Algoritmusok és adatszerkezetek II. előadásjegyzet:

Mintaillesztés, Tömörítés

Ásványi Tibor – asvanyi@inf.elte.hu

2021. november 23.

Tartalomjegyzék

Hivatkozások

[1] Ásványi Tibor, Algoritmusok és adatszerkezetek II.
Útmutatások a tanuláshoz, jelölések, tematika,
fák, gráfok,
mintaillesztés, tömörítés
http://aszt.inf.elte.hu/~asvanyi/ad/ad2jegyzet/

[2] Cormen, T.H., Leiserson, C.E., Rivest, R.L., Stein, C.,
magyarul: Új Algoritmusok, *Scolar Kiadó*, Budapest, 2003.
ISBN 963 9193 90 9
angolul: Introduction to Algorithms (Third Edititon),
The MIT Press, 2009.

[3] Fekete István, Algoritmusok jegyzet
http://ifekete.web.elte.hu/

[4] Rónyai Lajos – Ivanyos Gábor – Szabó Réka, Algoritmusok,
TypoTEX Kiadó, 1999. ISBN 963 9132 16 0
https://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/2011-0001-526_ronyai_algoritmusok/adatok.html

[5] Weiss, Mark Allen, Data Structures and Algorithm Analysis,
Addison-Wesley, 1995, 1997, 2007, 2012, 2013.

[6] Ásványi Tibor, Algoritmusok és adatszerkezetek I. előadásjegyzet (2019)
http://aszt.inf.elte.hu/~asvanyi/ad/ad1jegyzet.pdf

1. Mintaillesztés ([2] 32)

Adott a $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_d\}$ ábécé. ($1 \le d < \infty$ konstans).

A $T/1 : \Sigma[n]$ szövegben keressük a $P/1 : \Sigma[m]$ minta előfordulásait ($1 \le m \le n$). A fenti szimbólumokat az egész fejezetben így fogjuk használni.

1.1. Definíció. *$s \in 0..(n{-}m)$ pontosan akkor a P érvényes eltolása T-n, ha $T[s+1..s+m] = P[1..m]$.*

Az érvényes eltolások halmazát szeretnénk meghatározni, azaz az $S = \{\, s \in 0..(n{-}m) \mid T[s+1..s+m] = P[1..m] \,\}$ halmazt.

1.1. Egyszerű mintaillesztő (brute-force) algoritmus

Vegyük bevezetésként a következő példát! A $P[1..4] = BABA$ mintát keressük a $T[1..11] = ABABBABABAB$ szövegben. ($\underline{B}$: B-t sikeresen illesztette a szöveg megfelelő betűjére; $\cancel{B}$: sikertelenül illesztette.)

$i =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$T[i]=$	A	B	A	B	B	A	B	A	B	A	B
	$\cancel{B}$	A	B	A							
		$\underline{B}$	$\underline{A}$	$\underline{B}$	$\cancel{A}$						
			$\cancel{B}$	A	B	A					
				$\underline{B}$	$\cancel{A}$	B	A				
s=4					$\underline{B}$	$\underline{A}$	$\underline{B}$	$\underline{A}$			
						$\cancel{B}$	A	B	A		
s=6							$\underline{B}$	$\underline{A}$	$\underline{B}$	$\underline{A}$	
								$\cancel{B}$	A	B	A

$$S = \{\, 4; 6 \,\}$$

<table>
<tr><td colspan="3">BruteForce($T/1 : \Sigma[n]$; $P/1 : \Sigma[m]$; $S : \mathbb{N}\{\}$)</td></tr>
<tr><td colspan="3">$S := \{\}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$s := 0$ to $n - m$</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td colspan="2">$T[s+1..s+m] = P[1..m]$</td></tr>
<tr><td>$S := S \cup \{s\}$</td><td>SKIP</td></tr>
</table>

A $T[s+1..s+m] = P[1..m]$ egyenlőségvizsgálatra: $MT_e(m) \in \Theta(m)$
$mT_e(m) \in \Theta(1)$

Innét a teljes algoritmusra: $MT_{\mathrm{BF}}(n, m) \in \Theta((n - m + 1) * m)$
$mT_{\mathrm{BF}}(n, m) \in \Theta(n - m + 1)$

