Programozás
8. előadás

Tartalom

Másolással összeépítés

Specifikáció:

- Bemenet: $N \in \mathbb{N}$
  $X_{1..N} \in H_1^N$
  $f: H_1 \to H_2$
- Kimenet: $Y_{1..N} \in H_2^N$
- Előfeltétel: –
- Utófeltétel: $\forall i(1 \le i \le N)$: $Y_i = f(X_i)$

A **másolás** programozási tétellel összeépítés minden programozási tételre működik.

Csupán annyi a teendő, hogy a bemenetben szereplő $X_{1..N} \in H^N$ sorozat X_i elemei helyett i-edik feldolgozandó elemként az $f(X_i)$-t kell írni, pl.

$$\sum_{i=1}^{N} X_i \to \sum_{i=1}^{N} f(X_i) \quad \text{vagy} \quad \max_{i=1}^{N} X_i \to \max_{i=1}^{N} f(X_i)$$

… a kimenetben:

$$\underset{\substack{i=1\\T(X_i)}}{\overset{N}{\text{Kiválogat}}}\, X_i \to \underset{\substack{i=1\\T(X_i)}}{\overset{N}{\text{Kiválogat}}}\, f(X_i)$$

Másolással összeépítés

A **másolás** programozási tételnek volt azonban egy változata, ami új lehetőségeket teremt:

Specifikáció:

- Bemenet: $N \in \mathbb{N}$, $X_{1..N} \in H_1^N$, $f: H_1 \rightarrow H_2$
- Kimenet: $Y_{1..N} \in H_2^N$
- Előfeltétel: –
- Utófeltétel: $\forall i(1 \leq i \leq N)$: $Y_{p(i)} = f(X_i)$

Utófeltétel: $\forall i(1 \leq i \leq N)$: $Y_{p(i)} = X_i$,

ahol p(i) lehet pl. N–i+1, ami éppen a sorozat elemei sorrendje megfordítását jelenti.

Több programozási tétel megoldása kihasználta az elemek sorrendjét, pl. a lehetséges megoldások közül az elsőt adta meg, vagy az összes várt elemet a bemenet sorrendjében adta meg.

Ez az összeépítés lehetőséget teremt a hátulról feldolgozásra.

Másolás + keresés

Feladat:

Adott tulajdonságú utolsó elem keresése.

Specifikáció:

- Bemenet: $N \in \mathbb{N}$, $X_{1..N} \in \mathbb{H}^N$, $T{:}\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{L}$
- Kimenet: $Van \in \mathbb{L}$, $Ind \in \mathbb{N}$
- Előfeltétel: –
- Utófeltétel: $Van = \exists i (1 \leq i \leq N){:}\ T(X_i)$ és
  $Van \rightarrow 1 \leq Ind \leq N$ és $T(X_{Ind})$ és
  $\forall i (Ind < i \leq N){:}$ nem $T(X_i)$

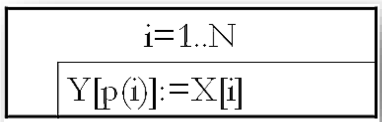
Specifikáció:

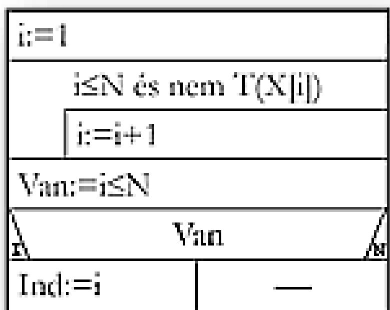
- Bemenet: $N \in \mathbb{N}$, $X_{1..N} \in \mathbb{H}^N$, $T{:}\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{L}$
- Kimenet: $Van \in \mathbb{L}$, $Ind \in \mathbb{N}$, $Ért \in \mathbb{H}$
- Előfeltétel: –
- Utófeltétel: $Van = \exists i\ (1 \leq i \leq N){:}\ T(X_i)$ és
  $Van \rightarrow 1 \leq Ind \leq N$ és $T(X_{Ind})$ és $Ért = X_{Ind}$

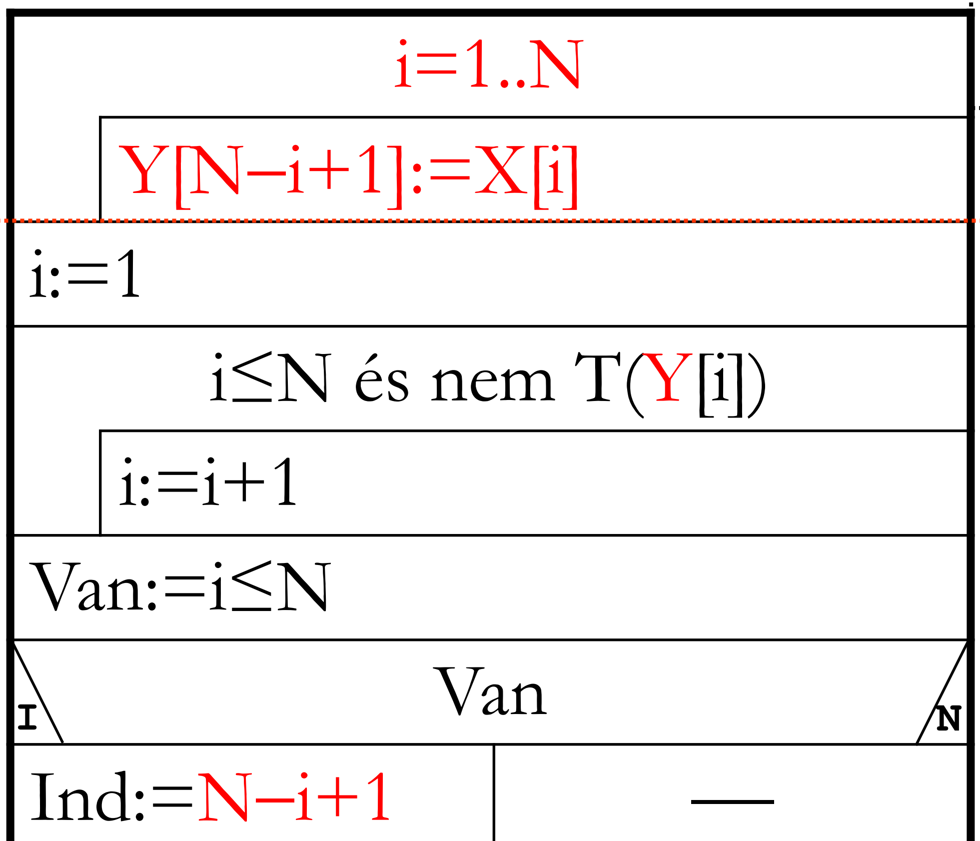
Másolás + keresés

Feladat:

Adott tulajdonságú utolsó elem keresése.







Változó
i:**Egész**
Y:**Tömb[…]**

Másolás + keresés

Vezessük be a j=N–i+1 jelölést! Így i=1 esetén j=N, i növelése esetén j csökken, i≤N helyett N–j+1≤N, azaz 1≤j lesz. Ezzel i-ről j-re áttérve a megoldás a hátulról keresésre:

i:=1
i≤N és nem T(X[i])
i:=i+1
Van:=i≤N
Van
I: Ind:=i | N: —

Változó
j:Egész

j:=N	
j≥1 és nem T(X[j])	
j:=j–1	
Van:=j≥1	
Van	
I: Ind:=j	N: —

Kiválogatás + összegzés

Feladat:

Adott tulajdonságú elemek összege – **feltételes összegzés.**

Specifikáció:

- Bemenet: $N \in \mathbb{N}$, $X_{1..N} \in \mathbb{Z}^N$, $T: \mathbb{Z} \to \mathbb{L}$
- Kimenet: $S \in \mathbb{Z}$
- Előfeltétel: –
- Utófeltétel: $S = \sum_{\substack{i=1 \\ T(X_i)}}^{N} X_i$

Specifikáció (összegzés):

- Bemenet: $N \in \mathbb{N}$, $X_{1..N} \in H^N$
- Kimenet: $S \in H$
- Előfeltétel: –
- Utófeltétel: $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$

Kiválogatás + összegzés

Specifikáció:
- Bemenet: $N \in \mathbb{N}$, $X \in \mathbb{Z}^N$, $T: \mathbb{Z} \to \mathbb{L}$
- Kimenet: $S \in \mathbb{Z}$
- Előfeltétel: –
- Utófeltétel: $S = \sum_{\substack{i=1 \\ T(X_i)}}^{N} X_i$

Specifikáció$_a$:

- Utófeltétel$_a$: $(Db,Y) = \underset{\substack{i=1 \\ T(X_i)}}{\overset{N}{\text{Kiválogat}}}\, i$ és

$$\boxed{S = \sum_{i=1}^{Db} X_{Y_i}} \leftrightarrow \boxed{S = \sum_{i=1}^{Db} X_{p(i)} \text{, ahol } p(i) := Y_i}$$

p megfelelő, hiszen
1. $\Re_p = [1..N]$
2. $p(i) < p(i+1) \rightarrow$ injektív

Specifikáció$_b$:

- Utófeltétel$_b$: $(Db,Y) = \underset{\substack{i=1 \\ T(X_i)}}{\overset{N}{\text{Kiválogat}}}\, X_i$ és

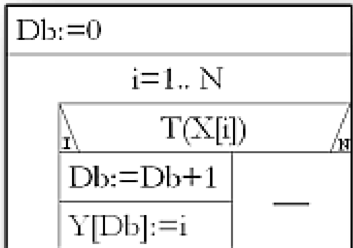
$$S = \sum_{i=1}^{Db} Y_i$$

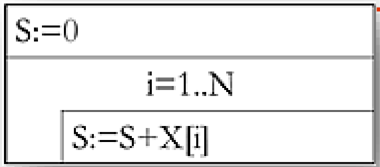
Kiválogatás + összegzés

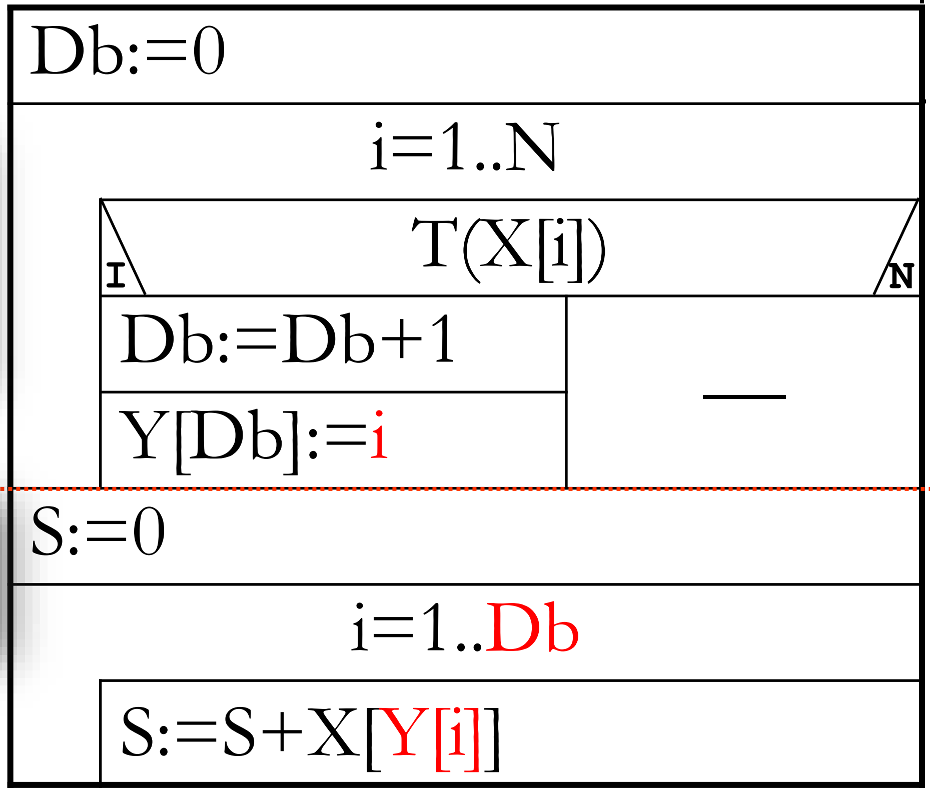
1. megoldási ötlet$_a$:

Válogassuk ki az adott tulajdonságúakat, majd utána adjuk össze őket!

Változó
i,Db:**Egész**
Y:Tömb[…]





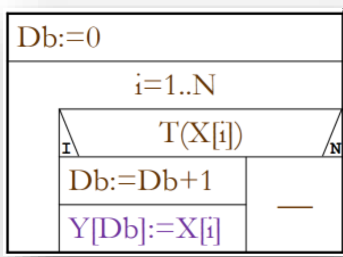


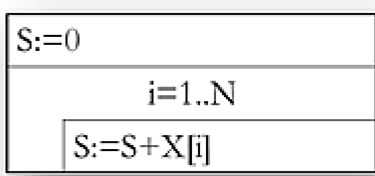
Kiválogatás + összegzés

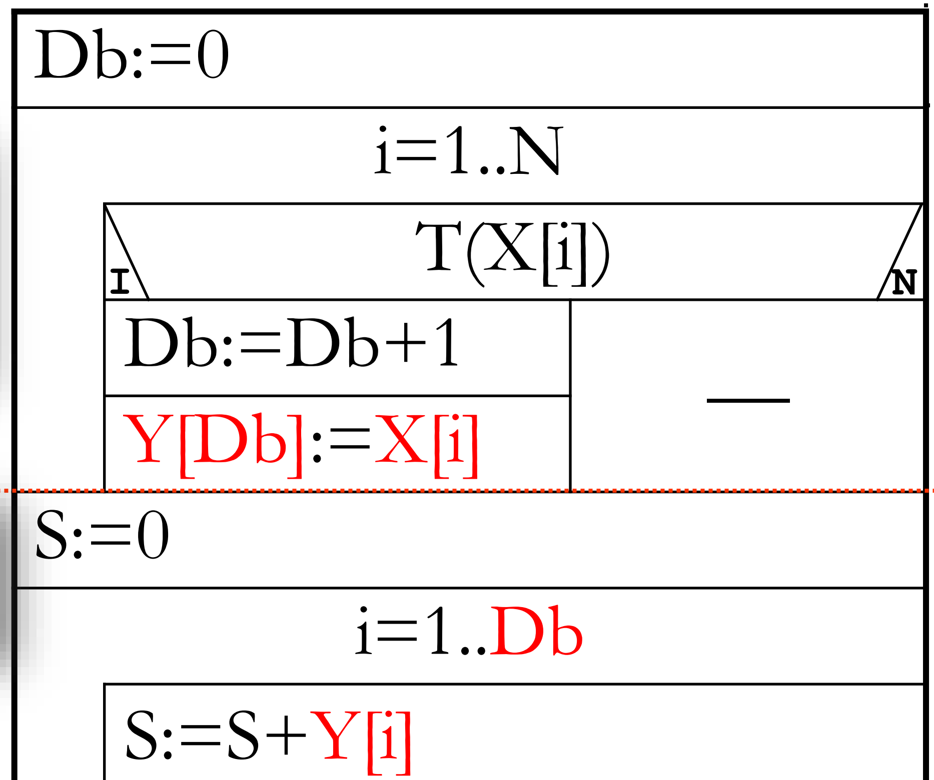
1. megoldási ötlet$_b$:

Válogassuk ki az adott tulajdonságúakat, majd utána adjuk össze őket!

Változó
i,Db:**Egész**
Y:Tömb[…]





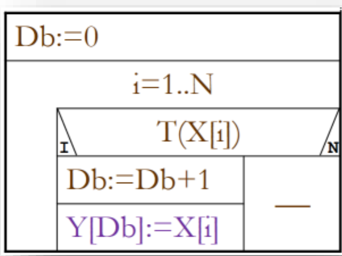


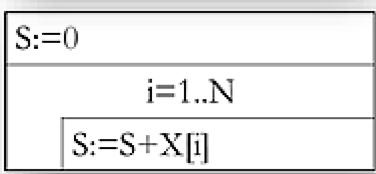
Kiválogatás + összegzés

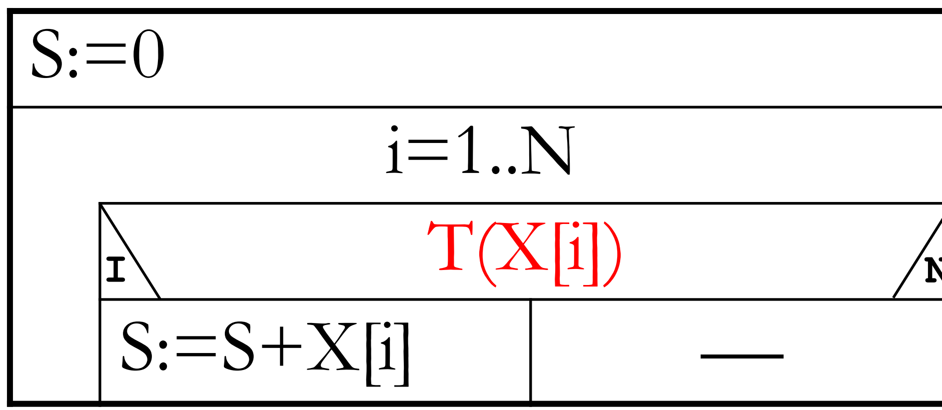
2. megoldási ötlet:

Kiválogatás helyett azonnal adjuk össze a megfelelő elemeket!

→ nincs érték-/index-feljegyzés (Y-ban) + nincs számlálás (Db-ben)







Változó
i:**Egész**

Kiválogatás + maximum-kiválasztás

Feladat:

Adott tulajdonságú elemek maximuma – **feltételes maximumkeresés**.

