Analízis1ABC, 2. zárthelyi dolgozat , 2017.05.19.

I. rész : Feladatok

1. Számítsa ki az alábbi határértékeket :

$$\text{i)} \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{5n+1}{5n+3}\right)^{10n+4} ; \quad \text{ii)} \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\prod_{k=2}^{n} \frac{k^2-1}{k^2}}.$$

2. Adott az $x_0 := \frac{1}{2}$ és $x_{n+1} := \dfrac{3}{2+\frac{1}{x_n}}$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozat. Konvergens−e és ha igen, mi a határértéke ?

Mi a helyzet, ha $x_0 = 1$?

3. Döntse el, hogy az alábbi sorok konvergensek vagy divergensek (a válaszát indokolja) :

$$\text{i)} \sum_{n=1} \frac{1^n+2^n+3^n+\cdots+2017^n}{n\cdot 2018^n} ; \qquad \text{ii)} \sum_{n=0} \frac{\sqrt{(2n)!}}{3^{n/2}\cdot(n+2)!} .$$

4. Tekintsük a $\displaystyle\sum_{n=0} \frac{(1-x)^n}{\sqrt{n^2+1}}$ $(x \in \mathbb{R})$ hatványsort. Milyen $x \in \mathbb{R}$ számok mellett konvergens a sor ?

5. Adjon meg olyan $R > 0$ valós számot és (a_n) sorozatot, amelyekkel :

$$\frac{5x-2}{(x-2)\cdot(3x+2)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot x^n \quad (x \in (-R,+R)).$$

II. rész : Bizonyításssal kért tétel : A Cauchy−féle gyökkritérium.

Analízis1ABC, 2. zárthelyi dolgozat , 2017.05.19.

I. rész : Feladatok

1. Számítsa ki az alábbi határértékeket :

$$\text{i)} \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{5n+1}{5n+3}\right)^{10n+4} ; \quad \text{ii)} \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\prod_{k=2}^{n} \frac{k^2-1}{k^2}}.$$

2. Adott az $x_0 := \frac{1}{2}$ és $x_{n+1} := \dfrac{3}{2+\frac{1}{x_n}}$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozat. Konvergens−e és ha igen, mi a határértéke ?

Mi a helyzet, ha $x_0 = 1$?

3. Döntse el, hogy az alábbi sorok konvergensek vagy divergensek (a válaszát indokolja) :

$$\text{i)} \sum_{n=1} \frac{1^n+2^n+3^n+\cdots+2017^n}{n\cdot 2018^n} ; \qquad \text{ii)} \sum_{n=0} \frac{\sqrt{(2n)!}}{3^{n/2}\cdot(n+2)!} .$$

4. Tekintsük a $\displaystyle\sum_{n=0} \frac{(1-x)^n}{\sqrt{n^2+1}}$ $(x \in \mathbb{R})$ hatványsort. Milyen $x \in \mathbb{R}$ számok mellett konvergens a sor ?

5. Adjon meg olyan $R > 0$ valós számot és (a_n) sorozatot, amelyekkel :

$$\frac{5x-2}{(x-2)\cdot(3x+2)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot x^n \quad (x \in (-R,+R)).$$

II. rész : Bizonyításssal kért tétel : A Cauchy−féle gyökkritérium.