gyak11

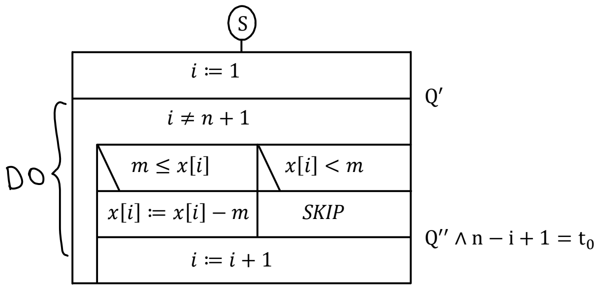
2022. november 23., szerda 8:13

+/- Ciklus levezetési szabálya vagy await definíciója

Mutasd meg, hogy az adott S program megoldja a következő specifikációjú feladatot.

$A = (x{:}\,\mathbb{N}^n, m{:}\,\mathbb{N}^+)$
$B = (x'{:}\,N^n, m'{:}\,\mathbb{N}^+)$
$Q = (x = x' \land m = m')$
$R = \big(m = m' \land \forall k \in [1..n]{:}\ ((m \le x'[k] \to x[k] = x'[k] - m)\ \land (x'[k] < m \to x[k] = x'[k]))\big)$

Az S program segédváltozója: $i{:}\,\mathbb{N}$



$Q' = (Q \land i = 1)$
Ciklusinvariáns:
$P = \big(m = m' \land \forall k \in [1..i-1]{:}\ ((m \le x'[k] \to x[k] = x'[k] - m) \land (x'[k] < m \to x[k] = x'[k]))\big) \land i \in [1..n+1] \land \forall k \in [i..n]{:}\ x[k] = x'[k]\big)$
terminálófüggvény: $t{:}\ n - i + 1$
$Q'' = P^{i \leftarrow i+1}$

A specifikáció tétele szerint elég belátni, hogy $Q \Rightarrow lf(S, R)$

A szekvencia levezetési szabálya szerint elég belátni 2 másik állítást:

1) $Q \Rightarrow lf(i:=1,\ Q \land i=1)$

$(Q \land i=1)^{i \leftarrow 1} \land 1 \in \mathbb{N}$

$Q \land 1=1 \land igaz$

2) $Q' \Rightarrow lf(DO, R)$

A ciklus levezetési szabálya szerint:

I. $Q' \Rightarrow P$

$\underbrace{(Q \land i=1)}_{x=x' \land m=m'} \Rightarrow (m = m' \land \forall k \in [1..i-1]{:}\ ((m \le x'[k] \to x[k] = x'[k] - m) \land (x'[k] < m \to x[k] = x'[k])) \land i \in [1..n+1] \land \forall k \in [i..n]{:}\ x[k] = x'[k])$

∅ 1−1 [1..0]

nem üres

n a tömb mérete: ℕ

n+1 ≥ 1

x = x'

II. $P \land \neg\pi \Rightarrow R$

$(m = m' \land \forall k \in [1..i-1]{:}\ ((m \le x'[k] \to x[k] = x'[k] - m) \land (x'[k] < m \to x[k] = x'[k])) \land i \in [1..n+1] \land \forall k \in [i..n]{:}\ x[k] = x'[k]) \land i = n+1$

n+1−1

$\Rightarrow \big(m = m' \land \forall k \in [1..n]{:}\ ((m \le x'[k] \to x[k] = x'[k] - m)\ \land (x'[k] < m \to x[k] = x'[k]))\big)$

III. $P \Rightarrow \pi \vee \neg\pi$

$i \neq n+1 \vee i = n+1$ ✓ $\quad i, n : \mathbb{N}$

IV. $P \wedge \pi \Rightarrow t > 0$

$n-i+1 > 0$

P-ben: $i \in [1..n+1] \Rightarrow i \le n+1$

$0 \le n-i+1$

$\pi = (i \neq n+1) \Rightarrow 0 \neq n-i+1$ $\Big\}$ $n-i+1>0$ ✓

V. $P \wedge \pi \wedge t = t_0 \Rightarrow lf(IF, P \wedge t < t_0)$

A szekvencia levezetési szabálya szerint elég belátni 2 állítást

(2) $Q'' \wedge n-i+1 = t_0 \Rightarrow \underbrace{lf(i := i+1, P \wedge t < t_0)}$

