Analízis 1.
Programtervező informatikus szak

Vizsga: definíciók és tételek

2021-2022. tanév 2. félév

Gerber Lóránt Viktor   Petrányi Bálint

2022. május 26.

1. Mit mond ki a Dedekind-féle axióma?

Tegyük fel, hogy az $A, B \in \mathbb{R}$ halmazokra a következők teljesülnek:

- $A \neq \emptyset$ és $B \neq \emptyset$
- minden $a \in A$ és minden $b \in B$ elemre $a \leq b$.

Ekkor

$$\exists \xi \in \mathbb{R} : \ \forall a \in A \text{ és } b \in B \text{ esetén a } \ \leq \xi \leq b.$$

2. Mondja ki a tétel formájában a teljes indukció elvét.

Tegyük fel, hogy minden n természetes számra adott egy $A(n)$ állítás, és azt tudjuk, hogy

1. $A(0)$ igaz,
2. ha $A(n)$ igaz, akkor $A(n+1)$ is igaz.

Ekkor az $A(n)$ állítás minden n természetes számra igaz

3. Mikor nevez egy $A \subset \mathbb{R}$ halmazt felűről korlátosnak?

Ha $\exists K \in \mathbb{R}$, hogy $\forall x \in A$ esetén $x \leq K$.
ALT: Ha van olyan valós K szám aminél minden az A halmazban levő szám kisebb.

4. Mit jelent az, hogy egy $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ halmaz felűről nem korlátos.

Ha $\forall K \in \mathbb{R}$, hogy $\exists x \in A$ esetén $x > K$.
ALT: A szuprémuma plusz végtelen azaz $\sup A := +\infty$.

5. Mikor nevez egy $A \subset \mathbb{R}$ halmazt alulról korlátosnak

Ha $\exists k \in \mathbb{R}$, hogy $\forall x \in A$ esetén $k \leq x$.
ALT: Ha van olyan valós k szám aminél minden az A halmazban lévő szám nagyobb.

6. Mit jelent az, hogy egy $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ halmaz alulról nem korlátos.

Ha $\forall k \in \mathbb{R}$, hogy $\exists x \in A$ esetén $k > x$.
ALT: Az infimuma mínusz végtelen azaz $\inf A := -\infty$

7. Fogalmazza meg egyenlőtlenségekkel azt a tényt, hogy egy $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ halmaz korlátos.

$\exists K \in \mathbb{R}$, hogy $\forall x \in A$ esetén $|x| \leq K$

8. Fogalmazza meg a szuprémum elvet.

Legyen $H \subset \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy

1. $H \neq \emptyset$ és
2. H felűről korlátos.

Ekkor
$$\exists \min\{K \in \mathbb{R} \mid K \text{ felső korlátja } H\text{-nak}\},$$
azaz $\mathbb{R}$ minden nemüres, felülről korlátos részhalmazának felső korlátjai között van legkisebb.

9. Mi a szuprémum definíciója.

A felülről korlátos $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ számhalmaz legkisebb felső korlátját H **szuprémumának nevezzük**, és a $\sup H$ szimbólummal jelöljük.
ALT: $\sup H := \min\{K \in \mathbb{R} \mid K \text{ felső korlátja } H\text{-nak}\}$.

10. Fogalmazza meg egyenlőtlenségekkel azt a tényt, hogy $\xi = \sup H \in \mathbb{R}$.

$$\xi = \sup H \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in H: \ x \leq \xi; \\ \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists x \in H: \ \xi - \varepsilon < x \end{array} \right\}$$

11. Mi az infimum definíciója.

Az alulról korlátos $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ számhalmaz legnagyobb alsó korlátját H **infimumnak nevezzük**, és a $\inf H$ szimbólummal jelöljük.
ALT: $\inf H := \max\{k \in \mathbb{R} \mid k \text{ alsó korlátja } H\text{-nak}\}$.

12. Fogalmazza meg egyenlőtlenségekkel azt a tényt, hogy $\xi = \inf H \in \mathbb{R}$.

$$\xi = \inf H \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in H: \ \xi \leq x; \\ \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists x \in H: \ x < \xi + \varepsilon \end{array} \right\}$$

13. Írja le Archimedes-tételét.

Minden $a > 0$ és minden b valós számhoz létezik olyan n természetes szám, hogy $b < n \cdot a$ azaz

$$\forall a > 0 \text{ és } \forall b \in \mathbb{R} \text{ esetén } \exists n \in \mathbb{N}, \text{ hogy } b < n \cdot a$$

14. Mit állít a Cantor-féle közösrész-tétel?

Tegyük fel, hogy $\forall n \in \mathbb{N}$ természetes számra adott az $[a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$ korlátos és zárt intervallum úgy, hogy

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor

$$\bigcap_{n=0}^{+\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset$$

15. Hogyan értelmezi a függvényt?

Legyen A és B tetszőleges nem üres halmaz. A $\emptyset \neq f \subset A \times B$ relációt **függvénynek** nevezzük, ha $\forall x \in D_f$ esetén $\exists! \ y \in R_f : (x, y) \in f$

Az y elemet az f függvény x helyen felvett **helyettesítési értékének** nevezzük és az $f(x)$ szimbólummal jelöljük. Ekkor azt is mondjuk, hogy az f függvény x-hez az $f(x)$ függvény-értéket rendeli.

16. Mit jelent az $f \in A \to B$ szimbólum?

Az $A \neq \emptyset$ és $B \neq \emptyset$ halmaz esetén az $f \in A \to B$ szimbólum egy olyan függvényt jelent, amelyre $D_f \subset A$ és $R_f \subset B$.
Alt: $f \subset A \times B$ függvény és $D_f \subset A$.

