11. előadás

TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA 3.

Az inverzfüggvény-tétel

A valós-valós függvények inverzére vonatkozó deriválási szabály azt mondja ki, hogy ha az I nyílt intervallumon értelmezett, és ott szigorúan monoton és folytonos f függvény egy $a \in I$ pontban differenciálható, és $f'(a) \neq 0$, akkor a létező f^{-1} függvény differenciálható a $b = f(a)$ pontban, és

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}.$$

A fenti állítás kiterjeszthető az a pont egyik környezetére, ha $f : I \to \mathbb{R}$ folytonosan deriválható az I nyílt intervallumon, és $f'(a) \neq 0$. Ti. a folytonosság miatt $\exists U := K(a)$ környezet, hogy $f'(u) > 0$ (vagy $f'(u) < 0$) minden $u \in U$ esetén, ezért f szigorúan monoton és folytonos U-n, továbbá a $V := f[U]$ képhalmaz olyan nyílt intervallum, amely tartalmazza az $f(a)$ pontot, és

1. f lokálisan invertálható, azaz $f|_U : U \to V$ függvény bijekció,
2. az f^{-1} inverz függvény folytonosan deriválható V-n és

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)} \qquad (y \in V).$$

Többváltozós esetben hasonló állítás érvényes. A tételt nem bizonyítjuk.

1. Tétel (Inverzfüggvény-tétel). *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz és $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Tegyük fel, hogy,*

a) *f folytonosan deriválható Ω-n,*

b) *az $a \in \Omega$ pontban* $\det f'(a) \neq 0$.

Ekkor

1. *f lokálisan invertálható az a pontban, azaz vannak olyan $a \in U$ és $f(a) \in V$ nyílt halmazok, hogy az $f|_U : U \to V$ függvény bijekció (következésképpen invertálható),*
2. *az f^{-1} inverz függvény folytonosan deriválható V-n és*

$$(*) \qquad \left(f^{-1}\right)'(y) = \left[f'\left(f^{-1}(y)\right)\right]^{-1} \qquad (y \in V).$$

Megjegyzések.

1. Az inverz függvény létezése a többváltozós esetben *minőségileg bonyolultabb* az egyváltozós esetnél. Ez tehát egy olyan pont, ahol az egyváltozós analógia létezik ugyan, az immár nem elegendő.

2. Az f függvény explicit alakjának az ismeretében f^{-1} helyettesítési értékeire általában nincs explicit képlet, viszont $(*)$ alapján a derivált helyettesítési értékei az f' helyettesítési értékeinek felhasználásával már kiszámíthatók.

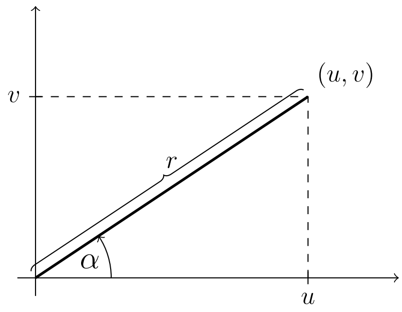
Példa. Legyen

$$f(x,y) := \Big(e^x\cos y, e^x \sin y\Big) \qquad \Big((x,y)\in\mathbb{R}^2\Big).$$

Nem nehéz igazolni, hogy $\mathcal{R}_f = \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Valóban $(0,0)\notin\mathcal{R}_f$, hiszen a sin és a cos függvény zérushelyei különbözőek. Másrészt, minden $(u,v)\neq(0,0)$ pont egyértelműen felírható

$$(u,v) = (r\cos\alpha, r\sin\alpha) \qquad \Big(r>0,\ \alpha\in[0,2\pi)\Big)$$

alakban, az ún. ***polárkoordinátákkal***, az ábrán szereplő jelölésekkel. Ekkor $x=\ln r$, azaz $e^x = r$, és $y=\alpha$ esetén $f(x,y)=(u,v)$.



A sin és a cos függvény periodicitása miatt f *globálisan* nem invertálható. Például

$$f\Big(0,\tfrac{\pi}{2}\Big) = (0,1) = f\Big(0,\tfrac{5\pi}{2}\Big).$$

Azonban f *lokálisan* invertálható az $\mathbb{R}^2$ minden pontjában. Ez utóbbi állítást az inverzfüggvény-tétellel tudjuk a legegyszerűbben igazolni. Világos, hogy $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$. Az $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ függvény Jacobi-mátrixa egy tetszőleges $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ pontban

$$(\#) \qquad f'(x,y) = \begin{pmatrix} e^x\cos y & -e^x\sin y \\ e^x\sin y & e^x\cos y\end{pmatrix}.$$

Mivel

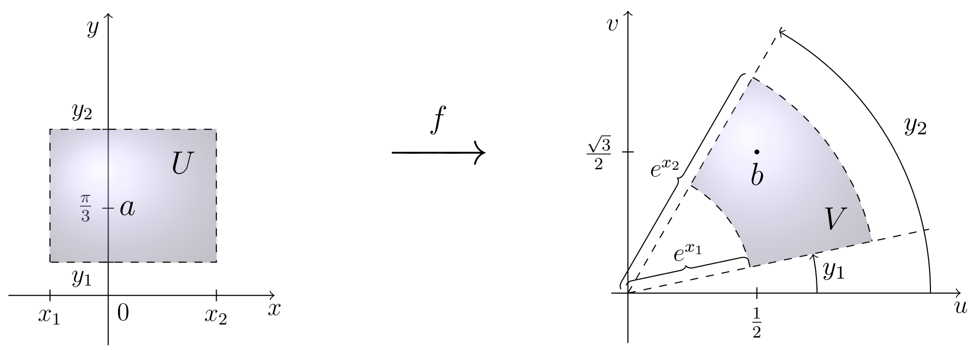
$$\det f'(x,y) = e^{2x}\cos^2 y + e^{2x}\sin^2 y = e^{2x}(\cos^2 y+\sin^2 y) = e^{2x}\neq 0 \qquad \Big((x,y)\in\mathbb{R}^2\Big),$$

ezért az inverzfüggvény-tétel feltételei teljesülnek minden $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ pontban. Tehát f lokálisan invertálható.