Specifikáció:
- Bemenet: $N\in\mathbb{N}$,
  $X_{1..N}\in H^N$
- Kimenet: $Max\in\mathbb{N}$, $MaxÉrt\in H$
- Előfeltétel: $N>0$
- Utófeltétel: $1\leq Max\leq N$ és
  $\forall i\ (1\leq i\leq N)$: $X_{Max}\geq X_i$ és
  $Maxért=X_{Max}$

Specifikáció:
- Bemenet: $N\in\mathbb{N}$, $X_{1..N}\in H^N$, $T{:}H\to\mathbb{L}$
- Kimenet: $Van\in\mathbb{L}$, $Ind\in\mathbb{N}$, $Ért\in H$
- Előfeltétel: –
- Utófeltétel: $Van=\exists i\ (1\leq i\leq N)$: $T(X_i)$ és
  $Van\to 1\leq Ind\leq N$ és $T(X_{Ind})$ és $Ért=X_{Ind}$

Specifikáció:

- Bemenet: $N\in\mathbb{N}$, $X_{1..N}\in H^N$,
  $T{:}H\to\mathbb{L}$
- Kimenet: $Van\in\mathbb{L}$, $MaxI\in\mathbb{N}$
- Előfeltétel: –
- Utófeltétel: $Van=\exists i\ (1\leq i\leq N)$: $T(X_i)$ és
  $Van\to(1\leq MaxI\leq N$ és $T(X_{MaxI})$ és
  $\forall i(1\leq i\leq N)$: $T(X_i)\to X_{MaxI}\geq X_i)$

Kiválogatás + maximum-kiválasztás

Specifikáció$_2$:

- Utófeltétel$_2$: $(Van, MaxI) = \underset{\substack{i=1 \\ T(X_i)}}{\overset{N}{\mathrm{MaxInd}}}\, X_i$

Specifikáció:

- Bemenet: $N \in \mathbb{N}$, $X_{1..N} \in \mathbb{H}^N$, $T: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{L}$
- Kimenet: $MaxI \in \mathbb{N}$, $Van \in \mathbb{L}$
- Előfeltétel: –
- Utófeltétel: $Van = \exists i\ (1 \le i \le N): T(X_i)$ és $Van \rightarrow (1 \le MaxI \le N$ és $T(X_{MaxI})$ és $\forall i (1 \le i \le N): T(X_i) \rightarrow X_{MaxI} \ge X_i)$

Specifikáció$_3$:

- Kimenet$_3$: $Van \in \mathbb{L}$, $MaxI \in \mathbb{N}$, $MaxÉrt \in \mathbb{H}$
- Utófeltétel$_3$: $(Van, MaxI, MaxÉrt) = \underset{\substack{i=1 \\ T(X_i)}}{\overset{N}{\mathrm{Max}}}\, X_i$

Kiválogatás + maximum-kiválasztás

A megoldás felé:

Specifikáció’:

- Utófeltétel’: $(Db,Y)=\underset{\substack{i=1\\T(X_i)}}{\overset{N}{\text{Kiválogat}}}\, i$ és

$$Van=Db>0 \text{ és}$$

$$Van\rightarrow\left(1\leq MaxI\leq N \text{ és } T(X_{MaxI}) \text{ és } MaxI=\underset{i=1}{\overset{Db}{\text{MaxInd}}}\, X_{Y_i}\right)$$

Specifikáció:

- Bemenet: $N\in\mathbb{N}$, $X_{1..N}\in H^N$, $T:H\rightarrow\mathbb{L}$
- Kimenet: $Db\in\mathbb{N}$, $Y_{1..N}\in\mathbb{N}^N$
- Előfeltétel: –
- Utófeltétel: $Db=\sum_{\substack{i=1\\T(X_i)}}^{N}1$ és $\forall i(1\leq i\leq Db)$: $T(X_{Y_i})$ és $Y\subseteq(1,2,\ldots,N)$

Specifikáció:

- Bemenet: $N\in\mathbb{N}$, $X_{1..N}\in H^N$
- Kimenet: $Max\in\mathbb{N}$, $MaxÉrt\in H$
- Előfeltétel: $N>0$
- Utófeltétel: $1\leq Max\leq N$ és $\forall i\ (1\leq i\leq N)$: $X_{Max}\geq X_i$ és $Maxért=X_{Max}$

Kiolvasható az algoritmikus ötlet:

Válogassuk ki az adott tulajdonságúakat, majd válasszuk ki a maximumot, ha van értelme!

Kiválogatás + maximum-kiválasztás

1. megoldás algoritmusa:

Válogassuk ki az adott tulajdonságúakat, majd …!

- Utófeltétel': $(Db,Y)=\underset{\substack{i=1\\T(X_i)}}{\overset{N}{\text{Kiválogat}}}\ i$ és
  Van=Db>0 és

Db:=0
i=1.. N
T(X[i])
I / N
Db:=Db+1 | —
Y[Db]:=i

Változó
i,Db:**Egész**
Y:Tömb[…]

Db:=0
i=1..N
T(X[i])
I / N
Db:=Db+1 | —
Y[Db]:=i
Van:=Db>0
…

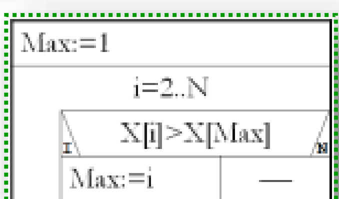
Kiválogatás + maximum-kiválasztás

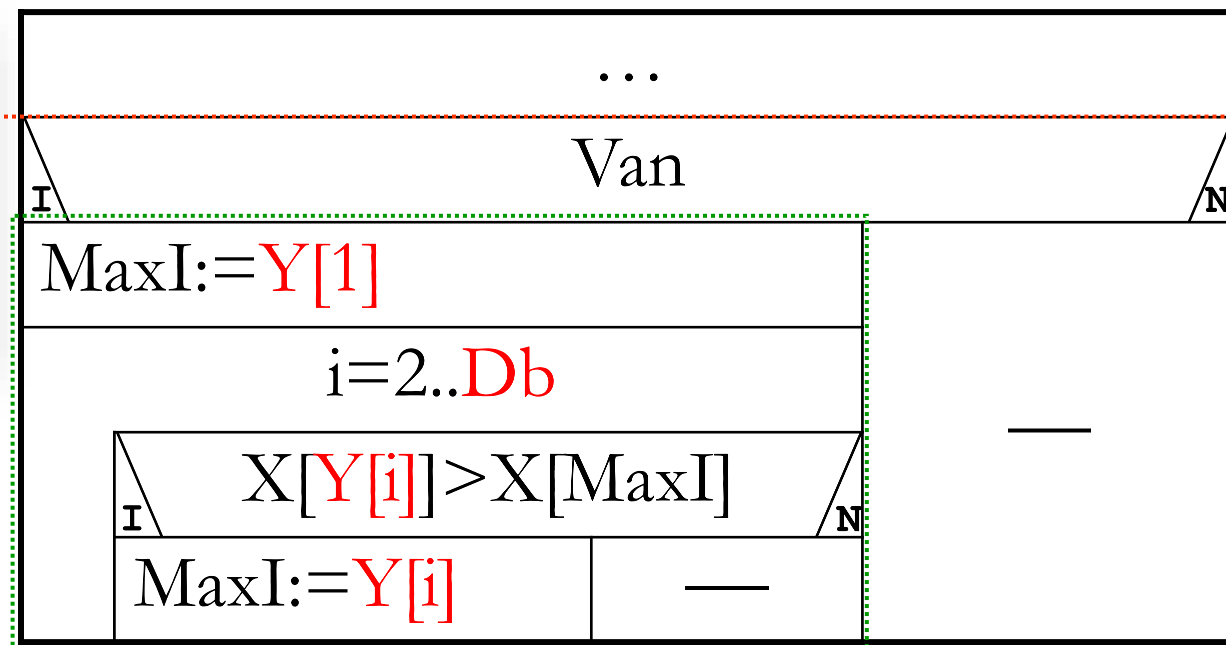
1. megoldása algoritmusa:

… , majd válasszuk ki a maximumot, ha van értelme!