17. Mit jelent az $f : A \to B$ szimbólum?

Az $A \neq \emptyset$ és $B \neq \emptyset$ halmaz esetén az $f \in A \to B$ szimbólum egy olyan függvényt jelent, amelyre $D_f = A$ és $R_f \subset B$.
Alt: $f \subset A \times B$ függvény és $D_f = A$.

18. Definiálja a halmaznak függvény által létesített képét.

Legyen $f : A \to B$ egy adott függvény és $C \subset A$. Ekkor a C halmaz f által létesített **képén** az

$$f[C] := \{f(x) \mid x \in C\} = \{y \in B \mid \exists x \in C : \; y = f(x)\} \subset B$$

halmazt értjük. Megállapodunk abban, hogy $f[\emptyset] = \emptyset$

19. Definiálja a halmaznak függvény által létesített ősképét.

Legyen $f : A \to B$ egy adott függvény és $D \subset A$. Ekkor a D halmaz f által létesített **ősképén** az

$$f^{-1}[D] := \{x \in D_f \mid f(x) \in D\} \subset A$$

halmazt értjük. Megállapodunk abban, hogy $f^{-1}[\emptyset] = \emptyset$

20. Mikor nevez egy függvényt invertálhatónak (vagy injektívnek)?

Ha a D_f értelmezési tartomány bármely két különböző pontjában a képe különböző azaz

$$\forall x, t \in D_f, x \neq t \to f(x) \neq f(t).$$

21. Definiálja az inverzfüggvényt.

Legyen $f : A \to B$ invertálható függvény. f inverz függvénye az

$$f^{-1} : R_f \ni y \mapsto x, \text{ amelyre } f(x) = y$$

függvény.

22. Mi a definíciója az összetett függvénynek?

Legyen $f : A \to B, \; g : C \to D$ és tegyük fel hogy $R_g \cap D_f \neq \emptyset$, azaz

$$\{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \neq \emptyset$$

Ekkor f és g összetett fügyvények az

$$f \circ g : \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \to B, \; (f \circ g)(x) := f(g(x)).$$

függvény.

23. Mi a definíciója a sorozatnak?

Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ függvényt sorozatnak nevezzük. Az

$$a(n) =: a_n \ (n \in \mathbb{N})$$

helyettesítési érték a sorozat n-edik (vagy n-indexű) tagja, a tag sorszámát jelző szám a tag indexe.

24. Mit ért azon, hogy egy valós sorozat felülről korlátos?

$\exists K \in \mathbb{R}$, hogy $\forall n \in \mathbb{N}$ indexre $a_n \leq K$

25. Pozitív állítás formájában fogalmazza meg azt, hogy egy valós sorozat felülről nem korlátos?

$\forall K \in \mathbb{R}$, hogy $\exists n \in \mathbb{N}$ indexre $a_n > K$

26. Mit ért azon, hogy egy valós sorozat alulról korlátos?

$\exists k \in \mathbb{R}$, hogy $\forall n \in \mathbb{N}$ indexre $k \leq a_n$

27. Pozitív állítás formájában fogalmazza meg azt, hogy egy valós sorozat alulról nem korlátos?

$\forall k \in \mathbb{R}$, hogy $\exists n \in \mathbb{N}$ indexre $k > a_n$

28. Fogalmazza meg egyenlőtlenségekkel azt a tényt, hogy egy valós számsorozat korlátos?

$\exists K \in \mathbb{R}^+$, hogy $\forall n \in \mathbb{N}$ $|a_n| \leq K$

29. Mikor mondja azt, hogy egy valós sorozat monoton növő?

Ha $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \leq a_{n+1}$

30. Mikor mondja azt, hogy egy valós sorozat szigorúan monoton növő?

Ha $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n < a_{n+1}$

31. Mikor mondja azt, hogy egy valós sorozat monoton fogyó?

Ha $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_{n+1} \leq a_n$

32. Mikor mondja azt, hogy egy valós sorozat szigorúan monoton fogyó?

Ha $\forall n \in \mathbb{N}\ a_{n+1} < a_n$

33. Mit ért azon hogy indexsorozat?

$v = (v_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ egy szigorúan monoton növekvő sorozat.

34. Hogyan definiálja egy sorozat részsorozatát?

Legyen $a = (a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ egy valós sorozat és $v = (v_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ egy szigorúan monoton növekvő sorozat. Ekkor az $a \circ v$ függvény is sorozat, amelyet az a sorozat v indexsorozat által meghatározott **részsorozatának** nevezünk. Az $a \circ v$ sorozatnak az n-edik tagja:

$$(a \circ v)(n) = a(v_n) = a_{v_n}\ (n \in \mathbb{N}) \text{ így}$$
$$a \circ v = a_{v_n}.$$

35. Milyen tételt tud mondani valós sorozatok és monoton sorozatok viszonyáról?

Minden $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ valós sorozatnak van monoton részsorozata, azaz létezik olyan v indexsorozat amellyel az $a \circ v$ sorozat monoton növő, vagy monoton csökkenő.

36. Mit értettünk egy valós sorozat csúcsán?

a_{n_0} az $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat csúcsa, ha $\forall n \geq n_0$ esetén $a_{n_0} \geq a_n$

37. Mit ért azon, hogy egy számsorozat konvergens?

Ha $\exists A \in \mathbb{R}$ hogy $\forall \varepsilon > 0$ számhoz $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $\forall n > n_0$ indexre $|a_n - A| < \varepsilon$.

38. Mit ért azon, hogy egy számsorozat divergens?

Egy sorozatot divergensnek nevezünk ha nem konvergens.
ALT: Ha $\forall A \in \mathbb{R}$ hogy $\exists \varepsilon \leq 0$ számhoz $\forall n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $\exists n > n_0$ indexre $|a_n - A| \geq \varepsilon$.

39. Pozitív állítás formájában fogalmazza meg azt, hogy egy számsorozat divergens.

Ha $\forall A \in \mathbb{R}$ hogy $\exists \varepsilon \leq 0$ számhoz $\forall n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $\exists n > n_0$ indexre $|a_n - A| \geq \varepsilon$.

