3. előadás

VALÓS SOROZATOK 2.

Tágabb értelemben vett határérték

Fordítsuk a figyelmünket most a divergens sorozatokra. Ezek között vannak olyanok, amelyek bizonyos „maghatározott tendenciát mutatnak”.

Például az

$$a_n := n^2 \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat divergens, de „nagy” n-ekre az a_n értékek „nagyok”. Pontosabban: tetszőlegesen (nagy) pozitív P számra a sorozat tagjai bizonyos indextől kezdve P-nél nagyobbak (vagy másként fogalmazva: legfeljebb véges sok tag lesz P-nél kisebb). Az ilyen sorozatokat „$+\infty$-hez tartó” sorozatoknak fogjuk nevezni, vagy azt is mondjuk, hogy a sorozat „határértéke $+\infty$”.

Hasonló a helyzet a

$$b_n := -n^2 \quad (n \in \mathbb{N})$$

divergens sorozat esetén is. Itt tetszőleges $P < 0$ számra a sorozat tagjai bizonyos indextől kezdve P-nél kisebbek (azaz legfeljebb véges sok tag lesz P-nél nagyobb). Az ilyen sorozatokat „$-\infty$-hez tartó” sorozatoknak fogjuk nevezni, vagy azt is mondjuk, hogy a sorozat „határértéke $-\infty$”.

1. definíciók.

1^o *Azt mondjuk, hogy az (a_n)* ***sorozat határértéke*** *$+\infty$ (vagy a* ***sorozat*** *$+\infty$****-hez tart****), ha*

$$\forall\, P > 0\text{-hoz } \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \ \ \forall\, n > n_0 : \quad a_n > P.$$

Ezt az alábbi szimbólumok valamelyikével jelöljük:

$$\lim\,(a_n) = +\infty, \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty, \qquad a_n \to +\infty, \ \text{ha } n \to +\infty.$$

2^o *Azt mondjuk, hogy az (a_n)* ***sorozat határértéke*** *$-\infty$ (vagy a* ***sorozat*** *$-\infty$****-hez tart****), ha*

$$\forall\, P < 0\text{-hoz } \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \ \ \forall\, n > n_0 : \quad a_n < P.$$

Ezt az alábbi szimbólumok valamelyikével jelöljük:

$$\lim\,(a_n) = -\infty, \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty, \qquad a_n \to -\infty, \ \text{ha } n \to +\infty.$$

1. példa. *A definíció alapján bizonyítsuk be, hogy*

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} = +\infty\,.$$

Megoldás. Azt kell bebizonyítani, hogy

$$(*) \qquad \forall\, P > 0\text{-hoz } \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall\, n > n_0 : \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} > P.$$

Legyen $P > 0$ egy adott valós szám, és vizsgáljuk az

$$(\triangle) \qquad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} > P$$

egyenlőtlenséget. Azt kell megmutatni, hogy ez bizonyos n_0 küszöbindextől kezdve minden n indexre igaz. A bizonyításhoz a következő *ötletet* alkalmazzuk: a bal oldalnál **kisebb**, de jóval egyszerűbb kifejezésről mutatjuk meg, hogy az P-nél nagyobb bizonyos indextől kezdve.

A bal oldalt a Bernoulli-egyenlőtlenség felhasználásával **csökentjük**:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \geq 1 + n^2 \cdot \frac{1}{n} = 1 + n > n.$$

Így $(\triangle)$ helyett a következőt kapjuk:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} > n > P.$$

Az utolsó egyenlőtlenség nyilván teljesül, ha $n > n_0 := [P]$, és ez azt jelenti, hogy

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} > P, \quad \text{ha } n > n_0 = [P].$$

Következésképpen P-hez (például) $n_0 = [P]$ egy jó küszöbindex.