$(T[s+1..s+m] = P[1..m]) : \mathbb{B}$

$j := 1$
$j \leq m \wedge T[s+j] = P[j]$
$\quad j{+}{+}$
return $j > m$

Ha egy feladatosztályon valamely $0 < k < 1$ konstansra $m \leq k * n$, akkor
$1 * n \geq n - m + 1 > n - k * n = (1-k) * n$, ahol $1 > 1 - k > 0$ konstans.
Innét a $\Theta(\cdot)$ függvényosztályok definíciója szerint
$n - m + 1 \in \Theta(n)$ és $(n - m + 1) * m \in \Theta(n * m)$. Ebből pedig az $\cdot \in \Theta(\cdot)$ reláció tranzitivitása miatt adódik:

$$0 < k < 1 \wedge m \leq k * n \Rightarrow mT_{\text{BF}}(n,m) \in \Theta(n) \wedge MT_{\text{BF}}(n,m) \in \Theta(n * m)$$

Ez viszont azt jelenti, hogy amennyiben egy feladatosztályon m az n-hez képest nem is elhanyagolható, azaz valamely $\varepsilon > 0$ konstansra $m \geq \varepsilon * n$, akkor
$\varepsilon * n * n \leq n * m \leq n * n$. Következésképp $n * m \in \Theta(n^2)$.
A fentieket összegezve, ha egy feladatosztályon az ε és a k konstansokra

$$0 < \varepsilon \leq k < 1 \wedge \varepsilon * n \leq m \leq k * n \Rightarrow MT_{\text{BF}}(n,m) \in \Theta(n^2)$$

1.2. Quicksearch

A gyorsabb keresés érdekében ennél és a következő (KMP) algoritmusnál általában egynél nagyobb lépésekben növeljük a $P[1..m]$ minta eltolását a $T[1..n]$ szöveghez képest úgy, hogy biztosan ne ugorjunk át egyetlen érvényes eltolást sem. Mindkét algoritmus a tényleges mintaillesztés előtt egy előkészítő fázist hajt végre, ami nem függ a szövegtől, csak a mintától.

A Quicksearch-nél ebben az előkészítő fázisban az ábécé σ elemeihez $shift(\sigma) \in 1..m{+}1$ címkéket társítunk, ahol $P[1..m]$ a keresett minta.

Tegyük fel most, hogy $\sigma = T[s{+}m{+}1]$. Ekkor a $shift(\sigma)$ érték megmondja, hogy a $T[s{+}1..s{+}m] = P[1..m]$ összehasonlítás után legalább mennyivel kell (jobbra) eltolni a P mintát a szövegen ahhoz, hogy a $T[s+m+1]$ alapján legyen esély a mintának a megfelelő szövegrészhez való illeszkedésére.
– $\sigma \in P[1..m]$ esetén a $shift(\sigma) \in 1..m$ érték azt mondja meg, hogy legalább mennyivel kell tovább tolni a P mintát ahhoz, hogy a $T[s+m+1]$ betűhöz kerülő karaktere maga is σ legyen. Világos, hogy a σ legjobboldali P-beli előfordulásához tartozik a legkisebb ilyen eltolás.

– $\sigma \notin P[1..m]$ esetén $shift(\sigma) = m + 1$ lesz, azaz a minta *átugorja* a $T[s + m + 1]$ karaktert.

Arra az esetre, amikor az ábécé $\Sigma = \{A,B,C,D\}$, a minta pedig $P[1..4]$=CADA, az alábbi félig absztrakt példákban xxxx mutatja a CADA mintával az eltolás előtt összehasonlított szövegrészt, maga a CADA pedig a minta eltolás utáni helyzetét. (Ezután természetesen újabb összehasonlítás kezdődik a szöveg megfelelő része és a minta között stb.)

```
Szöveg: ...xxxxA......xxxxB......xxxxC......xxxxD...
 Minta:     CADA             CADA      CADA     CADA
```

A megfelelő $shift$ értékek értékeket a következő táblázat mutatja.

σ	A	B	C	D
$shift(\sigma)$	1	5	4	2

initShift($P/1 : \Sigma[m]$)

$\forall \sigma \in \Sigma$
$\quad shift(\sigma) := m + 1$
$j := 1$ **to** m
$\quad shift(P[j]) := m + 1 - j$

Az ábécé méretét konstansnak tekintve $T_{\text{initShift}}(m) \in \Theta(m)$ adódik.

