10. előadás

FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA 2.

Nevezetes határértékek 2.

$\boxed{6.}$ **Hatványsor összegfüggvényének a határértéke.** *Tegyük fel, hogy a* $\sum \alpha_n (x-a)^n$ *hatványsor* R *konvergenciasugara pozitív. Jelölje*

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (x-a)^n \quad \big(x \in K_R(a)\big)$$

az összegfüggvényét. Ekkor $\forall\, b \in K_R(a)$ *pontban létezik a* $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ *határérték, és*

$$\lim_{x\to b} f(x) = f(b) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (b-a)^n.$$

Bizonyítás. Először azt igazoljuk, hogy

$$(*) \qquad \text{ha } \ r \in (0,R) \quad \Longrightarrow \quad \text{a } \sum_{n=1} n\,\alpha_n\, r^{n-1} \text{ sor abszolút konvergens.}$$

Legyen $\varrho \in (r,R)$. Ekkor a $\sum\limits_{n=0} \alpha_n\, \varrho^n$ sor abszolút konvergens (ti. a $\sum\limits_{n=0} \alpha_n\,(x-a)^n$ sor az $x = a+\varrho$ helyen abszolút konvergens), tehát $\lim\limits_{n\to+\infty} \big(\alpha_n\, \varrho^n\big) = 0$. Ezért az $\big(\alpha_n\, \varrho^n\big)$ sorozat korlátos, azaz

$$\exists\, M > 0 : \ \ \big|\alpha_n\, \varrho^n\big| \le M \quad \Longrightarrow \quad |\alpha_n| \le \frac{M}{\varrho^n} \ \ \big(\forall\, n \in \mathbb{N}^+\big) \quad \Longrightarrow$$

$$\big|n\,\alpha_n\, r^{n-1}\big| = \frac{1}{r}\, n\, |\alpha_n|\, r^n \le \frac{M}{r} \cdot n \left(\frac{r}{\varrho}\right)^n \quad \big(\forall\, n \in \mathbb{N}^+\big).$$

Mivel $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{M}{r} \cdot n \cdot \left(\frac{r}{\varrho}\right)^n} = \frac{r}{\varrho} < 1$, ezért a gyökkritérium szerint a $\sum\limits_{n=1} n \left(\frac{r}{\varrho}\right)^n$ végtelen sor konvergens. A majoráns kritérium alapján a $\sum\limits_{n=1} n\,\alpha_n\, r^{n-1}$ sor abszolút konvergens. A $(*)$ állítást tehát bebizonyítottuk. Legyen $C := \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\, |\alpha_n|\, r^{n-1} < +\infty$.

Vegyünk most egy tetszőleges $b \in K_R(a)$ pontot. Válasszuk meg r-et úgy, hogy $0 \le |b-a| < r < R$. Ekkor $\forall\, x \in K_r(a)$ helyen a következő becslések érvényesek:

$$\big|f(x) - f(b)\big| = \left| \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \cdot \Big((x-a)^n - (b-a)^n \Big) \right| \le$$

$$\leq \sum_{n=0}^{+\infty} |\alpha_n| \cdot |x-b| \cdot \big(|x-a|^{n-1} + |x-a|^{n-2} \cdot |b-a| + \cdots + |b-a|^{n-1}\big) \leq$$

$$\leq \ \big(|x-a|, |b-a| < r\big) \ \leq |x-b| \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n| \cdot n\, r^{n-1} = C \cdot |x-b|.$$

Így

$$\big|f(x) - f(b)\big| \leq C \cdot |x-b| \quad \big(x \in K_r(a)\big).$$

Ebből – például az átviteli elv alapján – az állítás már következik. ■

$\boxed{7.}$ **Az** exp**, a** sin **és a** cos **függvény végesben vett határértéke.** *Az* exp, sin, cos *függvényeknek minden $a \in \mathbb{R}$ pontban van határértéke, és azok egyenlők az a-ban vett helyettesítési értékekkel:*

$$\lim_{x\to a} e^x = e^a, \qquad \lim_{x\to a} \sin x = \sin a, \qquad \lim_{x\to a} \cos x = \cos a.$$

$\boxed{8.}$ **Az** exp **függvény határértéke** $(\pm\infty)$**-ben.** *Az* exp *függvénynek van határértéke* $(\pm\infty)$*-ben, és*

