9. előadás

TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA 1.

Többváltozós függvények esetén is megpróbálhatjuk átívelni a valós-valós függvényeknél alkalmazott differenciálhatóság fogalmát úgy, ahogy a folytonossággal és a határértékkel tettük. Azonban ez nem megy olyan egyszerűen. A problémát az okozza, hogy a differenciálhányados meghatározásához, mint a nevéből is kitűnik, elemek hányadosát kellene képezni, amit többdimenziós térben nem értelmezünk. A probléma elkerülésére megpróbálhatunk olyan „metszeteket” kinyerni a többváltozós függvényből, amelyek már valós-valós függvényekkel leírhatók, és ezeket így a differenciálszámítás eszközeivel már tudjuk elemezni.

Parciális deriváltak $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ típusú függvényekre

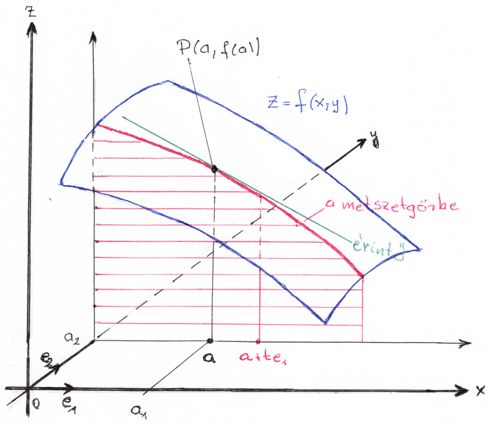
A parciális deriváltakat úgy kapjuk, hogy egy híján minden változót rögzítünk, és az így kapott egyváltozós függvényt deriváljuk.

A kétváltozós esetben a fogalomnak szemléletes jelentés adható. Legyen

$$f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad \text{és} \quad a = (a_1, a_2) \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f.$$

A függvény grafikonja a térben a $z = f(x, y)$ egyenletű felület. Fektessünk az a ponton át az x tengellyel párhuzamos egyenest. Ennek pontjai az xy síkban

$$(a_1 + t, a_2) \qquad (t \in \mathbb{R}).$$



Vegyük a függvény értékeit ezekben a pontokban, és képezzük velük az

$$F_x(t) := f(a_1 + t, a_2)$$

valós-valós függvényt. Ez a függvény értelmezhető a $t = 0$ pontnak egy $K(0)$ környezetében, mert $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. Az F_x függvény képe egy, a felületen futó (metszet)görbe, vagyis a $z = f(x, y)$ egyenletű felület és az $y = a_2$ (x, z tetszőleges) egyenletű sík metszésvonala. ***Az f függvény x változó szerinti parciális deriváltját az a pontban*** (jele: $\boldsymbol{\partial_x f(a)}$) úgy értelmezzük, mint ***az F_x függvény deriváltja a 0 pontban***, feltéve, hogy a derivált létezik, azaz

$$\partial_x f(a) := F_x'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{F_x(t) - F_x(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1 + t, a_2) - f(a_1, a_2)}{t}.$$

$F_x'(0)$ a metszetgörbe $P\big(a, f(a)\big)$ pontbeli érintőjének a meredeksége.

Az y változó szerinti parciális deriváltat hasonló módon értelmezzük. Ebben az esetben az a ponton átmenő, az y tengellyel párhuzamos egyenest kell figyelembe venni, amelynek pontjai $(a_1, a_2 + t)$ $(t \in \mathbb{R})$. Ez pedig az alábbi értelmezéshez vezet.

$$\partial_y f(a) := \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, a_2 + t) - f(a_1, a_2)}{t}.$$

Egy $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény mindegyik változója szerint képezhetjük a parciális deriváltat valamely $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban. Rögzítsük az $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ pont koordinátáit az i-edik kivételével. Az

$$F_i : K(0) \ni t \mapsto f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \ldots, a_n) = f(a + te_i)$$

valós-valós függvény $t = 0$ pontban vett deriváltját (amennyiben létezik) nevezzük az f függvény a-ban vett i-edik parciális deriváltjának. $e_1, e_2, \ldots, e_n$ jelenti a kanonikus bázist $\mathbb{R}^n$-ben, azaz

$$e_i := (0, 0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i\text{-edik}}, 0, \ldots, 0) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

1. Definíció. *Tegyük fel, hogy $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}^+$), $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ és $e_1, \ldots, e_n$ a kanonikus bázis $\mathbb{R}^n$-ben. Az f függvénynek az a pontban létezik az i-edik ($i = 1, 2, \ldots, n$) változó szerinti* **parciális deriváltja**, *ha az*

$$F_i : K(0) \ni t \mapsto f(a + te_i)$$

valós-valós függvény deriválható a 0 pontban. A $F_i'(0)$ valós számot az ***f* függvény *a* pontbeli, *i*-edik változó szerinti parciális deriváltjának** *nevezzük, és az alábbi szimbólumok valamelyikével jelöljük:*

$$\partial_i f(a), \quad \partial_{x_i} f(a), \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(a), \quad f'_{x_i}(a), \quad D_i f(a).$$

A parciális deriváltakat a következő módon számíthatjuk ki. Tekintsük meg a

$$G_i : K(a_i) \ni x_i \mapsto f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

ún. ***parciális függvényt***! Mivel

$$F_i(t) = G_i(a_i + t) \quad \Longrightarrow \quad F_i'(t) = G_i'(a_i + t) \cdot (a_i + t)' = G_i'(a_i + t) \quad \Longrightarrow \quad F_i'(0) = G_i'(a_i),$$

így $\partial_i f(a) = G_i'(a_i)$. Más szavakkal, G_i az a függvény, amit úgy kapunk az f függvényből, hogy csak az i-edik változója marad változónak, a többi az a pont megfelelő koordinátájával egyenlő. Ezért $G_i'(a_i)$ az f függvény deriváltja az i-edik változója szerint úgy, hogy a többi változóját konstansnak kell tekinteni, és a végeredményben az a pont koordinátait kell behelyettesíteni. Ha $n = 1$, azaz f valós-valós függvény, akkor a parciális derivált megegyezik a „rendes” deriválttal.