Mivel P tetszőleges, ezért a fentiekből következik $(*)$. ■

2. példa. *A definíció alapján lássuk be, hogy*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{7 - 2n^2}{n + 10} = -\infty\,.$$

Megoldás. Azt kell bebizonyítani, hogy

$$(*) \qquad \forall\, P < 0\text{-hoz } \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall\, n > n_0 : \quad \frac{7 - 2n^2}{n + 10} < P.$$

Legyen $P < 0$ egy adott valós szám, és vizsgáljuk a

$$(\triangle) \qquad \frac{7 - 2n^2}{n + 10} < P$$

egyenlőtlenséget. Azt kell megmutatni, hogy ez bizonyos n_0 küszöbindextől kezdve minden n indexre igaz. Szorozzunk be (-1)-gyel:

$$(\circ) \qquad \frac{2n^2-7}{n+10} > -P,$$

így a folytatás hasonló lesz az előző példánál leírtakhoz. Ezt az egyenlőtlenséget most meg tudnánk oldani. Jóval egyszerűbb azonban, ha az előző példánál alkalmazott ötletet követjük, ti. a bal oldalt **csökkentjük:**

$$\frac{2n^2-7}{n+10} = \frac{n^2+(n^2-7)}{n+10} > \ (\text{ha } n>2, \text{ akkor } n^2-7>0)\ >$$
$$> \frac{n^2}{n+10} > \ (\text{ha } n>10)\ > \frac{n^2}{n+n} = \frac{n^2}{2n} = \frac{n}{2}.$$

Így $(\circ)$ helyett azt kapjuk, hogy

$$\frac{2n^2-7}{n+10} > \frac{n}{2} > -P, \quad \text{ha } n>10.$$

Az $\frac{n}{2} > -P$, azaz az $n > -2P$ egyenlőtlenség igaz minden olyan n indexre, amelyre $n > [-2P]$.

A fentieket összefoglalva $(\circ)$, illetve a vele ekvivalens $(\triangle)$ egyenlőtlenségre az adódik, hogy

$$\frac{7-2n^2}{n+10} < P, \quad \text{ha } n>10 \text{ és } n>[-2P].$$

Következésképpen P-hez (például) $n_0 := \max\{10,\ [-2P]\}$ egy jó küszöbindex.

Mivel $P<0$ tetszőleges, ezért a fentiekből következik $(*)$. ∎

A konvergencia, illetve a $(\pm\infty)$-hez tartás fogalmakat egységes formában is megadhatjuk. Ehhez először arra emlékeztetünk, hogy az

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

szimbólummal jelöltük a **kibővített valós számok halmazát**. Most az $\overline{\mathbb{R}}$-beli elemek környezeteit értelmezzük.

2. definíció. *Legyen $A \in \overline{\mathbb{R}}$ és $r>0$ valós szám. Ekkor az A elem r sugarú* ***környezetét*** *így definiáljuk:*

$$K_r(A) := \begin{cases} (A-r, A+r), & \text{ha } A \in \mathbb{R} \\ \left(\frac{1}{r}, +\infty\right), & \text{ha } A = +\infty \\ \left(-\infty, -\frac{1}{r}\right), & \text{ha } A = -\infty. \end{cases}$$

Környezetekkel a $(\pm\infty)$-hez tartás fogalmát így adhatjuk meg:

$$\lim(a_n) = +\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\,\varepsilon > 0\text{-hoz } \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n > n_0 : \quad a_n \in K_\varepsilon(+\infty),$$
$$\lim(a_n) = -\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\,\varepsilon > 0\text{-hoz } \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n > n_0 : \quad a_n \in K_\varepsilon(-\infty).$$

3. definíció. *Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozatnak **van határértéke**, ha*

$$\exists\, A \in \overline{\mathbb{R}},\quad \forall\,\varepsilon > 0\textit{-hoz } \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\quad \forall\, n > n_0 : \quad a_n \in K_\varepsilon(A).$$

Megjegyzés. Szavakkal megfogalmazva azt is mondhatjuk, hogy „az (a_n) sorozatnak van határértéke, ha van olyan $\overline{\mathbb{R}}$-beli A elem, hogy ennek tetszőleges környezete tartalmazza a sorozat minden, alkalmas küszöbindex utáni tagját”. ■

A konvergenciához hasonlóan erre a határérték fogalomra is igaz az egyértelműség.

