7. előadás

VÉGTELEN SOROK 2.

Leibniz-típusú sorok

Váltakozó előjelű sorok konvergenciáját az eddigiek alapján csak akkor tudjuk eldönteni, ha a sor abszolút konvergens. Most egy olyan kritériumot ismertetünk, amelyik bizonyos speciális alakban felírható váltakozó előjelű sorok konvergenciájára ad elégséges feltételt abban az esetben is, ha a sor nem abszolút konvergens.

1. definíció. *A* $0 \leq a_{n+1} \leq a_n$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ *feltételt kielégítő sorozatból képzett*

$$\sum_{n=1}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$$

váltakozó előjelű sort ***Leibniz-típusú*** *sornak nevezzük.*

1. tétel: Leibniz-kritérium.

1^o **Konvergencia:** *A* $\sum_{n=1}(-1)^{n+1}a_n$ *Leibniz-típusú sor akkor és csak akkor konvergens, ha* $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

2^o **Hibabecslés:** *Tegyük fel, hogy a* $\sum_{n=1}(-1)^{n+1}a_n$ *Leibniz-típusú sor konvergens és az összege*

$$A := \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n.$$

Ekkor az

$$\left|A - s_n\right| = \left|A - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k\right| \leq a_{n+1} \quad \big(n \in \mathbb{N}^+\big)$$

egyenlőtlenségek teljesülnek.

Bizonyítás.

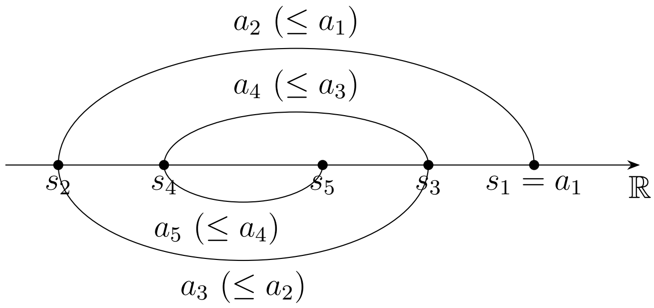
1^o $\boxed{\Longrightarrow}$ A sorok konvergenciájnak szükséges feltétele értelmében, ha a $\sum(-1)^{n+1}a_n$ sor konvergens, akkor $\lim\big((-1)^{n+1}a_n\big) = 0$, ami csak akkor lehetséges, ha $\lim(a_n) = 0$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Tegyük fel, hogy $\sum_{n=1}(-1)^{n+1}a_n$ egy Leibniz-típusú sor és $\lim(a_n) = 0$. Igazoljuk, hogy a sor konvergens.

Legyen

$$s_n := \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \cdots + (-1)^{n+1}a_n \quad \big(n \in \mathbb{N}^+\big).$$

Szemléltessük az (s_n) részletösszeg-sorozat első néhány tagját!



$$\begin{aligned}
s_1 &= a_1,\\
s_2 &= a_1 - a_2 = s_1 - a_2,\\
s_3 &= a_1 - a_2 + a_3 = s_2 + a_2,\\
s_4 &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 = s_3 - a_4,\\
s_5 &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 = s_4 + a_5.
\end{aligned}$$

Most megmutatjuk, hogy az ábra alapján sejthető tendencia, ti. az, hogy az (s_{2n+1}) sorozat monoton csökkenő és (s_{2n}) pedig monoton növekedő valóban igaz.

Nézzük először a páros indexű részsorozatot! A következő csoportosításból látható, hogy

$$s_{2n} = \overbrace{\underbrace{(a_1 - a_2)}_{\geq 0} + \underbrace{(a_3 - a_4)}_{\geq 0} + \cdots + \underbrace{(a_{2n-3} - a_{2n-2})}_{\geq 0}}^{s_{2n-2}} + \underbrace{(a_{2n-1} - a_{2n})}_{\geq 0} \qquad (n \in \mathbb{N}^+),$$

tehát (s_{2n}) valóban monoton növekedő.

Hasonlóan látható, hogy

$$s_{2n+1} = \overbrace{a_1 + \underbrace{(-a_2 + a_3)}_{\leq 0} + \underbrace{(-a_4 + a_5)}_{\leq 0} + \cdots + \underbrace{(-a_{2n-2} + a_{2n-1})}_{\leq 0}}^{s_{2n-1}} + \underbrace{(-a_{2n} + a_{2n+1})}_{\leq 0}, \qquad (n \in \mathbb{N})$$

ezért (s_{2n+1}) monoton csökkenő sorozat.