Példa: Ha ki akarjuk számítani az

$$f(x, y) := xe^{x^2+y^2} - 3y \qquad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény x változója szerinti parciális deriváltját az $a = (a_1, a_2)$ pontban, akkor az y változót konstansnak tekintjük, és az x változó szerint deriválunk:

$$\begin{aligned}
\partial_x f(a_1, a_2) &= (x)'_x \cdot e^{x^2+y^2} + x \cdot (e^{x^2+y^2})'_x - (3y)'_x\Big|_{x=a_1,\, y=a_2} = \\
&= 1 \cdot e^{x^2+y^2} + x \cdot e^{x^2+y^2} \cdot (x^2 + y^2)'_x - 0\Big|_{x=a_1,\, y=a_2} = \\
&= e^{x^2+y^2} + x \cdot e^{x^2+y^2} \cdot 2x\Big|_{x=a_1,\, y=a_2} = \\
&= e^{a_1^2+a_2^2} + 2a_1^2\, e^{a_1^2+a_2^2}.
\end{aligned}$$

Ugyanígy az y változó szerinti parciális deriválás során az x változót tekintjük konstansnak, és az y változó szerint deriválunk:

$$\begin{aligned}\partial_y f(a_1,a_2) &= x\cdot\left(e^{x^2+y^2}\right)'_y - (3y)'_y\Big|_{x=a_1,\,y=a_2} = \\ &= x\cdot e^{x^2+y^2}\cdot(x^2+y^2)'_y - 3\Big|_{x=a_1,\,y=a_2} = \\ &= x\cdot e^{x^2+y^2}\cdot 2y - 3\Big|_{x=a_1,\,y=a_2} = \\ &= 2a_1a_2\,e^{a_1^2+a_2^2} - 3.\end{aligned}$$

A fenti számításaink szerint például

$$\partial_x f(0,0) = 1 \qquad \text{és} \qquad \partial_y f(0,0) = -3.$$

Legyen az f függvény értelmezve $\mathbb{R}^n$ egy részhalmazán. Az f függvény i-edik ***parciális deriváltfüggvényén*** azt a $\partial_i f$ függvényt értjük, amely azokban a pontokban van értelmezve, ahol az f függvény i-edik parciális deriváltja létezik és véges, és ott az értéke $\partial_i f(a)$.

Magasabb rendű parciális deriváltak

Ha egy n-változós függvénynek az $a\in\mathbb{R}^n$ pont egy környezetében létezik a függvény valamely változó szerinti parciális deriváltja, akkor a parciális deriváltfüggvény szintén n-változós valós értékű függvény. Így ennek bármelyik másik változó szerinti parciális deriválhatóságát vizsgálhatjuk.

Legyen f értelmezve az $a\in\mathbb{R}^n$ pont egy környezetében. Ha rögzített $i=1,2,\ldots,n$ esetén a $\partial_i f$ parciális derivált létezik az a pont egy környezetében és a $\partial_i f$ parciális deriváltfüggvénynek létezik a j-edik $(j=1,2,\ldots,n)$ változó szerinti parciális deriváltja az a pontban, akkor a $\partial_j\big(\partial_i f\big)(a)$ számot (mint $\partial_i f\in\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ függvény a-beli j-edik változó szerinti parciális deriváltját) a függvény a-beli ij-edik **másodrendű parciális deriváltjának** nevezzük és így jelöljük:

$$\partial_{ij} f(a) := \partial_i\partial_j f(a) := \partial_j\big(\partial_i f\big)(a)$$

$\partial_{ij} f(a)$ helyett használatosak még a következő jelölések is:

$$\partial_{x_ix_j} f(a),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(a),\quad f''_{x_ix_j}(a),\quad D_jD_if(a),\quad D_{ji}f(a).$$

A $\partial_{ij} f(a)$ deriváltat $i=j$ esetén másodrendű ***tiszta parciális deriváltnak*** nevezzük, és a

$$\partial_i^2 f(a),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a),\quad \ldots.$$

szimbólumok valamelyikével jelöljük. Ha $i\neq j$, akkor $\partial_{ij} f(a)$-t másodrendű ***vegyes parciális deriváltnak*** is szokás nevezni.

Kettőnél magasabb rendre az s-edrendű $(2<s\in\mathbb{N})$ parciális deriválhatóságot s szerinti indukcióval definiálhatjuk. Ha $1\le i_1,i_2,\ldots,i_s\le n$ tetszőleges indexek, akkor az f függvény a-beli s-edrendű i_1-edik, …, i_s-edik változó szerinti parciális deriváltját az alábbi szimbólumok valamelyikével jelöljük:

$$\partial_{i_1}\partial_{i_2}\ldots\partial_{i_s} f(a),\quad \frac{\partial^s f}{\partial x_{i_s}\ldots\partial x_{i_1}}(a),\quad \ldots.$$

Iránymenti deriváltak $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ típusú függvényekre

A parciális deriváltaknál az e_i kanonikus vektorokkal párhuzamos „irányokban” deriváltuk az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény értékeiből keletkezett valós-valós függvényt az a pontban. Ezt úgy fogjuk általánosítani, hogy egy tetszőleges irányban csináljuk ugyanezt.