1. tétel: A határérték egyértelmű. *Ha az $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozatnak van határértéke, akkor a fenti definícióban szereplő $A \in \overline{\mathbb{R}}$ elem egyértelműen létezik; ezt a sorzat **határértékének** nevezzük, és így jelöljük:*

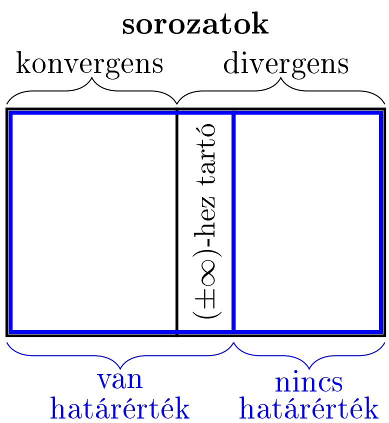
$$\lim(a_n) := A \in \overline{\mathbb{R}}, \quad \lim_{n\to+\infty} a_n := A \in \overline{\mathbb{R}}, \quad a_n \to A \in \overline{\mathbb{R}}, \quad \textit{ha } n \to +\infty.$$

A szóhasználatunkat illetően megállapodunk abban, hogy ha a továbbiakban azt mondjuk, hogy az (a_n) **sorozatnak van határértéke**, akkor ezen a következőt értjük:

- az (a_n) sorozat konvergens, vagyis a határértéke véges,
- vagy $\lim(a_n) = +\infty$,
- vagy $\lim(a_n) = -\infty$.

Megjegyzés. A korábbi megállapodásunk alapján egy (a_n) sorozat vagy **konvergens** vagy **divergens**.

A fentiekben bizonyos divergens sorozatoknak is értelmeztük a határértékét, ezzel a sorozatok konvergens/divergens osztályozását tovább „finomítottuk”. Ezt az osztályozást illusztrálja a következő ábra:



A továbiakban

$$\boxed{\lim (a_n) \in \mathbb{R}}$$

jelöli azt, hogy az (a_n) sorozat **konvergens**, vagyis véges a határértéke, a

$$\boxed{\lim (a_n) \in \overline{\mathbb{R}}}$$

jelölés pedig azt fejezi ki, hogy az (a_n) sorozatnak **van határértéke**, azaz a sorozat vagy konvergens, vagy $+\infty$ vagy pedig $-\infty$ a határértéke. ■

A rendezés és a határérték kapcsolata

2. tétel: A közrefogási elv. *Tegyük fel, hogy az (a_n), (b_n) és (c_n) sorozatokra teljesülnek a következők:*

- $\exists\, N \in \mathbb{N}$, *hogy* $\forall\, n > N: \ a_n \le b_n \le c_n$,
- *az (a_n) és a (c_n) sorozatnak van határértéke, továbbá*

$$\lim (a_n) = \lim (c_n) = A \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ekkor a (b_n) sorozatnak is van határértéke és $\lim (b_n) = A$.

Bizonyítás. Három eset lehetséges.

1. eset: $A \in \mathbb{R}$. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges valós szám. Ekkor $\lim (a_n) = \lim (c_n) = A \Longrightarrow$

$\exists\, n_1 \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\, n > n_1: \ A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$ és

$\exists\, n_2 \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\, n > n_2: \ A - \varepsilon < c_n < A + \varepsilon$.

Legyen $n_0 := \max \{N, n_1, n_2\}$. Ekkor $\forall\, n > n_0$ indexre

$$A - \varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < A + \varepsilon.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$|b_n - A| < \varepsilon, \ \text{ha } n > n_0,$$

azaz a (b_n) sorozatnak is van határértéke és $\lim (b_n) = A$.