Az $s_0 := 0$ értelmezés mellett

$$s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1} \geq 0 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

teljesül, amiből következik, hogy $s_{2n} \leq s_{2n+1}$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, azaz

$$(1) \qquad s_2 \leq s_4 \leq s_6 \leq \cdots \leq s_{2n} \leq s_{2n+1} \leq \cdots \leq s_5 \leq s_3 \leq s_1.$$

Tehát (s_{2n}) és (s_{2n+1}) korlátos sorozatok. Mivel mindkettő monoton és korlátos sorozat, ezért konvergensek is. Jelölje $a = \lim (s_{2n+1})$ és $b = \lim (s_{2n})$ a határértéküket. Ekkor

$$a - b = \lim_{n\to+\infty} s_{2n+1} - \lim_{n\to+\infty} s_{2n} = \lim_{n\to+\infty} (s_{2n+1} - s_{2n}) = \lim_{n\to+\infty} a_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} a_n = 0,$$

hiszen (a_{2n+1}) részsorozata az (a_n) sorozatnak. Ezért $a = b$, tehát az (s_{2n}) és az (s_{2n+1}) részsorozatok határértéke megegyezik. Ebből következik az (s_n) sorozat konvergens. Ez pedig azt jelenti, hogy a $\sum\limits_{n=1} (-1)^{n+1} a_n$ Leibniz-típusú sor valóban konvergens. Az $\mathbf{1^o}$ állítást tehát bebizonyítottuk.

2^o Tegyük fel, hogy a $\sum\limits_{n=1}(-1)^{n+1}a_n$ Leibniz-típusú sor konvergens és A az összege. Ekkor $A = \lim(s_{2n+1}) = \lim(s_{2n})$. Az (1) egyenlőtlenségekből következik, hogy

$$s_{2n} \le A \le s_{2n+1} \le s_{2n-1} \quad \big(n \in \mathbb{N}^+\big).$$

Így

- $0 \le A - s_{2n} \le s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1}$ és
- $0 \le s_{2n-1} - A \le s_{2n-1} - s_{2n} = a_{2n}$

minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén. Azt kaptuk tehát, hogy

$$|A - s_n| \le a_{n+1} \quad \big(n \in \mathbb{N}^+\big),$$

ezért a **2^o** állítást bebizonyítottuk. ■

Megjegyzések

1. A

$$\sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

Leibniz-sor a Leibniz-típusú sorok névadó példája az $a_n = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ szereposztással. Mivel (a_n) monoton csökkenő pozitív tagú sorozat és $\lim(a_n) = \lim\big(\frac{1}{n}\big) = 0$, ezért a Leibniz-kritérium feltételei teljesülnek, így **a Leibniz-sor konvergens**.

2. A Leibniz-kritériumban szereplő **2^o** állítással becsülni tudjuk a sor összegét, azaz az A értéket. Például a Leibniz-sornál $n = 10$ esetén $a_{11} = 1/11$ és $s_{10} = 1627/2520 \approx 0,6456$. Ezért

$$0,55472 \approx s_{10} - a_{11} \le \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \le s_{10} + a_{11} \approx 0,73654.$$

A sor pontos összegét később ki fogjuk számítani.

3. A Leibniz-kritériumban az (a_n) sorozat monotonitására tett feltétel nem hagyható el. Például az

$$a_n := \begin{cases} \dfrac{2}{k}, & \text{ha } n = 2k-1 \\[2mm] \dfrac{1}{k}, & \text{ha } n = 2k \end{cases} \qquad \big(k \in \mathbb{N}^+\big)$$

pozitív tagú nullasorozat *nem monoton csökkenő*, és a $\sum\limits_{n=1}(-1)^{n+1}a_n$ váltakozó előjelű (nem Leibniz-típusú!) végtelen sor divergens. ■

Tizedestörtek, p-adikus törtek

Tizedestörtek

Valós számokat már az általános iskolában is gyakran írtuk fel tizedestört alakban. A tizedestört olyan számábrázolás, ami jól kifejezi hol helyezkedik el az adott szám a számegyenesen, ezáltal gyorsan tudjuk a számokat összehasonlítani. Ha azt szeretnénk megállapítani, hogy melyik szám nagyobb az alábbiak közül, akkor elég egy pillantást vetni tizedestört alakjukra:

$$\frac{15}{100} = 0,15, \qquad \frac{1}{6} = 0,166\,666\ldots, \qquad \frac{\sqrt{2}}{9} = 0,157\,134\ldots.$$

A valós számok középiskolából megismert végtelen tizedestört-előállítása

$$\alpha = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots, \quad a_0 \in \mathbb{Z},\ a_n \in \{0,1,2,\ldots,9\},\ n \in \mathbb{N}^+$$

tulajdonképpen egy végtelen sorösszeg:

$$\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}.$$

A tizedestörtek matematikailag pontos leírásához tehát a végtelen sorokkal kapcsolatos ismeretek szükségesek.