Egy $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(2 \leq n \in \mathbb{N})$ függvény minden $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ egységvektor szerint képezhetjük a v irányú iránymenti deriváltat valamely $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban. Mivel v egységvektor, így

$$\|v\|^2 = v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2 = 1.$$

Az

$$F_v : K(0) \ni t \mapsto f(a_1 + tv_1, a_2 + tv_2, \ldots, a_n + tv_n) = f(a + tv)$$

valós-valós függvény $t = 0$ pontban vett deriváltját (amennyiben létezik) nevezzük az f függvény v irányú iránymenti deriváltjának az a pontban.

2. Definíció. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. Tegyük fel, hogy $v \in \mathbb{R}^n$ egy egységvektor: $\|v\| = 1$. A f függvénynek az a pontban létezik a v irányú* **iránymenti deriváltja***, ha a*

$$F_v : K(0) \ni t \mapsto f(a + tv)$$

valós-valós függvény deriválható a 0 pontban. A $F_v'(0)$ valós számot az ***f* függvény *a* pontbeli *v* irányú iránymenti deriváltjának** *nevezzük, és a $\boldsymbol{\partial_v f(a)}$ vagy a $\boldsymbol{f_v'(a)}$ szimbólummal jelöljük.*

Ha $i = 1, 2, \ldots, n$ egy rögzített index és $v = e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ (ahol tehát a v vektor i-edik koordinátája 1, a többi 0), akkor $F_v = F_{e_i} = F_i$, és így

$$\partial_v f(a) = \partial_{e_i} f(a) = F_{e_i}'(0) = F_i'(0) = \partial_i f(a).$$

Az iránymenti derivált tehát a parciális derivált általánosítása.

Példa: Számítsuk ki az

$$f(x, y) := xe^{x+y} + \sin xy \qquad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény $v := \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ irányú iránymenti deriváltját az $a := (0, 0)$ pontban! Mivel

$$F_v(t) : = f(a + tv) = f\left((0,0) + t\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = f\left(\tfrac{1}{2}\, t,\ \tfrac{\sqrt{3}}{2}\, t\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\, t\, e^{\frac{1}{2} t + \frac{\sqrt{3}}{2} t} + \sin\left(\frac{1}{2}\, t \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\, t\right) = \frac{1}{2}\, t\, e^{\frac{1+\sqrt{3}}{2} t} + \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\, t^2\right),$$

így

$$F_v'(t) : = \frac{1}{2}\, e^{\frac{1+\sqrt{3}}{2} t} + \frac{1}{2}\, t\, e^{\frac{1+\sqrt{3}}{2} t} \cdot \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\, t^2\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\, t.$$

Ekkor

$$\partial_v f(a) = F_v'(0) = \frac{1}{2}.$$

Az esetek többségében az iránymenti derivált kiszámítása (vagyis F_v deriválhatóságának a vizsgálata) hosszadalmas feladat (ti. a parciális deriválttal ellentétben most f minden komponense változik). Bizonyos feltételek mellett gyorsabban tudunk eljutni a végeredményhez. Már láttuk, hogy a parciális deriváltak speciális iránymenti deriváltak, hiszen $\partial_{e_i} f(a) = \partial_i f(a)$ minden $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén. A következő állítás egy fordított kapcsolatot mutat.

1. Tétel. *Tegyük fel, hogy* $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$, *illetve az* f *függvénynek léteznek a parciális deriváltjai egy* $K(a) \subset \mathcal{D}_f$ *környezetben, és ezek folytonosak az* a *pontban. Ekkor az* f *függvénynek az* a *pontból induló tetszőleges* $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ *egységvektor irányban létezik az iránymenti deriváltja, és*

$$\partial_v f(a) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(a) \cdot v_i = \partial_1 f(a) \cdot v_1 + \partial_2 f(a) \cdot v_2 + \dots + \partial_n f(a) \cdot v_n.$$

Bizonyítás. Később.

A tétel segítségével lerövidülnek a számítások. A fenti példánál:

$$f(x,y) := xe^{x+y} + \sin xy \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big), \qquad v := \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \qquad a := (0,0).$$

Mivel

$$\begin{aligned} \partial_x f(x,y) &= e^{x+y} + xe^{x+y} + y \cos xy, & \partial_x f(0,0) &= 1, \\ \partial_y f(x,y) &= xe^{x+y} + x \cos xy, & \partial_y f(0,0) &= 0, \end{aligned}$$

ezért

$$\partial_v f(a) = \partial_x f(0,0) \cdot v_1 + \partial_y f(0,0) \cdot v_2 = 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}.$$

A totális derivált

A totális deriválhatóság fogalma ugyan pontosan megfelel az egyváltozós deriválhatóság definíciójának, de mégis bonyolultabb, mint egyváltozós esetben. Idézzünk fel a valós-valós függvények deriválhatóságával kapcsolatos néhány fontos ismeretet.

Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény *differenciálható* vagy *deriválható* az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban (jelben: $f \in D\{a\}$), ha létezik és véges a

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{határérték.}$$

Ezt a határértéket az $f'(a)$ szimbólummal jelöljük, és az f függvény a pontbeli *deriváltjának* vagy *differenciálhányadosának* nevezzük.

A többváltozós függvények esetében a differenciahányadosnak nincs közvetlen megfelelője (hiszen vektorok körében nem tudunk osztani), ezért a deriválhatóságot nem tudjuk differenciahányadosok határértékeként értelmezni. Az egyváltozós analízisben azonban láttuk azt, hogy az elsőfokú polinomokkal való lokális közelíthetőség ekvivalens a differenciálhatósággal. Nevezetesen: ha $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$, akkor

$$f \in D\{a\} \qquad \iff \qquad \begin{cases} \exists A \in \mathbb{R} \;\text{ és }\; \exists \varepsilon \in \mathbb{R} \to \mathbb{R},\; \lim\limits_{0} \varepsilon = 0: \\ f(a+h) - f(a) = A \cdot h + \varepsilon(h) \cdot h \qquad (a+h \in \mathcal{D}_f). \end{cases}$$

Ekkor az A szám az f függvény a pontbeli deriváltja, vagyis $A = f'(a)$.

