

A számításelmélet alapjai II.

1. előadás

előadó: Tichler Krisztián
ktichler@inf.elte.hu

Vázlatos tematika

- ▶ nulladrendű logika
- ▶ elsőrendű logika
- ▶ függvények aszimptotikus viselkedése
- ▶ Turing gépek (TG), alapfogalmak
- ▶ TG változatok (többszalagos, nemdet., számító, ...)
- ▶ számosság
- ▶ eldönthetatlenség, R és RE
- ▶ eldönthetetlen problémák
- ▶ bonyultságelmélet, idő- és tárbonyolultság
- ▶ NP-teljesség, NP-teljes problémák
- ▶ további bonyolultsági osztályok
- ▶ kitekintés, összefoglaló

Ítéletkalkulus (nulladrendű logika)

A modell formális kereteket biztosít olyan következtetések helyességének eldöntésére, melyek elemi állításokból (ítéletekből) épülnek fel. Az ítéletek fontos jellemzője, hogy igazságértékük (igaz/hamis) egyértelműen eldönthető. Ítéletek például a „Süt a nap” vagy a „Lemegyek a térre” de nem tekinthető ítéletnek például a „Laci magas” (mihez képest?), „Lejössz a térre?” (kérdő mondat) vagy „Bárcsak itt lennél” (óhajtó mondat). Az elemi állításokból logikai műveleteknek megfeleltethető nyelvi összekötők segítségével összetett állítások építhetők. Például „Süt a nap, de mégis otthon maradok.” (logikai és kapcsolat, konjunkció) vagy „Ha süt a nap, lemegyek a térre.” (ha ... akkor, implikáció).

Beláthatók olyan következtetések, mint:

- (1) „Ha süt a nap, lemegyek a térre.”
- (2) „Süt a nap.”
- Tehát (3) „Lemegyek a térre.”

Formulák

Definíció

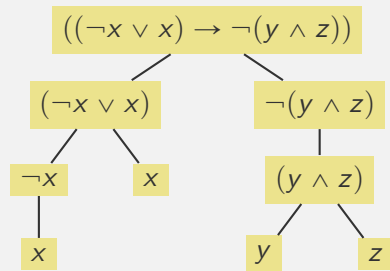
Adott **ítéletváltozók** egy előre rögzített megszámlálhatóan végtelen $\text{Var} = \{x_1, x_2, \dots\}$ halmaza. Az **ítéletlogikai formulák** Form halmaza a legszűkebb halmaz melyre

- ▶ Minden $x \in \text{Var}$ esetén $x \in \text{Form}$,
- ▶ Ha $\varphi \in \text{Form}$, akkor $\neg\varphi \in \text{Form}$,
- ▶ Ha $\varphi, \psi \in \text{Form}$, akkor $(\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \rightarrow \psi) \in \text{Form}$.

A műveleti jelek elnevezése: **negáció** (\neg), **konjunkció** (\wedge), **diszjunkció** (\vee), **implikáció** (\rightarrow).

Jelölés: Jelölje $\text{Var}(\varphi)$ a φ -ben előforduló itéletváltozók halmazát. Ha \mathcal{F} egy formulahalmaz, akkor $\text{Var}(\mathcal{F}) := \bigcup_{\varphi \in \mathcal{F}} \text{Var}(\varphi)$.

Szerkezeti fa, részformula, fő logikai összekötő



A **szerkezeti fa** egy csúcscímkezett bináris fa. Egy csúcs gyerekei a csúcshoz tartozó formula **közvetlen részformuláival** címkezettek. ($\neg\varphi$ esetén φ -vel címkezett az egyetlen gyerek. ($\varphi \circ \psi$) esetén két gyerek van, melyek φ -vel és ψ -vel címkezettek $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$.)

Az előforduló címkék a formula **részformulái**. (A példában a sárgával megjelölt formulák.)

A **fő logikai összekötő** az az összekötő, amelyik csak a gyökérben szerepel. (A példában az \rightarrow ez az összekötő.)

Zárójelelhagyás

A zárójelelhagyás célja a formulából a lehető legtöbb zárójel elhagyása a formula szerkezetének visszaállíthatósága mellett.

