm{res}(C_1, C_2) = \square$.)

Példa: Mi a rezolvensük?

klózpár	rezolvens
$(x \vee y, \neg y \vee z)$	$x \vee z$
$(x \vee y \vee z, \neg y \vee z)$	$x \vee z$
$(x \vee \neg y, \neg y \vee z)$	
$(x \vee \neg y, z \vee \neg v)$	
$(x \vee y \vee z, \neg y \vee \neg z)$	
$(x, \neg x)$	

Rezolvens

Rezolvens

Legyenek C_1 és C_2 pontosan 1 komplemens literálpárt tartalmazó klózok. Tehát $C_1 = C_1' \vee \ell_1$, $C_2 = C_2' \vee \ell_2$, ahol ℓ_1 és ℓ_2 komplemens literálpár, C_1' és C_2' viszont nem tartalmaz ilyet. A $\mathrm{res}(C_1, C_2) := C_1' \vee C_2'$ klózt (esetleges egyszerűsítés után) a (C_1, C_2) klózpár rezolvensének nevezzük. (Ha $C_1 = \ell_1$, $C_2 = \ell_2$, akkor $\mathrm{res}(C_1, C_2) = \square$.)

Példa: Mi a rezolvensük?

klózpár	rezolvens
$(x \vee y, \neg y \vee z)$	$x \vee z$
$(x \vee y \vee z, \neg y \vee z)$	$x \vee z$
$(x \vee \neg y, \neg y \vee z)$	nincs: mindkét azonos alapú literál negált
$(x \vee \neg y, z \vee \neg v)$	
$(x \vee y \vee z, \neg y \vee \neg z)$	
$(x, \neg x)$	

Rezolvens

Rezolvens

Legyenek C_1 és C_2 pontosan 1 komplemens literálpárt tartalmazó klózok. Tehát $C_1 = C_1' \vee \ell_1$, $C_2 = C_2' \vee \ell_2$, ahol ℓ_1 és ℓ_2 komplemens literálpár, C_1' és C_2' viszont nem tartalmaz ilyet. A $\mathrm{res}(C_1, C_2) := C_1' \vee C_2'$ klózt (esetleges egyszerűsítés után) a (C_1, C_2) klózpár rezolvensének nevezzük. (Ha $C_1 = \ell_1$, $C_2 = \ell_2$, akkor $\mathrm{res}(C_1, C_2) = \square$.)

Példa: Mi a rezolvensük?

klózpár	rezolvens
$(x \vee y, \neg y \vee z)$	$x \vee z$
$(x \vee y \vee z, \neg y \vee z)$	$x \vee z$
$(x \vee \neg y, \neg y \vee z)$	nincs: mindkét azonos alapú literál negált
$(x \vee \neg y, z \vee \neg v)$	nincs: nincs két azonos alapú literál
$(x \vee y \vee z, \neg y \vee \neg z)$	
$(x, \neg x)$	

Rezolvens

Rezolvens

Legyenek C_1 és C_2 pontosan 1 komplemens literálpárt tartalmazó klózok. Tehát $C_1 = C_1' \vee \ell_1$, $C_2 = C_2' \vee \ell_2$, ahol ℓ_1 és ℓ_2 komplemens literálpár, C_1' és C_2' viszont nem tartalmaz ilyet. A $\text{res}(C_1, C_2) := C_1' \vee C_2'$ klózt (esetleges egyszerűsítés után) a (C_1, C_2) klózpár rezolvensének nevezzük. (Ha $C_1 = \ell_1$, $C_2 = \ell_2$, akkor $\text{res}(C_1, C_2) = \square$.)

Példa: Mi a rezolvensük?

klózpár	rezolvens
$(x \vee y, \neg y \vee z)$	$x \vee z$
$(x \vee y \vee z, \neg y \vee z)$	$x \vee z$
$(x \vee \neg y, \neg y \vee z)$	nincs: mindkét azonos alapú literál negált
$(x \vee \neg y, z \vee \neg v)$	nincs: nincs két azonos alapú literál
$(x \vee y \vee z, \neg y \vee \neg z)$	nincs: két komplemens literálpár van
$(x, \neg x)$	

Rezolvens

Rezolvens

Legyenek C_1 és C_2 pontosan 1 komplemens literálpárt tartalmazó klózok. Tehát $C_1 = C_1' \vee \ell_1$, $C_2 = C_2' \vee \ell_2$, ahol ℓ_1 és ℓ_2 komplemens literálpár, C_1' és C_2' viszont nem tartalmaz ilyet. A $\mathrm{res}(C_1, C_2) := C_1' \vee C_2'$ klózt (esetleges egyszerűsítés után) a (C_1, C_2) klózpár rezolvensének nevezzük. (Ha $C_1 = \ell_1$, $C_2 = \ell_2$, akkor $\mathrm{res}(C_1, C_2) = \square$.)

Példa: Mi a rezolvensük?

klózpár	rezolvens
$(x \vee y, \neg y \vee z)$	$x \vee z$
$(x \vee y \vee z, \neg y \vee z)$	$x \vee z$
$(x \vee \neg y, \neg y \vee z)$	nincs: mindkét azonos alapú literál negált
$(x \vee \neg y, z \vee \neg v)$	nincs: nincs két azonos alapú literál
$(x \vee y \vee z, \neg y \vee \neg z)$	nincs: két komplemens literálpár van
$(x, \neg x)$	

Rezolvens

Rezolvens

Legyenek C_1 és C_2 pontosan 1 komplemens literálpárt tartalmazó klózok. Tehát $C_1 = C_1' \vee \ell_1$, $C_2 = C_2' \vee \ell_2$, ahol ℓ_1 és ℓ_2 komplemens literálpár, C_1' és C_2' viszont nem tartalmaz ilyet. A $\mathrm{res}(C_1, C_2) := C_1' \vee C_2'$ klózt (esetleges egyszerűsítés után) a (C_1, C_2) klózpár rezolvensének nevezzük. (Ha $C_1 = \ell_1$, $C_2 = \ell_2$, akkor $\mathrm{res}(C_1, C_2) = \square$.)