Specifikáció:

- Bemenet: $N \in \mathbb{N}$, $X_{1..N} \in H^N$
- Kimenet: $Max \in \mathbb{N}$, $MaxÉrt \in H$
- Előfeltétel: $N>0$
- Utófeltétel: $1 \le Max \le N$ és $\forall i\ (1 \le i \le N)$: $X_{Max} \ge X_i$ és $Maxért = X_{Max}$

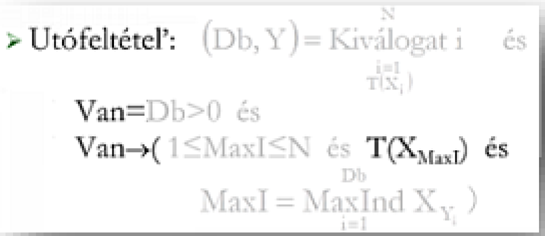


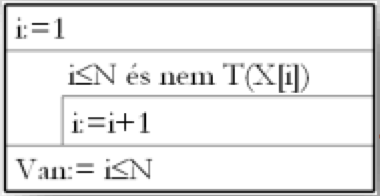


Kiválogatás + maximum-kiválasztás

2. megoldási ötlet (és algoritmusa)**:**

Induljunk ki a specifikációban észrevett tételekből: a kiválogatás helyett keressük meg az első T-tulajdonságút, …





i:=1
i≤N és nem T(X[i])
i:=i+1
Van:=i≤N
…

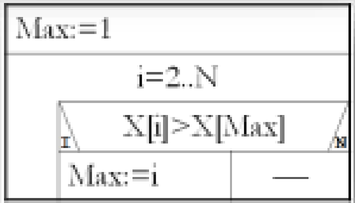
Változó
i:**Egész**

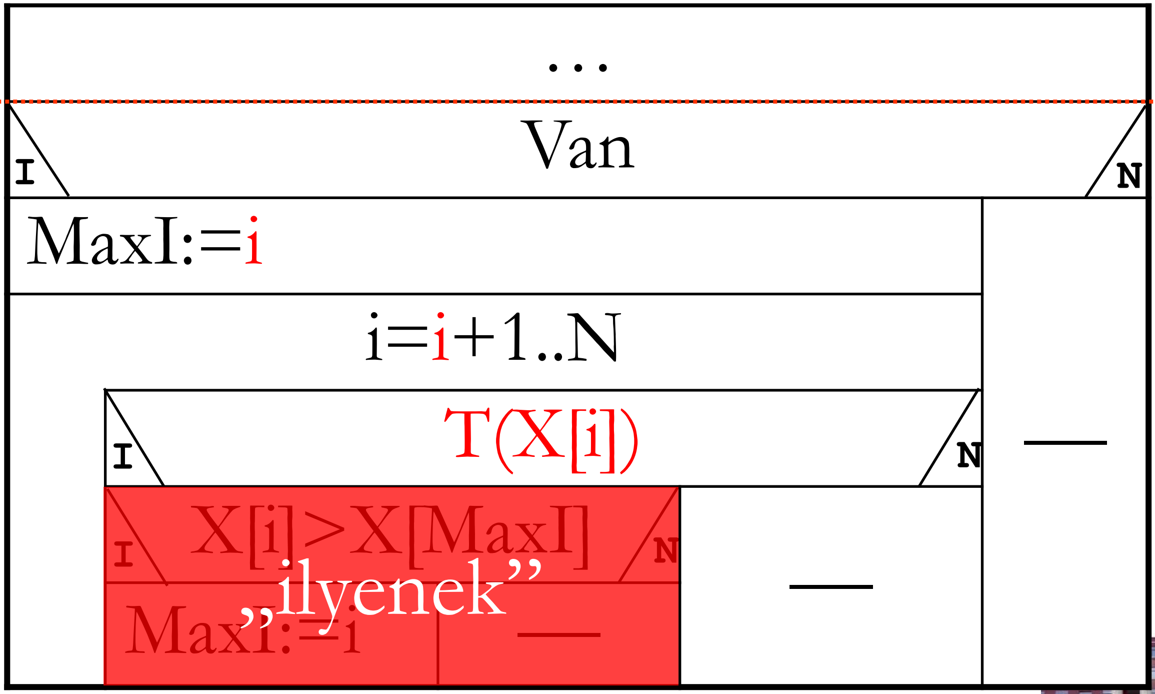
Kiválogatás + maximum-kiválasztás

2. megoldási ötlet (és algoritmusa):

… majd válasszuk ki az **ilyenek** maximumát!

- Utófeltétel': $(Db, Y) = \underset{\substack{i=1 \\ T(X_i)}}{\overset{N}{\text{Kiválogat}}}\ i$ és
  $Van = Db > 0$ és
  $Van \rightarrow (1 \leq MaxI \leq N$ és $T(X_{MaxI})$ és
  $MaxI = \underset{i=1}{\overset{Db}{\text{MaxInd}}}\ X_{Y_i}$)

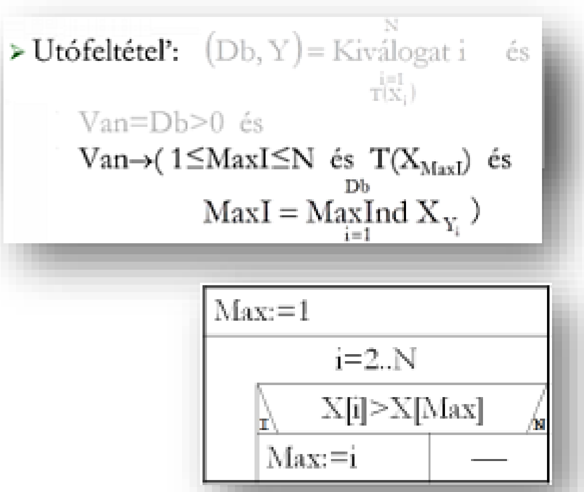


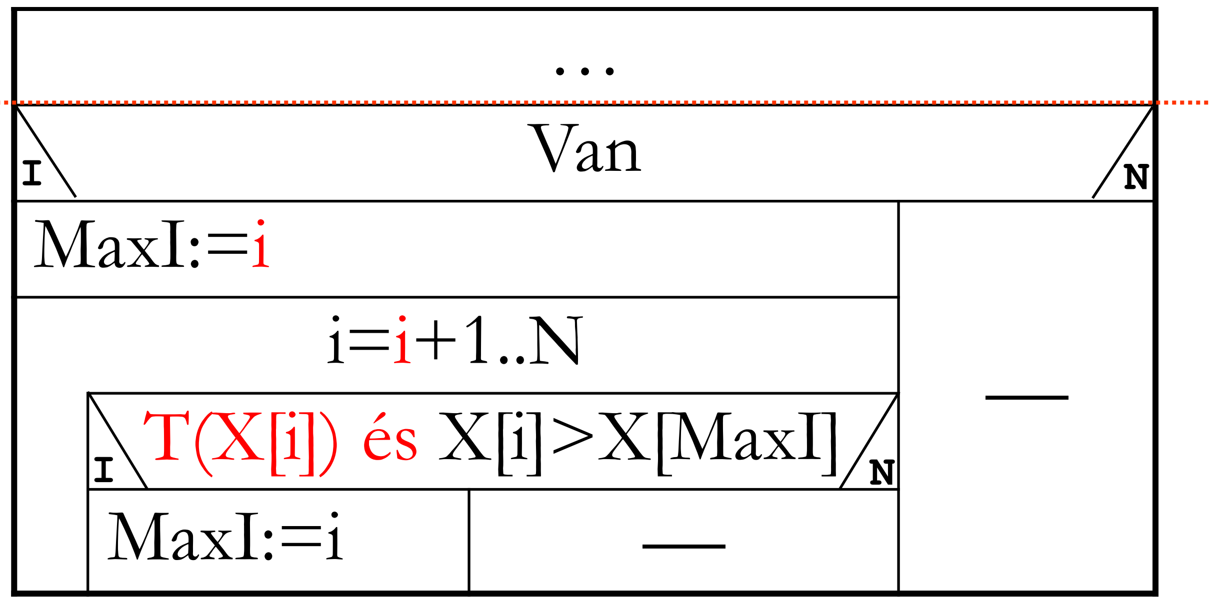


Kiválogatás + maximum-kiválasztás

2. megoldási ötlet (és algoritmusa):

… majd válasszuk ki az **ilyenek** maximumát!



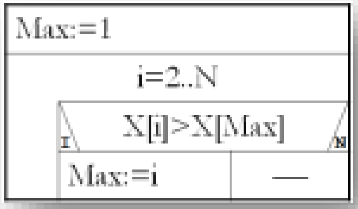


Kiválogatás + maximum-kiválasztás

3. megoldási ötlet (és algoritmusa):

Kiválogatás, ill. keresés helyett azonnal válasszuk ki a maximumot!

Kell egy fiktív **0. elem** a maximum-kiválasztáshoz, amely **kisebb minden** „normál” elemnél.



X[0]:=-∞; MaxI:=0

i=1..N

- T(X[i]) és X[i]>X[MaxI] (I / N)
  - I: MaxI:=i
  - N: —

Van:=MaxI>0

Változó
i:**Egész**

Maximum-kiválasztás + kiválogatás

Feladat:

Összes maximális elem kiválogatása.

Specifikáció:

- Bemenet: $N \in \mathbb{N}, X_{1..N} \in H^N$
- Kimenet: $Db \in \mathbb{N}, MaxI_{1..N} \in \mathbb{N}^N$
- Előfeltétel: $N>0$
- Utófeltétel$_1$: $Db = \sum_{\substack{i=1 \\ X_i = X_{MaxI_1}}}^{N} 1$ és

$\forall i(1 \le i \le Db): \forall j(1 \le j \le N): X_{MaxI_i} \ge X_j$ és
$MaxI \subseteq (1,2,\ldots,N)$

Specifikáció:

- Bemenet: $N \in \mathbb{N}, X_{1..N} \in H^N$, $T{:}H \to L$
- Kimenet: $Db \in \mathbb{N}, Y_{1..N} \in \mathbb{N}^N$
- Előfeltétel: –
- Utófeltétel: $Db = \sum_{\substack{i=1 \\ T(X_i)}}^{N} 1$ és
  $\forall i(1 \le i \le Db): T(X_{Y_i})$ és
  $Y \subseteq (1,2,\ldots,N)$

Specifikáció:

- Bemenet: $N \in \mathbb{N}$,
  $X_{1..N} \in H^N$
- Kimenet: $Max \in \mathbb{N}, MaxÉrt \in H$
- Előfeltétel: $N>0$
- Utófeltétel: $1 \le Max \le N$ és
  $\forall i\ (1 \le i \le N): X_{Max} \ge X_i$ és
  $Maxért = X_{Max}$

Maximum-kiválasztás + kiválogatás

Feladat:

Összes maximális elem kiválogatása.