\neg , \wedge , \vee , \rightarrow csökkenő precedenciasorrend

- ▶ a formula külső zárójel párja elhagyható (ha van ilyen)
- ▶ egy binér fő logikai összekötővel rendelkező részformula zárójelei elhagyhatók, ha ennek a fő logikai összekötőnek a precedenciája nagyobb, mint a szerkezeti fában szülő formula fő logikai összekötőjének precedenciája

Láncformulák zárójelelhagyása:

- ▶ Konjunkció illetve diszjunkciólánc esetén minden belső zárójelpár elhagyható. (Ennek a magyarázata a konjunkció és a diszjunkció műveletek asszociativitása, lásd mindjárt)
- ▶ Implikációlánc: $(X_1 \rightarrow (X_2 \rightarrow (X_3 \rightarrow \dots X_n)))$ az alapértelmezett zárójelezés. Csakis akkor hagyhatók el a zárójelek, ha a formula zárójelezése alapértelmezett. (Ennek az a magyarázata, hogy \rightarrow nem asszociatív.)

Zárójelelhagyás

1. Példa:

$$\neg((x \rightarrow y) \wedge z) \vee (\neg x \wedge z))$$

$$\neg((x \rightarrow y) \wedge z) \vee \neg x \wedge z$$

2. Példa:

$$x \rightarrow y \vee \neg z \rightarrow y \wedge x.$$

Melyik a fő logikai összekötő?

Visszazárójelezve:

$$(x \rightarrow ((y \vee \neg z) \rightarrow (y \wedge x))).$$

Az első \rightarrow .

Interpretáció

Definíció

Egy $I : \text{Var}(\varphi) \rightarrow \{i, h\}$ függvényt φ egy **interpretációjának** (változókiértékelésének) nevezünk.

Ha \mathcal{F} egy formulahalmaz, akkor egy $I : \text{Var}(\mathcal{F}) \rightarrow \{i, h\}$ függvényt \mathcal{F} egy **interpretációjának** (változókiértékelésének) nevezünk.

Példa: $\varphi = x \rightarrow \neg y$. Ekkor például $I(x) = i, I(y) = h$ φ egy interpretációja.

Ha $\mathcal{F} = \{x \rightarrow y, y \rightarrow z\}$, akkor $I(x) = i, I(y) = h, I(z) = h$ \mathcal{F} egy interpretációja.

A formulák igazságértéke

Egy I interpretációban egy $\varphi \in \text{Form}$ formula $\mathcal{B}_I(\varphi)$ **igazságértékét** (helyettesítési értékét, Boole értékét) a következő rekurzíval definiáljuk:

Definíció

- ha $x \in \text{Var}$ akkor $\mathcal{B}_I(x) := I(x)$,
- ha $\varphi \in \text{Form}$ formula, akkor $\mathcal{B}_I(\neg\varphi) := \neg\mathcal{B}_I(\varphi)$,
- ha $\varphi, \psi \in \text{Form}$ formulák, akkor $\mathcal{B}_I(\varphi \circ \psi) := \mathcal{B}_I(\varphi) \circ \mathcal{B}_I(\psi)$, ahol $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$,

ahol a műveletek eredményét az alábbi táblázat definiálja.

$\mathcal{B}_I(\varphi)$	$\mathcal{B}_I(\psi)$	$\mathcal{B}_I(\neg\varphi)$	$\mathcal{B}_I(\varphi \wedge \psi)$	$\mathcal{B}_I(\varphi \vee \psi)$	$\mathcal{B}_I(\varphi \rightarrow \psi)$
i	i	h	i	i	i
i	h	h	h	i	h
h	i	i	h	i	i
h	h	i	h	h	i

Az ítélettábla

$|\text{Var}(\varphi)| = n$ esetén φ -nek 2^n lehetséges interpretációja van.

Definíció

Egy φ ítéletlogikai formula **ítélettáblája** egy $2^n \times (n+1)$ -es táblázat, ahol $n = |\text{Var}(\varphi)|$. A sorok megfelelnek a lehetséges interpretációknak. Az I interpretációnak megfelelő sor az első n oszlopban tartalmazza az ítéletváltozók I szerinti kiértékelését, míg utolsó, $n+1$. oszlopa $\mathcal{B}_I(\varphi)$ -t.

