Analízis 1 | 2017. 05. 19.

2. zárthelyi dolgozat

Megoldások

① i)
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n+1}{5n+3}\right)^{10n+4}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{2}{5n+3}\right)^{5n+2}\right]^{2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{\frac{5n+3}{2}}\right)^{5n+3}\cdot\left(1-\frac{1}{\frac{5n+3}{2}}\right)^{-1}\right]^{2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{\frac{5n+3}{2}}\right)^{\frac{5n+3}{2}}\right]^{4}\cdot\left(1-\frac{1}{\frac{5n+3}{2}}\right)^{-2}=$$

$$=\left(\frac{1}{e}\right)^{4}\cdot 1^{-2}=\underline{\underline{e^{-4}}}.$$

Ahol: $0<x_n:=\frac{5n+3}{2}\to+\infty$ (ha $n\to\infty$)

és a tanult állítás alapján:

$$\left(1-\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}\to e^{-1}\quad(\text{ha } n\to\infty).$$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\prod\limits_{k=2}^{n} \frac{k^2-1}{k^2}} =$

Legyen $x_n := \prod\limits_{k=2}^{n} \frac{k^2-1}{k^2} = \prod\limits_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} =$

$= \frac{1\cdot\cancel{3}}{2^2}\cdot\frac{\cancel{2}\cdot\cancel{4}}{\cancel{3^2}}\cdot\frac{\cancel{3}\cdot\cancel{5}}{\cancel{4^2}}\cdot\frac{\cancel{4}\cdot\cancel{6}}{\cancel{5^2}}\cdots\frac{\cancel{(n-2)}\cdot\cancel{n}}{\cancel{(n-1)^2}}\cdot\frac{\cancel{(n-1)}(n+1)}{n^{\cancel{2}}} =$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{2n} \longrightarrow \frac{1}{2}$ ha $(n\to+\infty)$.

A tanult tétel értelmében, ha $0 < x_n$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

<u>és</u> $\exists \lim(x_n) = \frac{1}{2} > 0$ (véges) $\Rightarrow$

$\lim\left(\sqrt[n]{x_n}\right) = 1.$

Tehát a keresett határérték $= 1$.

$\boxed{2.}$ $x_0 := \frac{1}{2}$; $x_{n+1} := \frac{3}{2+\frac{1}{x_n}}$ $(n\in\mathbb{N})$.

a) <u>Monotonitás</u>: $x_0 = \frac{1}{2} < x_1 = \frac{3}{2+2} = \frac{3}{4} <$

$< x_2 = \frac{3}{2+\frac{4}{3}} = \frac{9}{10}.$

<u>Sejtés</u> $x_n < x_{n+1}$ $(\forall n\in\mathbb{N})$.

Világos, hogy (ld. indukció)

$$0 < x_n \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Bh. indukcióval: $n = 0, 1$ ✓

Tf., hogy valamely $n \in \mathbb{N}$-re

$$x_n < x_{n+1} \Longrightarrow \frac{1}{x_{n+1}} < \frac{1}{x_n}$$

$+$ miatt

$$\Longrightarrow 2 + \frac{1}{x_{n+1}} < 2 + \frac{1}{x_n} \Longrightarrow$$

$$x_{n+1} = \frac{3}{2 + \frac{1}{x_n}} < \frac{3}{2 + \frac{1}{x_{n+1}}} = x_{n+2} \Longrightarrow$$

$n \to n+1$ ✓ Tehát $\boxed{(x_n) \uparrow} \Longrightarrow$

b) Korlátosság $x_0 = \frac{1}{2} \le x_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$.

Tf., hogy (x_n) konvergens és

$\lim(x_n) = A$ világos, hogy $A \ge \frac{1}{2}$.

A rekurzió alapján:

$$\lim(x_{n+1}) = A$$

$$\| \quad \lim\left(3/\left(2 + \frac{1}{x_n}\right)\right) = \frac{3}{2 + \frac{1}{A}}$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{3}{2+\frac{1}{A}} \Rightarrow A = \frac{3A}{2A+1} \Rightarrow$$

$$(2A+1)A - 3A = 0 \qquad A(2A-2) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{A_1 = 0} \text{ vagy } \boxed{A_2 = 1}$$

Tehát, ha (x_n) konvergens, akkor csak 0 vagy 1 lehet a határértéke.

Mivel $A \geq \frac{1}{2}$ így csak $\boxed{A = 1}$ lehet.

Belátjuk, hogy 1 felső korlát, azaz:

$x_n < 1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$. Ui., teljes ind.

$x_0 = \frac{1}{2} < 1$ ✓; ha $x_n < 1$ ⇒ valamely n-re

$$x_{n+1} = \frac{3}{2+\frac{1}{x_n}} < \frac{3}{2+\frac{1}{1}} = \frac{3}{2+1} = 1$$

$\Rightarrow$ (x_n) ↑ és korlátos $\Rightarrow$

(x_n) konvergens és $\lim(x_n) = 1$.