Specifikáció:

- Bemenet: $N \in \mathbb{N}, X_{1..N} \in \mathbb{H}^N$
- Kimenet: $Db \in \mathbb{N}, MaxI_{1..N} \in \mathbb{N}^N$
- Előfeltétel: $N > 0$
- Utófeltétel$_2$: $MaxÉ = \underset{i=1}{\overset{N}{\mathrm{MaxÉrt}}}\ X_i$ és

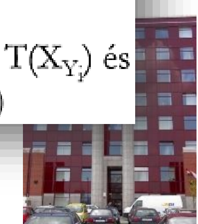
$$(Db, MaxI) = \underset{\substack{i=1\\X_i=MaxÉ}}{\overset{N}{\mathrm{Kiválogat}}}\ i$$

Specifikáció:

- Bemenet: $N \in \mathbb{N}$, $X_{1..N} \in \mathbb{H}^N$
- Kimenet: $Max \in \mathbb{N}$, $MaxÉrt \in \mathbb{H}$
- Előfeltétel: $N>0$
- Utófeltétel: $1 \leq Max \leq N$ és $\forall i\ (1 \leq i \leq N)$: $X_{Max} \geq X_i$ és $Maxért = X_{Max}$

Specifikáció:

- Bemenet: $N \in \mathbb{N}$, $X_{1..N} \in \mathbb{H}^N$, $T: \mathbb{H} \to \mathbb{L}$
- Kimenet: $Db \in \mathbb{N}$, $Y_{1..N} \in \mathbb{N}^N$
- Előfeltétel: –
- Utófeltétel: $Db = \sum_{\substack{i=1\\T(X_i)}}^{N} 1$ és $\forall i (1 \leq i \leq Db)$: $T(X_{Y_i})$ és $Y \subseteq (1,2,\ldots,N)$



Maximum-kiválasztás + kiválogatás

1. megoldási ötlet:

Határozzuk meg a maximumértéket, majd válogassuk ki a vele egyenlőeket!

Specifikáció:
- Bemenet: $N\in\mathbb{N}, X_{1..N}\in H^N$
- Kimenet: $Db\in\mathbb{N}$, $MaxI_{1..N}\in\mathbb{N}^N$
- Előfeltétel: $N>0$
- Utófeltétel: $MaxÉ=\underset{i=1}{\overset{N}{\text{MaxÉrt}}}\ X_i$ és $(Db,MaxI)=\underset{\substack{i=1\\X_i=MaxÉ}}{\overset{N}{\text{Kiválogat}}}\ i$

Változó
MaxÉ:TH
i:**Egész**

MaxÉ:=X[1]
i=2..N
X[i]>MaxÉ (I / N)
MaxÉ:=X[i] | —
...

Specifikáció:
- Bemenet: $N\in\mathbb{N}$, $X_{1..N}\in H^N$
- Kimenet: $Max\in\mathbb{N}$, $MaxÉrt\in H$
- Előfeltétel: $N>0$
- Utófeltétel: $1\le Max\le N$ és $\forall i\ (1\le i\le N)$: $X_{Max}\ge X_i$ és $Maxért=X_{Max}$

MaxÉrt:=X[1]
i=2..N
X[i]>MaxÉrt (I / N)
MaxÉrt:=X[i] | —

Maximum-kiválasztás + kiválogatás

1. megoldási ötlet:

Határozzuk meg a maximumértéket, majd válogassuk ki a vele egyenlőeket!

Specifikáció:

- Bemenet: $N \in N, X_{1..N} \in H^N$
- Kimenet: $Db \in N$, $MaxI_{1..N} \in N^N$
- Előfeltétel: $N>0$
- Utófeltétel: $MaxÉ = \underset{i=1}{\overset{N}{MaxÉrt}}\ X_i$ és $(Db, MaxI) = \underset{\substack{i=1 \\ X_i = MaxÉ}}{\overset{N}{Kiválogat}}\ i$

…

Db:=0

i=1..N

X[i]=MaxÉ

I	N
Db:=Db+1	—
MaxI[Db]:=i	

Specifikáció:

- Bemenet: $N \in N, X_{1..N} \in H^N$, $T: H \to L$
- Kimenet: $Db \in N, Y_{1..N} \in N^N$
- Előfeltétel: –
- Utófeltétel: $Db = \sum_{\substack{i=1 \\ T(X_i)}}^{N} 1$ és $\forall i (1 \le i \le Db): T(X_{Y_i})$ és $Y \subseteq (1,2,\ldots,N)$

Db:=0

i=1.. N

T(X[i])

I	N
Db:=Db+1	—
Y[Db]:=i	

Maximum-kiválasztás + kiválogatás

2. megoldási ötlet:

A pillanatnyi maximálissal egyenlőeket azonnal válogassuk ki! Ha „feleslegeset” válogattunk ki, azt a következő maximumnál felülírjuk.

Specifikáció:
- Bemenet: $N \in \mathbb{N}, X_{1..N} \in H^N$
- Kimenet: $Db \in \mathbb{N}$, $MaxI_{1..N} \in \mathbb{N}^N$
- Előfeltétel: $N>0$
- Utófeltétel: $MaxÉ = \underset{i=1}{\overset{N}{MaxÉrt}}\ X_i$ és $(Db,MaxI) = \underset{\substack{i=1\\ X_i=MaxÉ}}{\overset{N}{Kiválogat}}\ i$

Változó
MaxÉ:TH
i:**Egész**

Db:=1; MaxI[1]:=1; MaxÉ:=X[1]		
i=2..N		
	X[i]>MaxÉ	X[i]=MaxÉ
	Db:=1	Db:=Db+1
	MaxI[1]:=i	MaxI[Db]:=i
	MaxÉ:=X[i]	—

Eldöntés + megszámolás

Feladat:

Van-e egy sorozatban legalább K darab adott tulajdonságú elem?

Specifikáció:

- Bemenet: $N,K \in \mathbb{N}$, $X_{1..N} \in \mathbb{H}^N$, $T:\mathbb{H} \to \mathbb{L}$
- Kimenet: $Van \in \mathbb{L}$
- Előfeltétel: $K>0$
- Utófeltétel: $db = \sum_{\substack{i=1 \\ T(X_i)}}^{N} 1$ és $Van = db \geq K$

Specifikáció:

- Bemenet: $N \in \mathbb{N}$, $X_{1..N} \in \mathbb{H}^N$, $T:\mathbb{H} \to \mathbb{L}$
- Kimenet: $Van \in \mathbb{L}$
- Előfeltétel: –
- Utófeltétel: $Van = \exists i (1 \leq i \leq N): T(X_i)$

Specifikáció:

- Bemenet: $N \in \mathbb{N}$, $X_{1..N} \in \mathbb{H}^N$, $T:\mathbb{H} \to \mathbb{L}$
- Kimenet: $Db \in \mathbb{N}$
- Előfeltétel: –
- Utófeltétel: $Db = \sum_{\substack{i=1 \\ T(X_i)}}^{N} 1$

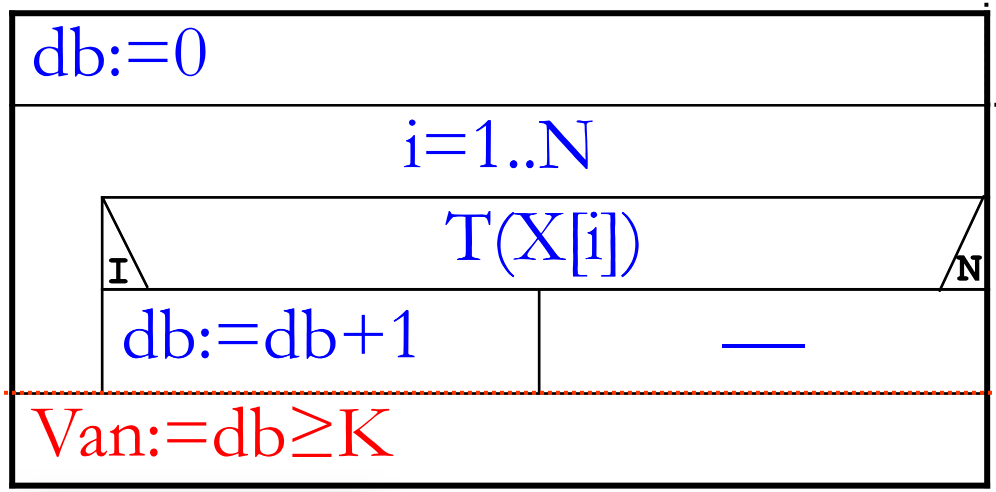
Eldöntés + megszámolás

1. megoldási ötlet:

Számoljuk meg, hogy hány adott tulajdonságú van, majd nézzük meg, hogy ez legalább K-e! (Azaz valójában nincs: eldöntés tétel!)