A következő két állításból indulunk ki.

2. tétel: *Legyen* $(a_n)\colon \mathbb{N}^+ \to \{0,1,2,\ldots,9\}$ *egy tetszőleges sorozat. Ekkor a*

$$\sum_{n=1} \frac{a_n}{10^n} = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \cdots$$

végtelen sor konvergens és az összege

$$\alpha := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n} \in [0,1].$$

Bizonyítás. Mivel

$$0 \le \frac{a_n}{10^n} \le \frac{9}{10^n} \qquad (n \in \mathbb{N}^+)$$

és a $\sum \frac{9}{10^n}$ mértani sor konvergens ($0 < q = 1/10 < 1$), így a majoráns kritérium miatt a sor konvergens. Másrészt a mértani sor

$$1 + q + q^2 + q^3 + \cdots = \frac{1}{1-q} \quad (|q| < 1)$$

összegképlete alapján

$$0 \le \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n} \le \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{9}{10^n} = \frac{9}{10} \cdot \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots\right) = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{\frac{9}{10}} = 1,$$

ezért $0 \le \alpha \le 1$. ■

A következő tétel azt állítja, hogy minden $[0,1]$-beli szám felírható az előző tételben megadott alakban.

3. tétel: *Minden $\alpha \in [0,1]$ számhoz létezik olyan $(a_n) \colon \mathbb{N}^+ \to \{0,1,2,\dots,9\}$ sorozat, amire az teljesül, hogy*

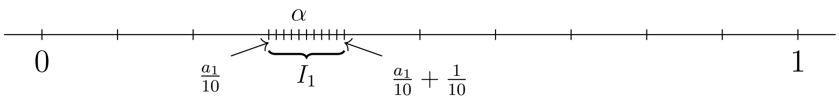
$$\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}.$$

Bizonyítás. Rögzítsünk egy $\alpha \in [0,1]$ számot!

Az első lépésben osszuk fel a $[0,1]$ intervallumot 10 egyenlő hosszúságú részre. Ekkor

$$\exists\, a_1 \in \{0,1,2,\dots,9\}, \quad \text{illetve} \quad \exists\, I_1 := \left[\tfrac{a_1}{10}, \tfrac{a_1}{10} + \tfrac{1}{10}\right] : \quad \alpha \in I_1 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\frac{a_1}{10} \le \alpha \le \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10}.$$



A második lépésben osszuk fel az I_1 intervallumot 10 egyenlő hosszúságú részre. Ekkor

$$\exists\, a_2 \in \{0,1,2,\dots,9\}, \quad \text{illetve} \quad \exists\, I_2 := \left[\tfrac{a_1}{10} + \tfrac{a_2}{10^2}, \tfrac{a_1}{10} + \tfrac{a_2}{10^2} + \tfrac{1}{10^2}\right] : \quad \alpha \in I_2 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} \le \alpha \le \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{1}{10^2}.$$

Ha az eljárást folytatjuk, akkor az n-edik lépésben találunk olyan $a_n \in \{0,1,2,\dots,9\}$ számot, hogy

$$\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n} \le \alpha \le \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \frac{1}{10^n}.$$

Ekkor

$$\left|\alpha - \left(\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n}\right)\right| \le \frac{1}{10^n} \to 0, \qquad \text{ha } n \to +\infty,$$

és így

$$\alpha = \lim_{n \to +\infty} S_n := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}. \blacksquare$$

2. definíció. *Legyen $\alpha \in [0,1]$ és $(a_n) \colon \mathbb{N}^+ \to \{0,1,2,\dots,9\}$ olyan sorozat, amire*

$$\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}$$

*teljesül. Ekkor $0{,}a_1a_2a_3\dots$ az α szám **tizedestört alakja** és ezt az*

$$\alpha = 0{,}a_1a_2a_3\dots$$

egyenlőséggel fejezzük ki.

Megjegyzések

1. Ha $\alpha \in [n, n+1]$, ahol $n \in \mathbb{N}$, akkor α tizedestört alakja $n, a_1 a_2 a_3 \ldots$.

2. Bizonyos valós számoknak több tizedestört alakja van. Például

$$\frac{1}{10} = 0,1000\ldots \quad \text{és} \quad \frac{1}{10} = 0,0999\ldots,$$

ugyanis

$$0,0999\ldots = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{9}{10^n} = \frac{9}{10^2} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{10^n} = \frac{9}{10^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{10}.$$

Igazolható, hogy ha egy pozitív számnak van nullára végződő tizedestört alakja, akkor van még egy tizedestört alakja, ami 9-re végződik. Csak ilyen esetben lehet egy pozitív számnak több tizedestört alakja, és ekkor pontosan két különböző tizedestört alakja van.