Vegyük észre, hogy a fentiekben az ε függvény szerepeltetése „kiküszöbölhető”. Pontosabban: ha $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$, akkor

$$f \in D\{a\} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists A \in \mathbb{R}\colon \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - A \cdot h}{h} = \lim_0 \varepsilon = 0.$$

Ha még azt is figyelembe vesszük, hogy $\lim_0 \varepsilon = 0 \iff \lim_0 |\varepsilon| = 0$, akkor végül azt kapjuk, hogy

$$(*) \qquad \boxed{f \in D\{a\} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists A \in \mathbb{R}\colon \lim_{h\to 0} \frac{\big|f(a+h) - f(a) - A \cdot h\big|}{|h|} = 0.}$$

A fenti valós-valós függvény deriválhatóságára vonatkozó $(*)$ ekvivalens átfogalmazás már kiterjeszthető vektor-vektor függvényre is. Ehhez vegyük észre, hogy a $(*)$-ban szereplő $L(h) := A \cdot h$ tag felfogható, mint egy $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *lineáris transzformáció*, ami azt jelenti, hogy

$$(\#) \qquad L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y)$$

teljesül minden $x, y \in \mathbb{R}$ és $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén. A lineáris transzformáció fogalma is hasonlóan megadható $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ típusú leképezések esetén, nevezetesen úgy, hogy $(\#)$ teljesüljön minden $x, y \in \mathbb{R}^n$ és $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén. Tudjuk, hogy ekkor van egy $m \times n$-es A mátrix, amire $L(h) = A \cdot h$ teljesül. Itt $h \in \mathbb{R}^n$-t oszlopvektorként kell tekinteni, és a szorzás a mátrixszorzatot jelenti. ***Így $(*)$-ban az abszolút értéket a megfelelő normákkal, az A valós számot pedig egy $m \times n$-es mátrixszal helyettesítjük***.

3. Definíció. *Az $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(n, m \in \mathbb{N}^+)$ függvény* **totálisan deriválható** *az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban (jelben: $\boldsymbol{f \in D\{a\}}$), ha*

$$\exists A \in \mathbb{R}^{m\times n}\colon \lim_{h\to 0} \frac{\big\|f(a+h) - f(a) - A \cdot h\big\|}{\|h\|} = 0.$$

Ekkor $f'(a) := A$ az f függvény **deriváltmátrixa** *az a pontban.*

Megjegyzések.

1. Az euklideszi normára mindig a $\|\cdot\|$ jelölést alkalmazzuk függetlenül attól, hogy hány dimenziós a benne szereplő vektor. $h \to 0$ azt jelenti, hogy a h vektor tart a 0 vektorhoz $\mathbb{R}^n$-ben, és így a határértékben lévő valós kifejezésnek tartania kell a 0 számhoz.

2. A fenti definíciót úgy lehet átfogalmazni, hogy

$$f \in D\{a\} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \exists A \in \mathbb{R}^{m\times n} \ \text{ és } \ \exists \varepsilon : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}^m, \ \lim_0 \varepsilon = 0\colon \\ f(a+h) - f(a) = A \cdot h + \varepsilon(h) \cdot \|h\| \qquad (a+h \in \mathcal{D}_f). \end{cases}$$

2. Tétel. *Ha $f \in D\{a\}$, akkor az $f'(a)$ deriváltmátrix egyértelműen meghatározott.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az A_1 és A_2 mátrixok kielégítik a totálisan deriválhatóság definíciójában szereplő feltételeket. Ekkor

$$0 \le \frac{\Big\|(A_1 - A_2)h\Big\|}{\|h\|} = \frac{\Big\|\Big(f(a+h) - f(a) - A_2h\Big) - \Big(f(a+h) - f(a) - A_1h\Big)\Big\|}{\|h\|} \le$$

$$\le \frac{\Big\|f(a+h) - f(a) - A_2h\Big\|}{\|h\|} + \frac{\Big\|f(a+h) - f(a) - A_1h\Big\|}{\|h\|} \to 0 + 0 = 0 \quad (h \to 0).$$

A közrefogási elv miatt

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Big\|(A_1 - A_2)h\Big\|}{\|h\|} = 0 \quad \overset{h=te_i}{\Longrightarrow} \quad 0 = \lim_{t\to 0} \frac{\Big\|(A_1 - A_2)(te_i)\Big\|}{\|te_i\|} = \lim_{t\to 0} \frac{|t| \cdot \Big\|(A_1 - A_2)e_i\Big\|}{|t| \cdot \|e_i\|} =$$

$$= \Big\|(A_1 - A_2)e_i\Big\|.$$

Így $(A_1 - A_2)e_i = 0$, azaz $A_1e_i = A_2e_i$ minden $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén. Tehát a mátrixok mindegyik i-edik oszlopa megegyezik, és így $A_1 = A_2$.

Példa: Az $f(x, y) = xy \ \Big((x, y) \in \mathbb{R}\Big)$ függvény differenciálható az $a = (1, 2)$ pontban és ebben a pontban vett deriváltmátrixa: $f'(1, 2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$. Valóban, ha $h = (h_1, h_2) \to (0, 0)$ és $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$, akkor

$$0 \le \frac{\Big\|f(a+h) - f(a) - A \cdot h\Big\|}{\|h\|} = \frac{\left|(1 + h_1)(2 + h_2) - 1 \cdot 2 - \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}\right|}{\|h\|} =$$

$$= \frac{\Big|2 + 2h_1 + h_2 + h_1h_2 - 2 - (2h_1 + h_2)\Big|}{\|h\|} = \frac{|h_1h_2|}{\|h\|} \le \left(|h_1h_2| \le \frac{h_1^2 + h_2^2}{2}\right) \le \frac{\frac{\|h\|^2}{2}}{\|h\|} = \frac{\|h\|}{2} \to 0,$$

és így a közrefogási elv miatt a definícióban szereplő határérték tart nullához.