Példa:

x	y	$\neg x \vee y$
i	i	i
i	h	h
h	i	i
h	h	i

Formulák szemantikus tulajdonságai

Definíció

- Egy I interpretáció **kielégít** egy φ formulát ($I \models_0 \varphi$) ha a formula helyettesítési értéke i az I interpretációban.
- Egy φ formula **kielégíthető**, ha legalább egy interpretáció kielégíti.
- Egy φ formula **kielégíthetetlen**, ha egyetlen interpretáció sem elégíti ki.
- Egy φ formula **tautologia** (ítéletlogikai törvény) ($\models_0 \varphi$), ha minden interpretáció kielégíti.
- Egy φ formulának a ψ formula **tautologikus következménye** ($\varphi \models_0 \psi$), ha minden φ -t kielégítő interpretáció kielégíti ψ -t is.
- φ és ψ **tautologikusan ekvivalensek** ($\varphi \sim_0 \psi$), ha $\varphi \models_0 \psi$ és $\psi \models_0 \varphi$ is teljesül.

Formulák szemantikus tulajdonságai

- Egy I interpretáció kielégít egy φ formulát ha φ ítélettáblájában I sorában az utolsó oszlopban i áll.
- Egy φ formula kielégíthető, ha ítélettáblájának van i sora.
- Egy φ formula kielégíthetetlen, ha ítélettáblájának csak h sora van.
- Egy φ formula tautologia, ha ítélettáblájának csak i sora van.
- Egy φ formulának a ψ formula tautologikus következménye, ha minden olyan I -re, amelyre φ igazságtáblájában i áll ott ψ is igaz.
- φ és ψ tautologikusan ekvivalensek, ha sorról sorra megegyezik az ítélettáblájuk.

Fontosabb logikai törvények

\top : tautológia, \perp : kielégíthetetlen formula.

- (a) $\neg\neg\varphi \sim_0 \varphi$,
- (b) $\varphi \vee \varphi \sim_0 \varphi$ valamint $\varphi \wedge \varphi \sim_0 \varphi$,
- (c) $\varphi \vee \psi \sim_0 \psi \vee \varphi$ valamint $\varphi \wedge \psi \sim_0 \psi \wedge \varphi$,
- (d) $(\varphi \vee \psi) \vee \xi \sim_0 \varphi \vee (\psi \vee \xi)$ valamint $(\varphi \wedge \psi) \wedge \xi \sim_0 \varphi \wedge (\psi \wedge \xi)$,
- (e) $(\varphi \vee \psi) \wedge \xi \sim_0 (\varphi \wedge \xi) \vee (\psi \wedge \xi)$ valamint $(\varphi \wedge \psi) \vee \xi \sim_0 (\varphi \vee \xi) \wedge (\psi \vee \xi)$,
- (f) $(\varphi \vee \psi) \wedge \psi \sim_0 \psi$ valamint $(\varphi \wedge \psi) \vee \psi \sim_0 \psi$,
- (g) $\varphi \rightarrow \psi \sim_0 \neg\varphi \vee \psi$,
- (h) $\neg(\varphi \wedge \psi) \sim_0 \neg\varphi \vee \neg\psi$ valamint $\neg(\varphi \vee \psi) \sim_0 \neg\varphi \wedge \neg\psi$,
- (i) $\varphi \vee \neg\varphi \sim_0 \top$ valamint $\varphi \wedge \neg\varphi \sim_0 \perp$,
- (j) $\varphi \vee \top \sim_0 \top$ valamint $\varphi \wedge \perp \sim_0 \perp$,
- (k) $\varphi \vee \perp \sim_0 \varphi$ valamint $\varphi \wedge \top \sim_0 \varphi$.

Formulák szemantikus tulajdonságai

Állítás

Legyen φ egy formula és φ_0 egy részformulája. Tegyük fel, hogy $\varphi_0 \sim_0 \psi_0$ valamely ψ_0 formulára és legyen ψ az a formula, amit φ -ból úgy kapunk, hogy a φ_0 részformulát ψ_0 -val helyettesítjük. (Például φ szerkezeti fájában az φ_0 -nak megfelelő részfat ψ_0 szerkezeti fájával helyettesítjük.) Ekkor $\varphi \sim_0 \psi$.

Ötlet: A részformulákban szereplő műveletek számára vonatkozó teljes indukcióval belátható, hogy φ és ψ részformulái megfeleltethetők egymásnak úgy, hogy minden részformulának vele ekvivalens formula feleljen meg.