3. A tizedestört alak előállítása. A következő rekurzív algoritmus generálja a szám tizedestört alakját. Legyen $\alpha \in [0, 1)$. Szorozzuk meg α-t 10-zel. a_1 legyen a kapott szám egész része, a törtrésze egy $[0, 1)$-beli szám, amivel az eljárás megismételhető. Ezzel egymásután kapjuk meg az a_2, a_3,... számjegyeket. Ha $\alpha = 1$, akkor tizedestört alakja $0,999\ldots$.

4. Tizedestörtek osztályozása. Azt mondjuk, hogy $0, a_1 a_2 a_3 \ldots$

- *véges tizedestört*, ha $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall\, n > n_0 : \quad a_n = 0$;
- *szakaszos végtelen tizedestört*, ha $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ és $\exists\, k \in \mathbb{N}^+$, $\forall\, n > n_0 : \quad a_{n+k} = a_n$;
- *nem szakaszos végtelen tizedestört*, ha végtelen, de nem szakaszos tizedestört.

A szakaszos végtelen tizedestörtek általános alakja

$$0, a_1 a_2 \ldots a_{n_0} \underbrace{b_1 b_2 \ldots b_k} \underbrace{b_1 b_2 \ldots b_k} \underbrace{b_1 b_2 \ldots b_k} \ldots,$$

azaz egy ismétlődő k hosszúságú szakasz található a felírásban. Ekkor a tizedestörtet a

$$0, a_1 a_2 \ldots a_{n_0} \dot{b}_1 b_2 \ldots \dot{b}_k$$

alakban fogjuk felírni. Például $1/3 = 0,\dot{3}$.

5. Egy valós szám pontosan akkor **racionális**, ha tizedestört alakja véges, vagy végtelen tizedestört alakja szakaszos. Ebből az is következik, hogy egy valós szám akkor és csak akkor **irracionális**, ha végtelen tizedestört alakja nem szakaszos.

6. A tizedestörtekre (mint végtelen sorokra) értelmezhetők a műveletek, megadható rendezés, bizonyíthatók ezek tulajdonságai, érvényes a teljességi axióma is, ezért ez is egy modellje (reprezentációja) lehet a valós számoknak. Ez a **tizedestört modell**. ■

Példa. *Írjuk fel a* $0,1\dot{2}\dot{4}$ *tizedes törtet két egész szám hányadosaként!*

Megoldás. A mértani sorok összege alapján

$$0,1\dot{2}\dot{4} = 0,1 + 0,024 + 0,00024 + 0,0000024 + \cdots =$$

$$= 0,1 + 0,024\left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \ldots\right) = \frac{1}{10} + \frac{24}{1000} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{100}} = \frac{123}{990}. \quad \blacksquare$$

A p-adikus törtek

A tizedestörtek szorosan kapcsolódnak a mindennapos használatban alkalmazott tízes számrendszerhez. Más számrendszerek alkalmazásának is létjogosultsága van, figyelembe véve több gyakorlati alkalmazásban betöltött szerepüket. Ezért a tizedestörtekhez hasonlóan sor kerül a p-adikus törtek bevezetésére.

A 2. és a 3. tétel bizonyításához hasonlóan igazolható a következő két állítás.

4. tétel. *Legyen $2 \le p \in \mathbb{N}$ és $(a_n)\colon \mathbb{N}^+ \to \{0,1,2,\dots,p-1\}$ egy sorozat. Ekkor a $\sum \frac{a_n}{p^n}$ sor konvergens és összege*

$$\alpha := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{p^n} \in [0,1].$$

5. tétel. *Legyen $2 \le p \in \mathbb{N}$. Ekkor $\forall \alpha \in [0,1]$ számhoz $\exists (a_n)\colon \mathbb{N}^+ \to \{0,1,2,\dots,p-1\}$ sorozat, amire az teljesül, hogy*

$$\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{p^n}.$$

3. definíció. *Legyen $2 \le p \in \mathbb{N}$, $\alpha \in [0,1]$ és $(a_n)\colon \mathbb{N}^+ \to \{0,1,2,\dots,p-1\}$ olyan sorozat, amire*

$$\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{p^n}$$

teljesül. Ekkor azt mondjuk, hogy a $0,a_1a_2a_3\dots_{(p)}$ felírás az α szám ***p-adikus tört alakja*** *és ezt az $\alpha = 0,a_1a_2a_3\dots_{(p)}$ egyenlőséggel fejezzük ki.*