2. eset: $A = +\infty$. Tegyük fel, hogy $P > 0$ tetszőleges valós szám. Ekkor $\lim (a_n) = +\infty \Longrightarrow$

$\exists\, n_1 \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\, n > n_1: \ a_n > P$.

Legyen $n_0 := \max \{N, n_1\}$. Ekkor $\forall\, n > n_0$ indexre

$$P < a_n \le b_n,$$

és ez azt jelenti, hogy $\lim (b_n) = +\infty$.

3. eset: $A = -\infty$. Tegyük fel, hogy $P < 0$ tetszőleges valós szám és tekintsük most a (c_n) sorozatot. Mivel $\lim (c_n) = -\infty$, ezért P-hez

$\exists\, n_1 \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\, n > n_1: \ c_n < P$.

Ha $n_0 := \max\{N, n_1\}$, akkor $\forall\, n > n_0$ indexre

$$P > c_n \geq b_n.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy $\lim(b_n) = -\infty$. ■

A következő tételek azt állítják, hogy a határértékek közötti nagyságrendi kapcsolatok öröklődnek a sorozatok elég nagy indexű tagjaira. Sőt, bizonyos értelemben „fordítva”: a tagok nagyságrendi kapcsolataiból következtethetünk a határértékek közötti nagyságrendi viszonyokra.

3. tétel. *Tegyük fel, hogy az (a_n) és a (b_n) sorozatnak van határértéke és*

$$\lim(a_n) = A \in \overline{\mathbb{R}}, \quad \lim(b_n) = B \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ekkor:

1^o *Ha* $A < B \quad \Longrightarrow \quad \exists\, N \in \mathbb{N},$ *hogy* $\forall\, n > N: \ a_n < b_n.$

2^o *Ha* $\exists\, N \in \mathbb{N},$ *hogy* $\forall\, n > N: \ a_n \leq b_n \quad \Longrightarrow \quad A \leq B.$

Bizonyítás.

1^o Négy eset lehetséges.

1. eset: $A, B \in \mathbb{R}$ és $A < B$, vagyis (a_n) és (b_n) konvergens sorozatok. Ekkor az

$$\varepsilon := \frac{B - A}{2} > 0$$

számhoz $\lim(a_n) = A$ miatt

$$\exists\, n_1 \in \mathbb{N}, \text{ hogy } \forall\, n > n_1: \ A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon = \frac{A+B}{2},$$

továbbá $\lim(b_n) = B$ szerint

$$\exists\, n_2 \in \mathbb{N}, \text{ hogy } \forall\, n > n_2: \ B - \varepsilon = \frac{A+B}{2} < b_n < B + \varepsilon.$$

Így az $N := \max\{n_1, n_2\}$ küszöbindexszel azt kapjuk, hogy

$$a_n < \frac{A+B}{2} < b_n \quad \forall\, n > N \text{ indexre},$$

és ez az állítás bizonyításását jelenti.

2. eset: $A \in \mathbb{R}$ és $B = +\infty$. Mivel az (a_n) sorozat konvergens és $\lim(a_n) = A$, ezért $\varepsilon := 1$-hez $\exists\, n_1 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > n_1$ indexre

$$A - 1 < a_n < A + 1.$$

A $\lim(b_n) = +\infty$ feltételből pedig az következik, hogy az $A+1$ számhoz $\exists\, n_2 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > n_2$ indexre

$$A + 1 < b_n.$$

Így $\forall n > N := \max\{n_1, n_2\}$ index esetén az

$$a_n < A + 1 < b_n$$

egyenlőtlenség teljesül.

3. eset: $A = -\infty$ és $B \in \mathbb{R}$ bizonyítása hasonló.

4. eset: $A = -\infty$ és $B = +\infty$ bizonyítása is hasonló.