A $P[1..4] = CADA$ mintával az initShift() majd a Quicksearch működése:

σ	A	B	C	D
initial $shift(\sigma)$	5	5	5	5
C			4	
A	3			
D				2
A	1			
final $shift(\sigma)$	1	5	4	2

S= {0,1,6,11,13,17,19}

T[5]=A->1
T[6]=B->5
T[11]=B->5
T[16]=D->2
T[18]=C->4
T[22]=D->2

$i =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
$T[i]=$	A	D	A	B	A	B	C	A	D	A	B	C	A	B	A	D	A	C	A	D	A	D	A
	$\cancel{C}$	A	D	A																			
	1	$\cancel{C}$	A	D	A																		
$s = 6$						5	$\underline{C}$	$\underline{A}$	$\underline{D}$	$\underline{A}$													
											5	$\underline{C}$	$\underline{A}$	$\cancel{D}$	A								
												−2	$\cancel{C}$	A	D	A							
$s = 17$																	4	$\underline{C}$	$\underline{A}$	$\underline{D}$	$\underline{A}$		
																			−2	$\cancel{C}$	A	D	A

$$S = \{\,6; 17\,\}$$

QuickSearch($T/1 : \Sigma[n]$; $P/1 : \Sigma[m]$; $S : \mathbb{N}\{\}$)

initShift(P) ; $S := \{\}$; $s := 0$	
$s + m \leq n$	
$T[s+1..s+m] = P[1..m]$	
$S := S \cup \{s\}$	SKIP
$s + m < n$	
$s \mathrel{+}= shift(T[s+m+1])$	**break**

m = 4
n = 23

$mT(n,m) \in \Theta\left(\frac{n}{m+1} + m\right)$ (pl. ha $T[1..n]$ és $P[1..m]$ diszjunktak)
$MT(n,m) \in \Theta((n-m+2) * m)$ (pl. ha $T = AA\ldots A$ és $P = A\ldots A$)

A minimális műveletigény nagyságrenddel jobb, mint az egyszerű mintaillesztésnél, a tényleges (nem az aszimptotikus) maximális futási idő viszont még egy kicsit rosszabb is. Szerencsére, a tapasztalatok szerint az átlagos futási idő inkább a legjobb esethez áll közel, mintsem a legrosszabbhoz. Időkritikus alkalmazásokban viszont egy stabilabb futási idejű, minden esetben hatékony algoritmusra lenne szükségünk.

1.3. Mintaillesztés lineáris időben (Knuth-Morris-Pratt, azaz KMP algoritmus)

Tekintsük bevezetésként a következő példát! A $P[1..8] = BABABBAB$ mintát keressük a $T[1..18] = ABABABABBABABABBAB$ szövegben. (A minta elején a jelöletlen betűkről „illesztés nélkül is tudja” az algoritmus, hogy illeszkednek a szöveg megfelelő karakterére. $\underline{B}$: B-t sikeresen illesztette a szöveg megfelelő betűjére; $\cancel{B}$: sikertelenül illesztette.)

$i =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$T[i]=$	A	B	A	B	A	B	A	B	B	A	B	A	B	A	B	B	A	B
	$\cancel{B}$																	
		$\underline{B}$	$\underline{A}$	$\underline{B}$	$\underline{A}$	$\underline{B}$	$\cancel{B}$											
s=3				B	A	B	$\underline{A}$	$\underline{B}$	$\underline{B}$	$\underline{A}$	$\underline{B}$							
									B	A	B	$\underline{A}$	$\underline{B}$	$\cancel{B}$				
s=10											B	A	B	$\underline{A}$	$\underline{B}$	$\underline{B}$	$\underline{A}$	$\underline{B}$
																B	A	B

$$S = \{\,3; 10\,\}$$

1.2. Jelölések.

- *Ha x és y két sztring, akkor $x + y$ a konkatenáltjuk.*

- *Ha x és y két sztring, akkor $x \sqsubseteq y$ (x az y* akár teljes prefixe) *azt jelenti, hogy*
  $\exists z$ sztring, amire $x + z = y$.

- *Ha x és y két sztring, akkor $x \sqsubset y$ (x az y* prefixe) *azt jelenti, hogy $x \sqsubseteq y \wedge x \neq y$.*

- *Ha x és y két sztring, akkor $x \sqsupseteq y$ (x az y* akár teljes szuffixe) *azt jelenti, hogy*
  $\exists z$ sztring, amire $z + x = y$.