3. Tétel. *Ha $f \in D\{a\}$, akkor $f \in C\{a\}$.*

Bizonyítás. A $\|.\|$ euklideszi és a $\|x\|_\infty := \max\Big\{|x_i| \ \Big| \ i = 1, 2, \ldots, n\Big\}$ normák ekvivalenciája miatt

$$f \in C\{a\} \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to a} f(x) = f(a) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to a} \Big\|f(x) - f(a)\Big\|_\infty = 0.$$

Ha $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ és $x \in \mathbb{R}^n$, akkor az $A \cdot x \in \mathbb{R}^m$ oszlopvektor i-edik koordinátára igaz, hogy

$$\Big|(A \cdot x)_i\Big| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right| \le \sum_{j=1}^{n} \Big(|a_{ij}| \cdot |x_j|\Big) \le \sum_{j=1}^{n} \Big(|a_{ij}| \cdot \|x\|_\infty\Big) = \|x\|_\infty \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|,$$

ahol a_{ij} az A mátrix i-edik sorában és j-edik oszlopában lévő elem. Ezért

$$\|A \cdot x\|_\infty = \max\Big\{\Big|(A \cdot x)_i\Big| \ \Big| \ i = 1, 2, \ldots, m\Big\} \le \|x\|_\infty \cdot \max\left\{\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \ \middle| \ i = 1, 2, \ldots, m\right\}.$$

Tehát
$$\alpha := \max\left\{\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| \;\middle|\; i=1,2,\dots,m\right\} \qquad \Longrightarrow \qquad \|A\cdot x\|_\infty \le \alpha\|x\|_\infty.$$
Legyen $f\in D\{a\}$. Ekkor a $h=x-a\to 0$ helyettesítéssel
$$0\le \Big\|f(x)-f(a)\Big\|_\infty = \Big\|f(a+h)-f(a)\Big\|_\infty = \Big\|A\cdot h+\varepsilon(h)\cdot\|h\|\Big\|_\infty \le$$
$$\le \|A\cdot h\|_\infty + \Big\|\varepsilon(h)\cdot\|h\|\Big\|_\infty \le \alpha\|h\|_\infty + \|h\|\cdot\Big\|\varepsilon(h)\Big\|_\infty \to 0+0=0,$$
amiből a tétel állítása következik.

Megjegyzés. Többváltozós esetben is igaz, hogy az előző tétel nem fordítható meg, azaz van olyan folytonos függvény, ami nem differenciálható egy adott pontban. Nem nehéz igazolni, hogy az $f(x)=\|x\|$ $(x\in\mathbb{R}^n)$ függvény folytonos, de nem differenciálható az $a=0$ pontban. Valóban, ha $\exists f'(0)=A=\begin{pmatrix}a_1 & a_1 & \dots & a_n\end{pmatrix}$ és $h=te_1$ $(t\in\mathbb{R})$, akkor
$$0=\lim_{h\to 0}\frac{\Big|\|0+h\|-\|0\|-Ah\Big|}{\|h\|} = \lim_{h\to 0}\left|\frac{\|h\|-Ah}{\|h\|}\right| = \lim_{h\to 0}\left|1-\frac{Ah}{\|h\|}\right| = \lim_{t\to 0}\left|1-\frac{tAe_1}{|t|\cdot\|e_1\|}\right| =$$
$$=\lim_{t\to 0}|1-\operatorname{sgn}(t)a_1|, \quad \text{de} \quad \lim_{t\to 0+0}\Big|1-\operatorname{sgn}(t)a_1\Big| = |1-a_1|, \quad \lim_{t\to 0-0}\Big|1-\operatorname{sgn}(t)a_1\Big| = |1+a_1|.$$
Ebből következik, hogy $a_1=1$ és $a_1=-1$, de ez nem lehetséges.

4. Tétel. *Legyen az $f\in\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ $(n,m\in\mathbb{N}^+)$ függvény koordinátafüggvényei $f_j:\mathbb{R}^n\supset\mathcal{D}_f\to\mathbb{R}$, ahol $j=1,2,\dots,m$, illetve $a\in\operatorname{int}\mathcal{D}_f$. Ekkor*
$$f\in D\{a\} \qquad\Longleftrightarrow\qquad f_j\in D\{a\} \quad \text{minden } j=1,2,\dots,m \text{ esetén.}$$
Továbbá $f_j'(a)=e_j^\top\cdot f'(a)$, azaz $f_j'(a)$ az $f'(a)$ mátrix j-edik sora.

Bizonyítás. Alkalmazzuk az
$$\|y\|_\infty \le \|y\| \le \sqrt{m}\,\|y\|_\infty \qquad (y\in\mathbb{R}^m).$$
normák ekvivalenciáját, ahol $\|y\|_\infty := \max\Big\{|y_j| \;\Big|\; j=1,2,\dots,m\Big\}$. Vegyük észre, hogy
$$\Big(f(a+h)-f(a)-A\cdot h\Big)_j = f_j(a+h)-f_j(a)-e_j^\top\cdot(A\cdot h)$$
minden $j=1,2,\dots,m$, továbbá $e_j^\top\cdot(A\cdot h)=(e_j^\top\cdot A)\cdot h$. Így a normák ekvivalenciájából:
$$0\le \frac{\max\limits_{1\le j\le m}\Big|f_j(a+h)-f_j(a)-(e_j^\top\cdot A)\cdot h\Big|}{\|h\|} \le \frac{\Big\|f(a+h)-f(a)-A\cdot h\Big\|}{\|h\|}$$
$$=\sqrt{m}\,\frac{\max\limits_{1\le j\le m}\Big|f_j(a+h)-f_j(a)-(e_j^\top\cdot A)\cdot h\Big|}{\|h\|}.$$
Ebből következik a tétel állítása, hiszen ha az egyik hányados nullához tart $h\to 0$ esetén, akkor a másik is nullához tart.