40. Milyen állítást ismer sorozatok esetén a konvergencia és a korlátosság kapcsolatáról?

Ha az $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat konvergens, akkor korlátos is.

41. Mit tud mondani konvergens sorozatok részsorozatairól?

Ha az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat konvergens, akkor tetszőleges v indexsorozat esetén az $a \circ v$ részsorozat is konvergens és $\lim(a \circ v) = \lim a$

42. Mit tud mondani nullsorozatok őszegéről?

Ha (a_n) és (b_n) nullsorozat, akkor $(a_n + b_n)$ is nullsorozat.

43. Mit tud mondani korlátos sorozatok és nullsorozatok szorzatáról?

Ha (a_n) nullsorozat és (c_n) korlátos sorozat akkor $(a_n c_n)$ nullsorozat.

44. Mit tud mondani nullsorozatok szorzatáról?

Ha (a_n) és (b_n) nullsorozat, akkor $(a_n b_n)$ is nullsorozat.

45. Mondjon példát olyan $(a_n), (b_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozatokra amelyekre $\lim(a_n) = \lim(b_n) = 0$ és $\lim(a_n/b_n) = 7$.

$$a_n = \frac{7}{n} \text{ és } b_n = \frac{1}{n} \text{ azaz } \frac{\frac{7}{n}}{\frac{1}{n}} = 7 \to 7 \text{ ha } n \to +\infty.$$

46. Mondjon példát olyan $(a_n), (b_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozatokra amelyekre $\lim(a_n) = \lim(b_n) = 0$ és $\lim(a_n/b_n) = +\infty$.

$$a_n = \frac{1}{n^2} \text{ és } b_n = \frac{1}{n^3} \text{ azaz } \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^3}} = n \to +\infty \text{ ha } n \to +\infty.$$

47. Mondjon példát olyan $(a_n), (b_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozatokra amelyekre $\lim(a_n) = \lim(b_n) = 0$ és $\lim(a_n/b_n)$ határérték nem létezik.

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n} \text{ és } b_n = \frac{1}{n} \text{ azaz } \frac{\frac{(-1)^n}{n}}{\frac{1}{n}} = (-1)^n \text{ sorozat divergens ha } n \to +\infty.$$

48. Milyen állítást ismer konvergens sorozatok őszegéről?

Ha (a_n) és (b_n) konvergens és Ha (a_n) és (b_n) konvergens és

$$\lim(a_n) =: A \in \mathbb{R}, \quad \lim(b_n) =: B \in \mathbb{R}$$

akkor: az $(a_n + b_n)$ is konvergens és $\lim(a_n + b_n) = A + B$.

49. Milyen állítást ismer konvergens sorozatok szorzatáról?

Ha (a_n) és (b_n) konvergens és

$$\lim(a_n) =: A \in \mathbb{R}, \quad \lim(b_n) =: B \in \mathbb{R}$$

akkor: az $(a_n \cdot b_n)$ is konvergens és $\lim(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$.

50. Milyen állítást ismer konvergens sorozatok hányadosáról?

Ha (a_n) és (b_n) konvergens és

$$\lim(a_n) =: A \in \mathbb{R}, \quad \lim(b_n) =: B \in \mathbb{R}$$

és ha

$$b_n \neq 0 \ (n \in \mathbb{N}) \text{ és } \lim(b_n) \neq 0$$

akkor: az

$$\frac{a_n}{b_n} \text{ is konvergens és } \lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{A}{B}.$$

51. Fogalmazza meg a közrefogási elvet.

Tegyük fel hogy az (a_n), (b_n) és (c_n) sorozatokra teljesülnek a következők:

- $\exists N \in \mathbb{N}$ hogy $\forall n > N : a_n \leq b_n \leq c_n$,
- az (a_n) és a (c_n) sorozatoknak van határértéke, továbbá

$$\lim(a_n) \ = \lim(c_n) = A \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ekkor a (b_n) sorozatnak is van határértéke és $\lim(b_n) = A$

52. Mi a kapcsolat sorozatok konvergenciája, ill. határértéke és a kisebb-nagyobb reláció között?

Tegyük fel, hogy az (a_n), $(b_n) \to \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozatok konvergensek. Ekkor:

1. ha $a_n \leq b_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$, akkor $\lim(a_n) \leq \lim(b_n)$
2. ha $lim(a_n) < \lim(b_n)$, akkor $a_n < b_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

53. Igaz-e az, hogy ha az (a_n) és a (b_n) sorozatoknak van határértéke és $a_n > b_n$ minden n-re, akkor $\lim(a_n) > \lim(b_n)$?

Nem, például $a_n := \frac{1}{n}$, $b_n := 0$ esetén $a_n > b_n$ $(n = 1, 2, ...)$, de $\lim(a_n) = \lim(b_n) = 0$.

54. Mit jelent az, hogy egy valós számsorozatnak $+\infty$ a határértéke?

Azt mondjuk hogy egy sorozatnak $+\infty$ a határértéke ha

$$\forall P > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0 : \ a_n > P$$

55. Mit jelent az, hogy egy valós számsorozatnak $-\infty$ a határértéke?

Azt mondjuk hogy egy sorozatnak $-\infty$ a határértéke ha

$$\forall P < 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0 : \ a_n < P$$

56. Környezetekkel fogalmazza meg azt, hogy az $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozatnak (tágabb értelemben) van határértéke.

$$\forall A \in \overline{\mathbb{R}}, \ \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \forall n > n_0 : \ q_n \in K_\varepsilon(A).$$

57. Milyen állítást tud mondani (tágabb értelemben) határértékkel bíró sorozatok összegéről?

Tegyük fel, hogy az (a_n) és a (b_n) sorozatoknak van határértéke, és

$$\lim(a_n) =: A \in \overline{\mathbb{R}}, \quad \lim(b_n) =: B \in \overline{\mathbb{R}}$$

Ekkor az $(a_n + b_n)$ szorzatnak is van határértéke, és $\lim(a_n + b_n) = A + B$, feltéve hogy $A + B$ értelmezve van.