Specifikáció:

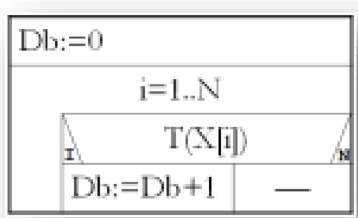
- Bemenet: $N,K \in \mathbb{N}$, $X_{1..N} \in H^N$, $T:H \to \mathbb{L}$
- Kimenet: $Van \in \mathbb{L}$
- Előfeltétel: $K>0$
- Utófeltétel: $db = \sum_{\substack{i=1 \\ T(X_i)}}^{N} 1$ és $Van = db \geq K$



Változó
db,
i:**Egész**

Specifikáció:

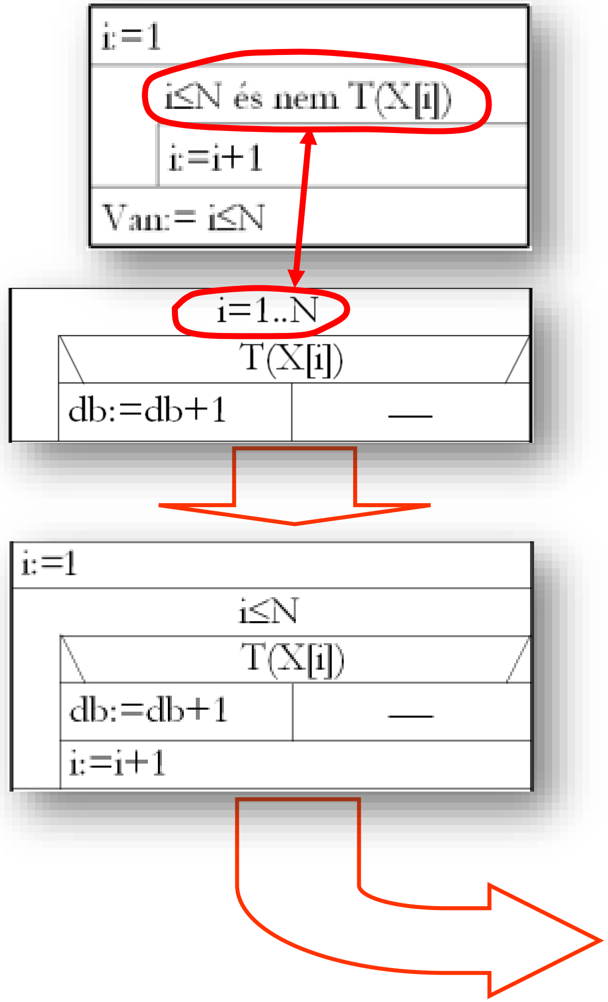
- Bemenet: $N \in \mathbb{N}$, $X_{1..N} \in H^N$, $T:H \to \mathbb{L}$
- Kimenet: $Db \in \mathbb{N}$
- Előfeltétel: –
- Utófeltétel: $Db = \sum_{\substack{i=1 \\ T(X_i)}}^{N} 1$



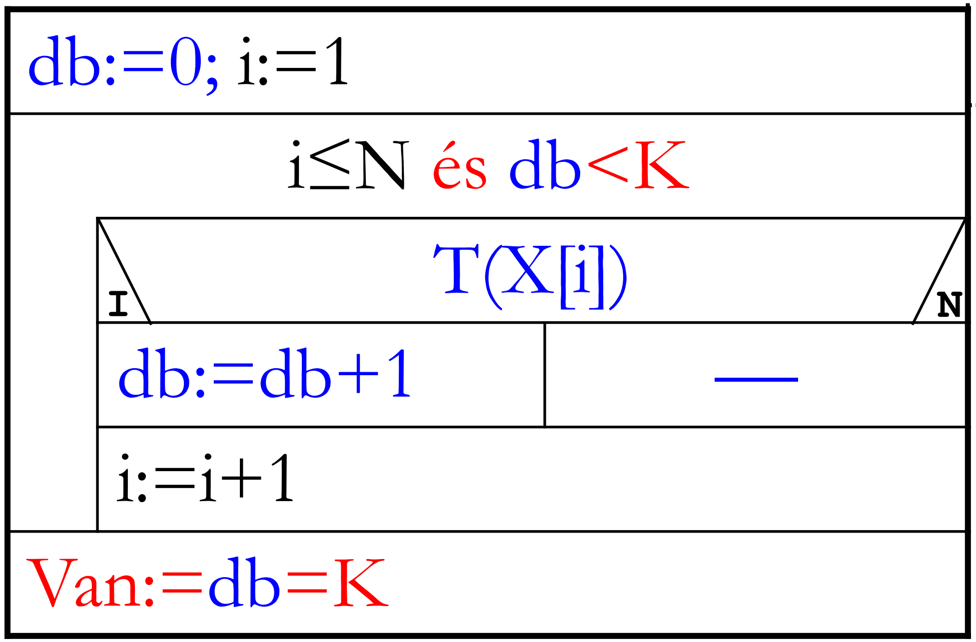
Eldöntés + megszámolás

2. megoldási ötlet:

Ha már találtunk K darab adott tulajdonságút, akkor ne nézzük tovább!



Változó
db,
i:**Egész**



Keresés + megszámolás

Feladat:

Egy sorozatban melyik a K. adott tulajdonságú elem (ha van egyáltalán)?

Specifikáció:

- Bemenet: $N,K \in \mathbb{N}$, $X_{1..N} \in H^N$, $T:H \to \mathbb{L}$
- Kimenet: $Van \in \mathbb{L}$, $KI \in \mathbb{N}$
- Előfeltétel: $K>0$
- Utófeltétel: $Van = \exists i(1 \le i \le N): \sum\limits_{\substack{j=1 \\ T(X_j)}}^{i} 1 = K$ és

$$Van \to 1 \le KI \le N \text{ és } \sum_{\substack{j=1 \\ T(X_j)}}^{KI} 1 = K \text{ és } T(X_{KI})$$

Specifikáció:
- Bemenet: $N \in \mathbb{N}$, $X_{1..N} \in H^N$, $T:H \to \mathbb{L}$
- Kimenet: $Van \in \mathbb{L}$, $Ind \in \mathbb{N}$, $Ért \in H$
- Előfeltétel: –
- Utófeltétel: $Van = \exists i\ (1 \le i \le N): T(X_i)$ és $Van \to 1 \le Ind \le N$ és $T(X_{Ind})$ és $Ért = X_{Ind}$

Specifikáció:
- Bemenet: $N \in \mathbb{N}$, $X_{1..N} \in H^N$, $T:H \to \mathbb{L}$
- Kimenet: $Db \in \mathbb{N}$
- Előfeltétel: –
- Utófeltétel: $Db = \sum\limits_{\substack{i=1 \\ T(X_i)}}^{N} 1$

Keresés + megszámolás

1. megoldási ötlet(ek):

Az előbbi ötlet: „számoljuk meg, hogy hány adott tulajdonságú van, majd nézzük meg, hogy ez legalább K-e…” kevés, még hátra van a K. újbóli megkeresése…

A működőnek látszó ötlet: a megszámolás helyett kiválogatás kell… és a keresésre nincs szükség…
… de helypazarló és túl hosszadalmas!

Specifikáció:
- Bemenet: $N,K \in \mathbb{N}$, $X \in H^N$
- Kimenet: $Van \in \mathbb{L}$, $KI \in \mathbb{N}$
- Előfeltétel: $K>0$
- Utófeltétel: $Van = \exists i (1 \le i \le N): \sum_{\substack{j=1 \\ T(X_j)}}^{i} 1 = K$ és

$$Van \rightarrow 1 \le KI \le N \text{ és } \sum_{\substack{j=1 \\ T(X_j)}}^{KI} 1 = K \text{ és } T(X_{KI})$$

Keresés + megszámolás

Specifikáció:
- Bemenet: $N,K\in N$, $X_{1..N}\in H^N$, $T:H\to L$
- Kimenet: $Van\in L$, $KI\in N$
- Előfeltétel: $K>0$
- Utófeltétel: $Van=\exists i(1\le i\le N):\sum_{\substack{j=1\\T(X_j)}}^{i} 1 = K$ és
  $Van\to 1\le KI\le N$ és $\sum_{\substack{j=1\\T(X_j)}}^{KI} 1 = K$ és $T(X_{KI})$

Specifikáció:
- Bemenet: $N\in N$, $X_{1..N}\in H^N$, $T:H\to L$
- Kimenet: $Van\in L$, $Ind\in N$, $Ért\in H$
- Előfeltétel: –
- Utófeltétel: $Van=\exists i\ (1\le i\le N): T(X_i)$ és
  $Van\to 1\le Ind\le N$ és $T(X_{Ind})$ és $Ért=X_{Ind}$

Specifikáció:
- Bemenet: $N\in N$, $X_{1..N}\in H^N$, $T:H\to L$
- Kimenet: $Db\in N$
- Előfeltétel: –
- Utófeltétel: $Db=\sum_{\substack{i=1\\T(X_i)}}^{N} 1$

```
i:=1
  iN és nem T(X[i])
    i:=i+1
Van:=iN
  Van
  I: Ind:=i
```

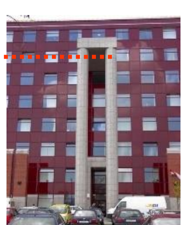
```
Db:=0
  i=1..N
    T(X[i])
    I: Db:=Db+1 | N: —
```

2. megoldási ötlet:

Ha már találtunk K darab adott tulajdonságút, akkor ne nézzük tovább: keresés a K.-ig.