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$$

Bizonyítás. Mivel

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots > x \quad \big(0 \leq x \in \mathbb{R}\big)$$

és $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, ezért $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

Mivel $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$ $\big(\forall\, x \in \mathbb{R}\big)$, ezért

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^{-x}} = \big(\text{az } y = -x \text{ helyettesítéssel}\big) = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{e^y} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Így $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$. ■

$\boxed{9.}$ *A* $\dfrac{\sin x}{x}$ $\big(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big)$ *függvénynek a* 0 *pontban van határértéke, és*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Bizonyítás. A definíció szerint

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Ezért
$$\frac{\sin x}{x}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots\qquad\big(x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\big).$$
A hányadoskritérium alkalmazásával könnyű megmutatni, hogy a jobb oldalon szereplő hatványsor az egész $\mathbb{R}$-en konvergens, így a $\boxed{\mathbf{6.}}$ állítás szerint a 0 pontban van határértéke, és az egyenlő a helyettesítési értékkel, azaz
$$\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots\right)=1.$$
Ebből az állítás már következik. ■

$\boxed{\mathbf{10.}}$ **Monoton függvények határértéke.**

Először emlékeztetünk függvények monotonitásainak a fogalmaira. Legyen $f\in\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, és tegyük fel, hogy $\emptyset\neq H\subset\mathcal{D}_f$. Az f függvény

- **monoton növekedő H-n** (jelben $f\nearrow H$-n), ha
$$\forall\ x_1,x_2\in H,\ x_1<x_2 \text{ esetén } f(x_1)\le f(x_2);$$
- **szigorúan monoton növekedő H-n** (jelben $f\uparrow H$-n), ha
$$\forall\ x_1,x_2\in H,\ x_1<x_2 \text{ esetén } f(x_1)< f(x_2);$$
- **monoton csökkenő H-n** (jelben $f\searrow H$-n), ha
$$\forall\ x_1,x_2\in H,\ x_1<x_2 \text{ esetén } f(x_1)\ge f(x_2);$$
- **szigorúan monoton csökkenő H-n** (jelben $f\downarrow H$-n), ha
$$\forall\ x_1,x_2\in H,\ x_1<x_2 \text{ esetén } f(x_1)> f(x_2).$$

Az f függvény **monoton H-n**, ha a fenti esetek valamelyike áll fenn.

Megjegyzés. A $\mathcal{D}_f=\mathbb{N}$ speciális esetben visszakapjuk a monoton sorozatok korábbi definícióit.

Tétel. *Legyen $(\alpha,\beta)\subset\mathbb{R}$ tetszőleges (korlátos vagy nem korlátos) nyílt intervallum. Ha az f függvény monoton (α,β)-n, akkor f-nek $\forall\ a\in(\alpha,\beta)$ pontban létezik a jobb oldali, illetve a bal oldali határértéke.*

(a) *Ha $f\nearrow(\alpha,\beta)$-n, akkor*
$$\lim_{a+0}f=\inf\big\{f(x)\ \big|\ x\in(\alpha,\beta),\ x>a\big\},$$
$$\lim_{a-0}f=\sup\big\{f(x)\ \big|\ x\in(\alpha,\beta),\ x<a\big\}.$$

(b) *Ha $f\searrow(\alpha,\beta)$-n, akkor*
$$\lim_{a+0}f=\sup\big\{f(x)\ \big|\ x\in(\alpha,\beta),\ x>a\big\},$$
$$\lim_{a-0}f=\inf\big\{f(x)\ \big|\ x\in(\alpha,\beta),\ x<a\big\}.$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $f \nearrow (\alpha,\beta)$-n. A jobb oldali határértékre vonatkozó állítást igazoljuk.