58. Milyen állítást tud mondani (tágabb értelemben) határértékkel bíró sorozatok szorzatáról?

Tegyük fel, hogy az (a_n) és a (b_n) sorozatoknak van határértéke, és

$$\lim(a_n) =: A \in \overline{\mathbb{R}}, \quad \lim(b_n) =: B \in \overline{\mathbb{R}}$$

Ekkor az $(a_n b_n)$ szorzatnak is van határértéke, és $\lim(a_n b_n) = AB$, feltéve hogy AB értelmezve van.

59. Milyen állítást tud mondani (tágabb értelemben) határértékkel bíró sorozatok hányadosáról?

Tegyük fel, hogy az (a_n) és a $(b_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sorozatoknak van határértéke, és

$$\lim(a_n) =: A \in \overline{\mathbb{R}}, \quad \lim(b_n) =: B \in \overline{\mathbb{R}}$$

Ekkor az (a_n/b_n) szorzatnak is van határértéke, és $\lim(a_n/b_n) = A/B$, feltéve hogy A/B értelmezve van.

60. Milyen tételt ismer monoton sorozatok határértékével kapcsolatban?

Minden (a_n) monoton sorozatnak van határértéke.

1. Ha monoton növekvő és felülről korlátos, akkor konvergens, és $\lim(a_n) = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$
2. Ha monoton növekvő, és felülről nem korlátos, akkor $\lim(a_n) = +\infty$
3. Ha monoton csökkenő és alulról korlátos, akkor konvergens és $\lim(a_n) = \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$
4. Ha monoton csökkenő és alulról nem korlátos, akkor $\lim(a_n) = -\infty$

61. Legyen $q \in \mathbb{R}$. Mit tud mondani a (q^n) sorozatról határérték szempontjából?

$$\lim_{n\to+\infty} q^n \begin{cases} = 0, & \text{ha} \quad |q| < 1 \\ = 1, & \text{ha} \quad q = 1 \\ = +\infty, & \text{ha} \quad q > 1 \\ \text{nem létezik}, & \text{ha} \quad q \leq -1 \end{cases}$$

62. Fogalmazza meg valós szám m-edik gyökének a létezésére vonatkozó tételt. Adja meg az e számot definiáló sorozatot.

Legyen $A > 0$ valós szám és $m \geq 2$ természetes szám. Ekkor:

1. Pontosan egy olyan α pozitív valós szám létezik amelyre $\alpha^m = A$
2. ez az α szám az

$$\begin{cases} a_0 > 0 \text{tetszőleges valós,} \\ a_{n+1} := \frac{1}{m}\left(\frac{A}{a_n^{m-1}} + (m-1)a_n\right) \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

rekurzióval értelmezett (a_n) sorozat határértéke, azaz $\lim(a_n) = \alpha = \sqrt[m]{A}$

$$e^x = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

63. Hogyan szol a Bolzano-Weierstrass-féle kiválasztási tétel?

Minden, korlátos valós sorozatnak van konvergens részsorozata.

64. Mikor nevez egy sorozatot Cauchy-sorozatnak?

Ha $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall m, n > n_0$ indexre $|a_n - a_m| < \varepsilon$

65. Mi a kapcsolat a konvergens sorozatok és a Cauchy-sorozatok között?

Legyen (a_n) egy valós sorozat. Ekkor:

$$(a_n) \text{ konvergens} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (a_n) \text{ Cauchy-sorozat}$$

66. Mi a végtelen sor definíciója?

Az $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozatból képzett

$$s_n := a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat az (a_n) által generált végtelen sor, jelölése:

$$\sum a_n$$

67. Mit jelent az, hogy a $\sum a_n$ végtelen sor *konvergens*, és hogyan értelmezzük az *összegét*?

$\sum a_n$ sor konvergens, ha részletösszegeinek a sorozata konvergens, vagyis a $\lim_{x \to +\infty} s_n$ határérték véges.
Ha ez teljesül, akkor ez a határérték az $\sum a_n$ végtelen sor összege, jelölése:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n := \lim_{n \to +\infty} s_n$$

68. Milyen tételt ismer $q \in \mathbb{R}$ esetén a $\sum\limits_{n=0} q^n$ *geometriai sor* konvergenciájáról?

A (q^n) sorozatból képzett $\sum\limits_{n=0} q^n$ geometriai sor akkor és csak akkor konvergens, ha $|q| < 1$, ekkor az összege:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

69. Mi a *harmonikus sor*, és milyen állítást ismer a konvergenciájával kapcsolatban?

A harmonikus sor alakja:

$$\sum_{n=1} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ...$$

Ez a sor divergens, azonban van összege, ami a $+\infty$

70. Milyen állítást ismer a $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ *hiperharmonikus sor* konvergenciájával kapcsolatban?

A hiperharmonikus sor alakja:

$$\sum_{n=1} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha}$$

Ez a sor divergens, ha $\alpha \leq 1$, és összege $+\infty$, azonban konvergens, ha $\alpha < 1$.

71. Hogyan szól a *Cauchy-kritérium végtelen sorokra*?

A $\sum a_n$ végtelen sor akkor és csak akkor konvergens, ha $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall m > n > n_0 : |a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_m| < \varepsilon$.

72. Mondjon egy, az (a_n) sorozatra vonatkozó szükséges feltételt arra nézve, hogy a $\sum a_n$ végtelen sor konvergens legyen.