3. i) $$\sum_{n=1} \frac{1^n+2^n+\dots+2017^n}{n\cdot 2018^n}.$$

GYK:

$$\alpha := \lim \frac{\sqrt[n]{1^n+2^n+\dots+2017^n}}{2018\cdot\sqrt[n]{n}} = \frac{2017}{2018}$$

mi:

$$\begin{array}{ccccc} \sqrt[n]{2017^n} & \le & \sqrt[n]{1^n+\dots+2017^n} & \le & \sqrt[n]{2017\cdot 2017^n} \\ \| & & & & \| \\ 2017 & & & & \underbrace{2017\cdot\sqrt[n]{2017}} \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ 2017 & \leftarrow & \text{ha } (n\to\infty) & \rightarrow & 2017 \end{array}$$

$\Rightarrow$ közrefogási alapján a számláló határértéke 2017.

Kihasználtuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ és

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2017}=1.$

Mivel $\alpha < 1 \overset{\text{GYK.}}{\Longrightarrow}$ a sor

(absz.) konvergens.

ii) $\sum_{n=0} \frac{\sqrt{(2n)!}}{3^{n/2} \cdot (n+2)!}$

$\boxed{HK}$:

$$\beta := \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\sqrt{(2n+2)!}}{3^{(n+1)/2} \cdot (n+3)!}}{\dfrac{\sqrt{(2n)!}}{3^{n/2} \cdot (n+2)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{(2n+1)(2n+2)}}{\sqrt{3} \cdot (n+3)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n} \cdot \sqrt{\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{2}{n}\right)}}{\cancel{n} \cdot \sqrt{3}\left(1+\frac{3}{n}\right)} = \frac{\sqrt{2\cdot 2}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$\Rightarrow \beta = \frac{2}{\sqrt{3}} > 1 \Rightarrow$ a sor divergens.

(4.) $\sum_{n=0} \frac{(1-x)^n}{\sqrt{n^2+1}} = \sum_{n=0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}} \cdot (x-1)^n$

$(x \in \mathbb{R}) \Rightarrow \boxed{a=1}$; ld. C-H tétel

$$R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}\right|}} = \frac{1}{1} = 1$$

itt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt{n^2+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\sqrt[n]{n^2+1}} =$

$$= \sqrt{\lim \sqrt[n]{n^2+1}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{mi}}}{=} 1$$

ha $n \geq 1$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{1} \leq \sqrt[n]{n^2+1} \overset{\downarrow}{\leq} \sqrt[n]{n^2+n^2} = \underbrace{\sqrt[n]{2}\cdot\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}_{\substack{\downarrow \\ 1}}$$

ha $(n \to \infty)$.

Tehát $R = 1$, $a = 1$ $\Longrightarrow$

(1) $\forall x \in \mathbb{R}$: $|x-1| < 1 \iff$
$x \in (0,2)$ a hatv. sor. absz. konv.
$\Longrightarrow$ konv. is.

(2) $\forall x \in \mathbb{R}$: $|x-1| > 1 \iff$
$x \in (-\infty, 0) \cup (2; +\infty)$ a hatv. sor
divergens

(3) $x = 0 \Longrightarrow \sum\limits_{n=0} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ div mi

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} > \frac{1}{\sqrt{n^2}} > 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N}^+)$$

ui $\sum_{n=1} \frac{1}{n}$ div. $\Longrightarrow$ Összehasonlító kérit

$\sum_{n=0} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ sor divergens.

(4) Ha $x=2 \Rightarrow \sum_{n=0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$ konvergens

Leibniz sor mi $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \searrow 0$

lim $(n \to +\infty)$

Tehát $KH\left(\sum_0 \frac{(1-x)^n}{\sqrt{n^2+1}}\right) = (0, 2]$.

(5.) $\frac{5x-2}{(x-2)(3x+2)}$ = fel. parciális törtekre

bontás $= \frac{1}{x-2} + \frac{2}{3x+2} =$

$= \frac{1}{1+\frac{3}{2}x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{2}} =$

$= \frac{1}{1-\left(-\frac{3}{2}x\right)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{2}} =$

$\underset{T}{\overset{(*)}{=}}$

ha $\left|-\frac{3}{2}x\right| < 1$ és $\left|\frac{x}{2}\right| < 1 \iff \begin{cases} |x| < 2 \\ |x| < \frac{2}{3} \end{cases}$ és

$x \in \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \cap (-2, 2) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

$$\overset{(x)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{3}{2}x\right)^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\left(\left(-\frac{3}{2}\right)^n - \frac{1}{2^{n+1}}\right)}_{=: a_n \quad (n \in \mathbb{N})} x^n, \quad \left(|x| < \frac{2}{3}\right)$$

$R := \frac{2}{3}$;