Megjegyzés. Az előző tétel szerint elég lenne valós értékű függvényekkel foglalkozni.

A totális és a parciális derivált kapcsolata

A totális derivált az erősebb.

5. Tétel. *Legyen $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ és $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. Ha $f \in D\{a\}$, akkor $\forall v \in \mathbb{R}^n$ egységvektor esetén az f függvénynek van v irányú iránymenti deriváltja az a pontban, és*

$$\partial_v f(a) = f'(a) \cdot v$$

Bizonyítás. Ha $f \in D\{a\}$, akkor $\exists \varepsilon : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$, $\lim\limits_{0} \varepsilon = 0$ úgy, hogy

$$f(a+h) - f(a) = f'(a) \cdot h + \varepsilon(h) \cdot \|h\| \qquad (a + h \in \mathcal{D}_f).$$

Legyen $h = tv$ $(t \in \mathbb{R})$. Ekkor $\|h\| = |t| \cdot \|v\| = |t|$, hiszen $\|v\| = 1$, és így

$$f(a+tv) - f(a) = f'(a) \cdot tv + \varepsilon(tv) \cdot |t|.$$

Ezért

$$\partial_v f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = f'(a) \cdot v + \lim_{t \to 0} \big(\varepsilon(tv) \operatorname{sgn}(t)\big) = f'(a) \cdot v + 0 = f'(a) \cdot v,$$

hiszen sgn korlátos függvény és $\lim\limits_{t \to 0} \varepsilon(tv) = \lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.

A totális derivált definíciója nem nyújt információt a deriváltmátrix előállításáról, de az előző tétel alapján igazolni tudjuk, hogy az $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény a pontbeli deriváltmátrixa egyszerűen felírható a koordinátafüggvények a pontban vett parciális deriváltjai segítségével.

6. Tétel (A deriváltmátrix előállítása). *Legyen az $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(n, m \in \mathbb{N}^+)$ függvény koordinátafüggvényei $f_j : \mathbb{R}^n \supset \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$, ahol $j = 1, 2, \ldots, m$, illetve $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. Ha $f \in D\{a\}$, akkor*

$$\exists\, \partial_i f_j(a) \quad (\forall i = 1, \ldots, n,\ \forall j = 1, \ldots, m) \quad \text{és}$$

$$f'(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(a) & \partial_2 f_1(a) & \cdots & \partial_n f_1(a) \\ \partial_1 f_2(a) & \partial_2 f_2(a) & \cdots & \partial_n f_2(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_1 f_m(a) & \partial_2 f_m(a) & \cdots & \partial_n f_m(a) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

az ún. **Jacobi-mátrix***.*

Bizonyítás. A 4. Tétel szerint, ha $f \in D\{a\}$, akkor $f_j \in D\{a\}$ minden $j = 1, 2, \ldots, m$ esetén, és az $f'(a)$ mátrix j-edik sora az $f_j'(a)$ sormátrix. Alkalmazzuk az 5. Tételt az f_j koordinátafüggvényekre a $v = e_i$ irányok esetén! Ekkor

$$\exists\, \partial_i f_j(a) = \partial_{e_i} f_j(a) = f'(a) \cdot e_i = a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Ez azt jelenti, hogy

$$f_j'(a) = \big(\partial_1 f_j(a) \quad \partial_2 f_j(a) \quad \ldots \quad \partial_n f_j(a)\big),$$

amiből a tétel állítása következik.

A parciális deriváltak létezéséből *nem következik* a totális deriválhatóság. Például gyakorlaton fogjuk igazolni, hogy az

$$f(x, y) := \sqrt{xy} \qquad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény folytonos az $a = (0, 0)$ pontban, itt léteznek a parciális deriváltak, de f nem totálisan deriválható ebben a pontban.

Azonban, ha a parciális deriváltak létezésénél valamivel többet feltételezünk, akkor már tudjuk garantálni a totális deriválhatóságot. A következő tétel egy ilyen gyakran alkalmazható *elégséges feltételt* ad a függvény totális deriválhatóságára. A tételt nem bizonyítjuk.

7. Tétel (Elégséges feltétel a totális deriválhatóságra). *Legyen $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}^+$) és $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. Tegyük fel, hogy az a pontnak létezik olyan $K(a) \subset \mathcal{D}_f$ környezete, amelyre minden $i = 1, \ldots, n$ index esetén a következők teljesülnek:*

a) *$\exists\, \partial_i f(x)$ minden $x \in K(a)$ pontban,*

b) *a $\partial_i f : K(a) \to \mathbb{R}$ parciális deriváltfüggvény folytonos az a pontban.*

Ekkor az f függvény totálisan deriválható az a pontban.

Felület érintősíkja

Az egyváltozós analízisben láttuk, hogy ha $f \in D\{a\}$, akkor az f függvényt az a pont környezetében jól közelítő elsőfokú polinom nem más, mint a függvénygrafikon $\big(a, f(a)\big)$ pontbeli érintője. Most megvizsgáljuk, hogy mi felel meg ennek az állításnak az $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvények körében.

Tudjuk, hogy az a pontbeli totális deriválthatóságot át lehet fogalmazni a következő módon:

$$\exists A \in \mathbb{R}^{m\times n} \text{ és } \exists \varepsilon : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}^m,\ \lim_0 \varepsilon = 0 : f(a+h) - f(a) = A \cdot h + \varepsilon(h) \cdot \|h\| \quad (a+h \in \mathcal{D}_f),$$

ahol $A = f'(a)$. Ezért

$$f(a+h) - f(a) \approx f'(a) \cdot h \qquad \text{ha } h \approx 0.$$

Az $\approx$ jelölés azt jelenti, hogy két vektor távolsága (különbségük normája) kicsi.