Ha a $\sum a_n$ sor konvergens	$\Rightarrow$	$\lim(a_n) = 0$
Ha a $\lim(a_n) \neq 0$	$\Rightarrow$	a $\sum a_n$ sor divergens

73. Igaz-e az, hogy ha $\lim(a_n) = 0$ akkor a $\sum a_n$ sor konvergens? (A válaszát indokolja meg!)

Nem, mivel az hogy $\lim(a_n) = 0$ csak szükséges, de nem elégséges feltétel.

74. Mikor nevez egy végtelen számsort abszolút konvergensnek?

Akkor, ha $\sum |a_n|$ sor is konvergens.

75. Mikor nevez egy végtelen számsort feltételesen konvergensnek?

Akkor, ha $\sum a_n$ sor konvergens, de nem abszolút konvergens.

76. Fogalmazza meg a végtelen sorokra vonatkozó *összehasonlító kritériumokat.*

Tekintsük a $\sum a_n$ és $\sum b_n$ végtelen sorokat, és tegyük fel, hogy

$$\forall N \in \mathbb{N} : 0 \leq a_n \leq b_n \forall n \geq N \text{ indexre}$$

Ekkor:

Majoráns kritérium:	ha a $\sum b_n$ sor konvergens	$\Rightarrow$	a $\sum a_n$ sor is konvergens
Minoráns kritérium:	ha a $\sum a_n$ sor divergens	$\Rightarrow$	a $\sum b_n$ sor is divergens

77. Fogalmazza meg a végtelen sorokra vonatkozó *Cauchy-féle gyökkritériumot.*

$$A := \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in \overline{\mathbb{R}}$$

Ekkor:

1. $0 \leq A < 1$ esetén a $\sum a_n$ sor abszolút konvergens
2. $A > 1$ esetén a $\sum a_n$ sor divergens
3. $a = 1$ esetén a $\sum a_n$ sor lehet divergens és konvergens is

78. Mit jelent az, hogy a Cauchy-féle gyökkritérium bizonyos esetekben nem alkalmazható? Illusztrálja példákkal mindezt.

tegyük fel, hogy valamely $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat esetén létezik a $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ határérték.
Ekkor a $\sum a_n$ sor lehet konvergens is meg divergens is. Például legyen

$$a_n = \frac{1}{n},\ b_n = \frac{1}{n^2},\ z_n = \frac{(-1)^n}{n} \quad (1 \leq n \in \mathbb{N})$$

Ekkor

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|b_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = 1$$

Ugyanakkor a $\sum a_n$ sor divergens, a $\sum b_n$ sor abszolút konvergens, a $\sum z_n$ sor konvergens, de nem abszolút konvergens.

79. Fogalmazza meg a végtelen sorokra vonatkozó *D'Alembert-féle hányadoskirtériumot.*

$$A := \lim_{n\to+\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| \in \overline{\mathbb{R}}$$

Ekkor:

1. $0 \leq A < 1$ esetén a $\sum a_n$ sor abszolút konvergens
2. $A > 1$ esetén a $\sum a_n$ sor divergens
3. $A = 1$ esetén a $\sum a_n$ sor lehet konvergens és divergens is

80. Mit jelent az, hogy a D'Alembert-féle hányadoskirérium bizonyos esetekben nem alkalmazható? Illusztrálja példákkal mindezt.

Tegyük fel, hogy valamely $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sorozat esetén létezik a $\lim_{n\to+\infty}(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}) = 1$ határérték.
Ekkor a $\sum a_n$ sor lehet konvergens is meg divergens is. Például legyen

$$a_n = \frac{1}{n},\ b_n = \frac{1}{n^2},\ z_n = \frac{(-1)^n}{n} \quad (1 \leq n \in \mathbb{N})$$

Ekkor

$$\lim_{n\to+\infty}(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}) = \lim_{n\to+\infty}(\frac{|b_{n+1}|}{|b_n|}) = \lim_{n\to+\infty}(\frac{|z_{n+1}|}{|z_n|}) = 1$$

Ugyanakkor a $\sum a_n$ sor divergens, a $\sum b_n$ sor abszolút konvergens, a $\sum z_n$ sor konvergens, de nem abszolút konvergens.

81. Mik a *Leibniz-típusú sorok* és milyen konvergenciatételt ismer ezekkel kapcsolatban?

A Leibniz-sor alakja:

$$\sum_{n=1}(-1)^{n+1}a_n$$

Akkor és csak akkor konvergens, ha $\lim_{x\to+\infty} a_n = 0$.

82. Adjon meg egy olyan végtelen sort, amelyik konvergens, de nem abszolút konvergens.

$$\sum_{n=1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

83. Hogyan értelmezi egy végtelen sor *zárójelezését*?

Legyen $\sum a_n$ egy végtelen sor, és $(m_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ egy szigorúan monoton növekvő indexsorozat, ahol $m_0 = 0$. Ekkor az

$$\alpha_n := \sum_{k=m_{n-1}+1}^{m_n} a_k \quad (n \in \mathbb{N}^+)$$

sorozattal definiált $\sum \alpha_n$ végtelen sort a $\sum a_n$ sor (m_n) indexsorozat által meghatározott zárójelezésének nevezzük.

84. Tegyük fel, hogy a $\sum a_n$ végtelen sor konvergens. Mit tud mondani a szóban forgó sor $\sum \alpha_n$ zárójelezésének konvergenciájáról?

Egy konvergens sor minden zárójelezése is konvergens sor, valamint összegük megegyezik.

85. Tegyük fel, hogy a $\sum a_n$ végtelen sor valamely $\sum \alpha_n$ zárójelezett sora konvergens. Milyen feltételek mellett konvergens a $\sum a_n$ végtelen sor?

