Tétel: A szuprémum elv. *Legyen $H \subset \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy*

(i) $H \neq \emptyset$ *és*

(ii) H *felülről korlátos.*

Ekkor

$$\exists \min\{K \in \mathbb{R} \mid K \text{ felső korlátja } H\text{-nak}\},$$

azaz $\mathbb{R}$ minden nemüres, felülről korlátos részhalmazának felső korlátjai között van legkisebb.

Bizonyítás. Legyen

$$A := H \quad \text{és} \quad B := \{K \in \mathbb{R} \mid K \text{ felső korlátja } H\text{-nak}\}.$$

A feltételek miatt $A \neq \emptyset$ és $B \neq \emptyset$, továbbá

$$\forall a \in A \quad \text{és} \quad \forall K \in B \quad \text{esetén } a \leq K.$$

A teljességi axiómából következik, hogy

$$\exists \xi \in \mathbb{R}: \ a \leq \xi \leq K \quad \forall a \in A \text{ és } \forall K \in B \text{ esetén.}$$

Erre a ξ-re az teljesül, hogy

- ξ felső korlátja H-nak, hiszen $a \leq \xi \quad \forall a \in A$ esetén;
- ξ a legkisebb felső korlát, ui. ha K egy felső korlát (azaz $K \in B$), akkor $K \geq \xi$.

Ez pedig pontosan azt jelenti, hogy ξ a H halmaz legkisebb felső korlátja. ■

A fenti bizonyítás értelemszerű módosításával megkapjuk az előző tételnek az alsó korlátokra vonatkozó párját.

Tétel: A teljes indukció elve. *Tegyük fel, hogy minden n természetes számra adott egy $A(n)$ állítás, és azt tudjuk, hogy*

(i) $A(0)$ *igaz,*

(ii) *ha $A(n)$ igaz, akkor $A(n+1)$ is igaz.*

Ekkor az $A(n)$ állítás minden n természetes számra igaz.

Bizonyítás. Legyen

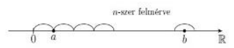
$$S := \{n \in \mathbb{N} \mid A(n) \text{ igaz}\}.$$

Ekkor $S \subset \mathbb{N}$ és S induktív halmaz, hiszen $0 \in S$, és ha $n \in S$, azaz $A(n)$ igaz, akkor $A(n+1)$ is igaz, ezért $n+1 \in S$ teljesül, következésképpen S induktív halmaz. Mivel $\mathbb{N}$ a legszűkebb induktív halmaz, ezért az $\mathbb{N} \subset S$ tartalmazás is fennáll, tehát $S = \mathbb{N}$. Ez pedig azt jelenti, hogy az állítás minden n természetes számra igaz. ■

Tétel: Az arkhimédészi tulajdonság. *Minden $a > 0$ és minden b valós számhoz létezik olyan n természetes szám, hogy $b < n \cdot a$, azaz*

$$\forall a > 0 \text{ és } \forall b \in \mathbb{R} \quad \text{esetén} \quad \exists n \in \mathbb{N}, \text{ hogy } \quad b < n \cdot a.$$

Szemléletesen:



Bizonyítás. Indirekt módon. Tegyük fel, hogy

$$\exists a > 0 \ \text{ és } \ \exists b \in \mathbb{R}, \text{ hogy } \forall n \in \mathbb{N}: \ b \geq n \cdot a.$$

Legyen

$$H := \{n \cdot a \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Ekkor $H \neq \emptyset$ és H felülről korlátos, hiszen $n \cdot a \leq b$ minden $n \in \mathbb{N}$-re. A szuprémum elv $\Longrightarrow$

$$\exists \sup H =: \xi.$$

Ekkor ξ a legkisebb felső korlátja H-nak, tehát $\xi - a$ nem felső korlát. Ez azt jelenti, hogy

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}: \ n_0 \cdot a > \xi - a \quad \Longrightarrow \quad (n_0 + 1) \cdot a > \xi.$$

Ez viszont ellentmondás, mert ξ felső korlát, azaz $(n_0+1) \cdot a \leq \xi$. ■

Következmények:

1^o $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists n \in \mathbb{N}: \ \frac{1}{n} < \varepsilon$.

2^o Az $\mathbb{N}$ halmaz felülről nem korlátos, azaz $\forall b \in \mathbb{R}$ számhoz $\exists n \in \mathbb{N}: \ b < n$.

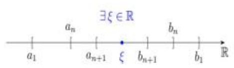
Tétel: A Cantor-tulajdonság. *Ha minden n természetes számra adott az $[a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$ korlátos és zárt intervallum úgy, hogy*

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \quad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset.$$

A Cantor-tulajdonságot úgy szoktuk szavakba foglalni, hogy *egymásba skatulyázott korlátos és zárt intervallumok közös része nem üres.* Ezt szemlélteti az alábbi ábra:



Bizonyítás. A teljességi axiómát fogjuk alkalmazni. Legyen

$$A := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \quad \text{és} \quad B := \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Belátjuk, hogy ekkor

$$(*) \qquad a_n \leq b_m \quad \text{tetszőleges } n, m \in \mathbb{N} \text{ esetén.}$$

Valóban,

(i) ha $n \leq m$, akkor $a_n \leq a_m \leq b_m$,

(ii) ha $m < n$, akkor $a_n \leq b_n \leq b_m$.