$\mathbf{2^o}$ Indirekt módon bizonyítunk. Tegyük fel, hogy $A > B$. Ekkor az $\mathbf{1^o}$ állítás szerint $\exists N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ indexre $b_n < a_n$, ami ellentmond a feltételnek. ■

Megjegyzés. Figyeljük meg, hogy $\mathbf{1^o}$ és $\mathbf{2^o}$ „majdnem" egymás megfordításai.

Az $\mathbf{1^o}$ állítás megfordítása nem igaz, azaz az $a_n < b_n$ feltételből nem következtethetünk az $A < B$ egyenlőtlenségre. Tekintsük például az $a_n := -1/n$ és a $b_n := 1/n$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ sorozatokat.

A $\mathbf{2^o}$ állítás megfordítása sem igaz. Legyen például $a_n := 1/n$ és $b_n := -1/n$ $(n \in \mathbb{N}^+)$. ■

Műveletek konvergens sorozatokkal

Nullasorozatok

A sorozatok konvergencia-tulajdonságainak vizsgálatánál kiemelt szerepet játszanak a nullasorozatok.

4. definíció. *Az (a_n) sorozatot **nullasorozatnak** nevezzük, ha konvergens és $\lim(a_n) = 0$, azaz*

$$\forall \varepsilon > 0\text{-}hoz \ \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n > n_0 : \quad |a_n - 0| = |a_n| < \varepsilon.$$

4. tétel: Nullasorozatok alaptulajdonságai.

$\mathbf{1^o}$ (a_n) *nullasorozat* $\iff$ $\big(|a_n|\big)$ *nullasorozat.*

$\mathbf{2^o}$ (a_n) *konvergens és* $\lim(a_n) = A$ $\iff$ $\big(a_n - A\big)$ *nullasorozat.*

$\mathbf{3^o}$ ***Majoráns kritérium.*** *Ha* (a_n) *nullasorozat és* $|c_n| \le |a_n|$ *(m.m* $n \in \mathbb{N}$*), akkor* (c_n) *is nullasorozat.*

Bizonyítás.

$\mathbf{1^o}$ $\lim(a_n) = 0 \iff \forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $\forall n > n_0 :$ $|a_n| < \varepsilon$, azaz $\big||a_n| - 0\big| < \varepsilon$, és ez azt jelenti, hogy $\lim\big(|a_n|\big) = 0$.

$\mathbf{2^o}$ $\lim(a_n) = A \iff \forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $\forall n > n_0 :$ $|a_n - A| < \varepsilon$, azaz $\big|(a_n - A) - 0\big| < \varepsilon$, tehát $\lim(a_n - A) = 0$.

$\mathbf{3^o}$ $\lim(a_n) = 0 \implies \forall \varepsilon > 0$ mellett egy alkalmas $n_1 \in \mathbb{N}$ küszöbindexszel

$$|a_n| < \varepsilon \quad \forall n > n_1 \text{ indexre.}$$

Ugyanakkor a $|c_n| \leq |a_n|$ (m.m. $n \in \mathbb{N}$) „majoráns feltétel” miatt van olyan $n_2 \in \mathbb{N}$, amellyel

$$|c_n| \leq |a_n| \quad \forall\, n > n_2 \text{ indexre.}$$

Ha tehát $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$, akkor

$$|c_n| \leq |a_n| < \varepsilon \quad \forall\, n > n_0 \text{ indexre,}$$

ami azt jelenti, hogy $\lim (c_n) = 0$. ■

5. tétel: Műveletek nullasorozatokkal. *Tegyük fel, hogy* $\lim (a_n) = 0$ *és* $\lim (b_n) = 0$. *Ekkor*

1° $(a_n + b_n)$ *is nullasorozat;*

2° *ha* (c_n) *korlátos sorozat, akkor* $(c_n \cdot a_n)$ *is nullasorozat;*

3° $(a_n \cdot b_n)$ *is nullasorozat.*

Bizonyítás.