Tegyük fel, hogy $\sum a_n$ végtelen sorra és az (m_n) indexsorozatra teljesülnek a következő feltételek:

1. $m_0 = 0$ és $(m_{n+1} - m_n)$ korlátos sorozat
2. $\lim(a_n) = 0$
3. a $\sum a_n$ sor (m_n) indexsorozat által meghatározott $\sum \alpha_n$ zárójelezése konvergens

Ekkor a $\sum a_n$ sor is konvergens.

86. Hogyan értelmezi egy végtelen sor *átrendezését*?

Legyen $\sum\limits_{n=0} a_n$ egy adott végtelen sor. Tegyük fel, hogy $(p_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ egy bijekció, (más szóval p egy permutációja $\mathbb{N}$-nek). Ekkor a $\sum\limits_{n=0} a_{p_n}$ végtelen sort a $\sum\limits_{n=0}$ sor (p_n) által meghatározott étrendezésének nevezzük.

87. Milyen állítást ismer *abszolút konvergens* sorok *átrendezéseit* illetően?

Egy abszolút konvergens sor bármely átrendezése is abszolút konvergens sor, és összege ugyanaz, mint az eredeti soré.

88. Definiálja a $\sum(a_n), \sum(b_n)$ végtelen sorok *téglányszorzatát.*

Két tetszőleges sor: $\sum\limits_{n=0} a_n$ és $\sum\limits_{n=0} b_n$ esetén a téglányszorzat a

$$\sum_{n=0} t_n,\ t_n := \sum_{max\{i,j\}=n} a_i b_j \quad (\text{n} = 0, 1, 2, ...)$$

végtelen sor.

89. Definiálja a $\sum(a_n), \sum(b_n)$ végtelen sorok *Cauchy-szorzatát.*

Két tetszőleges sor: $\sum\limits_{n=0} a_n$ és $\sum\limits_{n=0} b_n$ esetén a Cauchy-szorzat a

$$\sum_{n=0} c_n,\ c_n := \sum_{i+j=n} a_i b_j = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \quad (\text{n} = 0, 1, 2, ...)$$

végtelen sor.

90. Milyen tételt ismer végtelen sorok téglányszorzatának a konvergenciáját illetően?

Tegyük fel, hogy $\sum\limits_{n=0} a_n$ és $\sum\limits_{n=0} b_n$ végtelen sorok konvergensek. Ekkor a téglányszorzatuk is konvergens, a szorzat összege pedig megegyezik a két sor összegének szorzatával.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$$

91. Fogalmazza meg az *abszolút konvergens* sorok szorzatára vonatkozó *Cauchy-tételt.*

Tegyük fel, hogy $\sum\limits_{n=0} a_n$ és a $\sum\limits_{n=0} b_n$ sorok mindegyike abszolút konvergens. Ekkor:

1. a $\sum\limits_{n=0} t_n$ téglányszorzatuk is abszolút konvergens
2. $\sum\limits_{n=0} c_n$ Cauchy-szorzatuk is abszolút konvergens
3. az összes $a_i b_j$ (i, j = 0, 1, 2, ...) szorzatból tetszés szerinti sorrendben képzett $\sum\limits_{n=0} d_n$ végtelen sor is abszolút konvergens, és az összeg minden

esetben a tényezők összegeinek a szorzata:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t_n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n = (\sum_{n=0}^{+\infty} a_n) \cdot (\sum_{n=0}^{+\infty} b_n)$$

92. Írja le a *hatványsor* definícióját.

Az $(\alpha_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozattal és az $a \in \mathbb{R}$ számmal képzett

$$\sum_{n=0} \alpha_n (x-a)^n, \; x \in \mathbb{R}$$

végtelen sort a középpontú, (α_n) együtthatós hatványsornak nevezzük.

93. Hogyan szól a hatványsor konvergenciahalmazára vonatkozó, a konvergenciasugarát meghatározó tétel?

$$\sum_{n=0} \alpha_n (x-a)^n, \; x \in \mathbb{R}$$

hatványsor konvergenciahalmaza a következő három egymást kizáró esetek egyike:

1. $\exists! \; R > 0$ valós szám, hogy a hatványsor $x \in \mathbb{R}$ esetén abszolút konvergens, ha $|x-a| < R$ és divergens, ha $|x-a| > R$
2. a hatványsor csak az $x = a$ pontban konvergens (ekkor $R := 0$)
3. a hatványsor $\forall x \in \mathbb{R}$ pontban konvergens (ekkor $R := +\infty$)

$0 \leq R \leq +\infty$ a hatványsor konvergenciasugara.

94. Adjon meg egy olyan *hatványsort*, amelyiknek a konvergenciahalmaza a $(-1, 1)$ intervallum.

$$\sum_{n=0} x^n$$

95. Adjon meg egy olyan *hatványsort*, amelyiknek a konvergenciahalmaza a $(-1, 1]$ intervallum.

$$\sum_{n=0} \frac{(-1)^n}{n} x^n$$

96. Adjon meg egy olyan *hatványsort*, amelyiknek a konvergenciahalmaza a $[-1, 1)$ intervallum.

$$\sum_{n=0} \frac{x^n}{n}$$

97. Adjon meg egy olyan *hatványsort*, amelyiknek a konvergenciahalmaza a $[-1, 1]$ intervallum.

$$\sum_{n=0} \frac{x^n}{n^2}$$

98. Adjon meg egy olyan hatványsort, amelyik csak az $a = 2$ pontban konvergens.

$$\sum_{n=0} n^n (x-2)^n$$

99. Definiálja az exp függvényt.

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ... \quad (x \in \mathbb{R})$$

100. Definiálja a sin függvényt.

$$\sin\ x := \sin(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... \quad (x \in \mathbb{R})$$

101. Definiálja a cos függvényt.

$$\cos\ x := \cos(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... \quad (x \in \mathbb{R})$$

102. Mit jelent az, hogy $a \in \overline{\mathbb{R}}$ torlódási pontja a $H \subset \mathbb{R}$ halmaznak?

Az a bármely környezetében végtelen sok H-beli elem van, vagyis:

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ esetén a } K_\varepsilon(a) \cap H \text{ végtelen halmaz}$$

103. Mit jelent az, hogy $a \in H$ izolált pontja a $H \subset \mathbb{R}$ halmaznak?

$$\exists \varepsilon > 0 : \; (K_\varepsilon(a) \setminus \{a\}) \cap A = \emptyset$$

104. Hogyan értelmezi egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek egy $a \in \mathcal{D}_f$ helyen vett határértékét?