Mivel $A \neq \emptyset$ és $B \neq \emptyset$, ezért $(*)$ miatt a teljességi axióma feltételei teljesülnek, így

$$\exists \xi \in \mathbb{R}: \ a_n \leq \xi \leq b_m \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \text{ indexre.}$$

Ha $n = m$, akkor azt kapjuk, hogy

$$a_n \leq \xi \leq b_n \quad \Longleftrightarrow \quad \xi \in [a_n, b_n] \ \ \forall n \in \mathbb{N} \text{ esetén,}$$

és ez azt jelenti, hogy

$$\xi \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset.$$

■

Tétel: A határérték egyértelmű. *Ha az $(a_n): \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat konvergens, akkor a konvergencia definíciójában szereplő A szám egyértelműen létezik.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az (a_n) sorozatra (1) az A_1 és az A_2 számokkal is teljesül. Indirekt módon tegyük fel azt is, hogy $A_1 \neq A_2$. Ekkor $\forall \varepsilon > 0$ számhoz

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \ \forall n > n_1: \ |a_n - A_1| < \varepsilon \ \text{ és}$$
$$\exists n_2 \in \mathbb{N}, \ \forall n > n_2: \ |a_n - A_2| < \varepsilon.$$

Válasszuk itt speciálisan az

$$\varepsilon := \frac{|A_1 - A_2|}{2}$$

(pozitív) számot. Az ennek megfelelő n_1, n_2 indexeket figyelembe véve legyen

$$n_0 := \max\{n_1, n_2\}.$$

Ha $n \in \mathbb{N}$ és $n > n_0$, akkor nyilván $n > n_1$ és $n > n_2$ is fennáll, következésképpen

$$|A_1 - A_2| = \big|(A_1 - a_n) + (a_n - A_1)\big| \leq |a_n - A_1| + |a_n - A_2| < \varepsilon + \varepsilon = |A_1 - A_2|,$$

amiből (a nyilván nem igaz) $|A_1 - A_2| < |A_1 - A_2|$ következne. Ezért csak $A_1 = A_2$ lehet. ■

5. tétel: Műveletek nullasorozatokkal. *Tegyük fel, hogy $\lim(a_n) = 0$ és $\lim(b_n) = 0$. Ekkor*

1^o *$(a_n + b_n)$ is nullasorozat;*

2^o *ha (c_n) korlátos sorozat, akkor $(c_n \cdot a_n)$ is nullasorozat;*

3^o *$(a_n \cdot b_n)$ is nullasorozat.*

Bizonyítás.

1^o Mivel $\lim(a_n) = \lim(b_n) = 0$, ezért

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists n_1 \in \mathbb{N}, \text{ hogy } \forall n > n_1: \ |a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \ \text{ és}$$
$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists n_2 \in \mathbb{N}, \text{ hogy } \forall n > n_2: \ |b_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Legyen $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$. Ekkor $\forall n > n_0$ indexre

$$|a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

és ez azt jelenti, hogy $\lim(a_n + b_n) = 0$, azaz $(a_n + b_n)$ valóban nullasorozat.

2^o A (c_n) sorozat korlátos, ezért

$$\exists K > 0: \ |c_n| < K \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Mivel (a_n) nullasorozat, ezért

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ hogy } \forall n > n_0: \ |a_n| < \frac{\varepsilon}{K},$$

következésképpen minden $n > n_0$ indexre

$$|c_n \cdot a_n| < K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon,$$

azaz $\lim(c_n \cdot a_n) = 0$.

3^o Mivel minden konvergens sorozat korlátos, ezért a $\lim(b_n) = 0$ feltételből következik, hogy (b_n) korlátos sorozat. Az állítás tehát **2^o** közvetlen következménye. ■

6. tétel. *Tegyük fel, hogy az (a_n) és a (b_n) sorozat konvergens. Legyen*

$$\lim(a_n) = A \in \mathbb{R} \quad \text{és} \quad \lim(b_n) = B \in \mathbb{R}.$$

Ekkor **3^o** *ha $b_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N})$ és $\lim(b_n) \neq 0$, akkor*

$$\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \ \text{ is konvergens és } \ \lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim(a_n)}{\lim(b_n)} = \frac{A}{B}.$$

Bizonyítás.

Legyen (x_n) egy valós sorozat. Azt már tudjuk, hogy

$$(*) \qquad \text{ha } (x_n) \text{ konvergens, és } \alpha \in \mathbb{R} \text{ a határértéke} \quad \Longleftrightarrow \quad (x_n - \alpha) \ \text{ nullasorozat.}$$

3^o A bizonyításhoz először egy önmagában is érdekes állítást igazolunk.