1° Mivel $\lim (a_n) = \lim (b_n) = 0$, ezért

$$\forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists\, n_1 \in \mathbb{N}, \text{ hogy } \forall\, n > n_1 : \ |a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{és}$$
$$\forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists\, n_2 \in \mathbb{N}, \text{ hogy } \forall\, n > n_2 : \ |b_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Legyen $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$. Ekkor $\forall\, n > n_0$ indexre

$$|a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

és ez azt jelenti, hogy $\lim (a_n + b_n) = 0$, azaz $(a_n + b_n)$ valóban nullasorozat.

2° A (c_n) sorozat korlátos, ezért

$$\exists\, K > 0 : \ |c_n| < K \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Mivel (a_n) nullasorozat, ezért

$$\forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \text{ hogy } \forall\, n > n_0 : \ |a_n| < \frac{\varepsilon}{K},$$

következésképpen minden $n > n_0$ indexre

$$|c_n \cdot a_n| < K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon,$$

azaz $\lim (c_n \cdot a_n) = 0$.

3° Mivel minden konvergens sorozat korlátos, ezért a $\lim (b_n) = 0$ feltételből következik, hogy (b_n) korlátos sorozat. Az állítás tehát **2°** közvetlen következménye. ■

Megjegyzések

1. Világos, hogy nullasorozatok különbsége is nullasorozat.

2. Nullasorozatok **hányadosának** a határértéke (vagyis két „kicsi” szám hányadosa) bármi lehet. Ezt illusztrálják az alábbi példák:

- $\dfrac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^3}} = n \to +\infty, \quad \text{ha } n \to +\infty,$
- $\dfrac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^2}} = \dfrac{1}{n} \to 0, \quad \text{ha } n \to +\infty,$
- $\dfrac{\frac{c}{n}}{\frac{1}{n}} = c \to c, \quad \text{ha } n \to +\infty \quad (\text{itt } c \in \mathbb{R}),$
- $\dfrac{\frac{(-1)^n}{n}}{\frac{1}{n}} = (-1)^n$ sorozat divergens.■

Műveletek konvergens sorozatokkal

A konvergens sorozatok és az algebrai műveletek kapcsolatát fejezi ki a következő tétel. Azt állítja, hogy a konvergens sorozatok a műveletek során a legtöbb esetben jól viselkednek abban az értelemben, hogy a három alapművelet és a határérték képzés sorrendje felcserélhető.

6. tétel. *Tegyük fel, hogy az (a_n) és a (b_n) sorozat konvergens. Legyen*

$$\lim (a_n) = A \in \mathbb{R} \quad \textit{és} \quad \lim (b_n) = B \in \mathbb{R}.$$

Ekkor

1° *$(a_n + b_n)$ is konvergens és $\lim (a_n + b_n) = \lim (a_n) + \lim (b_n) = A + B$,*

2° *$(a_n \cdot b_n)$ is konvergens és $\lim (a_n \cdot b_n) = \lim (a_n) \cdot \lim (b_n) = A \cdot B$,*

3° *ha $b_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N})$ és $\lim (b_n) \neq 0$, akkor*

$$\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \quad \textit{is konvergens} \quad \textit{és} \quad \lim \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim (a_n)}{\lim (b_n)} = \frac{A}{B}.$$

Bizonyítás.

Legyen (x_n) egy valós sorozat. Azt már tudjuk, hogy

$(*)$ ha (x_n) konvergens, és $\alpha \in \mathbb{R}$ a határértéke $\iff$ $(x_n - \alpha)$ nullasorozat.

1° A $(*)$ állítás miatt elég azt megmutatni, hogy

$$\big((a_n + b_n) - (A + B)\big) \quad \text{nullasorozat.}$$

Ez nyilván igaz, mert

$$\big((a_n + b_n) - (A + B)\big) = (a_n - A) + (b_n - B),$$

és két nullasorozat összege is nullasorozat.