Ha $p = 2$, akkor ***diadikus törtekről*** *beszélünk.*

Megjegyzések

1. A tizedestörtekre vonatkozó megjegyzések a magától értetődő módosításokkal érvényesek maradnak a p-adikus törtekre is. Hasonlóan beszélhetünk véges, végtelen szakaszos és végtelen nem szakaszos p-adikus törtekről is. Ha egy tizedestört véges, akkor nem biztos, hogy egy másik $2 \le p \in \mathbb{N}$ alap esetén a tizedestörthöz tartozó szám p-adikus tört alakja is véges lesz. Például

$$0,1_{(10)} = \frac{1}{10} = 0,0\dot{0}01\dot{1}_{(2)}.$$

2. Az az állítás, hogy egy szám akkor és csak akkor racionális, ha tizedestört alakja véges vagy végtelen szakaszos, érvényben marad p-adikus törtek esetére is. A véges p-adikus törteket **p-adikus racionális számoknak** nevezzük.

3. A diadikus törtek fontos szerepet játszanak az informatikában, például a lebegőpontos számábrázolásnál. Ennek lényege, hogy a számot egyértelműen felírjuk

$$e \cdot M \cdot 2^k$$

alakban, ahol e a szám előjele, $1/2 \le M < 1$ és $k \in \mathbb{Z}$. Az M számot (mantisszát) úgy tároljuk, hogy a diadikus tört alakjából vesszük az első néhány bitet a legmagasabb helyértékű kivételével, mert az úgyis 1. A tárolt bitek száma függ az alkalmazott pontosságtól. Ezzel általában csak egy M-hez közeli diadikus racionális számot tudunk tárolni. Például az $1/10$ számot nem tudjuk pontosan tárolni. ■

Műveletek végtelen sorokkal

A konvergens sorok a véges összegek általánosításának tekinthetők. Azt szeretnénk, hogy végtelen sorokkal úgy tudjunk számolni, mint a véges összegekkel. Ez bizonyos esetekben lehetséges, más esetekben azonban nem.

Ebben a pontban arról lesz szó, hogy a véges összegek megszokott (és nagyon hasznos) tulajdonságai (kommutativitás, asszociativitás, disztributivitás) vajon érvényben maradnak-e a végtelen összegekre is.

Elöljáróban a következőket jegyezzük meg: Az első feladat azt tisztázni, hogy ezeket a tulajdonságokat végtelen sorokra hogyan lehet/kell *értelmezni*. Ki fog derülni, hogy a szóban forgó tulajdonságok végtelen összegekre csak bizonyos feltételek teljesülése esetén maradnak meg. A „legerősebb" követelmény az *abszolút konvergencia* lesz. Már itt kiemeljük azt a tényt, hogy *abszolút konvergens sorokra a véges összegek minden említett tulajdonsága teljesül; az ilyen végtelen összegekkel úgy számolhatunk, mint a végesekkel.*

Végtelen sorok zárójelezése (asszociativitás)

Véges összegek rendelkeznek az asszociativitás (csoportosíthatóság) tulajdonságával. Ez azt jelenti, hogy tetszőleges $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ számokra az $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ összeg bármilyen csoportosítás (zárójelezés) esetén ugyanazt az értéket adja.

A következő tétel azt állítja, hogy ezzel a tulajdonsággal minden **konvergens végtelen sor** rendelkezik. Előtte azonban meg kell mondanunk azt, hogy mit értünk egy végtelen sor zárójelezésén.

4. definíció. *Legyen $\sum a_n$ egy végtelen sor és $(m_n)\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ egy szigorúan monoton növekvő indexsorozat, ahol $m_0 := 0$. Ekkor az*

$$\alpha_n := \sum_{k=m_{n-1}+1}^{m_n} a_k \qquad (n \in \mathbb{N}^+).$$

sorozattal definiált $\sum \alpha_n$ végtelen sort a $\sum a_n$ sor (m_n) indexsorozat által meghatározott ***zárójelezésének*** *nevezzük.*

Az (m_n) sorozat mutatja hova kerülnek a zárójelek

$$\underbrace{(a_1 + a_2 + \cdots + a_{m_1})}_{\alpha_1} + \underbrace{(a_{m_1+1} + a_{m_1+2} + \cdots + a_{m_2})}_{\alpha_2} + \cdots .$$

6. tétel. *Egy konvergens sor minden zárójelezése is konvergens sor, és összege az eredeti sor összegével egyenlő.*

Bizonyítás. Legyen $\sum \alpha_n$ a $\sum a_n$ sor (m_n) által meghatározott zárójelezése, és jelölje (σ_n) és (s_n) rendre a két sor részletösszegeiből álló sorozatokat. Ha $\sum a_n$ konvergens, akkor (s_n) konvergens sorozat, de ekkor minden részsorozata is konvergens, és határértéke megegyezik az (s_n) sorozat határértékével.