Legyen $m := \inf\big\{f(x) \;\big|\; x \in (\alpha,\beta),\ x > a\big\}$. Világos, hogy $m \in \mathbb{R}$. Az infimum definíciójából következik, hogy

$$\text{(i) } m \le f(x) \quad \forall\, x \in (\alpha,\beta),\ x > a;$$
$$\text{(ii) } \forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz } \ \exists\, x_1 \in (\alpha,\beta),\ x_1 > a: \quad f(x_1) < m + \varepsilon.$$

Így $m \le f(x_1) \le m+\varepsilon$. Mivel $f \nearrow (\alpha,\beta)$-n, ezért

$$m \le f(x) \le f(x_1) < m + \varepsilon \quad \forall\, x \in (a, x_1) \text{ pontban.}$$

A $\delta := x_1 - a > 0$ választással tehát azt mutattuk meg, hogy

$$\forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz } \ \exists\, \delta > 0, \quad \forall\, x \in (\alpha,\beta),\ a < x < a+\delta: \ \underbrace{0 \le f(x) - m < \varepsilon}_{f(x) \in K_\varepsilon(m)}.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy f-nek a-ban van jobb oldali határértéke, és az m-mel egyenlő, azaz

$$\lim_{a+0} f = m = \inf\big\{f(x) \;\big|\; x \in (\alpha,\beta),\ x > a\big\}.$$

A tétel többi állítása hasonlóan bizonyítható. ■

Megjegyzés. Ha $+\infty \in \mathcal{D}'_f$, akkor létezik a $\lim\limits_{x\to+\infty} f$ határérték, és

$$\lim_{x\to+\infty} f = \sup \mathcal{R}_f.$$

Ha $-\infty \in \mathcal{D}'_f$, akkor létezik a $\lim\limits_{x\to-\infty} f$ határérték, és

$$\lim_{x\to-\infty} f = \inf \mathcal{R}_f.$$

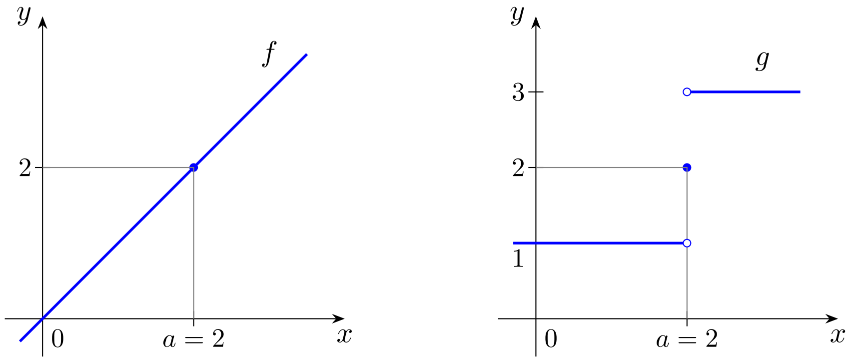
FÜGGVÉNYEK FOLYTONOSSÁGA

A „folytonos" kifejezést a mindennapi életben is gyakran használjuk. Most arról lesz szó, hogy valós-valós függvényekre a szemléletünk alapján adódó ezzel kapcsolatos tulajdonságot hogyan lehet matematikai szempontból precíz formában megfogalmazni.

A folytonosság fogalmának a motivációja

Tegyük fel, hogy egy képlettel megadott $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény helyettesítési értékét akarjuk kiszámítani egy adott $a \in \mathcal{D}_f$ pontban. Előfordulhat, hogy a-nak csak közelítő értékeivel számolhatunk. Ez a helzet például akkor, ha a értékeit mérés segítségével határozzuk meg, tehát a-nak csak a műszerek pontosságától függően jobb vagy rosszabb x közelítő értékeit ismerjük. A mért x értékből kiszámítva $f(x)$-et azt reméljük, hogy ha a-t jó közelítéssel, vagyis kis hibával adtuk meg (azaz x közel van a-hoz; jelben $x \sim a$), akkor $f(a)$ értékét is jó közelítéssel fogjuk megkapni $f(x)$-ből (azaz $f(x)$ közel lesz $f(a)$-hoz; jelben $f(x) \sim f(a)$). Ezekben az esetekben tehát feltételezzük azt, hogy $f(x) \sim f(a)$, ha x elég közel van a-hoz. Valós-valós függvénynek ezt a tulajdonságát nevezzük **pontbeli folytonosságnak**.

Tekintsük például a következő két egyszerű függvényt:



Látható, hogy az f függvény olyan, hogy ha $x \sim a$, akkor $f(x) \sim f(a)$. Ugyanezt nem mondhatjuk el a g függvényről. Akármilyen x számot veszünk, amely közel van a-hoz és $x \neq 2$, akkor a $g(x)$ függvényértékek nincsenek közel a $g(a)$ függvényértékhez. Azt fogjuk mondani, hogy az f függvény **folytonos az** $a = 2$ **pontban**, a g függvény pedig **nem folytonos az** $a = 2$ **pontban**.