Legyen $a:=(0,\pi/3)$ és $b:=f(a)=f(0,\pi/3)=(1/2,\sqrt{3}/2)$. Tetszőleges $x_1<0<x_2$ és $0<y_1<\pi/3<y_2<\pi/2$ valós számok esetén

$$U := \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ \Big|\ x_1<x<x_2,\ y_1<y<y_2\Big\} \ni a$$

nyílt halmaz, és $V := f[U]\ni b$ olyan nyílt halmaz, amelynek minden pontja pozitív koordinátákkal rendelkezik.



Ezért, ha $(x, y) \in U$, akkor

$$\begin{cases} e^x \cos y = u > 0 \\ e^x \sin y = v > 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} e^{2x} = u^2 + v^2 \\ \operatorname{tg} y = \dfrac{v}{u} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \ln(u^2 + v^2) \\ y = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{v}{u} \end{cases}.$$

Ekkor minden $(u, v) \in V$ esetén

$$f^{-1}(u, v) = \left(\frac{1}{2} \ln(u^2 + v^2),\ \operatorname{arc\,tg} \frac{v}{u} \right) \quad \Longrightarrow \quad \left(f^{-1}\right)'(u, v) = \begin{pmatrix} \dfrac{u}{u^2+v^2} & \dfrac{v}{u^2+v^2} \\ -\dfrac{v}{u^2+v^2} & \dfrac{u}{u^2+v^2} \end{pmatrix}.$$

Így

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \left(f^{-1}\right)'\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Az előző eredmény az inverzfüggvény-tételben szereplő

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \left[f'\left(f^{-1}(b)\right)\right]^{-1} = \left[f'(a)\right]^{-1}$$

összefüggéssel is megkaphatjuk. Valóban (#)-ból

$$f'(a) = f'\left(0, \tfrac{\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \left(f^{-1}\right)'(b) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Megjegyzés. Érdemes megjegyezni a (2×2)-es mátrixok inverzére vonatkozó alábbi képletet: ha $ad - bc \neq 0$, akkor

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Az inverzfüggvény-tételnek egyenletrendszerek megoldásával kapcsolatos értelmezés is adható. Legyen $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ és $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Jelölje

$$f_i \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

az f függvény koordinátafüggvényeit: $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n) \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Tekintsük az

$$f(x) = y$$

egyenletet. A komponensekre bontott alakba írva kapjuk az n egyenletből álló

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= y_1, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= y_2, \\ &\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= y_n \end{aligned}$$

egyenletrendszert, ahol az $y_1, y_2, \ldots, y_n$ számokat paramétereknek tekintjük, és $x_1, x_2, \ldots, x_n$ az ismeretlenek.

Legyen $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathcal{D}_f$ és $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n) := f(a)$. Tegyük fel, hogy f folytonosan deriválható az a pont egyik Ω környezetében, továbbá teljesül a $\det f'(a) \neq 0$ feltétel. Ekkor az inverzfüggvény-tétel szerint megadható olyan $b \in V$ paramétertartomány, hogy az egyenletrendszer egyértelműen megoldható az a pont egy U környezetében.

Implicit függvények (egyenletek megoldása)

Legyen $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amelyre

$$H := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; f(x,y) = 0\Big\} \neq \emptyset$$

teljesül. Az lenne a kérdés, hogy ki tudjuk-e fejezni az y változót az x változó függvényeként, azaz van-e olyan $\varphi \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, hogy $y = \varphi(x)$ ekvivalens legyen az $f(x,y) = 0$ egyenlettel.

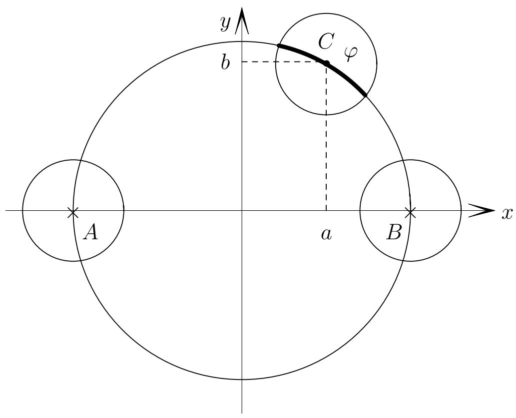
Tudjuk, hogy az $x^2 + y^2 - 1 = 0$ egyenlet megoldásai az origó középpontú egység sugarú kör pontjai, és nincs olyan valós-valós függvény, amelynek grafikonja kört alkot. Ezért az eredeti kérdésnek egy „lokális” változatával foglalkozunk, nevezetesen olyan $\varphi : I \to \mathbb{R}$ nyílt intervallum értelmezett függvényt keresünk, amire

$$f\Big(x, \varphi(x)\Big) = 0 \qquad (x \in I)$$

teljesül. Ekkor azt mondjuk, hogy φ az $f(x,y)$ egyenletnek egy ***implicit megoldása***.

Nézzük újra az

$$f(x,y) := x^2 + y^2 - 1 \qquad \Big((x,y) \in \mathbb{R}^2\Big)$$



függvényből származó $x^2 + y^2 - 1 = 0$ egyenletet! Ha $C(a,b)$ olyan pont, hogy $f(a,b) = 0$ és $b > 0$, akkor $\exists I \ni a$ nyílt halmaz, hogy

$$\varphi(x) = \sqrt{1 - x^2} \qquad (x \in I)$$

implicit megoldása lesz az egyenletnek, illetve ha $b < 0$, akkor

$$\varphi(x) = -\sqrt{1 - x^2} \qquad (x \in I)$$

implicit megoldása lesz az egyenletnek. Azonban nincs olyan implicit megoldás, amely az $A(-1,0)$ vagy a $B(1,0)$ ponton menne át, azaz ha $b = 0$.