- *Ha x és y két sztring, akkor $x \sqsupset y$ (x az y* szuffixe) *azt jelenti, hogy $x \sqsupseteq y \wedge x \neq y$.*

- *$P_j = P[1..j]$ (csak ebben az alfejezetben) P_j a P sztring j hosszúságú, akár teljes prefixe, azaz kezdőszelete. P_0 az üres prefixe. Hasonlóan $T_i = T[1..i]$.*
  [*Eszerint minden nemüres sztringnek* szuffixe *az üres sztring, azaz $P_0 \sqsupset P_j \quad (j \in 1..m)$.*]

- *$x \sqsupset\!\!\!\sqsubset y$ (x az y* prefix-szuffixe) *azt jelenti, hogy $x \sqsubset y \wedge x \sqsupset y$.*

- $\max_i H$ *a H halmaz i-edik legnagyobb eleme* $\quad (i \in 1..|H|)$.
  [*Ezért* $\max_1 H = \max H$, *és*

ha H véges halmaz, akkor $\max_{|H|} H = \min H$.]

- $H(j) = \{ h \in 0..j-1 \mid P_h \sqsupset P_j \} \quad (j \in 1..m)$
  [$0 \in H(j)$, $\max_1 H(j) = \max H(j)$, $\max_{|H(j)|} H(j) = \min H(j) = 0$.]
  [*Másképpen leírva:* $H(j) = \{ |x| : x \sqsubset P_j \} \quad (j \in 1..m)$]

- $next(j) = \max H(j) \quad (j \in 1..m)$

1.3. Tulajdonság. *(Ugyanígy a prefixekre)*
$x \sqsupseteq y \wedge y \sqsupseteq z \Rightarrow x \sqsupseteq z \qquad x \sqsupset y \wedge y \sqsupset z \Rightarrow x \sqsupset z$
$x \sqsupseteq y \wedge y \sqsupset z \Rightarrow x \sqsupset z \qquad x \sqsupset y \wedge y \sqsupseteq z \Rightarrow x \sqsupset z$

1.4. Tulajdonság. $x \sqsupset z \wedge y \sqsupset z \wedge |x| < |y| \Rightarrow x \sqsupset y$

1.5. Tulajdonság. $0 \leq h < j \leq m$ *és* $P_j \sqsupseteq T_i$ *esetén*
$P_h \sqsupset T_i \iff P_h \sqsupset P_j$.

1.6. Tulajdonság. $P_h \sqsupseteq T_i \wedge P[h+1] = T[i+1] \iff P_{h+1} \sqsupseteq T_{i+1}$.

1.7. Tulajdonság. $next(j) \in 0..(j-1) \quad (j \in 1..m)$

1.8. Tulajdonság. $next(j+1) \leq next(j) + 1 \quad (j \in 1..m-1)$
(A next(j) függvény legfeljebb egyesével növekszik.)

1.9. Példa.

$P[j] =$	*B*	*A*	*B*	*A*	*B*	*B*	*A*	*B*
$j =$	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
$next(j) =$	*0*	*0*	*1*	*2*	*3*	*1*	*2*	*3*

Bizonyítás. (Az 1.8. Tulajdonságé)

- $next(j+1) = 0$ esetén $next(j+1) = 0 \leq 1 \leq next(j) + 1$.

- $next(j+1) > 0$ esetén pedig, $next(j+1) = \max H(j+1)$ miatt $next(j+1) \in H(j+1)$, ebből $H(j+1) = \{ h \in 0..j \mid P_h \sqsupset P_{j+1} \}$ szerint $P_{(next(j+1)-1)+1} = P_{next(j+1)} \sqsupset P_{j+1}$, amiből az 1.6. Tulajdonság alapján $P_{next(j+1)-1} \sqsupset P_j$, ahonnét a $next(j) = \max\{ h \in 0..j-1 \mid P_h \sqsupset P_j \}$ meghatározást felhasználva adódik $next(j+1) - 1 \leq next(j)$, végül pedig $next(j+1) \leq next(j) + 1$.