Figyeljük meg, hogy hasonló problémával találkoztunk már függvények **végesben vett véges határérték** fogalmának a definíciójánál.

A folytonosság fogalma

A pontbeli folytonosság

1. definíció. *Azt mondjuk, hogy az* $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvény* ***folytonos az*** $a \in \mathcal{D}_f$ ***pontban****, ha*

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}_f, \ |x - a| < \delta : \quad \big|f(x) - f(a)\big| < \varepsilon.$$

Jelölés: $f \in C\{a\}$.

Megjegyzések

1. Függvény pontbeli folytonosságát csak az **értelmezési tartományának** a pontjaiban értelmezzük!

2. Figyeljük meg, hogy a definíció az f függvénynek valóban azt a tulajdonságát fejezi ki matematikai szempontból precíz módon, hogy ha „$x \sim a \implies f(x) \sim f(a)$". ■

A definícióból rögtön következik, hogy ha $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathcal{D}_f$, akkor

$$f \notin C\{a\} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \varepsilon > 0, \ \forall \delta > 0\text{-hoz } \exists x \in \mathcal{D}_f, \ |x - a| < \delta : \ \big|f(x) - f(a)\big| \geq \varepsilon.$$

Nézzünk néhány példát!

1. példa. *Ha*

$$f(x) := x \quad (x \in \mathbb{R}) \quad \textit{és} \quad a := 2,$$

akkor $f \in C\{2\}$.

Valóban: $\forall\, \varepsilon > 0$ valós számhoz a $\delta := \varepsilon$ alkalmas választás, mert

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad |x-2| < \delta \text{ esetén } |f(x) - f(2)| = |x-2| < \varepsilon.$$

2. példa. *Ha*

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \textit{ha } x \in (-\infty, 2) \\ 2, & \textit{ha } x = 2 \\ 3, & \textit{ha } x > 2 \end{cases} \qquad \textit{és} \quad a := 2,$$

akkor $g \notin C\{2\}$.

Valóban: Legyen például $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Ekkor $\forall\, \delta > 0$ valós számhoz van olyan $x \in \mathbb{R}$, például $x := 2 + \frac{\delta}{2}$, amelyre ugyan $|x-2| < \delta$, de $\big|g(x) - g(2)\big| = |3-2| > \frac{1}{2} = \varepsilon$. Ez pedig azt jelenti, hogy a g függvény nem folytonos az $a = 2$ pontban, azaz $g \notin C\{2\}$.

Figyeljük meg, hogy mi a különbség a *pontbeli folytonosság* és a hozzá nagyon hasonló *végesben vett véges határérték* között! A folytonosságnál megköveteljük azt, hogy $a \in \mathcal{D}_f$ legyen (az értelmezési tartományon kívüli pontokban nem beszélhetünk folytonosságról). A határértéket viszont az $a \in \mathcal{D}'_f$ pontokban értelmeztük. A két fogalom közötti kapcsolatról csak azokban a pontokban lehet szó, amelyekre $a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}'_f$. Tegyük fel, hogy $a \in \mathcal{D}_f$, de $a \notin \mathcal{D}'_f$. Ez azt jelenti, hogy van olyan $r > 0$, hogy

$$K_r(a) \cap \mathcal{D}_f = \{a\}.$$

Az ilyen a pontokat az értelmezési tartomány **izolált pontjainak** nevezzük. A folytonosság definíciójából rögtön következik, hogy ekkor $f \in C\{a\}$, hiszen tetszőleges $\varepsilon > 0$ mellett minden $0 < \delta \le r$ megfelelő.

A definíciók alapján az is világos, hogy ha $a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}'_f$, akkor az f függvény akkor és csak akkor folytonos a-ban, ha f-nek a-ban van határértéke, és az egyenlő az a-ban felvett $f(a)$ függvényértékkel.

1. tétel. *Legyen* $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1° *Ha* $a \in \mathcal{D}_f$ *izolált pont* $\implies$ $f \in C\{a\}$.