Vegyük észre, hogy $\partial_2 f(x,y) = 2y \implies \partial_2 f(A) = \partial_2 f(B) = 0$, de a többi C pontban (ahol $\exists\varphi$) igaz, hogy $\partial_2 f(C) \neq 0$.

2. Tétel (Egyváltozós implicitfüggvény-tétel). *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz és $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy*

a) *f folytonosan deriválható Ω-n,*

b) *az $(a,b) \in \Omega$ pontban $f(a,b) = 0$ és $\partial_2 f(a,b) \neq 0$.*

Ekkor

1. *van olyan $U := K(a)$ környezet és $b \in V$ nyílt halmaz $\mathbb{R}$-ben, hogy minden $x \in U$ ponthoz létezik egyetlen $\varphi(x) \in V$, amelyre $f\Big(x, \varphi(x)\Big) = 0$ teljesül,*
2. *az így definiált $\varphi : U \to V$ függvény folytonosan deriválható U-n és*

$$(**) \qquad \varphi'(x) = -\frac{\partial_1 f\Big(x, \varphi(x)\Big)}{\partial_2 f\Big(x, \varphi(x)\Big)} \qquad (x \in U).$$

Bizonyítás. A tétel igazolható az inverzfüggvény-tétel segítségével. Legyen

$$F : \Omega \to \mathbb{R}^2, \qquad F(x,y) := \big(x, f(x,y)\big).$$

Ekkor F folytonosan deriválható Ω-n, és

$$F'(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \partial_1 f(x,y) & \partial_2 f(x,y) \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \det F'(a,b) = \partial_2 f(a,b) \neq 0.$$

Így F kielégíti az inverzfüggvény-tétel feltételeit az (a,b) pontban, ahol $F(a,b) = (a,0)$. A létező folytonosan differenciálható $F^{-1} : V^* \to U^*$ inverz függvény F_1^{-1} és F_2^{-1} koordinátafüggvényei szintén folytonosan differenciálhatók, és minden $(x,y) \in V^*$ esetén:

$$(x,y) = F\Big(F^{-1}(x,y)\Big) = F\Big(F_1^{-1}(x,y), F_2^{-1}(x,y)\Big) = \Big(F_1^{-1}(x,y), f\Big(F_1^{-1}(x,y), F_2^{-1}(x,y)\Big)\Big).$$

Ebből

$$x = F_1^{-1}(x,y) \qquad \text{és} \qquad y = f\Big(F_1^{-1}(x,y), F_2^{-1}(x,y)\Big) = f\Big(x, F_2^{-1}(x,y)\Big).$$

Mivel $(a,0) \in V^*$ nyílt halmaz, ezért $\exists K(a),\ \forall x \in K(a)\colon (x,0) \in V^*$. Ekkor

$$f\Big(x, F_2^{-1}(x,0)\Big) = 0 \quad \Big(x \in K(a)\Big) \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi(x) := F_2^{-1}(x,0) \quad \Big(x \in K(a)\Big)$$

a keresett implicit függvény, amiről nem nehéz igazolni, hogy ez az egyedüli ilyen függvény, ami értelmezett a $K(a)$ környezetben.

A $(**)$ összefüggésből abból következik, hogy

$$h(x) := f\Big(x, \varphi(x)\Big) = 0 \qquad \Big(x \in K(a)\Big),$$

és így az összetett függvényre vonatkozó deriválási szabály alapján

$$0 = h'(x) = \partial_1 f\Big(x, \varphi(x)\Big) \cdot 1 + \partial_2 f\Big(x, \varphi(x)\Big) \cdot \varphi'(x) \qquad \Big(x \in K(a)\Big).$$

Megjegyzés. Világos, hogy $\varphi(a) = b$. A φ függvényt az $f(x, \varphi(x)) = 0$ $(x \in U)$ egyenlőség „implicit” (= nem kifejtett, burkolt, rejtett) módon definiálja. Innen származik a tétel neve.

3. Tétel (Implicitfüggvény-tétel az általános esetben). *Legyenek $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ és $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ nyílt halmazok $(n_1, n_2 \in \mathbb{N}^+)$, illetve $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}^{n_2}$. Tegyük fel, hogy,*

a) *f folytonosan deriválható az $\Omega_1 \times \Omega_2$ halmazon,*

b) *az $(a,b) \in \Omega_1 \times \Omega_2$ pontban $f(a,b) = 0$ és $\det \partial_2 f(a,b) \neq 0$.*

Ekkor

1. *létezik a-nak olyan $U := K(a) \subset \Omega_1$ környezet és $b \in V \subset \Omega_2$ nyílt halmaz, hogy minden $x \in U$ ponthoz létezik egyetlen $\varphi(x) \in V$, amelyre $f(x, \varphi(x)) = 0 \in \mathbb{R}^{n_2}$,*

2. *az így definiált $\varphi : U \to V$ függvény folytonosan deriválható U-n és*

$$\varphi'(x) = -\Big[\partial_2 f\Big(x, \varphi(x)\Big)\Big]^{-1} \cdot \partial_1 f\Big(x, \varphi(x)\Big) \qquad (x \in U).$$

Bizonyítás. A tételt nem bizonyítjuk.

Megjegyzések.