Példa: Mi a rezolvensük?

klózpár	rezolvens
$(x \vee y, \neg y \vee z)$	$x \vee z$
$(x \vee y \vee z, \neg y \vee z)$	$x \vee z$
$(x \vee \neg y, \neg y \vee z)$	nincs: mindkét azonos alapú literál negált
$(x \vee \neg y, z \vee \neg v)$	nincs: nincs két azonos alapú literál
$(x \vee y \vee z, \neg y \vee \neg z)$	nincs: két komplemens literálpár van
$(x, \neg x)$	$\square$

Rezolúció

Rezolúciós levezetés

Egy $\mathcal{S}$ klózhalmazból a C klóz rezolúciós levezetése egy olyan véges $K_1, K_2, \ldots, K_m$ $(m \geqslant 1)$ klózsorozat, ahol minden $j = 1, 2, \ldots, m$-re:

- vagy $K_j \in \mathcal{S}$,
- vagy van olyan $1 \leqslant s, t < j$, hogy $K_j = \mathrm{res}(K_s, K_t)$,

és $K_m = C$.

Rezolúció

Rezolúciós levezetés

Egy $\mathcal{S}$ klózhalmazból a C klóz rezolúciós levezetése egy olyan véges $K_1, K_2, \ldots, K_m$ $(m \geqslant 1)$ klózsorozat, ahol minden $j = 1, 2, \ldots, m$-re:

- vagy $K_j \in \mathcal{S}$,
- vagy van olyan $1 \leqslant s, t < j$, hogy $K_j = \mathrm{res}(K_s, K_t)$,

és $K_m = C$.

Tétel

$\mathcal{S}$ klózhalmaz kielégíthetetlen $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{S}$-ből levezethető $\square$.

Rezolúció

Rezolúciós levezetés

Egy $\mathcal{S}$ klózhalmazból a C klóz rezolúciós levezetése egy olyan véges $K_1, K_2, \ldots, K_m$ $(m \geqslant 1)$ klózsorozat, ahol minden $j = 1, 2, \ldots, m$-re:

- vagy $K_j \in \mathcal{S}$,
- vagy van olyan $1 \leqslant s, t < j$, hogy $K_j = \mathrm{res}(K_s, K_t)$,

és $K_m = C$.

Tétel

$\mathcal{S}$ klózhalmaz kielégíthetetlen $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{S}$-ből levezethető $\square$.

A bizonyítást nem részletezzük. Az egyik fontos lemma:

Lemma

Minden C_1, C_2 klózra és I interpretációjukra igaz, hogy ha $I \models_0 \{C_1, C_2\}$, akkor $I \models_0 \mathrm{res}(C_1, C_2)$.

Rezolúció

Rezolúciós levezetés

Egy $\mathcal{S}$ klózhalmazból a C klóz rezolúciós levezetése egy olyan véges $K_1, K_2, \ldots, K_m$ $(m \geqslant 1)$ klózsorozat, ahol minden $j = 1, 2, \ldots, m$-re:

- vagy $K_j \in \mathcal{S}$,
- vagy van olyan $1 \leqslant s, t < j$, hogy $K_j = \mathrm{res}(K_s, K_t)$,

és $K_m = C$.

Tétel

$\mathcal{S}$ klózhalmaz kielégíthetetlen $\iff$ $\mathcal{S}$-ből levezethető $\square$.

A bizonyítást nem részletezzük. Az egyik fontos lemma:

Lemma

Minden C_1, C_2 klózra és I interpretációjukra igaz, hogy ha $I \models_0 \{C_1, C_2\}$, akkor $I \models_0 \mathrm{res}(C_1, C_2)$.

Rezolúció

Példa: Rezolúciós levezetéssel igazoljuk, hogy az alábbi klózhalmaz kielégíthetetlen!
$\{y \vee z, \neg x \vee w \vee \neg z, \neg y, y \vee \neg z \vee \neg w, x \vee y\}$

Rezolúció

Példa: Rezolúciós levezetéssel igazoljuk, hogy az alábbi klózhalmaz kielégíthetetlen!
$\{y \vee z, \neg x \vee w \vee \neg z, \neg y, y \vee \neg z \vee \neg w, x \vee y\}$

Megoldás:
$\mathcal{S} = \{y \vee z, \neg x \vee w \vee \neg z, \neg y, y \vee \neg z \vee \neg w, x \vee y\}$

1.	$\neg y$	$(\in \mathcal{S})$
2.	$y \vee z$	$(\in \mathcal{S})$
3.	z	$(= \text{res}(1, 2))$
4.	$\neg x \vee w \vee \neg z$	$(\in \mathcal{S})$
5.	$y \vee \neg z \vee \neg w$	$(\in \mathcal{S})$
6.	$\neg x \vee y \vee \neg z$	$(= \text{res}(4, 5))$
7.	$\neg x \vee y$	$(= \text{res}(3, 6))$
8.	$x \vee y$	$(\in \mathcal{S})$
9.	y	$(= \text{res}(7, 8))$
10.	$\square$	$(= \text{res}(1, 9))$