Mivel $\forall n \in \mathbb{N}^+$ indexre $\sigma_n = s_{m_n}$ teljesül, így (σ_n) részsorozata az (s_n) sorozatnak. Tehát a (σ_n) sorozat konvergens és $\lim(\sigma_n) = \lim(s_n)$. Ez azt jelenti, hogy a $\sum \alpha_n$ sor konvergens, és

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n = \lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \lim_{n\to+\infty} s_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n. \blacksquare$$

Megjegyzés. Véges összegek asszociatív tulajdonsága azt is jelenti, hogy egy összegben elhelyezett zárójeleket el is lehet hagyni. Végtelen összegekre ez az állítás már nem igaz, mert zárójelek elhagyásával egy konvergens sorból divergens sort is kaphatunk. Például a

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots$$

sor nyilván konvergens, de a zárójelek elhagyásával kapott

$$1-1+1-1+1-1+\cdots$$

sor divergens. Ez azt jelenti, hogy az előző tétel nem fordítható meg. Bizonyos feltételek mellett azonban a tétel állítása mégis megfordítható. $\blacksquare$

Végtelen sorok átrendezése (kommutativitás)

Véges összegek rendelkeznek a kommutativitás (felcserélhetőség) tulajdonsággal. Ez azt jelenti, hogy tetszőleges $a_0, a_1, \ldots, a_n$ számokra az $a_0+a_1+\cdots+a_n$ összeg bármilyen sorrendben ugyanazt az értéket adja. Pontosabban fogalmazva: ha $n \in \mathbb{N}$ rögzített, $a_k \in \mathbb{R}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ tetszőleges számok és $p\colon \{0, 1, \ldots, n\} \to \{0, 1, \ldots, n\}$ egy bijekció (azaz p a $0, 1, \ldots, n$ számok egy permtációja), akkor

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_{p_0} + a_{p_1} + \cdots + a_{p_n}.$$

A következő tétel azt állítja, hogy **abszolút konvergens sorok** is rendelkeznek ezzel a tulajdonsággal, vagyis az ilyen sorok tetszés szerinti sorrendben átrendezhetők anélkül, hogy az összege megváltoznék. Először azoban meg kell mondanunk azt, hogy mit értsünk egy végtelen sor átrendezésén.

5. definíció. *Legyen* $\sum_{n=0} a_n$ *egy adott végtelen sor. Tegyük fel, hogy* $(p_n)\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *egy bijekció, (más szóval* p *egy permtációja* $\mathbb{N}$*-nek). Ekkor a* $\sum_{n=0} a_{p_n}$ *végtelen sort a* $\sum_{n=0} a_n$ *sor* (p_n) *által meghatározott* ***átrendezésének*** *nevezzük.*

7. tétel. *Ha a* $\sum_{n=0} a_n$ *végtelen sor abszolút konvergens, akkor tetszőleges* $(p_n)\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *permtációval képzett* $\sum_{n=0} a_{p_n}$ *átrendezése is abszolút konvergens, és*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{p_n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Tehát egy abszolút konvergens sor bármely átrendezése is abszolút konvergens sor, és összege ugyanaz, mint az eredeti soré.

Bizonyítás. Legyen

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k \qquad \text{és} \qquad \sigma_n := \sum_{k=0}^{n} a_{p_k} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

1. lépés. *Igazoljuk, hogy a* $\sum_{n=0} a_{p_n}$ *sor abszolút konvergens.* Valóban: mivel $\sum_{n=0} a_n$ abszolút konvergens, ezért minden $n \in \mathbb{N}$-re

$$\sum_{k=0}^{n} \left|a_{p_k}\right| = \left|a_{p_0}\right| + \left|a_{p_1}\right| + \cdots + \left|a_{p_n}\right| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| = K < +\infty,$$

azaz a $\sum_{k=0}^{n} \left|a_{p_k}\right|$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozat felülről korlátos; de nyilván monoton növekedő is, következésképpen a $\sum_{n=0} \left|a_{p_n}\right|$ sor konvergens. Így a $\sum_{n=0} a_{p_n}$ sor valóban abszolút konvergens.