1. A tételben $\partial_2 f(a,b)$ jelöli az f függvény *második változócsoport szerinti parciális deriváltját* az (a,b) pontban. Ez az alábbi módon definiált $n_2 \times n_2$-típusú mátrix:

$$\partial_2 f(a,b) := \left(\mathbb{R}^{n_2} \supset \Omega_2 \ni y \mapsto f(a,y) \in \mathbb{R}^{n_2}\right)'_{y=b} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}.$$

   A $\partial_1 f(a,b)$ derivált definíciója hasonló.

2. A tételnek egyenletrendszerek *megoldhatóságával* kapcsolatos értelmezés is adható.

   Tegyük fel, hogy $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}) \in \mathbb{R}^{n_1}$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}) \in \mathbb{R}^{n_2}$ és $f = (f_1, f_2, \ldots, f_{n_2}) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \to \mathbb{R}^{n_2}$.

   Tekintsük az $f(x,y) = 0$ egyenletrendszert, amelyet komponensekre bontott alakban így írhatunk fel:

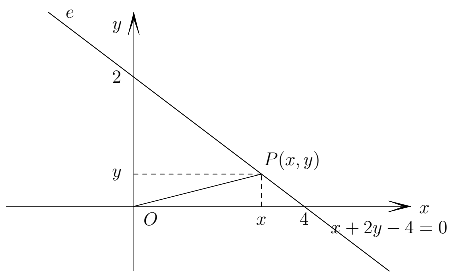
$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}; y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}) &= 0, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}; y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}) &= 0, \\ &\vdots \\ f_{n_2}(x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}; y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}) &= 0. \end{aligned}$$

   Itt az $y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}$ számok az ismeretlenek és $x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}$ a paraméterek. Feltesszük, hogy *ismerjük* ennek egy megoldását, azaz tudjuk, hogy az $a = (a_1, a_2, \ldots, a_{n_1})$ paraméter esetén $b = (b_1, b_2, \ldots, b_{n_2})$ egy megoldás, vagyis $f(a,b) = 0$. A fenti egyenletrendszerből szeretnénk kifejezni az $y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}$ ismeretleneket az $x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}$ paraméterek függvényében. A 2. Tétel szerint ez minden a-hoz közeli x esetén megtehető, ha f folytonosan deriválható és $\partial_2 f(a,b) \neq 0$; a megoldások egyértelműek és x-nek folytonosan deriválható függvényei.

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ típusú függvények feltételes szélsőértékei

Vannak olyan problémák, ahol egy $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény szélsőértékét kell keresni, de csak bizonyos egyenletet kielégítő pontok jöhetnek számításba.

1. Példa: Keressük meg az $x + 2y - 4 = 0$ egyenletű egyenesnek azt a pontját, amely legközelebb van az origótól!



A probléma a következő módon modellezhető:

Keressük meg az

$$f(x,y) := x^2 + y^2 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény minimumát a

$$H_g := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; g(x,y) = 0\right\} \quad \text{halmazon, ahol} \quad g(x,y) := x + 2y - 4 \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

2. Példa: Határozzuk meg az egységsugarú körbe írt téglalapok között a maximális területű téglalapot!

A probléma a következő módon modellezhető:

Keressük meg az

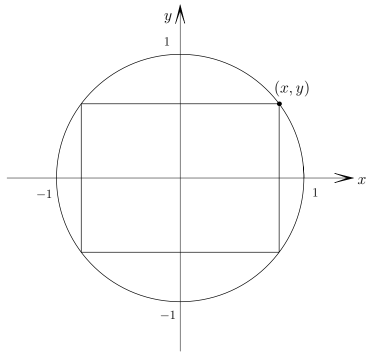
$$f(x,y) := 4xy \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

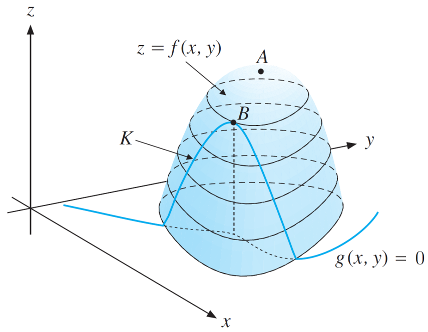
függvény maximumát a

$$H_g := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; g(x,y) = 0\Big\}$$

halmazon, ahol

$$g(x,y) := x^2 + y^2 - 1 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$





Általános feladat: Adott

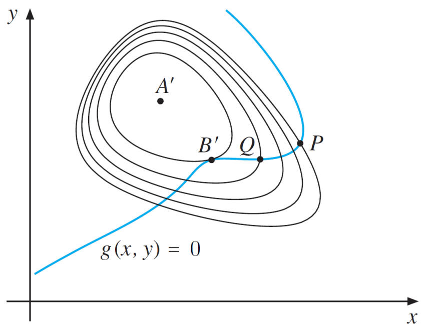
- $U \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz,
- $f : U \to \mathbb{R}$ (célfüggvény) és
- $g : U \to \mathbb{R}$ (feltételfüggvény).

Keressük az f függvény szélsőértékeit a

$$H_g := \Big\{(x,y) \in U \;\Big|\; g(x,y) = 0\Big\}$$

halmazon, azaz határozzuk meg az $f|_{H_g}$ függvény szélsőértékeit!