Példa: Lássuk be hogy $\models_0 x \rightarrow (y \rightarrow x)$!

$$x \rightarrow (y \rightarrow x) \sim_0 \neg x \vee (\neg y \vee x) \sim_0 \neg x \vee (x \vee \neg y) \sim_0 (\neg x \vee x) \vee \neg y \sim_0 (x \vee \neg x) \vee \neg y \sim_0 \top \vee \neg y \sim_0 \top.$$

Formulahalmazok szemantikus tulajdonságai

Definíció

- ▶ Egy I interpretáció **kielégít** egy \mathcal{F} formulahalmazt ($I \models_0 \mathcal{F}$), ha a formulahalmaz minden formuláját kielégíti.
- ▶ Egy \mathcal{F} formulahalmaz **kielégíthető**, ha legalább egy interpretáció kielégíti.
- ▶ Egy \mathcal{F} formulahalmaz **kielégíthetetlen**, ha nincs olyan interpretáció, ami egyszerre minden \mathcal{F} -beli formulát kielégít.
- ▶ Egy \mathcal{F} formulahalmaznak a φ formula **tautologikus következménye** ($\mathcal{F} \models_0 \varphi$), ha minden \mathcal{F} -t kielégítő interpretáció kielégíti φ -t is.

Példa: $\{x \rightarrow y, x\} \models_0 y$

x	y	$x \rightarrow y$	x	y
i	i	i	i	i
i	h	h	i	h
h	i	i	h	i
h	h	i	h	h

A szemantikus fogalmak egymással való kapcsolata

Tétel

Legyen \mathcal{F} egy formulahalmaz és φ egy formula. Akkor a következők teljesülnek.

- ▶ φ akkor és csak akkor kielégíthetetlen, ha $\neg\varphi$ tautológia.
- ▶ $\mathcal{F} \models_0 \varphi$ akkor és csak akkor, ha $\mathcal{F} \cup \{\neg\varphi\}$ kielégíthetetlen.

Bizonyítás:

- ▶ ha $I \models_0 \varphi$ akkor és csak akkor $I \not\models_0 \neg\varphi$.
- ▶ $\mathcal{F} \models_0 \varphi$ akkor és csak akkor, ha minden olyan I interpretációra, amelyre $I \models_0 \mathcal{F}$ teljesül $I \models_0 \varphi$ is fennáll, azaz $I \not\models_0 \neg\varphi$. Tehát $\mathcal{F} \models_0 \varphi$ esetén nincs olyan interpretáció, amely \mathcal{F} -et és $\neg\varphi$ -t egyszerre kielégítené. Fordítva, ha nincs olyan interpretáció, amely \mathcal{F} -et és $\neg\varphi$ -t egyszerre kielégítené, akkor minden \mathcal{F} -et kielégítő interpretáció $\neg\varphi$ -t hamisra, így φ -t igazra értékeli, azaz $\mathcal{F} \models_0 \varphi$.

A konjunktív normálforma

Definíció

- ▶ **Literálnak** nevezünk egy x vagy $\neg x$ alakú formulát, ahol $x \in \text{Var}$. x és $\neg x$ **komplement literálpár**. Egy literál **alapja** az az ítéleváltozó, amelyik a literálban szerepel.
- ▶ **Elemi diszjunkciónak** (vagy röviden **klóznak**) hívunk egy $\ell_1 \vee \dots \vee \ell_n$ alakú formulát ($n \in \mathbb{N}$), ahol ℓ_1, \dots, ℓ_n páronként különböző alapú literálok.
- ▶ **Konjunktív normálformának** (röviden KNF-nek) nevezünk egy $C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_m$ ($m \geq 1$) alakú formulát, ahol minden $1 \leq i \leq m$ -re C_i egy klóz (a KNF egy **tagja**).
- ▶ Az **elemi konjunkciót** és a **diszjunktív normálformát** (DNF) ezzel analóg módon definiáljuk \wedge és \vee szerepének felcserélésével.

Példa:

$x \vee \neg y \vee z$ egy klóz (és egy 1-tagú KNF egy 3 tagú DNF is egyben)
 $(x \vee \neg y \vee z) \wedge (\neg x \vee z) \wedge \neg y$ egy 3-tagú KNF.