2. lépés. *Igazoljuk, hogy*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{p_n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Legyen $A := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} s_n$ és $B := \sum_{n=0}^{+\infty} a_{p_n} = \lim_{n \to +\infty} \sigma_n$.

Tudjuk, hogy a $\sum_{n=0} |a_n|$ sor konvergens, így a Cauchy-kritérium szerint $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall m > n \geq n_0$:

$$\left|a_{n+1}\right| + \left|a_{n+2}\right| + \cdot + \left|a_m\right| < \varepsilon.$$

Ezért $(n = n_0)$, ha $m > n_0$, akkor $\sum_{k=n_0+1}^{m} |a_k| < \varepsilon$.

Adott $\varepsilon > 0$-ra tekintsük az $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}$ tagokat, és legyen N_0 olyan index, amire az $a_{p_0} + a_{p_1} + \cdots + a_{p_{N_0}}$ összeg már tartalmazza ezeket a tagokat. Ilyen N_0 nyilván létezik, és $N_0 \geq n_0$. Legyen $n > N_0$. Ekkor

$$\sigma_n - s_n = \big(\underbrace{a_{p_0} + a_{p_1} + \cdots a_{p_{N_0}}} + a_{p_{N_0+1}} + \cdots a_{p_n}\big) - \big(\underbrace{a_0 + a_1 + \cdots + a_{n_0}} + a_{n_0+1} + \cdots + a_n\big)$$

sem tartalmazza az $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}$ tagokat. Így

$$\left|\sigma_n - s_n\right| \leq \sum_{k=n_0+1}^{m} |a_k| < \varepsilon,$$

ahol $m := \max\{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$, hiszen $m \ge n > N_0 \ge n_0$. Ez azt jelenti, hogy $(\sigma_n - s_n)$ nullasorozat. Ezért

$$\sigma_n = (\sigma_n - s_n) + s_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 + A = A,$$

azaz

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{p_n} = \lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \lim_{n\to+\infty} s_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Ezzel a tételt bebizonyítottuk. ■

Ha egy konvergens sor nem abszolút konvergens (ezeket neveztük *feltételesen konvergens soroknak*), akkor az előbbi állításhoz képest „drámaian” megváltozik a helyzet. Az ilyen sorokat át lehet rendezni úgy, hogy az összege előre megadott $\overline{\mathbb{R}}$-beli elem legyen, sőt konvergens sorból divergens sort is kaphatunk. Ezt fejezi ki a következő állítás.

8. tétel: Riemann átrendezési tétele. *Tegyük fel, hogy a $\sum a_n$ egy feltételesen konvergens sor (azaz $\sum a_n$ konvergens, de $\sum |a_n|$ divergens). Ekkor a sornak*

1° *minden $A \in \overline{\mathbb{R}}$ esetén létezik olyan átrendezése, amelynek összege A;*

2° *van olyan átrendezése, aminek nincs határértéke.*

Bizonyítás. Nélkül. ■

Végtelen sorok szorzása

Véges összegeket úgy szorzunk össze, hogy az egyiknek minden tagját megszorozzuk a másik minden tagjával és a kapott szorzatokat összeadjuk:

$$(a_0 + a_1 + \cdots + a_n) \cdot (b_0 + b_1 + \cdots + b_m) = a_0\, b_0 + a_0\, b_1 + \cdots + a_0\, b_m + a_1\, b_0 + \cdots + a_n\, b_m.$$

A $\sum\limits_{n=0} a_n$ és a $\sum\limits_{m=0} b_m$ végtelen sorok szorzatának az értelmezéséhez az $a_i\, b_j$ $(i, j \in \mathbb{N})$ szorzatokat egy „$\infty \times \infty$”-es mátrixba írjuk fel a következő módon:

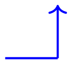
$$\begin{array}{c|cccccc}
 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \ldots \\
\hline
b_0 & a_0b_0 & a_1b_0 & a_2b_0 & a_3b_0 & \ldots \\
b_1 & a_0b_1 & a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 & \ldots \\
b_2 & a_0b_2 & a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2 & \ldots \\
b_3 & a_0b_3 & a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \ldots \\
b_4 & a_0b_4 & a_1b_4 & a_2b_4 & a_3b_4 & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Sokféleképpen képezhetünk végtelen sort

$\Downarrow$

Sorok szorzatát sokféleképpen értelmezhetjük

Speciális esetek

- **téglányszorzat:** 
- **Cauchy-szorzat:** 

6. definíció. *A* $\sum\limits_{n=0} a_n$ *és* $\sum\limits_{n=0} b_n$ *sorok*

- ***téglányszorzata*** *a*

$$\sum_{n=0} t_n, \quad t_n := \sum_{\max\{i,j\}=n} a_i b_j \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

- ***Cauchy-szorzata*** *pedig a*

$$\sum_{n=0} c_n, \quad c_n := \sum_{i+j=n} a_i b_j = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

végtelen sor.