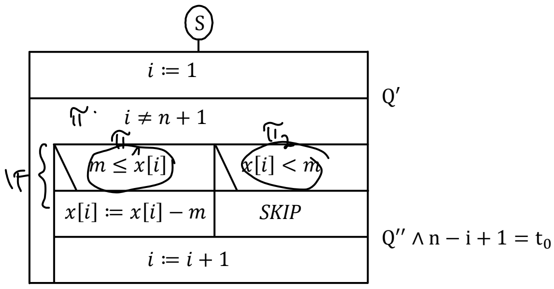
$P^{i\leftarrow i+1} \wedge n-i+1 = t_0 \Rightarrow (P \wedge n-i+1 < t_0)^{i \leftarrow i+1} \wedge \underbrace{i+1 \in \mathbb{N}}_{i:\mathbb{N}}$

$P^{i\leftarrow i+1}$ ✓ $\wedge\ n-i\cancel{-1+1} < t_0$ ✓ $\wedge$ igaz ✓

$n-i+1$

$0 < 1$ $\quad /-n+i$

(1) $P \wedge \pi \wedge t = t_0 \Rightarrow lf(IF, Q'' \wedge n-i+1 = t_0)$



IF egy elágazás, ezért elég belátni 3 másik állítást:

i) $P \wedge \pi \wedge t=t_0 \Rightarrow \underbrace{(m \le x[i] \vee m > x[i]) \wedge (x[i] < m \vee x[i] \ge m)}$

P-ben: $i \in [1..n+1]$

$\pi - i \neq n+1$ $\Big\}$ $i \in [1..n]$ ✓

$m \le x[i] \vee m > x[i]$

$m : \mathbb{N}^+$

$x[i] : \mathbb{N}$, amennyiben nem indexelünk ki a tömbből.

$i \in [1..n]$

(ha $n=0$ $\Downarrow$ $i=1$ $\quad 1 \in [1..1]$

$1 \neq 0+1$: hamis $\Rightarrow$ ✓)

ii) $P \wedge \pi \wedge t=t_0 \Rightarrow m \le x[i] \vee x[i] < m$ ✓

Előbb beláttuk.

iii) $\forall j \in [1..2]: P \wedge \pi \wedge t = t_0 \wedge \pi_j \Rightarrow lf(S_j, Q'' \wedge n-i+1 = t_0)$

a.) $P \wedge \pi \wedge t = t_0 \wedge m \le x[i] \Rightarrow lf(x[i] := x[i]-m,\ Q'' \wedge n-i+1 = t_0)$

1. 2.

$(\underbrace{m = m'}_{1.} \wedge \underbrace{\forall k \in [1..i-1]: ((m \le x'[k] \to x[k] = x'[k] - m) \wedge (x'[k] < m \to x[k] = x'[k]))}_{2.} \wedge \underbrace{i \in [1..n+1]}_{5.} \wedge \underbrace{\forall k \in [i..n]: x[k] = x'[k]}_{\underbrace{x[i]=x'[i]}_{3.} \wedge \underbrace{\forall q \in [i+1..n]: x[q]=x'[q]}_{7.}}) \wedge$

$\wedge\, \underbrace{i \ne n+1}_{6.} \wedge \underbrace{n-i+1 = t_0}_{8.} \wedge \underbrace{m \le x[i]}_{4.} \Rightarrow$

$\Big((m = m' \wedge \underbrace{\forall k \in [1..i]: ((m \le x'[k] \to x[k] = x'[k] - m) \wedge (x'[k] < m \to x[k] = x'[k]))}_{\forall k \in [1..i-1]: ((m \le x'[k] \to x[k] = x'[k] - m) \wedge (x'[k] < m \to x[k] = x'[k])) \wedge ((m \le x'[i] \to x[i] = x'[i] - m) \wedge (x'[i] < m \to x[i] = x'[i]))} \wedge i+1 \in [1..n+1] \wedge \forall k \in [i+1..n]: x[k] = x'[k]) \wedge n-i+1 = t_0 \Big)^{x[i] \leftarrow x[i]-m}$