Legyen $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $a = (x_0, y_0) \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ és $f \in D\{a\}$. Ha egy a-hoz közeli $(x, y) \in \mathcal{D}_f$ pontot felírunk $(x, y) = a + h$ alakban, akkor a fentiek szerint

$$(\#) \qquad \begin{aligned} f(x, y) - f(x_0, y_0) &\approx \big(\partial_x f(x_0, y_0) \quad \partial_y f(x_0, y_0)\big) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \\ &= \partial_x f(x_0, y_0)(x - x_0) + \partial_y f(x_0, y_0)(y - y_0), \qquad \text{ha } (x, y) \approx (x_0, y_0). \end{aligned}$$

Legyen $z_0 := f(x_0, y_0)$ és tekintsük a

$$z - z_0 = \partial_x f(x_0, y_0)(x - x_0) + \partial_y f(x_0, y_0)(y - y_0)$$

egyenletű síkot. Ez egy olyan sík, ami átmegy az $\big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big)$ ponton és egyik normálvektora

$$\vec{n}\Big(\partial_x f(x_0, y_0), \partial_y f(x_0, y_0), -1\Big).$$

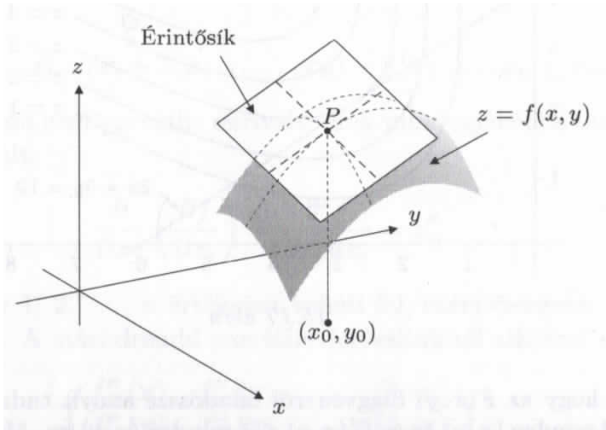
Mivel $(\#)$ miatt $f(x, y) \approx z$, ha $(x, y) \approx (x_0, y_0)$, ezért érdemes a felület érintősíkját az előbbi síkkal értelmezni.

4. Definíció. *Az $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény grafikonjának az $\big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big)$ pontban van érintősíkja, ha $f \in D\big\{(x_0, y_0)\big\}$.* **Az érintősík egyenlete***:*

$$z - f(x_0, y_0) = \partial_x f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \partial_y f(x_0, y_0) \cdot (y - y_0),$$

amelynek egyik **normálvektora***:* $\vec{n}\Big(\partial_x f(x_0, y_0), \partial_y f(x_0, y_0), -1\Big)$.

Az érintősíkot az alábbi ábrán szemléltetjük:



Megjegyzés. A háromdimenziós térben a sík általános egyenlete

$$Ax + By + Cz = D,$$

ahol az A, B, C együtthatók legalább egyike nem nulla. Ekkor a

$$\vec{n}(A, B, C) \in \mathbb{R}^3$$

egy olyan vektor, amelyik a sík minden vektorára merőleges (ez a sík egyik normálvektora). Ez azért igaz, mert ha $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ a sík egyik pontja, akkor $P = (x, y, z)$ akkor és csak akkor van rajta a síkon, ha merőleges az $\vec{n}$ vektorra, azaz $\langle \overrightarrow{P_0P}, \vec{n} \rangle = 0$. Ebből

$$\langle \overrightarrow{P_0P}, n \rangle = A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

amiből átrendezéssel adódik az állítás, ha $D = Ax_0 + By_0 + Cz_0$.

Példa. Írjuk fel a $z = xy$ egyenletű felület $P_0(1, 2)$ pontjához tartozó érintősíkjának az egyenletét! Legyen $f(x, y) = xy$ $\big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big)$ és $a = (x_0, y_0)$, ahol $x_0 = 1$ és $y_0 = 2$. Ekkor

$$\partial_x f(x, y) = y \quad \text{és} \quad \partial_y f(x, y) = x \qquad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

Mivel ezek folytonos függvények, ezért f differenciálható minden pontban, azaz $f \in D\{a\}$. Másrészt

$$\partial_x f(1, 2) = 2, \quad \partial_y f(1, 2) = 1, \quad f(1, 2) = 2.$$

Ezért az érintősík egyenlete:

$$z - f(1, 2) = \partial_x f(1, 2) \cdot (x - 1) + \partial_y f(1, 2) \cdot (y - 2) \qquad \Longrightarrow \qquad z - 2 = 2(x - 1) + (y - 2),$$

azaz $2x + y - z = 2$.

Deriválási szabályok

$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ típusú vektor-vektor függvényekre hasonló deriválási szabályok érvényesek, mint valós-valós függvények esetén.

8. Tétel (Algebrai műveletekre vonatkozó deriválási szabályok).

- *Ha* $f, g \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(n, m \in \mathbb{N}^+)$ *és* $f, g \in D\{a\}$, *akkor* $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *esetén*

$$\big(\alpha f + \beta g\big) \in D\{a\} \qquad \text{és} \qquad \big(\alpha f + \beta g\big)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a).$$

- *Ha* $m = 1$, *akkor az* $f \cdot g$ *és az* f/g *függvényekre az egyváltozós esethez hasonló deriválási szabályok teljesülnek.*

Bizonyítás. A tétel állításai igazolhatók közvetlenül a totális derivált definíciójából a valós-valós esethez hasonló átalakításokkal.