A problémát az ábrákon szemléltetjük:



1. Definíció. *Legyen $U \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz. Tegyük fel, hogy $f, g : U \to \mathbb{R}$ adott függvények és*

$$a \in H_g := \Big\{(x,y) \in U \;\Big|\; g(x,y) = 0\Big\} \neq \emptyset.$$

Azt mondjuk, hogy az f függvénynek a $g = 0$ feltétel mellett az a pontban

- **feltételes abszolút maximuma van**, *ha*

$$\forall x \in H_g \colon f(x) \leq f(a),$$

- **feltételes lokális maximuma van**, *ha*

$$\exists K(a) \subset U,\ \forall x \in K(a) \cap H_g \colon f(x) \leq f(a).$$

A ***minimummal*** kapcsolatban hasonló fogalmakat kapunk, ha a fentiekben a $\leq$ egyenlőtlenség helyett $\geq$-t írunk. A korábbiakkal összhangban használjuk $f(a)$-ra a ***feltételes abszolút (lokális) maximum (minimum)***, illetve ***szélsőérték***, továbbá a-ra a ***feltételes abszolút (lokális) maximumhely (minimumhely)***, illetve ***szélsőértékhely*** elnevezést is.

Megjegyzés. Az $f|_{H_g} \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény lokális szélsőértékeire *nem alkalmazhatók* az előző előadáson megfogalmazott tételek, hiszen a $H_g \subset \mathbb{R}^2$ halmaznak nincsenek belső pontjai. Ezért úgy értelmeztük a feltételes lokális szélsőértékhelyeket, hogy minden feltételes abszolút szélsőértékhely egyben lokális szélsőértékhely is legyen az f függvénynek.

4. Tétel (Szükséges feltétel a feltételes lokális szélsőértékre). *Tegyük fel, hogy*

a) $U \subset \mathbb{R}^2$ *nyílt halmaz és az* $f, g : U \to \mathbb{R}$ *függvényeknek léteznek a parciális deriváltjaik, és ezek folytonosak az* U *halmazon* $\big(f, g \in C^1(U)\big)$,

b) *az* $(x_0, y_0) \in U$ *pontban az* f *függvénynek a* $g = 0$ *feltételre vonatkozóan feltételes lokális szélsőértéke van,*

c) $g'(x_0, y_0) = \big(\partial_1 g(x_0, y_0) \quad \partial_2 g(x_0, y_0)\big) \neq \big(0 \quad 0\big)$.

Ekkor van olyan $\lambda \in \mathbb{R}$ *valós szám (ezt* ***Lagrange-szorzónak*** *szokás nevezni), hogy az*

$$\mathcal{L}(x, y) := f(x, y) + \lambda g(x, y) \qquad \big((x, y) \in U\big)$$

Lagrange-függvénynek (x_0, y_0) *stacionárius pontja, azaz*

$$\mathcal{L}'(x_0, y_0) = \big(\partial_x \mathcal{L}(x_0, y_0) \quad \partial_y \mathcal{L}(x_0, y_0)\big) = \big(0 \quad 0\big).$$

Bizonyítás. A c) feltétel alapján feltételezhető, hogy $\partial_2 g(x_0, y_0) \neq 0$, ellenkező esetben $\partial_1 g(x_0, y_0) \neq 0$, és így a bizonyítás további részében x és y szerepe felcserélhető. Ha $\partial_2 g(x_0, y_0) \neq 0$, akkor a g függvény az (x_0, y_0) pontra vonatkozóan teljesíti az implicitfüggvény-tétel feltételeit, hiszen $g(x_0, y_0) = 0$ és az a) feltétel alapján g folytonosan deriválható U-n. Ezért van olyan $\varphi : U^* := K(x_0) \to V$ folytonosan deriválható függvény, amire $g\big(x, \varphi(x)\big) = 0$ $(x \in U^*)$ teljesül, és

$$(*) \qquad \varphi'(x) = -\frac{\partial_1 g\big(x, \varphi(x)\big)}{\partial_2 g\big(x, \varphi(x)\big)} \qquad (x \in U^*).$$

Legyen

$$h(x) := f\big(x, \varphi(x)\big) \qquad (x \in U^*).$$

A $g\big(x, \varphi(x)\big) = 0$ $(x \in U^*)$ feltételből következik, hogy $\Big\{\big(x, \varphi(x)\big) \in U \;\Big|\; x \in U^*\Big\} \subset H_g$, így a b) feltétel alapján igaz, hogy a h függvénynek lokális szélsőértéke van az x_0 pontban. Ezért az összetett függvényre vonatkozó deriválási szabály szerint

$$0 = h'(x_0) = \partial_1 f\big(x_0, \varphi(x_0)\big) + \partial_2 f\big(x_0, \varphi(x_0)\big)\varphi'(x_0) = \partial_1 f(x_0, y_0) + \partial_2 f(x_0, y_0)\varphi'(x_0),$$

hiszen $\varphi(x_0) = y_0$. De $(*)$ miatt $\varphi'(x_0) = -\partial_1 g(x_0, y_0)/\partial_2 g(x_0, y_0)$. Ha ezt behelyettesítjük a fenti egyenletbe, akkor átrendezés után azt kapjuk, hogy

$$(**) \qquad \partial_1 f(x_0, y_0)\partial_2 g(x_0, y_0) - \partial_2 f(x_0, y_0)\partial_1 g(x_0, y_0) = 0.$$

Legyen $\lambda := -\partial_2 f(x_0, y_0)/\partial_2 g(x_0, y_0)$. Ekkor

$$\partial_y \mathcal{L}(x_0, y_0) = \partial_2 f(x_0, y_0) + \lambda \partial_2 g(x_0, y_0) = 0.$$

Másrészt, $(**)$ miatt

$$\partial_2 f(x_0, y_0) = -\lambda \partial_2 g(x_0, y_0) \quad \Longrightarrow \quad \partial_1 f(x_0, y_0)\partial_2 g(x_0, y_0) - \big(-\lambda \partial_2 g(x_0, y_0)\big)\partial_1 g(x_0, y_0) = 0.$$

$\partial_2 g(x_0, y_0)$-vel való egyszerűsítés után

$$\partial_x \mathcal{L}(x_0, y_0) = \partial_1 f(x_0, y_0) + \lambda \partial_1 g(x_0, y_0) = 0.$$

Megjegyzés. A feltételes szélsőértékek vizsgálatára alkalmazható módszer kitalálója *Joseph Louis Lagrange* (1736–1813) francia matematikus. Ezért a szóban forgó módszert ***Lagrange-szorzók*** (vagy ***Lagrange-féle multiplikátorok***) ***módszerének*** nevezzük.