A diszjunktív normálforma

Tétel

Minden φ ítéletkalkulusbeli formulához megadható egy vele tautológikusan ekvivalens DNF.

Bizonyítás: Legyen $\text{Var}(\varphi) = \{x_1, \dots, x_n\}$ a φ változói és $\varphi^i = \{I \mid \mathcal{B}_I(\varphi) = i\}$ a φ formula igaz halmaza.

Ekkor minden $I \in \varphi^i$ esetén

$$\psi_I := \bigwedge_{x: I(x)=i} x \wedge \bigwedge_{x: I(x)=h} \neg x$$

egy elemi konjunkció és $\psi_I^i = \{I\}$.

Tehát a $\psi = \bigvee_{I \in \varphi^i} \psi_I$ formulára

$$\psi^i = \bigcup_{I \in \varphi^i} \psi_I^i = \bigcup_{I \in \varphi^i} \{I\} = \varphi^i.$$

Tehát $\psi \sim_0 \varphi$ és ψ diszjunktív normálformájú.

A konjunktív normálforma

Tétel

Minden φ ítéletkalkulusbeli formulához megadható egy vele tautológikusan ekvivalens KNF.

Bizonyítás: Legyen $\text{Var}(\varphi) = \{x_1, \dots, x_n\}$ a φ változói és $\varphi^h = \{I \mid \mathcal{B}_I(\varphi) = h\}$ a φ formula hamis halmaza.

Ekkor minden $I \in \varphi^h$ esetén

$$\psi_I := \bigvee_{x: I(x)=i} \neg x \vee \bigvee_{x: I(x)=h} x$$

egy elemi diszjunkció és $\psi_I^h = \{I\}$.

Tehát a $\psi = \bigwedge_{I \in \varphi^h} \psi_I$ formulára

$$\psi^h = \bigcup_{I \in \varphi^h} \psi_I^h = \bigcup_{I \in \varphi^h} \{I\} = \varphi^h.$$

Tehát $\psi \sim_0 \varphi$ és ψ konjunktív normálformájú.

A konjunktív normálforma

Példa: Legyen $\varphi = (x \rightarrow y) \rightarrow z$. φ ítéletábrája:

x	y	z	φ
i	i	i	i
i	i	h	h
i	h	i	i
i	h	h	i
h	i	i	i
h	i	h	h
h	h	i	i
h	h	h	h

Tehát DNF:

$(x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \neg y \wedge z) \vee (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z) \vee (\neg x \wedge \neg y \wedge z).$

KNF: $(\neg x \vee \neg y \vee z) \wedge (x \vee \neg y \vee z) \wedge (x \vee y \vee z).$

A konjunktív normálforma

A bizonyítás konstrukciója a gyakorlatban nem nagyon használható, mivel szükséges az igaz/hamis halmaz meghatározására és mert az eredmény az input méretében akár exponenciális is lehet.

Sokszor praktikusabb az eredeti formulát átalakítani a kívánt alakra az alábbiak szerint

1. az \rightarrow operátorok eliminálása ($\varphi \rightarrow \psi \sim_0 \neg\varphi \vee \psi$)
2. \neg operátorok csak közvetlenül ítéletváltozók előtt forduljanak elő (De Morgan azonosságok és kettős tagadás törvénye)
3. a formula 2 szintűvé lapítása (disztributív szabályok)

Példa:

$$\begin{aligned}(\neg x \rightarrow y) &\rightarrow (x \wedge \neg(\neg y \wedge z)) \sim_0 \neg(x \vee y) \vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \sim_0 \\(\neg x \wedge \neg y) &\vee (x \wedge (y \vee \neg z)) \sim_0 (\neg x \vee x) \wedge (\neg x \vee y \vee \neg z) \wedge \\(\neg y \vee x) &\wedge (\neg y \vee y \vee \neg z) \sim_0 (\neg x \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg y \vee x).\end{aligned}$$

Ez KNF. A DNF ebből egy disztributív szabályalkalmazással adódik:

$$\begin{aligned}(\neg x \wedge \neg y) &\vee (\neg x \wedge x) \vee (y \wedge \neg y) \vee (y \wedge x) \vee (\neg z \wedge \neg y) \vee (\neg z \wedge x) \sim_0 \\(\neg x \wedge \neg y) &\vee (y \wedge x) \vee (\neg z \wedge \neg y) \vee (\neg z \wedge x).\end{aligned}$$

KNF szerepe következmények bizonyításában

Láttuk, hogy $\mathcal{F} \models_0 \varphi$ akkor és csak akkor, ha $\mathcal{F} \cup \{\neg\varphi\}$ kielégíthetetlen.