9. tétel. *Tegyük fel, hogy a* $\sum\limits_{n=0} a_n$ *és a* $\sum\limits_{n=0} b_n$ *végtelen sorok konvergensek. Ekkor a* $\sum\limits_{n=0} t_n$ *téglányszorzatuk is konvergens és*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} b_n,$$

azaz konvergens sorok téglányszorzata is konvergens, és a téglányszorzat összege a két sor összegének szorzatával egyezik meg.

Bizonyítás. A bizonyítás alapja a sorozatoknál tanult műveletek és határátmenet felcserélhetőségére vonatkozó tétel. Jelölje A_n, B_n és T_n rendre a $\sum\limits_{n=0} a_n$, $\sum\limits_{n=0} b_n$ és $\sum\limits_{n=0} t_n$ sorok n-edik részletösszegeit. Ekkor

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} t_k = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\max\{i,j\}=k} a_i b_j = \sum_{\max\{i,j\}\le n} a_i b_j = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{n} b_j\right) =$$

$$= A_n B_n \to \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right), \quad \text{ha } n \to +\infty.$$

Mivel a (T_n) sorozat konvergens, így a $\sum t_n$ végtelen sor is konvergens, és

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t_n = \lim(T_n) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right). \ \blacksquare$$

Megjegyzés. Az előző tétel Cauchy-szorzatra nem érvényes. Például a $\sum\limits_{n=1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ konvergens sor önmagával vett Cauchy-szorzata divergens. $\blacksquare$

10. tétel: Abszolút konvergens sorok szorzatai. *Tegyük fel, hogy a* $\sum\limits_{n=0} a_n$ *és* $\sum\limits_{n=0} b_n$ *végtelen sorok mindegyike abszolút konvergens. Ekkor*

1º *a* $\sum\limits_{n=0} t_n$ *téglányszorzat is abszolút konvergens;*

2º *a* $\sum\limits_{n=0} c_n$ *Cauchy-szorzat is abszolút konvergens;*

3º *az összes* $a_i b_j$ $(i, j \in \mathbb{N})$ *szorzatból tetszés szerinti sorrendben és csoportosításban képzett* $\sum\limits_{n=0} d_n$ *végtelen sor is abszolút konvergens és*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} d_n = \sum_{n=0}^{+\infty} t_n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\Big) \cdot \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\Big)$$

Bizonyítás. Elég a **3º** állítást igazolni. Mivel $\sum\limits_{n=0} a_n$ és $\sum\limits_{n=0} b_n$ abszolút konvergensek, ezért

$$A_N := \sum_{n=0}^{N} |a_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} A \in \mathbb{R}, \qquad B_N := \sum_{n=0}^{N} |b_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} B \in \mathbb{R}.$$

Tekintsünk egy tetszőleges $\sum\limits_{n=0} d_n$ sort, ahol $d_n = \sum\limits_{\cdots} a_i b_j$. Legyen $N \in \mathbb{N}$ tetszőleges. Jelölje I, illetve J a maximális i, illetve j indexet a $d_0, d_1, \ldots, d_N$ öszegekben. Ekkor

$$\sum_{n=0}^{N} |d_n| \le \Big(\sum_{n=0}^{I} |a_n|\Big) \cdot \Big(\sum_{n=0}^{J} |b_n|\Big) \le A \cdot B,$$

és ez azt jelenti, hogy a $\sum d_n$ sor abszolút konvergens.

Így a $\sum t_n$ sor is abszolút konvergens, tehát konvergens is. Az előző tétel szerint tehát

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} b_n.$$

A $\sum t_n$ sor abszolút konvergenciája miatt a sor tetszőleges módon átrendezhető és csoportosítható az összeg megváltoztatása nélkül. A bizonyítás befejezéséhez most már csak azt kell megjegyezni, hogy a $\sum d_n$ és a $\sum c_n$ sorok is megkaphatók a $\sum t_n$ sor alkalmas átrendezésével és csoportosításával. ■

Megjegyzés. A Cauchy-szorzat konvergenciájához elegendő, ha az egyik sor abszolút konvergens miközben a másik sor csak feltételesen konvergens.

<u>**Mertens-tétel.**</u> *Egy abszolút konvergens és egy konvergens sor Cauchy-szorzata konvergens, és összege a két sor összegének szorzatával egyezik meg.* ■