$\mathcal{L}'(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$ csak *szükséges*, de *nem elégséges* feltétel a feltételes lokális szélsőértékre.

5. Tétel (A feltételes lokális szélsőértékre vonatkozó másodrendű elégséges feltétel). *Tegyük fel, hogy*

a) *$U \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz és az $f, g : U \to \mathbb{R}$ függvényeknek léteznek a másodrendű parciális deriváltjaik és ezek folytonosak az U halmazon $\big(f, g \in C^2(U)\big)$,*

b) *az $(x_0, y_0) \in U$ pontban a $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ számmal teljesül a szükséges feltétel.*

Tekintsük ezzel a λ_0 számmal az

$$\mathcal{L}(x, y) := f(x, y) + \lambda_0 g(x, y) \qquad \big((x, y) \in U\big)$$

Lagrange-függvényt. Legyen

$$D(x_0, y_0; \lambda_0) := \det \begin{pmatrix} 0 & \partial_1 g(x_0, y_0) & \partial_2 g(x_0, y_0) \\ \partial_1 g(x_0, y_0) & \partial_{11}\mathcal{L}(x_0, y_0) & \partial_{12}\mathcal{L}(x_0, y_0) \\ \partial_2 g(x_0, y_0) & \partial_{21}\mathcal{L}(x_0, y_0) & \partial_{22}\mathcal{L}(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Ekkor,

- $D(x_0, y_0; \lambda_0) > 0 \quad \Longrightarrow \quad (x_0, y_0)$ *feltételes lokális* **maximumhely**,
- $D(x_0, y_0; \lambda_0) < 0 \quad \Longrightarrow \quad (x_0, y_0)$ *feltételes lokális* **minimumhely**.

Bizonyítás. Tekintsük az előző tételben definiált

$$h(x) := f\big(x, \varphi(x)\big) \qquad (x \in U^*).$$

függvényt! Feladatunk megállapítani, milyen típusú szélsőértéke van h-nak az x_0 pontban. Mivel $f, g \in C^2(U)$, ezért $h \in C^2(U^*)$. Így a valós-valós függvényeknél tanult, a lokális szélsőértékre vonatkozó másodrendű elégséges feltétel alkalmazható. A szélsőérték típusa $h''(x_0)$ előjelétől függ.

Az áttekinthetőség kedvért a parciális deriváltakat indexel fogjuk jelölni (pl. $f_1' = \partial_1 f$). Először

$$h' = f_1' + f_2'\varphi' \quad \text{és} \quad \varphi' = -\frac{g_1'}{g_2'} \qquad \Longrightarrow \qquad h' = f_1' - f_2'\,\frac{g_1'}{g_2'}.$$

minden $(x, \varphi(x))$ pontban. Ha még egyszer deriválunk, akkor

$$h'' = f_{11}'' + f_{12}''\varphi' - (f_{21}'' + f_{22}''\varphi')\,\frac{g_1'}{g_2'} - f_2'\,\frac{(g_{11}'' + g_{12}''\varphi')g_2' - g_1'(g_{21}'' + g_{22}''\varphi')}{(g_2')^2} =$$

$$= \frac{1}{(g_2')^2}\left[f_{11}''(g_2')^2 - f_{12}''g_1'g_2' - f_{21}''g_1'g_2' + f_{22}''(g_1')^2 - f_2'\left(g_{11}''g_2' - g_{12}''g_1' - g_{21}''g_1' + \frac{g_{22}''(g_1')^2}{g_2'}\right)\right]$$

minden $(x, \varphi(x))$ pontban, következésképpen az $(x_0, \varphi(x_0)) = (x_0, y_0)$ pontban is igaz. Ebben a pontban a szükséges feltételből tudjuk, hogy

$$\partial_x \mathcal{L} = f_1' + \lambda_0 g_1' = 0 \qquad \text{és} \qquad \partial_y \mathcal{L} = f_2' + \lambda_0 g_2' = 0.$$

Ezért itt f_2' kiküszöbölhető a $-f_2' = \lambda_0 g_2'$ helyettesítéssel. Így

$$h''(x_0) =$$
$$= \frac{1}{(g_2')^2}\Big[f_{11}''(g_2')^2 - f_{12}''g_1'g_2' - f_{21}''g_1'g_2' + f_{22}''(g_1')^2 + \lambda_0\Big(g_{11}''(g_2')^2 - g_{12}''g_1'g_2' - g_{21}''g_1'g_2' + g_{22}''(g_1')^2\Big)\Big]$$

a (x_0, y_0) pontban. $f_{12}'' = f_{21}''$ és $g_{12}'' = g_{21}''$ miatt ebben a pontban

$$\begin{aligned}
h''(x_0) &= \frac{1}{(g_2')^2}\Big[f_{11}''(g_2')^2 - 2f_{12}''g_1'g_2' + f_{22}''(g_1')^2 + \lambda_0\Big(g_{11}''(g_2')^2 - 2g_{12}''g_1'g_2' + g_{22}''(g_1')^2\Big)\Big] = \\
&= \frac{1}{(g_2')^2}\Big[\Big(f_{11}'' + \lambda_0 g_{11}''\Big)(g_2')^2 - 2\Big(f_{12}'' + \lambda_0 g_{12}''\Big)g_1'g_2' + \Big(f_{22}'' + \lambda_0 g_{22}''\Big)(g_1')^2\Big] = \\
&= \frac{1}{(\partial_2 g)^2}\Big(\partial_{11}\mathcal{L}\cdot(\partial_2 g)^2 - 2\cdot\partial_{12}\mathcal{L}\cdot\partial_1 g\cdot\partial_2 g + \partial_{22}\mathcal{L}\cdot(\partial_1 g)^2\Big).
\end{aligned}$$

Elemi számolásokkal könnyen ellenőrizhető, hogy a tételben szereplő determináns értéke a zárójelben szereplő kifejezés -1-szerese. Ezért

$$h''(x_0) = -\frac{1}{\Big(\partial_2 g(x_0, y_0)\Big)^2}\, D(x_0, y_0; \lambda_0),$$

amiből az állítás már következik.