Ha $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_n\}$ véges formulahalmaz, akkor $\mathcal{F} \cup \{\neg\varphi\}$ kielégíthetlensége ekvivalens $F_1 \wedge \dots \wedge F_n \wedge \neg\varphi$ kielégíthetlenségével.

Mivel a KNF külső operátora is \wedge , ezért ha a formulák KNF alakúak, akkor a feladat valójában egy klózhalmaz kielégíthetlenségének eldöntése.

Rezolvens

Rezolvens

Legyenek C_1 és C_2 pontosan 1 komplement literálpárt tartalmazó klózok. Tehát $C_1 = C'_1 \vee \ell_1$, $C_2 = C'_2 \vee \ell_2$, ahol ℓ_1 és ℓ_2 komplement literálpár, C'_1 és C'_2 viszont nem tartalmaz ilyen. A $\text{res}(C_1, C_2) := C'_1 \vee C'_2$ klózt (esetleges egyszerűsítés után) a (C_1, C_2) klózpár rezolvensének nevezzük. (Ha $C_1 = \ell_1$, $C_2 = \ell_2$, akkor $\text{res}(C_1, C_2) = \square$.)

Példa: Mi a rezolvensük?

klózpár	rezolvens
$(x \vee \textcolor{red}{y}, \neg\textcolor{red}{y} \vee z)$	$x \vee z$
$(x \vee \textcolor{red}{y} \vee z, \neg\textcolor{red}{y} \vee z)$	$x \vee z$
$(x \vee \neg y, \neg y \vee z)$	nincs: mindkét azonos alapú literál negált
$(x \vee \neg y, z \vee \neg v)$	nincs: nincs két azonos alapú literál
$(x \vee y \vee z, \neg y \vee \neg z)$	nincs: két komplement literálpár van
$(\textcolor{red}{x}, \neg\textcolor{red}{x})$	\square

Rezolúció

Rezolúciós levezetés

Egy \mathcal{S} klózhalmazból a C klóz rezolúciós levezetése egy olyan véges K_1, K_2, \dots, K_m ($m \geq 1$) klózsorozat, ahol minden $j = 1, 2, \dots, m$ -re:

- vagy $K_j \in \mathcal{S}$,
- vagy van olyan $1 \leq s, t < j$, hogy $K_j = \text{res}(K_s, K_t)$,

és $K_m = C$.

Tétel

\mathcal{S} klózhalmaz kielégíthetetlen $\iff \mathcal{S}$ -ből levezethető \square .

A bizonyítást nem részletezzük. Az egyik fontos lemma:

Lemma

Minden C_1, C_2 klózra és I interpretációjukra igaz, hogy ha $I \models_0 \{C_1, C_2\}$, akkor $I \models_0 \text{res}(C_1, C_2)$.

Rezolúció

Példa: Rezolúciós levezetéssel igazoljuk, hogy az alábbi klózalmaz kielégíthetetlen!

$$\{y \vee z, \neg x \vee w \vee \neg z, \neg y, y \vee \neg z \vee \neg w, x \vee y\}$$

Megoldás:

$$\mathcal{S} = \{y \vee z, \neg x \vee w \vee \neg z, \neg y, y \vee \neg z \vee \neg w, x \vee y\}$$

1. $\neg y$ ($\in \mathcal{S}$)
2. $y \vee z$ ($\in \mathcal{S}$)
3. z ($= \text{res}(1, 2)$)
4. $\neg x \vee w \vee \neg z$ ($\in \mathcal{S}$)
5. $y \vee \neg z \vee \neg w$ ($\in \mathcal{S}$)
6. $\neg x \vee y \vee \neg z$ ($= \text{res}(4, 5)$)
7. $\neg x \vee y$ ($= \text{res}(3, 6)$)
8. $x \vee y$ ($\in \mathcal{S}$)
9. y ($= \text{res}(7, 8)$)
10. \square ($= \text{res}(1, 9)$)