Segédtétel. *Ha $b_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N})$ és (b_n) konvergens, továbbá $B := \lim(b_n) \neq 0$, akkor az*

$$\left(\frac{1}{|b_n|}\right)$$

reciprok-sorozat korlátos.

Ennek bizonyításához legyen $\varepsilon := |B|/2$. Ekkor egy alkalmas $n_0 \in \mathbb{N}$ küszöbindex mellett

$$|b_n - B| < \varepsilon = \frac{|B|}{2} \quad \forall n > n_0 \text{ indexre.}$$

Így minden $n > n_0$ esetén

$$|b_n| = |B + b_n - B| \geq |B| - |b_n - B| > |B| - \frac{|B|}{2} = \frac{|B|}{2}.$$

Tehát

$$\left|\frac{1}{b_n}\right| < \frac{2}{|B|}, \quad \text{ha } n > n_0,$$

következésképpen az

$$\left|\frac{1}{b_n}\right| \leq \max\left\{\frac{1}{|b_0|}, \frac{1}{|b_1|}, \ldots, \frac{1}{|b_{n_0}|}, \frac{2}{|B|}\right\}$$

egyenlőtlenség már minden $n \in \mathbb{N}$ számra teljesül, ezért az $\big(1/|b_n|\big)$ sorozat valóban korlátos. A segédtételt tehát bebizonyítottuk. □

Most azt látjuk be, hogy az

$$(\triangle) \qquad \left(\frac{1}{b_n}\right) \ \text{ sorozat konvergens és } \ \lim\left(\frac{1}{b_n}\right) = \frac{1}{B}.$$

3. tétel. *Tegyük fel, hogy az (a_n) és a (b_n) sorozatnak van határértéke és*

$$\lim(a_n) = A \in \overline{\mathbb{R}}, \quad \lim(b_n) = B \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ekkor:

1^o *Ha $A < B \quad \Longrightarrow \quad \exists N \in \mathbb{N}$, hogy $\forall n > N: \ a_n < b_n$.*

2^o *Ha $\exists N \in \mathbb{N}$, hogy $\forall n > N: \ a_n \leq b_n \quad \Longrightarrow \quad A \leq B$.*

Bizonyítás.

1^o Négy eset lehetséges.

1. eset: $A, B \in \mathbb{R}$ és $A < B$, vagyis (a_n) és (b_n) konvergens sorozatok. Ekkor az

$$\varepsilon := \frac{B - A}{2} > 0$$

számhoz $\lim(a_n) = A$ miatt

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \text{ hogy } \forall n > n_1: \ A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon = \frac{A+B}{2},$$

továbbá $\lim(b_n) = B$ szerint

$$\exists n_2 \in \mathbb{N}, \text{ hogy } \forall n > n_2: \ B - \varepsilon = \frac{A+B}{2} < b_n < B + \varepsilon.$$

Így az $N := \max\{n_1, n_2\}$ köszöbindexszel azt kapjuk, hogy

$$a_n < \frac{A+B}{2} < b_n \ \ \forall n > N \text{ indexre,}$$

és ez az állítás bizonyításását jelenti.

2. eset: $A \in \mathbb{R}$ és $B = +\infty$. Mivel az (a_n) sorozat konvergens és $\lim(a_n) = A$, ezért $\varepsilon := 1$-hez $\exists n_1 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > n_1$ indexre

$$A - 1 < a_n < A + 1.$$

A $\lim(b_n) = +\infty$ feltételből pedig az következik, hogy az $A+1$ számhoz $\exists n_2 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > n_2$ indexre

$$A + 1 < b_n.$$

Így $\forall n > N := \max\{n_1, n_2\}$ index esetén az

$$a_n < A + 1 < b_n$$

egyenlőtlenség teljesül.

3. eset: $A = -\infty$ és $B \in \mathbb{R}$ bizonyítása hasonló.

4. eset: $A = -\infty$ és $B = +\infty$ bizonyítása is hasonló.

2^o Indirekt módon bizonyítunk. Tegyük fel, hogy $A > B$. Ekkor az **1^o** állítás szerint $\exists N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ indexre $b_n < a_n$, ami ellentmond a feltételnek. ■

Megjegyzés. Figyeljük meg, hogy **1^o** és **2^o** „majdnem" egymás megfordításai.

Az **1^o** állítás megfordítása nem igaz, azaz az $a_n < b_n$ feltételből nem következtethetünk az $A < B$ egyenlőtlenségre. Tekintsük például az $a_n := -1/n$ és a $b_n := 1/n$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ sorozatokat.

A **2^o** állítás megfordítása sem igaz. Legyen például $a_n := 1/n$ és $b_n := -1/n$ $(n \in \mathbb{N}^+)$. ■