A módszer alkalmazása:

1. Ellenőrizzük az $f, g \in C^1(U)$ feltételt, és nézzük meg melyik $(x, y) \in H_g$ pontok esetén teljesül a $g'(x, y) = 0$ egyenlőség! Ezekre a pontokra a módszer nem alkalmazható.

2. Képezzük az
$$\mathcal{L}(x, y) := f(x, y) + \lambda g(x, y) \qquad \Big((x, y) \in U\Big)$$
Lagrange függvényt!

3. Az x, y, λ ismeretlenekre megoldjuk az alábbi egyenletrendszert:
$$\begin{aligned}
\partial_x \mathcal{L}(x, y) &= \partial_x f(x, y) + \lambda \partial_x g(x, y) = 0, \\
\partial_y \mathcal{L}(x, y) &= \partial_y f(x, y) + \lambda \partial_y g(x, y) = 0, \\
g(x, y) &= 0.
\end{aligned}$$
Csak az így kapott (x_0, y_0) stacionárius pontok lehetnek feltételes lokális szélsőértékhelyek.

4. Ha $f, g \in C^2(U)$, akkor minden lehetséges (x_0, y_0) stacionárius pontban a hozzájuk tartozó λ_0-val képezzük a $D(x_0, y_0; \lambda_0)$ determinánst, és az így kapott érték előjele alapján (ha nem nulla) eldöntjük, hogy az (x_0, y_0) pont feltételes lokális maximum- vagy minimumhely.

Megjegyzések.

1. A fentiekben két változó és egy egyenlőségi feltétel mellett vizsgáltuk a feltételes szélsőérték-problémát. Az eredmények kiterjeszthetők arra az esetre is, amikor az f célfüggvény n-változós ($2 < n \in \mathbb{N}$), és ekkor az egyetlen $g = 0$ feltétel helyett akár több $g_1 = 0$, $g_2 = 0, \dots, g_m = 0$ egyenlőségi feltételt is előírhatunk, ahol $1 \leq m < n$. Ekkor a Lagrange-függvény
$$\mathcal{L}(x, y) := f(x, y) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k g_k(x, y) \qquad \Big((x, y) \in U\Big).$$
Ha $m > 1$, akkor több λ szorzó szerepel a Lagrange-függvényben, ami igazolja a „Lagrange-szorzók” elnevezésben szereplő többes számot.

2. A gyakorlat felvet számos olyan szélsőérték-problémát, amelyekben a változókra tett korlátozó feltételek *nem egyenlőségekkel*, hanem *egyenlőtlenségekkel* adottak. Az ilyen típusú problémákat *(lineáris) programozási* feladatoknak hívják. Vizsgálatukhoz nem csak az *analízis*, hanem a *lineáris algebra* eszköztárát is fel kell használni.

3. Ha a szükséges feltétel bizonyításában szereplő $\varphi : U^* \to \mathbb{R}$ implicit függvényt meg tudjuk határozni, és a teljes H_g halmaz pontjaiban az f függvény értékei kifejezhetők a
$$h(x) := f\Big(x, \varphi(x)\Big) \qquad (x \in U^*)$$
valós-valós függvénnyel, akkor a kétváltozós függvényekre vonatkozó feltételes szélsőérték-probléma visszavezethető a h egyváltozós függvény szélsőérték-problémájára.

4. A ***feltételes abszolút szélsőértékhelyek*** megkeresése egy „egyszerűbb” feladathoz vezethet, ha a
$$H_g := \Big\{(x, y) \in U \;\Big|\; g(x, y) = 0\Big\}$$
halmaz korlátos és zárt. Ebben az esetben a Weierstrass-tétel garantálja a feltételes abszolút szélsőértékhelyek létezését, amelyek a Lagrange-függvény stacionárius pontjai lesznek. Így „kevés számú” stacionárius pont esetében elegendő a függvényértékük összehasonlításával eldönteni, hogy közülük melyik a feltételes abszolút maximum és minimum.

Példa: Tekintsük az
$$f(x, y) := xy, \quad g(x, y) := \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 \qquad \Big((x, y) \in \mathbb{R}^2\Big)$$
függvényeket, és határozzuk meg az f feltételes lokális szélsőértékeit a $g = 0$ feltétel mellett!

A szükséges feltételre vonatkozó tétel feltételei teljesülnek, mert $f, g \in C^1\Big(\mathbb{R}^2\Big)$ és
$$g'(x, y) = \Big(\partial_1 g(x, y) \quad \partial_2 g(x, y)\Big) = \Big(\tfrac{x}{4} \quad y\Big) \neq \Big(0 \quad 0\Big)$$
minden $H_g := \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; g(x, y) = 0\Big\}$-beli pontban, hiszen ha $\Big(\tfrac{x}{4} \quad y\Big) = \Big(0 \quad 0\Big)$, akkor $x = 0$ és $y = 0$, de ekkor $g(x, y) = -1 \neq 0$.

