1a

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

↳ előző anyag 1a

$\lambda_1 = 0 \quad a(0) = 1$

$\lambda_2 = 1 \quad a(1) = 2$ <- sajátértékek

$$\lambda_1 = 0 \Rightarrow W_{\lambda_1} = \left\{ x_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

↳ $\dim W_{\lambda_1} = 1 \Rightarrow g(0) = 1$

$\Rightarrow$ sajátvektor $(-1, -3, 1)$

$$\lambda_2 = 1 \Rightarrow W_{\lambda_2} = \left\{ x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

↳ $\dim W_{\lambda_2} = 2 \Rightarrow g(1) = 2$

$\Rightarrow$ sajátvektorok $(1, 1, 0)$ és $(1, 0, 1)$

$a(1) = g(1) = 2$

$a(0) = g(0) = 1$ $\Rightarrow$ VAN sajátbázis

↳ $(-1, -3, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1)$

$\Downarrow$

diagonalizálható

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

az adott sor sajátértéke

$C^{-1} \cdot AC = D$

$\lambda_1 = 0 \qquad \left\{ x_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| x_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \right\}$ és $\left\{ x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| x_2, x_3 \in \mathbb{C}, \text{ nem } 0\text{-ák} \right\}$

$\lambda_2 = 1$

$\Rightarrow$ diagonális alak: D mátrix

1b

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = 1 \quad a(1) = 2$

$\lambda_2 = 2 \quad a(2) = 1$

az jött ki:

$g(1) = 1 \qquad a(1) \neq g(1)$

$\qquad\qquad \Rightarrow \qquad\qquad\qquad \Rightarrow$ NINCS sajátbázis

$g(2) = 1 \qquad a(2) = g(2)$

$\Downarrow$

nem diagonizálható

1c

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = 1$ $\quad a(1) = 1$

$\lambda_2 = 2$ $\quad a(2) = 1$

$\lambda_3 = -1$ $\quad a(-1) = 1$

kijött hogy

$a(1) = g(1) = 1$

$a(2) = g(2) = 1$ $\quad \Rightarrow$ VAN sajátbázis

$a(-1) = g(-1) = 1$ $\quad \Rightarrow (1,1,1), (1,0,1), (1,-3,-5)$

$\Downarrow$

diagonalizálható

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -5 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$C^{-1} \cdot A C = D$

$\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = 2$

$\lambda_3 = -1$

$$\left\{ x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| x_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \right\}, \left\{ x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| x_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \right\}, \left\{ x_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} \middle| x_3 \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \right\}$$

1d

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = 1$ $\quad a(1) = 1$

kijött hogy NINCS saját bázis

$\Downarrow$

nem diagonalizálható