□

1.10. Lemma. $next(max_l H(j)) \in H(j) \quad (j \in 1..m, l \in 1..|H(j)|-1)$

Bizonyítás.
$P_{next(\max_l H(j))} \sqsupset P_{\max_l H(j)}$, ui. $P_{next(i)} \sqsupset P_i \quad (i \in 1..m)$
$P_{\max_l H(j)} \sqsupset P_j$. Ezekből a $\sqsupset$ reláció tranzitivitása miatt (1.3)
$P_{next(\max_l H(j))} \sqsupset P_j$ adódik. Így $next(max_l H(j)) \in H(j)$. $\square$

1.11. Tulajdonság.
$\max_{l+1} H(j) = next(\max_l H(j)) \quad (j \in 1..m, l \in 1..|H(j)|-1)$

Bizonyítás.

- Először azt látjuk be, hogy $\max_{l+1} H(j) \leq next(\max_l H(j))$.
  Nyilván $P_{\max_{l+1} H(j)} \sqsupset P_j \wedge P_{\max_l H(j)} \sqsupset P_j \wedge \max_{l+1} H(j) < \max_l H(j)$.
  Ebből 1.4, azaz $x \sqsupset z \wedge y \sqsupset z \wedge |x| < |y| \Rightarrow x \sqsupset y$ szerint
  $P_{\max_{l+1} H(j)} \sqsupset P_{\max_l H(j)}$. Másrészt $P_{\max_{l+1} H(j)} \sqsubset P_{\max_l H(j)}$, azaz $P_{\max_{l+1} H(j)} \square P_{\max_l H(j)}$. Továbbá $P_{next(\max_l H(j))} \square P_{\max_l H(j)}$, és a $next$ függvény definíciója szerint az ilyen tulajdonságú sztringek között a leghosszabb, tehát $\max_{l+1} H(j) \leq next(\max_l H(j))$.

- Igazolnunk kell még, hogy $next(\max_l H(j)) \leq \max_{l+1} H(j)$. Ehhez
  $H(j,l) := \{\, i \in H(j) \mid i < \max_l H(j) \,\}$. Eszerint
  $\max_{l+1} H(j) = \max H(j,l)$. Az 1.10. Lemma szerint pedig
  $next(\max_l H(j)) \in H(j)$. A $next$ függvény definíciójából viszont
  $next(\max_l H(j)) < \max_l H(j)$. Így
  $next(\max_l H(j)) \in H(j,l)$, és előbb láttuk, hogy
  $\max_{l+1} H(j) = \max H(j,l)$. Ezekből már közvetlenül adódik
  $next(\max_l H(j)) \leq \max_{l+1} H(j)$.

$\square$

1.12. Definíció.
$next^1(j) = next(j) \quad (j \in 1..m)$
$next^{k+1}(j) = next(next^k(j)) \quad (next^k(j) \in 1..m)$
Szemléletesen: $next^k(j) = \underbrace{next(\ldots next(}_{k} j) \ldots)$

1.13. Tétel. $next^k(j) = \max_k H(j) \quad (k \in 1..|H(j)|)$

Bizonyítás. (Teljes indukcióval)

- $k = 1 \Rightarrow next^k(j) = next(j) = \max H(j) = \max_k H(j)$.

- Tegyük fel, hogy $k = l$-re igaz az állítás $(l \in 1..|H(j)| - 1)$.
  $k = l + 1 \Rightarrow next^k(j) = next(next^l(j)) = next(\max_l H(j)) = \max_{l+1} H(j) = \max_k H(j)$.

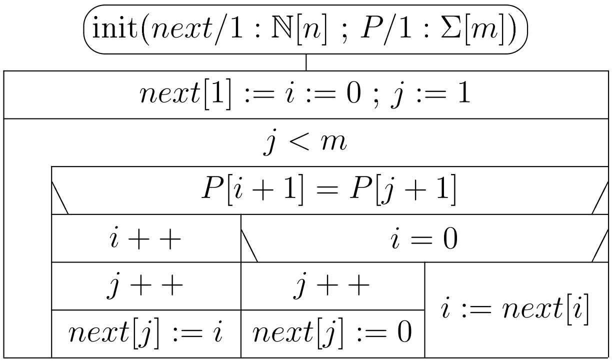
□

A fenti tétel és tulajdonságok segítségével $\Theta(m)$ műveletigénnyel adunk megoldást a $next/1 : \mathbb{N}[n]$ tömb inicializálására, azzal az utófeltétellel, hogy $\forall j \in 1..m : next[j] = next(j)$, vagy rövidebben: $next[1..m] = next(1..m)$. Az alábbi init$(next, P)$ eljárás tehát a $next/1 : \mathbb{N}[n]$ tömböt a $P/1 : \Sigma[m]$ tömb alapján tölti fel.