Az összetett függvény deriválhatóságára vonatkozó állítás meglepő hasonlóságot mutat a valós-valós függvényekre jól ismert állítással. De vigyázzunk, mert a többváltozós képletben mátrix-szorzás szerepel.

9. Tétel (Az összetett függvény deriválhatósága). *Legyen* $n, m, s \in \mathbb{N}^+$. *Ha* $g \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *és* $g \in D\{a\}$, *továbbá* $f \in \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^s$ *és* $f \in D\{g(a)\}$, *akkor* $f \circ g \in D\{a\}$ *és*

$$(\#\#) \qquad \big(f \circ g\big)'(a) = f'\big(g(a)\big) \cdot g'(a),$$

ahol $\cdot$ *a mátrixok közötti szorzás műveletét jelöli.*

Bizonyítás. Valós-valós esetben a bizonyítás a derivált lineáris közelítéssel történő átfogalmazásán alapszik. $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ típusú függvények esetén is megvan ennek a megfelelője, így a bizonyítás lényegében hasonló, de az egyes lépéseket adaptálni kell többváltozós függvények esetére.

Megjegyzések.

1. Figyeljük meg, hogy a (##) képletben szereplő mátrixszorzat elvégezhető és az eredmény olyan típusú mátrix, mint az $\big(f \circ g\big)'(a)$ deriváltmátrix, hiszen

$$\begin{array}{ccc} \big(f \circ g\big)'(a) \in \mathbb{R}^{s\times n}, & f'\big(g(a)\big) \in \mathbb{R}^{s\times m}, & g'(a) \in \mathbb{R}^{m\times n}. \\ (f \circ g \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s) & (f \in \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^s) & (g \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m) \end{array}$$

2. Koordinátafüggvényekkel felírva az összetett függvény általános alakja:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \xrightarrow{g} y = \begin{pmatrix} y_1 := g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ y_2 := g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ y_m := g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{pmatrix} \xrightarrow{f} z = \begin{pmatrix} z_1 := f_1(y_1, y_2, \ldots, y_m) \\ z_2 := f_2(y_1, y_2, \ldots, y_m) \\ \vdots \\ z_s := f_s(y_1, y_2, \ldots, y_m) \end{pmatrix}.$$

Az összetett függvény deriválhatóságáról szóló tétel szerint, ha $g \in D\{x\}$ és $f \in D\{g(x)\}$, akkor $f \circ g \in D\{x\}$, és így léteznek az összetett függvény parciális deriváltjai az x pontban. Ekkor (#) alapján minden $i = 1, 2, \dots, n$ és $j = 1, 2, \dots, s$ rögzített indexpár esetén

$$\frac{\partial z_j}{\partial x_i}(x) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial z_j}{\partial y_k}\big(y(x)\big) \cdot \frac{\partial y_k}{\partial x_i}(x).$$

1. Feladat. *Legyen*

$$g(x) := \left(e^{3x},\, 1 + e^{-3x}\right) \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \textit{és} \qquad f(x, y) := x^4 + 2xy^2 + y^3 \quad \left((x, y) \in \mathbb{R}^2\right).$$

Számítsuk ki az $F := f \circ g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény deriváltját!

Megoldás. Világos, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ pontban a

$$g := (g_1, g_2) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \qquad \text{ahol} \qquad g_1(x) := e^{3x} \quad \text{és} \quad g_2(x) := 1 + e^{-3x},$$

függvény differenciálható, hiszen g_1 és g_2 koordinátafüggvényei differenciálhatók, illetve

$$g_1'(x) = 3e^{3x} \qquad \text{és} \qquad g_2'(x) = -3e^{-3x}.$$

Ekkor $g'(x)$ egy oszlopmátrix:

$$g'(x) = \begin{pmatrix} g_1'(x) \\ g_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^{3x} \\ -3e^{-3x} \end{pmatrix} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Minden $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ pontban az

$$f := \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad \text{ahol} \qquad f(y) := y_1^4 + 2y_1y_2^2 + y_2^3,$$

függvény differenciálható, hiszen egy kétváltozós polinom, és ekkor a

$$\partial_1 f(y) = 4y_1^3 + 2y_2^2 \qquad \text{és} \qquad \partial_2 f(y) = 4y_1y_2 + 3y_2^2$$

parciális deriváltjai folytonos függvények. Ekkor $f'(y)$ egy sormátrix:

$$f'(y) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(y) & \partial_2 f(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4y_1^3 + 2y_2^2 & 4y_1y_2 + 3y_2^2 \end{pmatrix} \qquad (y \in \mathbb{R}^2)$$

Ezért a láncszabály feltételei teljesülnek, és

$$\begin{aligned} F'(x) &= (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(g(x)) & \partial_2 f(g(x)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_1'(x) \\ g_2'(x) \end{pmatrix} = \\ &= \partial_1 f(g(x)) \cdot g_1'(x) + \partial_2 f(g(x)) \cdot g_2'(x) = \\ &= \partial_1 f(e^{3x}, 1 + e^{-3x}) \cdot 3e^{3x} + \partial_2 f(e^{3x}, 1 + e^{-3x}) \cdot (-3e^{-3x}) = \\ &= (4(e^{3x})^3 + 2(1 + e^{-3x})^2) \cdot 3e^{3x} + (4(e^{3x})(1 + e^{-3x}) + 3(1 + e^{-3x})^2) \cdot (-3e^{-3x}) = \\ &= 12e^{12x} + 6e^{3x} - 15e^{-3x} - 18e^{-6x} - 9e^{-9x} \end{aligned}$$

Megjegyzés. Ebben az esetben a láncszabály könnyebben megjegyezhető a következő alakban:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial x}, \qquad \text{ahol} \qquad y_1 = g_1 \quad \text{és} \quad y_2 = g_2.$$