Azt mondjuk, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in \mathcal{D'}_f$ pontban van határértéke, ha

$$\exists A \in \overline{\mathbb{R}} \quad \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0, \forall x \in (K_\delta(a) \setminus \{a\})\text{:} \quad f(x) \in K_\varepsilon(A)$$

Ekkor A-t a függvény $a \in \mathcal{D'}_f$-beli határértékének nevezzük, és az alábbi szimbólumok valamelyikével jelöljük:

$$\lim_a f = A, \qquad \lim_{x \to a} f(x) = A, \qquad f(x) \to A, \text{ ha } x \to a$$

105. Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a *végesben vett véges* határérték definícióját.

Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D'}_f \cap \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}$. Ekkor:

$$\lim_a f = A \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in \mathcal{D}_f, 0 < |x - a| < \delta : \; |f(x) - A| < \varepsilon$$

106. Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a *végesben vett plusz végtelen* határérték definícióját.

Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D'}_f \cap \mathbb{R}$. Ekkor:

$$\lim_a f = +\infty \Leftrightarrow \forall P > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in \mathcal{D}_f, 0 < |x - a| < \delta\text{:} \; f(x) < P$$

107. Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a *végesben vett mínusz végtelen* határérték definícióját.

$$\lim_a f = -\infty \Leftrightarrow \forall P < 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in \mathcal{D}_f, \; 0 < |x - a| < \delta : \; f(x) < P$$

108. Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a *plusz végtelenben vett véges* határérték definícióját.

Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ +\infty \in \mathcal{D}'_f, \ A \in \mathbb{R}$. Ekkor:

$$\lim_{+\infty} f = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists x_0 > 0 \ \forall x \in \mathcal{D}_f, x > x_0\colon \ |f(x) - A| < \varepsilon$$

109. Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a *mínusz végtelenben vett véges* határérték definícióját.

$$\lim_{-\infty} f = A \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists x_0 < 0 \ \forall x \in \mathcal{D}_f, \ x < x_0 : \ |f(x) - A| < \varepsilon$$

110. Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a *plusz végtelenben vett plusz végtelen* határérték definícióját.
Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ +\infty \in \mathcal{D}'_f$. Ekkor:

$$\lim_{+\infty} f = +\infty \Leftrightarrow \forall P > 0 \ \exists x_0 > 0 \ \forall x \in \mathcal{D}_f, x > x_0\colon \ f(x) > P$$

111. Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a *plusz végtelenben vett mínusz végtelen* határérték definícióját.

$$\lim_{+\infty} f = -\infty \Leftrightarrow \forall P < 0 \ \exists x_0 > 0 \ \forall x \in \mathcal{D}_f, \ x > x_0 : \ f(x) < P$$

112. Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a *mínusz végtelenben mínusz végtelen* határérték definícióját.

$$\lim_{-\infty} f = -\infty \Leftrightarrow \forall P < 0 \ \exists x_0 < 0 \ \forall x \in \mathcal{D}_f, \ x < x_0 : \ f(x) < P$$

113. Írja le a határértékre vonatkozó átviteli elvet.

Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{D}'_f$ és $A \in \overline{\mathbb{R}}$. Ekkor:

$$\lim_a f = A \Leftrightarrow \forall (x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f \setminus \{a\}, \ \lim(x_n) = a \text{ esetén } \lim_{n \to +\infty} (f(x_n)) = A$$

114. Hogyan szól a függvények összegének, szorzatának, hányadosának határértékére vonatkozó tétel?

Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in (\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g)'$ és léteznek az $A := \lim_a f \in \overline{\mathbb{R}}$, $B := \lim_g \in \overline{\mathbb{R}}$ határértékek. Ekkor:

1. az $f + g$ összegfüggvénynek is van határértéke a-ban, és $\lim_a(f + g) = \lim_a f + \lim_a g = A + B$
2. az $f \cdot g$ szorzatfüggvénynek is van határértéke a-ban, és $\lim_a(f \cdot g) = \lim_a f \cdot \lim_a g = A \cdot B$
3. az $\frac{f}{g}$ hányadosfüggvénynek is van határértéke a-ban, és $\lim_a \frac{f}{g} = \frac{\lim_a f}{\lim_a g} = \frac{A}{B}$

115. Mit tud mondani a hatványsor összegfüggvényének a határértékéről?

Tegyük fel, hogy a $\sum\limits_{n=0} \alpha_n(x-a)^n$ hatványsor R konvergenciasugara pozitív. Legyen:

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n(x-a)^n \quad (x \in K_R(a)$$

az összegfüggvény. Ekkor bármely $b \in \mathbb{K}_{\mathbb{R}}(\text{ə})$ esetén létezik a $\lim_b f$ határérték és

$$\lim_b f = f(b) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n(b-a)^n$$

116. Mit tud mondani monoton függvények határértékéről?

Legyen $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ tetszőleges (korlátos vagy nem korlátos) nyílt intervallum. Ha az f függvény monoton (α, β)-n, akkor f-nek $\forall a \in (\alpha, \beta)$ pontban létezik a jobb oldali, illetve a bal oldali határértéke.