2° *Ha* $a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}'_f$, *akkor*

$$f \in C\{a\} \iff \exists \lim_a f \quad \textit{és} \quad \lim_a f = f(a).$$

Szakadási helyek és osztályozásuk

2. definíciók. *Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}_f$ és $f \notin C\{a\}$. Ekkor azt mondjuk, hogy az a pont az f függvény* ***szakadási helye*** *(vagy a-ban f-nek* ***szakadása van****). A szakadási helyeket a következőképpen osztályozzuk:*

1° *Az $a \in \mathcal{D}_f$ pont az f függvény* ***megszüntethető szakadási helye****, ha*

$$\exists \lim_a f \quad \textit{véges határérték,} \quad \textit{de} \quad \lim_a f \neq f(a).$$

2° *Az $a \in \mathcal{D}_f$ pont az f függvény* ***elsőfajú szakadási helye*** *(vagy f-nek* ***ugrása van*** *a-ban), ha*

$$\exists \lim_{a+0} f \quad \textit{és} \quad \exists \lim_{a-0} f, \quad \textit{ezek végesek,} \quad \textit{de} \quad \lim_{a+0} f \neq \lim_{a-0} f.$$

3° *Ha a $\lim_{a-0} f$ és a $\lim_{a+0} f$ egyoldali határértékek közül legalább az egyik nem létezik, vagy létezik, de nem véges, akkor azt mondjuk, hogy f-nek* ***az a helyen másodfajú szakadása van****.*

A „megszüntethető szakadás” elnevezés arra utal, hogy ebben az esetben az a pontban megváltoztatva a függvény értékét az f folytonossá tehető, ui. ekkor az

$$\widetilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & \text{ha } a \neq x \in \mathcal{D}_f \\ \lim_a f, & \text{ha } x = a \end{cases}$$

függvény már folytonos a-ban, hiszen $\widetilde{f}(a) = \lim_a f = \lim_a \widetilde{f}$.

3. példa.

$$f(x) := \begin{cases} x, & \textit{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ -1, & \textit{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvénynek a 0 pontban ***megszüntethető szakadása van****, mert $\lim_0 f = 0 \neq f(0) = -1$.*

4. példa. *Az előjelfüggvénynek (vagyis a sign függvénynek) a 0 pont* ***elsőfajú szakadási helye****, mert*

$$\lim_{0+0} \operatorname{sign} = 1 \neq \lim_{0-0} \operatorname{sign} = -1.$$

5. példa. *Az*

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \textit{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 1, & \textit{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvénynek a 0 pont ***másodfajú szakadási helye****, mert az egyoldali határértékek bár léteznek ($\lim_{0-0} f = -\infty$ és $\lim_{0+0} f = +\infty$), de ezek nem végesek.*

Egyoldali folytonosság

3. definíciók. *Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathcal{D}_f$.*

1º *Az f függvény **jobbról folytonos az** a **pontban**, ha*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0, \quad \forall\, x \in \mathcal{D}_f, \ a \le x < a + \delta \quad \textit{esetén} \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

2º *Az f függvény **balról folytonos az** a **pontban**, ha*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0, \quad \forall\, x \in \mathcal{D}_f, \ a - \delta < x \le a \quad \textit{esetén} \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

2. tétel. $f \in C\{a\} \iff$ *ha f jobbról és balról is folytonos az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban.*

Halmazon folytonos függvények

4. definíció. *Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $A \subset \mathcal{D}_f$. Az f függvény **folytonos az** A **halmazon** (jelben $f \in C(A)$), ha*

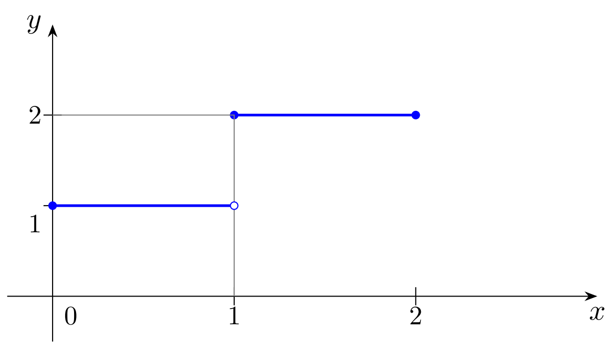
$$\forall\, a \in A \ \textit{esetén} \ f_{|A} \in C\{a\},$$

ahol $f_{|A}$ jelöli az f függvény A halmazra való leszűkítését, vagyis az

$$f_{|A} \colon A \to \mathbb{R}, \quad f_{|A}(x) := f(x)$$

függvényt.