$\wedge\ x[i]-m \in \mathbb{N} \wedge i \in [1..n]$

$x[i]: \mathbb{N}$ — az értékadás helyes — nem indexelünk ki a tömbből

$m: \mathbb{N}^+$

tudjuk: $x[i]-m \in \mathbb{Z}$

azaz: $x[i]-m \ge 0$

igaz ⇒ igaz ✓ hamis ⇒ $x[i]-m = x'[i]$ ✓

1. ✓ 2. ✓

$(\underbrace{m = m'}_{1.} \wedge \underbrace{\forall k \in [1..i-1]: ((m \le x'[k] \to x[k] = x'[k] - m) \wedge (x'[k] < m \to x[k] = x'[k]))}_{2.}) \wedge ((\underbrace{m \le \overset{x[i]}{x'[i]}}_{4.,\ 3.} \to \underbrace{x[i] - m = \overset{x[i]}{x'[i]} - m}_{0=0}) \wedge (\underbrace{\overset{x[i]}{x'[i]} < m}_{3.,\ 4.} \to x[i] - m = x'[i])) \wedge$

$i+1 \in [1..n+1]$ ✓ $\wedge\ \underbrace{\forall k \in [i+1..n]: x[k] = x'[k]}_{7.}$ ✓ $\wedge\ \underbrace{x[i] \ge m}_{4.}$ ✓ $\wedge\ i \in [1..n]$ ✓ $\wedge\ \underbrace{n-i+1 = t_0}_{8.}$ ✓

5. $i \in [1..n+1]$

6. $i \ne n+1$

$\Big\}\ i \in [1..n]$

$i+1 \in [2..n+1] \subset [1..n+1]$

$\Rightarrow i+1 \in [1..n+1]$

b.) $P \wedge \pi \wedge t = t_0 \wedge x[i] < m \Rightarrow \underbrace{lf(SKIP, Q'' \wedge n-i+1 = t_0)}$

$\underbrace{Q''}_{p^{i \leftarrow i+1}} \wedge n-i+1 = t_0$ $\qquad$ $SKIP(a) = \{\langle a \rangle\}$

$(\underbrace{m = m'}_{1.} \wedge \underbrace{\forall k \in [1..i-1]: ((m \le x'[k] \to x[k] = x'[k] - m) \wedge (x'[k] < m \to x[k] = x'[k]))}_{2.} \wedge \underbrace{i \in [1..n+1]}_{5} \wedge \forall k \in [i..n]: x[k] = x'[k]) \wedge \underbrace{i \neq n+1}_{6} \wedge$

$\underbrace{n-i+1 = t_0}_{8.} \wedge \underbrace{x[i] < m}_{4.} \Rightarrow$ $\qquad$ $\underbrace{x[i] = x'[i]}_{3.} \wedge \underbrace{\forall q \in [i+1..n]: x[q] = x'[q]}_{7}$

$(\underbrace{m = m'}_{1.} \wedge \underbrace{\forall k \in [1..i]: ((m \le x'[k] \to x[k] = x'[k] - m) \wedge (x'[k] < m \to x[k] = x'[k]))} \wedge \underbrace{i+1 \in [1..n+1]}_{5.} \wedge \underbrace{\forall k \in [i+1..n]: x[k] = x'[k])}_{7.} \wedge \underbrace{n-i+1 = t_0}_{8.}$

6. $i \neq n+1$
$\Downarrow$
$i+1 \in [2..n+1]$

2. $\forall q \in [1..i-1]: (m \le x'[q] \to x[q] = x'[q] - m \wedge$
$x'[q] < m \to x[q] = x'[q])$ $\wedge$

hamis $\to (\ldots)$ $\qquad$ 3. igaz $\to$ igaz

$\underbrace{m \le \underbrace{x'[i]}_{x[i]}}_{4.} \to x[i] = x'[i] - m \wedge \underbrace{\underbrace{x'[i]}_{x[i]} < m}_{4} \to x[i] = x'[i]$ 3.?