1. Ha $f \nearrow (\alpha, \beta)$-n, akkor:

$$\lim_{a+0} f = \inf \{\ f(x) \mid x \in (\alpha, \beta),\ x > a\ \}$$
$$\lim_{a-0} f = \sup \{\ f(x) \mid x \in (\alpha, \beta),\ x < a\ \}$$

2. Ha $f \searrow (\alpha, \beta)$-n, akkor:

$$\lim_{a+0} f = \sup \{\ f(x) \mid x \in (\alpha, \beta),\ x > a\ \}$$
$$\lim_{a-0} f = \inf \{\ f(x) \mid x \in (\alpha, \beta),\ x < a\ \}$$

117. Definiálja függvény jobb oldali határértékét.

Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy $a \in (\mathcal{D}_f \cap (a, +\infty))'$. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az a helyen létezik a jobb oldali határértéke, ha a

$$g(x) := f(x) \ (x \in \mathcal{D}_f \cap (a, +\infty))$$

függvénynek a-ban van határértéke. Ezt a határértéket az f függvény a helyen vett jobb oldali határértékének nevezzük, és így jelöljük:

$$\lim_{a+0} := \lim_{a} g \in \overline{\mathbb{R}}$$

118. Definiálja egy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény pontbeli folytonosságát.

Egy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban folytonos, ha

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in \mathcal{D}_f, \ |x - a| < \delta\text{: } |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

119. Mi a kapcsolat a pontbeli folytonosság és a határérték között?

Ha $a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D'}_f$, akkor $f \in C\{a\} \Leftrightarrow \exists \lim_a f$ és $\lim_a f = f(a)$

120. Milyen tételt ismer hatványsor összegfüggvényének a folytonosságáról?

Hatványsor összegfüggvénye a konvergenciahalmaz minden pontjában folytonos.

121. Definiálja egy $f \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ függvény pontbeli folytonosságát.

Egy $f \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ függvény az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban folytonos, ha

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in \mathcal{D}_f, \ |x - a| < \delta\text{: } |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

122. Mit tud mondani korlátos és zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény értékkészletéről?

Tegyük fel, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvény értelmezési tartománya intervallum. Ekkor az értékkészlete vagy egy elemű halmaz, vagy intervallum.

123. Hogyan szól a *Weierstrass-tétel*?

Legyen $-\infty < a < b < +\infty$. Ha az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos az $[a,b]$ intervallumon, akkor f-nek létezik abszolút maximum- és abszolút minimumhelye, azaz

$$\exists \alpha, \beta \in [a,b]\text{: } f(\beta) \leq f(x) \leq f(\alpha) \quad (\forall x \in [a,b])$$

124. Mit mond ki a *Bolzano-tétel*?

Tegyük fel, hogy $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény ($a < b, a, b \in \mathbb{R}$). Ha f a két végpontban különböző előjelű értéket vesz fel, vagyis ha $f(a) \cdot f(b) < 0$, akkor van olyan $\xi \in (a,b)$ pont, amelyre $f(\xi) = 0$.

125. Definiálja a *megszüntethető szakadási hely* fogalmát.

Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}_f$ és $f \notin C\{a\}$. Akkor azt mondjuk, hogy az a pont az f függvény szakadási helye.
Az $a \in \mathcal{D}_f$ pont az f függvény megszüntethető szakadási helye, ha:

$$\exists \lim_a f \text{ véges határérték, de } \lim_a f \neq f(a)$$

126. Definiálja az *elsőfajú szakadási hely* fogalmát.

Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}_f$ és $f \notin C\{a\}$. Akkor azt mondjuk, hogy az a pont az f függvény szakadási helye.
Az $a \in \mathcal{D}_f$ pont az f függvény elsőfajú szakadási helye, ha:

$$\exists \lim_{a+0} f \text{ és } \exists \lim_{a-0} f\text{, ezek végesek, de } \lim_{a+0} f \neq \lim_{a-0} f$$

127. Mit jelent az, hogy egy függvény Darboux-tulajdonságú?

Legyen $I \subset \mathbb{R}$ tetszőleges intervallum. Az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény Darboux-tulajdonságú I-n, ha minden $a, b \in I$, $-\infty < a < b < +\infty$, $f(a) \neq f(b)$ esetén az f függvény minden $f(a)$ és $f(b)$ közötti értéket felvesz $[a,b]$-ben.

128. Mondja ki az összetett függvény folytonosságára vonatkozó tételt.

Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g \in C\{a\}$ és $f \in C\{g(a)\}$. Ekkor $f \circ g \in C\{a\}$, azaz az összetett függvény örökli a belső- és a külső függvény folytonosságát.

129. Hogyan szól az inverz függvény folytonosságára vonatkozó tétel?

Tegyük fel, hogy:

$$\left.\begin{array}{l} f : [a,b] \to \mathbb{R} \\ f \in C[a,b] \\ \exists f^{-1} \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \text{az } f^{-1} \text{ függvény folytonos a } \mathcal{D}_{d-1} = \mathcal{R}_f \text{ halmazon}$$

130. Mit tud mondani intervallumon értelmezett folytonos függvény értékkészletéről?

Az értelmezési tartománya kompakt.

131. Értelmezze az ln függvényt.

$$\ln(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n$$

132. Mi a definíciója az $a^x \quad (a, x \in \mathbb{R}, a > 0)$ hatványnak?

$$\forall a,\ x \in \mathbb{R} :\ a^x := \exp(x \cdot \ln a)$$

133. Értelmezze az $\log_a$ függvényt.

$$\log_a = \frac{\ln x}{\ln a}$$
$$\log_a := (\exp_a)^{-1}, \text{ ha } a > 0 \text{ és } a \neq 1$$

134. Mi a definíciója az $x^\alpha \quad (x > 0,\ \alpha \in \mathbb{R})$ hatványfüggvénynek?

Tetszőleges $\alpha \in \mathbb{R}$ szám esetén az α kitevőjű hatványfüggvényt így értelmezzük:

$$h_\alpha :\ (0, +\infty) \ni x \mapsto x^\alpha := e^{\alpha \ln x}$$