Vigyázat: az „f folytonos A-n" *nem jelenti* azt, hogy f az A halmaz minden pontjában folytonos. Például az



$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 \le x < 1 \\ 2, & \text{ha } 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

függvény folytonos az $[1, 2]$ halmazon, de $f \notin C\{1\}$.

Folytonos függvények alaptulajdonságai

3. tétel: Előjeltartás. *Tegyük fel, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény folytonos az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban és $f(a) > 0$. Ekkor*

$$\exists\, K(a),\ \textit{hogy}\ f(x) > 0 \quad \forall\, x \in \mathcal{D}_f \cap K(a)\ \textit{pontban},$$

azaz $f(a)$ előjelét egy alkalmas $K(a)$ környezetben felvett függvényértékek is öröklik.

Bizonyítás. Alkalmazzuk a folytonosság definícióját az $\varepsilon := f(a) > 0$ számmal. Ekkor $\exists\, \delta > 0$ szám, hogy

$$\forall\, x \in \mathcal{D}_f,\ |x - a| < \delta \ \text{ esetén } \ \big|f(x) - f(a)\big| < f(a),$$

azaz

$$-f(a) < f(x) - f(a) < f(a).$$

Ezzel bebizonyítottuk azt, hogy

$$0 < f(x) \quad \big(< 2\,f(a)\big) \quad \text{ha} \ \ x \in \mathcal{D}_f \ \ \text{és} \ \ |x - a| < \delta. \ ■$$

4. tétel: Hatványsor összegfüggvényének folytonossága.

1° *Minden hatványsor összegfüggvénye folytonos a hatványsor teljes konvergenciahalmazán.*

2° *Az* exp*, a* sin *és a* cos *függvény minden $\mathbb{R}$-beli pontban folytonos.*

Bizonyítás.

1° Jelölje a hatványsor konvergenciaközéppontját $a \in \mathbb{R}$, a konvergenciasugarát R $(0 \le R \le +\infty)$ és az összegfüggvényét f. Ha $R = 0$, akkor az összegfüggvény folytonos, hiszen az értelmezési tartománya az egyetlen a (izolált) pontból álló halmaz. Ha $0 < R \le +\infty$, akkor a hatványsor összegfüggvényének határértékére vonatkozó tétel, valamint az 1. tétel alapján f folytonos az $(a - R, a + R)$ intervallumon. A $0 < R < +\infty$ esetben az is bebizonyítható, hogy a hatványsor összegfüggvénye a **teljes** konvergenciahalmazon folytonos.

2° A szóban forgó függvényeket az egész $\mathbb{R}$-en konvergens hatványsorok összegfüggvényeként értelmeztük, ezért az állítás **1°** közvetlen következménye. ■

5. tétel: Az algebrai műveletek és a folytonosság kapcsolata. *Tegyük fel, hogy $f, g \in C\{a\}$. Ekkor a*

$$\lambda f \ (\lambda \in \mathbb{R}), \quad f + g, \quad f \cdot g, \quad \frac{f}{g} \ \ (\textit{ha}\ g(a) \ne 0)$$

függvények is folytonosak a-ban.

Bizonyítás. Ha F jelöli a szóban forgó függvények valamelyikét, és $a \in \mathcal{D}_F \cap \mathcal{D}'_F$, akkor az állítások a műveletek és a határérték kapcsolatára vonatkozó tétel, valamint a határérték és a folytonosság kapcsolatát leíró tétel közvetlen következménye. Ha pedig $a \in \mathcal{D}_F \setminus \mathcal{D}'_F$, akkor (mint a $\mathcal{D}_F$ izolált pontjában) az F automatikusan folytonos. ■

A fenti állítások az értelemeszerű módosításokkal halmazon folytonos függvényekre is érvényesek.