Változó
db,
i:**Egész**

```
db:=0; i:=1
  i≤N és db<K
    T(X[i])
    I: db:=db+1 | N: —
    i:=i+1
Van:=db=K
...
```



Keresés + megszámolás

2. megoldási ötlet:

Ha megtaláltuk a K.-at, akkor jegyezzük föl az indexét!

Specifikáció:

- Bemenet: $N,K \in \mathbb{N}, X_{1..N} \in H^N, T:H \to \mathbb{L}$
- Kimenet: $Van \in \mathbb{L}, KI \in \mathbb{N}$
- Előfeltétel: $K>0$
- Utófeltétel: $Van = \exists i(1 \le i \le N): \sum_{\substack{j=1 \\ T(X_j)}}^{i} 1 = K$ és

  $Van \to 1 \le KI \le N$ és $\sum_{\substack{j=1 \\ T(X_j)}}^{KI} 1 = K$ és $T(X_{KI})$

i:=1	
i≤N és nem T(X[i])	
i:=i+1	
Van:=i≤N	
Van (I / N)	
Ind:=i	—

…	
Van (I / N)	
KI:=i–1	

Keresés + másolás

Feladat:

Egy sorozat első T tulajdonságú eleme előtti elemei kiválogatása (az összes, ha nincs T tulajdonságú).

Specifikáció:

- Bemenet: $N \in \mathbb{N}, X_{1..N} \in \mathbb{H}^N, T:\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{L}$
- Kimenet: $Db \in \mathbb{N}, Y_{1..N} \in \mathbb{H}^N$
- Előfeltétel: –
- Utófeltétel: $Van = \exists i(1 \leq i \leq N): T(X_i)$ és
  $Van \rightarrow (\ 0 \leq Db < N$ és $T(X_{Db+1})\ )$ és
  nem $Van \rightarrow Db = N$ és
  $\forall i(1 \leq i \leq Db): (\ $nem $T(X_i)$ és $Y_i = X_i\ )$

Specifikáció:

- Bemenet: $N \in \mathbb{N}, X_{1..N} \in \mathbb{H}^N, T:\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{L}$
- Kimenet: $Van \in \mathbb{L}, Ind \in \mathbb{N}, Ért \in \mathbb{H}$
- Előfeltétel: –
- Utófeltétel: $Van = \exists i\ (1 \leq i \leq N): T(X_i)$ és
  $Van \rightarrow 1 \leq Ind \leq N$ és $T(X_{Ind})$ és $Ért = X_{Ind}$

Specifikáció:

- Bemenet: $N,K \in \mathbb{N}$, $X_{1..N} \in H^N$, $T: H \to L$
- Kimenet: $Db \in \mathbb{N}$, $Y_{1..N} \in H^N$
- Előfeltétel: –
- Utófeltétel: $Van = \exists i(1 \le i \le N)$: $T(X_i)$ és
  $Van \to (\, 0 \le Db < N$ és $T(X_{Db+1})\,)$ és
  nem $Van \to Db = N$ és
  $\forall i(1 \le i \le Db)$: (nem $T(X_i)$ és $Y_i = X_i$)

Keresés + másolás

1. megoldási ötlet:

Az első ötlet: „keressük meg az első adott tulajdonságú elemet, majd az előtte levőket másoljuk le…”

… hosszadalmas!

Specifikáció:

- Bemenet: $N,K \in \mathbb{N}$, $X_{1..N} \in H^N$, $T{:}H \rightarrow \mathbb{L}$
- Kimenet: $Db \in \mathbb{N}$, $Y_{1..N} \in H^N$
- Előfeltétel: –
- Utófeltétel: $Van = \exists i(1 \le i \le N){:}\ T(X_i)$ és
  $Van \rightarrow (0 \le Db < N$ és $T(X_{Db+1}))$ és
  nem $Van \rightarrow Db = N$ és
  $\forall i(1 \le i \le Db){:}\ ($nem $T(X_i)$ és $Y_i = X_i)$

Keresés + másolás

2. megoldási ötlet:

Keresés közben másoljuk le a szükséges elemeket:

i:=1
i≤N és nem T(X[i])
    i:=i+1
Van:=i≤N
Van (I / N)
Ind:=i | —

i=1..N
    Y[i]:=f(X[i])

i:=1
i≤N és nem T(X[i])
    Y[i]:=X[i]
    i:=i+1
Db:=i–1

Változó
i:**Egész**

Eldöntés + eldöntés

Feladat:

Van-e két sorozatnak közös eleme?

Specifikáció:

- Bemenet: $N,M \in \mathbb{N}$, $X_{1..N} \in \mathbb{H}^N$, $Y_{1..M} \in \mathbb{H}^M$
- Kimenet: $Van \in \mathbb{L}$
- Előfeltétel: –
- Utófeltétel: $Van = \exists i(1 \leq i \leq N): (\exists j(1 \leq j \leq M): X_i = Y_j)$
- Utófeltétel': $Van = \overset{N}{\underset{i=1}{\exists}} \left(\overset{M}{\underset{j=1}{\exists}} X_i = Y_j \right)$

Specifikáció:

- Bemenet: $N \in \mathbb{N}$, $X_{1..N} \in \mathbb{H}^N$, $T: \mathbb{H} \to \mathbb{L}$
- Kimenet: $Van \in \mathbb{L}$
- Előfeltétel: –
- Utófeltétel: $Van = \exists i(1 \leq i \leq N): T(X_i)$

Eldöntés + eldöntés

1. megoldási ötlet:

Határozzuk meg a két sorozat közös elemeit (metszet), s ha ennek elemszáma legalább 1, akkor van közös elem!

Specifikáció:

- Az utófeltétel „igazítása”:
  - a metszet részeredménye volt: $Db \in \mathbb{N}$
  - a módosított utófeltétel:

    metszet utófeltétele és $Van = Db > 0$.

Specifikáció:
- Bemenet: $N, M \in \mathbb{N}, X_{1..N} \in H^N, Y_{1..M} \in H^M$
- Kimenet: $Van \in \mathbb{L}$
- Előfeltétel: –
- Utófeltétel: $Van = \exists i(1 \leq i \leq N): (\exists j(1 \leq j \leq M): X_i = Y_j)$

Specifikáció:
- Bemenet: $N, M \in \mathbb{N}, X_{1..N} \in H^N, Y_{1..M} \in H^M$
- Kimenet: $Db \in \mathbb{N}, Z_{1..\min(N,M)} \in H^{\min(N,M)}$
- Előfeltétel: HalmazE(X) és HalmazE(Y)
- Utófeltétel: $Db = \sum_{\substack{i=1 \\ X_i \in Y}}^{N} 1$ és $\forall i(1 \leq i \leq Db): (Z_i \in X$ és $Z_i \in Y)$ és HalmazE(Z)

Megjegyzés:

A metszet = kiválogatás + eldöntés.

Nem hatékony: nem érdekesek a közös elemek.

Eldöntés + eldöntés

2. megoldási ötlet:

Ha már találtunk 1 darab közös elemet, akkor ne nézzük tovább!

- Utófeltétel': $Van = \overset{N}{\underset{i=1}{\exists}}\left(\overset{M}{\underset{j=1}{\exists}} X_i = Y_j\right)$

Specifikáció:

- Bemenet: $N \in \mathbb{N}$, $X_{1..N} \in H^N$, $T: H \to L$
- Kimenet: $Van \in L$
- Előfeltétel: –
- Utófeltétel: $Van = \exists i(1 \le i \le N): T(X_i)$

i:=0
Van:=Hamis
i<N és nem Van
i:=i+1
Van:=T(X[i])

i:=0; Van:=Hamis
i<N és nem Van
i:=i+1; j:=1
j≤M és X[i]≠Y[j]
j:=j+1
Van:=j≤M

Változó
i,j:**Egész**

Összegzés mátrixra

Feladat:

Egy mátrix elemeinek összege.

Specifikáció:

- Bemenet: $N,M \in \mathbb{N}$, $X_{1..N,1..M} \in \mathbb{Z}^{N \times M}$
- Kimenet: $S \in \mathbb{Z}$
- Előfeltétel: –
- Utófeltétel: $S = \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{j=1}^{M} X_{i,j} \right)$

Specifikáció (az általános):

- Bemenet: $N \in \mathbb{N}$, $X_{1..N} \in H^N$
- Kimenet: $S \in H$
- Előfeltétel: –
- Utófeltétel: $S = F(X_{1..N})$
- Definíció:

$$F: H^* \to H$$

$$F(X_{1..N}) := \begin{cases} F_0 & , N = 0 \\ f(F(X_{1..N-1}), X_N) & , N > 0 \end{cases}$$

$$f: H \times H \to H,\ F_0 \in H$$

$$\sum_{i=1}^{N} X_i := \begin{cases} 0 & , N = 0 \\ \sum_{i=1}^{N-1} X_i + X_N & , N > 0 \end{cases}$$

Összegzés mátrixra

Algoritmus:

Ez két – egymásba ágyazott – összegzés tétel alkalmazását kívánja meg.