A feladat Lagrange-függvénye:
$$\mathcal{L}(x, y) := f(x, y) + \lambda g(x, y) = xy + \lambda\left(\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1\right) \qquad \Big((x, y) \in \mathbb{R}^2\Big).$$

A feltételes lokális szélsőértékre vonatkozó *szükséges* feltétel az x, y, λ ismeretlenekre az alábbi egyenletrendszert adja:

$$\begin{aligned} \partial_1\mathcal{L}(x,y) &= y + \lambda\,\frac{x}{4} &&= 0, \\ \partial_2\mathcal{L}(x,y) &= x + \lambda y &&= 0, \\ g(x,y) &= \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0. \end{aligned}$$

A második egyenletből $x = -\lambda y$ adódik. Ezt beírjuk az első egyenletbe:

$$0 = y + \lambda\,\frac{-\lambda y}{4} \quad\Longrightarrow\quad 0 = y\left(1 - \frac{\lambda^2}{4}\right) \quad\Longrightarrow\quad \lambda^2 = 4 \quad\Longrightarrow\quad \lambda = \pm 2,$$

hiszen $y \neq 0$ (ha $y = 0$, akkor $x = 0$ és így $g(x,y) = g(0,0) = -1 \neq 0$).

i) Ha $\lambda = 2$, akkor $x = -2y$. Ekkor a harmadik egyenletből:

$$\frac{(-2y)^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0 \quad\Longrightarrow\quad y^2 = 1 \quad\Longrightarrow\quad \begin{aligned} &y = 1,\ x = -2, \quad P_1(-2,1), \\ &y = -1,\ x = 2, \quad P_2(2,-1). \end{aligned}$$

ii) Ha $\lambda = -2$, akkor $x = 2y$. Ekkor a harmadik egyenletből:

$$\frac{(2y)^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0 \quad\Longrightarrow\quad y^2 = 1 \quad\Longrightarrow\quad \begin{aligned} &y = 1,\ x = 2, \quad P_3(2,1), \\ &y = -1,\ x = -2, \quad P_4(-2,-1). \end{aligned}$$

Az elégséges feltétel: minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pontban

$$\partial_1 g(x,y) = \frac{x}{4}, \qquad \partial_2 g(x,y) = y;$$

$$\partial_{11}\mathcal{L}(x,y) = \frac{\lambda}{4}, \qquad \partial_{12}\mathcal{L}(x,y) = 1 = \partial_{21}\mathcal{L}(x,y), \qquad \partial_{22}\mathcal{L}(x,y) = \lambda.$$

Mivel $x = -\lambda y$, így

$$D(x,y;\lambda) = \det\begin{pmatrix} 0 & x/4 & y \\ x/4 & \lambda/4 & 1 \\ y & 1 & \lambda \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & -\lambda y/4 & y \\ -\lambda y/4 & \lambda/4 & 1 \\ y & 1 & \lambda \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\cdot\det\begin{pmatrix} 0 & -\lambda y & 4y \\ -\lambda y & \lambda & 4 \\ y & 1 & \lambda \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{y^2}{16}\cdot\det\begin{pmatrix} 0 & -\lambda & 4 \\ -\lambda & \lambda & 4 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix} = \frac{y^2}{16}\cdot\det\begin{pmatrix} 0 & -\lambda & 4 \\ 0 & 2\lambda & 4+\lambda^2 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix} = \frac{y^2}{16}\cdot\det\begin{pmatrix} -\lambda & 4 \\ 2\lambda & 4+\lambda^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\lambda y^2}{16}\cdot\det\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 4+\lambda^2 \end{pmatrix} = \frac{\lambda y^2}{16}\cdot\Big(-(4+\lambda^2) - 2\cdot 4\Big) = -\lambda\cdot\frac{y^2(\lambda^2+12)}{16}.$$

<u>$P_1(-2,1)$, $\lambda = 2$:</u> $D(-2,1;-2) < 0$, ezért a $P_1(-2,1)$ pont *feltételes lokális minimumhely.*

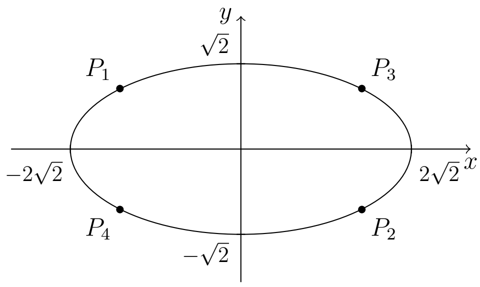
<u>$P_2(2,-1)$, $\lambda = 2$:</u> $D(2,-1;-2) < 0$, ezért a $P_2(2,-1)$ pont *feltételes lokális minimumhely.*

<u>$P_3(2,1)$, $\lambda = -2$:</u> $D(2,1;-2) > 0$, ezért a $P_3(2,1)$ pont *feltételes lokális maximumhely.*

<u>$P_4(-2,-1)$, $\lambda = -2$:</u> $D(-2,-1;-2) > 0$, ezért a $P_4(-2,-1)$ pont *feltételes lokális maximumhely.*

Megjegyzés. Az

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$$



egyenletű görbe pontjai az ábrán látható ellipszist alkotják. Ezekből a pontokból álló H_g halmaz korlátos és zárt az $\mathbb{R}^2$ térben. Mivel f folytonos, így a Weierstrass-tétel szerint felveszi a maximumát és a minimumát ezen a halmazon. A feltételes abszolút maximum- és minimumhely csak a fenti négy pontból kerülhet ki, továbbá

$$f(P_1) = f(P_2) = -2 \qquad \text{és} \qquad f(P_3) = f(P_4) = 2.$$

Ezért

$\underline{P_1(-2, 1), \text{ és } P_2(2, -1)}$: *feltételes abszolút minimumhely.*

$\underline{P_3(2, 1), \text{ és } P_4(-2, -1)}$: *feltételes abszolút maximumhely.*