2^o A (*) állítás miatt elég azt megmutatni, hogy $\big(a_nb_n - AB\big)$ nullasorozat.

$$|a_nb_n - AB| = |a_nb_n - Ab_n + Ab_n - AB| = |b_n(a_n - A) + A(b_n - B)| \le$$
$$\le \underbrace{\underbrace{\underbrace{|b_n|}_{\text{korlátos}} \cdot \underbrace{|a_n - A|}_{\text{0-sorozat}}}_{\text{0-sorozat}} + \underbrace{\underbrace{|A|}_{\text{korlátos}} \cdot \underbrace{|b_n - B|}_{\text{0-sorozat}}}_{\text{0-sorozat}}}_{\text{0-sorozat}}.$$

Így $\big(a_nb_n - AB\big)$ valóban nullasorozat, ezért az $\big(a_n \cdot b_n\big)$ szorzat-sorozat konvergens, és $A \cdot B$ a határértéke, azaz
$$\lim\big(a_n \cdot b_n\big) = A \cdot B = \lim(a_n) \cdot \lim(b_n).$$

3^o A bizonyításhoz először egy önmagában is érdekes állítást igazolunk.

Segédtétel. *Ha $b_n \ne 0$ $(n \in \mathbb{N})$ és (b_n) konvergens, továbbá $B := \lim(b_n) \ne 0$, akkor az*
$$\left(\frac{1}{|b_n|}\right)$$
reciprok-sorozat korlátos.

Ennek bizonyításához legyen $\varepsilon := |B|/2$. Ekkor egy alkalmas $n_0 \in \mathbb{N}$ küszöbindex mellett
$$|b_n - B| < \varepsilon = \frac{|B|}{2} \quad \forall\, n > n_0 \text{ indexre.}$$

Így minden $n > n_0$ esetén
$$|b_n| = |B + b_n - B| \ge |B| - |b_n - B| > |B| - \frac{|B|}{2} = \frac{|B|}{2}.$$

Tehát
$$\left|\frac{1}{b_n}\right| < \frac{2}{|B|}, \quad \text{ha } n > n_0,$$
következésképpen az
$$\left|\frac{1}{b_n}\right| \le \max\left\{\frac{1}{|b_0|}, \frac{1}{|b_1|}, \ldots, \frac{1}{|b_{n_0}|}, \frac{2}{|B|}\right\}$$
egyenlőtlenség már minden $n \in \mathbb{N}$ számra teljesül, ezért az $\big(1/|b_n|\big)$ sorozat valóban korlátos. A segédtételt tehát bebizonyítottuk. $\square$

Most azt látjuk be, hogy az

$$(\triangle) \qquad \left(\frac{1}{b_n}\right) \text{ sorozat konvergens} \quad \text{és} \quad \lim\left(\frac{1}{b_n}\right) = \frac{1}{B}.$$

Tekintsük a következő átalakításokat:

$$\frac{1}{b_n} - \frac{1}{B} = \frac{B - b_n}{B \cdot b_n} =$$

$$= \underbrace{\underbrace{\frac{1}{B \cdot b_n}}_{\text{korlátos}} \cdot \underbrace{(B - b_n)}_{\text{0-sorzat}}}_{\text{0-sorzat}} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Így (*) szerint a ($\triangle$) állítás valóban igaz.

A $\mathbf{3^o}$ állítás bizonyításának a befejezéséhez már csupán azt kell figyelembe venni, hogy

$$\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

más szóval az (a_n/b_n) „hányados-sorozat" két konvergens sorozat szorzata. Így a $\mathbf{2^o}$ állítás és a reciprok sorozatról az előbb mondottak miatt

$$\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \text{ is konvergens és } \lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{A}{B} = \frac{\lim(a_n)}{\lim(b_n)}.$$

■