6. tétel. *A polinomok, a racionális törtfüggvények, valamint a hatványfüggvények az értelmezési tartományuk minden pontjában folytonosak.*

7. tétel: A folytonosságra vonatkozó átviteli elv. *Tegyük fel, hogy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, és $a \in \mathcal{D}_f$. Ekkor*

$$f \in C\{a\} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\ (x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f, \ \lim_{n\to+\infty} x_n = a \text{ esetén } \ \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a).$$

Bizonyítás. A tétel a határértékre vonatkozó átviteli elv bizonyításához hasonlóan igazolható. ■

A összetett függvény folytonossága és határértéke

A függvények közötti kompozíció műveletére a folytonosság és a határérték esetén lényegesen különböző tételeket kell megfogalmaznunk. Kezdjük a folytonosság és a kompozíció kapcsolatával.

8. tétel: Az összetett függvény folytonossága. *Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g \in C\{a\}$ és $f \in C\{g(a)\}$. Ekkor $f \circ g \in C\{a\}$, azaz az összetett függvény„örökli” a belső- és a külső függvény folytonosságát.*

Bizonyítás. A feltételek szerint $g(a) \in \mathcal{D}_f$, ezért $\mathcal{R}_g \cap \mathcal{D}_f \neq \emptyset$, így valóban beszélhetünk az $f \circ g$ összetett függvényről és $a \in \mathcal{D}_{f \circ g}$ is igaz, mert $\mathcal{D}_{f \circ g} \subset \mathcal{D}_g$.

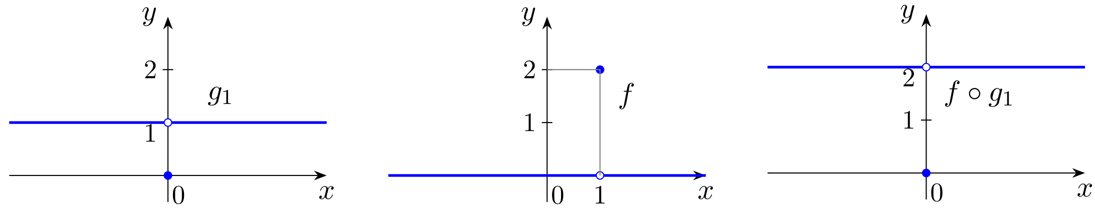
Legyen $(x_n) \colon \mathbb{N} \to \mathcal{D}_{f \circ g} \subset \mathcal{D}_g$ egy olyan sorozat, amelyre $\lim (x_n) = a$. Ekkor g-re a 7. tételt alkalmazva azt kapjuk, hogy $\lim \big(g(x_n)\big) = g(a)$. Ugyanakkor $\big(g(x_n)\big) \colon \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f$, ezért f-re alkalmazva az átviteli elvet az adódik, hogy

$$\lim_{n\to+\infty} f\big(g(x_n)\big) = f\big(g(a)\big) = \big(f \circ g\big)(a).$$

Mivel ez utóbbi bármely $(x_n) \colon \mathbb{N} \to \mathcal{D}_{f \circ g}$, $\lim (x_n) = a$ sorozat esetén igaz, ezért ismét az átviteli elvből következik, hogy $f \circ g \in C\{a\}$. ■

A következő példák azt mutatják, hogy az összetett függvényre általában nem „öröklődik” a külső függvény határértéke.

1. példa.

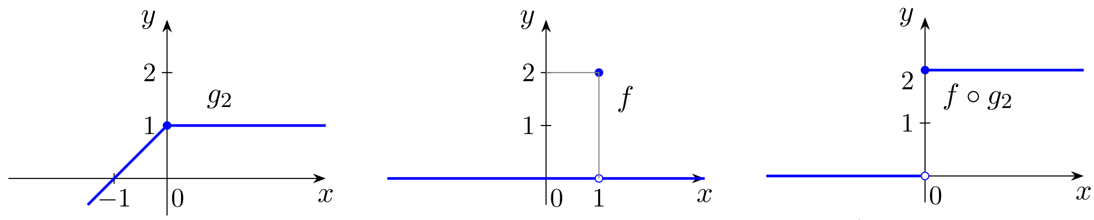


$\lim\limits_{0} g_1 = 1$ $\qquad$ $\lim\limits_{1} f = 0$ $\qquad$ $\lim\limits_{0} \big(f \circ g_1\big) = 2$

Ebben az esetben

$$\boxed{\lim_{0} \big(f \circ g_1\big) = 2 \neq 0 = \lim_{1} f}$$

2. példa.