Specifikáció:

- Bemenet: $N,M \in \mathbb{N}$, $X_{1..N,1..M} \in \mathbb{Z}^{N \times M}$
- Kimenet: $S \in \mathbb{Z}$
- Előfeltétel: –
- Utófeltétel: $S = \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{j=1}^{M} X_{i,j} \right)$

Változó
i,j,S0:**Egész**

S:=0

i=1..N

S0:=0

j=1..M

S0:=S0+X[i,j]

S:=S+S0

Összegzés mátrixra

Algoritmus:

A megoldás lényegében csak abban különbözik az alapváltozattól, hogy a mátrix miatt két – egymásba ágyazott – ciklusra van szükség.

Specifikáció:

- Bemenet: $N,M \in \mathbb{N}$, $X_{1..N,1..M} \in \mathbb{Z}^{N \times M}$
- Kimenet: $S \in \mathbb{Z}$
- Előfeltétel: –
- Utófeltétel: $S = \sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{M} X_{i,j}\right)$

Változó
i,j:**Egész**

```
S:=0
i=1..N
    j=1..M
        S:=S+X[i,j]
```

Megjegyzés: a másolás, a megszámolás és a maximum-kiválasztás tétel hasonló elven valósítható meg mátrixokkal.

Eldöntés mátrixra

Feladat:

Van-e egy mátrixban adott tulajdonságú elem?

Specifikáció:

- Bemenet: $N,M \in \mathbb{N}$, $X_{1..N,1..M} \in \mathbb{H}^{N \times M}$
- Kimenet: $Van \in \mathbb{L}$
- Előfeltétel: –
- Utófeltétel: $Van = \exists i(1 \le i \le N): (\ \exists j(1 \le j \le M): T(X_{i,j})\ )$
- Utófeltétel': $Van = \overset{N}{\underset{i=1}{\exists}} \left(\overset{M}{\underset{j=1}{\exists}} T(X_{i,j}) \right)$

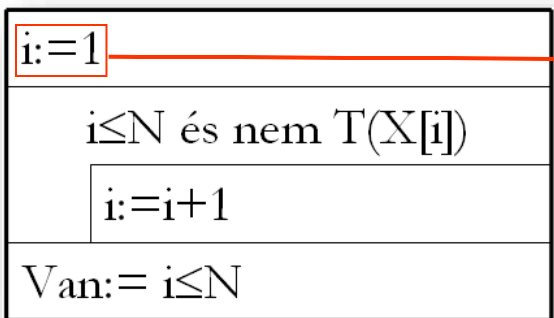
Specifikáció:

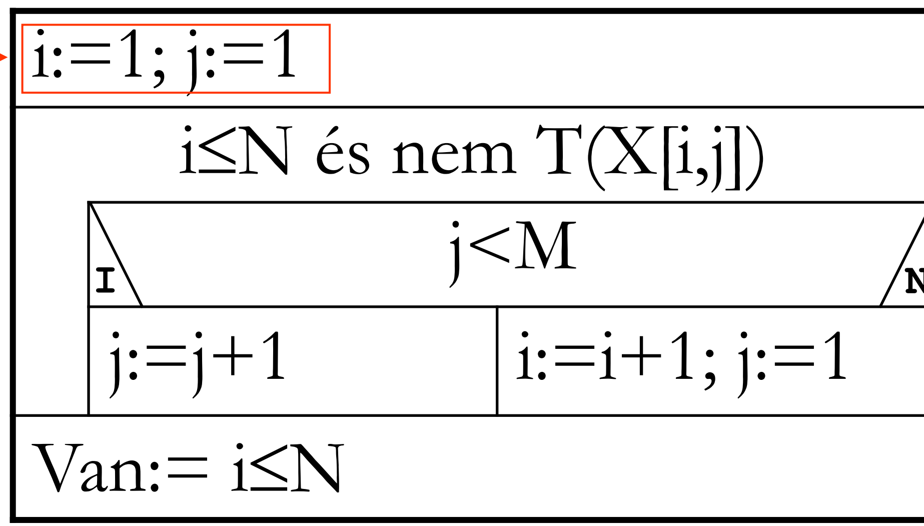
- Bemenet: $N \in \mathbb{N}$, $X_{1..N} \in \mathbb{H}^N$, $T: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{L}$
- Kimenet: $Van \in \mathbb{L}$
- Előfeltétel: –
- Utófeltétel: $Van = \exists i(1 \le i \le N): T(X_i)$

Eldöntés mátrixra

Algoritmus:

Az alapváltozathoz képest itt meg kell fogalmazni a mátrix elemein való – nem feltétlenül – végighaladást, soronként, balról jobbra!





Változó
i,j:**Egész**

Eldöntés mátrixra

Algoritmus:

Az alapváltozathoz képest itt meg kell fogalmazni a mátrix elemein való – nem feltétlenül – végighaladást, soronként, balról jobbra!

```
i:=1
  i≤N és nem T(X[i])
    i:=i+1
Van:= i≤N
```

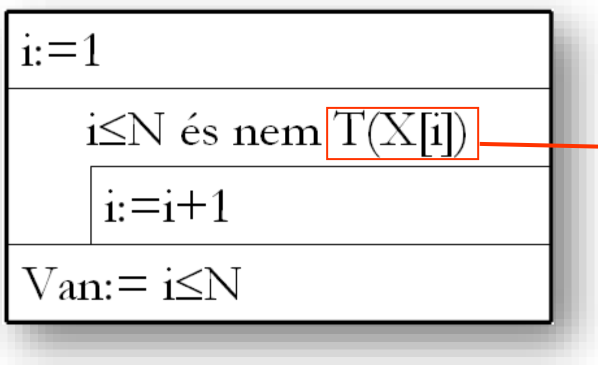
```
i:=1; j:=1
  i≤N és nem T(X[i,j])
    j<M
    I: j:=j+1
    N: i:=i+1; j:=1
Van:= i≤N
```

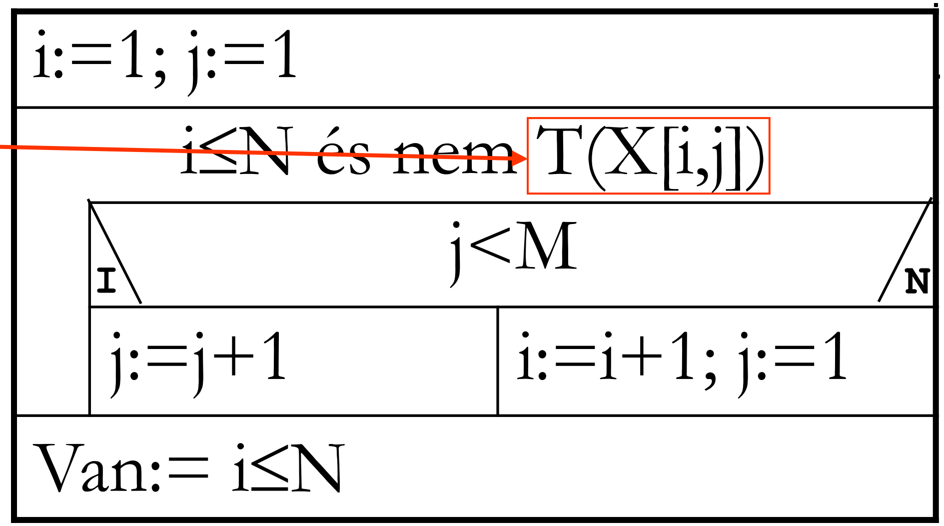
Változó
i,j:**Egész**

Eldöntés mátrixra

Algoritmus:

Az alapváltozathoz képest itt meg kell fogalmazni a mátrix elemein való – nem feltétlenül – végighaladást, soronként, balról jobbra!





Változó
i,j:**Egész**

Eldöntés mátrixra

Algoritmus:

Az alapváltozathoz képest itt meg kell fogalmazni a mátrix elemein való – nem feltétlenül – végighaladást, soronként, balról jobbra!

```
i:=1
   i≤N és nem T(X[i])
      i:=i+1
Van:= i≤N
```

```
i:=1; j:=1
   i≤N és nem T(X[i,j])
      j<M
      I: j:=j+1
      N: i:=i+1; j:=1
Van:= i≤N
```

Változó
i,j:**Egész**

Megjegyzés: a keresés és a kiválasztás tétel is hasonlóan fogalmazható meg mátrixokra.

Áttekintés

- Másolással összeépítés
- Kiválogatás + összegzés
- Kiválogatás + maximum-kiválasztás
- Maximum-kiválasztás + kiválogatás
- Eldöntés + megszámolás
- Keresés + megszámolás
- Keresés + másolás
- Eldöntés + eldöntés
- Sorozatszámítás mátrixra
- Eldöntés mátrixra