$\lim\limits_{0} g_2 = 1$ $\qquad$ $\lim\limits_{1} f = 0$ $\qquad$ $\nexists \lim\limits_{0} \big(f \circ g_2\big)$

Ebben az esetben

$$\boxed{\nexists \lim_{0} \big(f \circ g_2\big)}$$

9. tétel: Az összetett függvény határértéke. *Legyen $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ két valós függvény, amire $R_g \subseteq D_f$ teljesül, és $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Tegyük fel, hogy*

$$a \in D_g', \ \exists \lim_{a} g =: b \in \overline{\mathbb{R}}, \qquad \textit{és} \qquad b \in D_f', \ \exists \lim_{b} f =: A \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ekkor

1° *Ha $\mathbb{R} \ni b \in D_f$ és $f \in C\{b\}$, akkor az $f \circ g$ függvénynek van határértéke a-ban és*

$$\lim_{x \to a} f\big(g(x)\big) = f\Big(\lim_{x \to a} g(x)\Big) = f(b),$$

azaz a kompozíció- és a határérték képzés sorrendje felcserélhető.

2° *Ha $\exists K(a)$ környezet, hogy $\forall x \in (K(a) \setminus \{a\}) \cap D_g: \ g(x) \neq b$, akkor is létezik az $f \circ g$ függvénynek határértéke a-ban és*

$$\lim_{x \to a} f\big(g(x)\big) = \lim_{y \to b} f(y) = A.$$

Bizonyítás. A határértékre vonatkozó átviteli elvet alkalmazzuk. A feltételek szerint $D_{f\circ g} = D_g$. Legyen $(x_n) : \mathbb{N} \to D_g \setminus \{a\}$ egy olyan sorozat, amire $\lim(x_n) = a$ teljesül. Jelölje $(y_n) : \mathbb{N} \to D_f$, $y_n := g(x_n)$, illetve $(z_n) : \mathbb{N} \to R_f$, $z_n := f(y_n) = f(g(x_n))$. Mivel $\lim\limits_{a} g = b$, így az átviteli elv szerint $\lim(y_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n) = b$.

1° $\underline{b \in \mathbb{R},\ b \in D_f \text{ és } f \in C\{b\}}$. A folytonosságra vonatkozó átviteli elv miatt minden b-hez tartó D_f-beli sorozat f-szerinti képsorozata $f(b)$-hez tart. Mivel $\lim(y_n) = b$, így $\lim(z_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(y_n) = f(b) = A$.

2° $\underline{\exists K(a) \text{ környezet, hogy } \forall x \in (K(a) \setminus \{a\}) \cap D_g :\ g(x) \neq b}$. Mivel $\lim(x_n) = a$, így véges sok n index kivételével $x_n \in K(a)$, és ekkor $y_n = g(x_n) \neq b$. Ha csak ezeket a tagokat tartjuk meg, akkor az így kapott $(y'_n) : \mathbb{N} \to D_f \setminus \{b\}$ részsorozatra $\lim(y'_n) = \lim(y_n) = b$ teljesül. Mivel $\lim\limits_{b} f = A$, így az átviteli elv szerint $\lim\limits_{n\to+\infty} f(y'_n) = A$. De a $z'_n := f(y'_n)$ sorozatot a (z_n) sorozat véges sok tag elhagyásával kapjuk, ezért $\lim(z_n) = \lim(z'_n) = A$.

Mindkét esetben azt igazoltuk, hogy $\lim\limits_{n\to+\infty} f(g(x_n)) = \lim(z_n) = A$, ahol $(x_n) : \mathbb{N} \to D_g \setminus \{a\}$ tetszőleges olyan sorozat, amire $\lim(x_n) = a$ teljesül. Ezért az átviteli elv szerint

$$\lim_{a} f \circ g = A. \blacksquare$$

Az előző tétel eredménye

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(g(x)) = \lim_{y\to b} f(y) \quad (y = g(x) \to b,\ \text{ha } x \to a)}$$

módon is írható, ami úgy tekinthető, mint a $\lim\limits_{x\to a} f(g(x))$ határértékben alkalmazott $y = g(x)$ helyettesítés.