A lineáris, pontosabban $\Theta(m)$ műveletigény igazolásához elég belátni, hogy az init$(next, P)$ eljárás ciklusa legalább $m-1$ és legfeljebb $2m-2$ iterációt hajt végre. A ciklus alábbi invariánsa szerint $0 \le i < j \le m$.

- Mivel az első iteráció előtt $j = 1$, mindegyik iteráció legfeljebb eggyel növeli j-t, és a ciklusfeltétel $j < m$, legalább $m-1$ iteráció szükséges ahhoz, hogy $j = m$ legyen, és az eljárás befejeződjék.
- $t(i, j) := 2j - i$. Világos, hogy $0 \le i < j \le m$ miatt $t(i, j) \in 2..2m$. Az első iteráció előtt $t(i, j) = 2$, mindegyik iterációval (mind a három programágon) szigorúan monoton nő, és végig $\le 2m$, így legfeljebb $2m-2$ iteráció után megáll a ciklus.

1.14. Feladat. *Lássuk be, hogy helyes az alábbi* init$(next, P)$ *eljárás ciklusának invariánsa.*



Invariant of the loop:
$0 \leq i < j \leq m \wedge$
$P_i \sqsupset P_j \wedge$
$(\forall l \in i{+}2\,..\,j : P_l \not\sqsupset P_{j+1})$
$\wedge\, next[1..j] = next(1..j)$

Az init$(next, P)$ algoritmus szemléltetése az $ABABBABA$ mintán:
(A három programág mindegyikének az elején kezdünk új sort.)

i	j	$next[j]$	1 A	2 B	3 A	4 B	5 B	6 A	7 B	8 A
0	1	0		$\cancel{A}$						
0	2	0			$\underline{A}$					
1	3	1			A	$\underline{B}$				
2	4	2			A	B	$\cancel{A}$			
0	4	2					$\cancel{A}$			
0	5	0						$\underline{A}$		
1	6	1						A	$\underline{B}$	
2	7	2						A	B	$\underline{A}$
3	8	3								

A végeredmény:

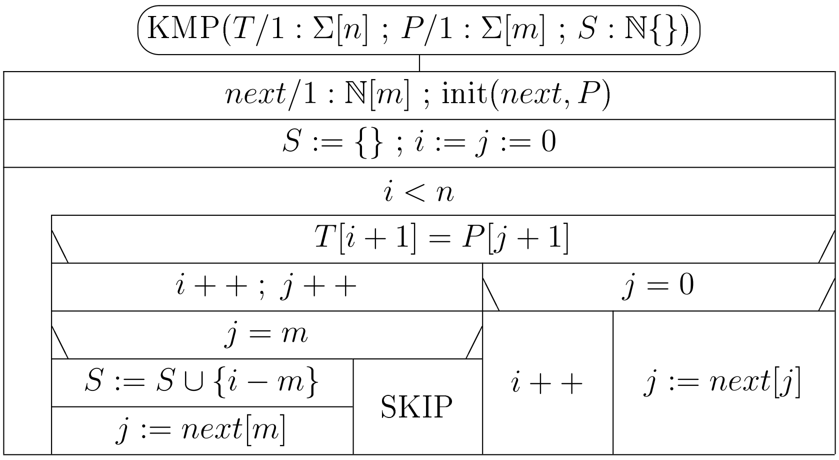
$P[j] =$	A	B	A	B	B	A	B	A
$j =$	1	2	3	4	5	6	7	8
$next[j] =$	0	0	1	2	0	1	2	3

Az 1.13. tétel és a fentebbi tulajdonságok segítségével $\Theta(n)$ műveletigénnyel oldjuk meg a mintaillesztési feladatot. Először inicializáljuk a $next/1 : \mathbb{N}[n]$ tömböt, majd ennek segítségével határozzuk meg a minta megfelelő eltolásait.

A lineáris, pontosabban $\Theta(n)$ műveletigény igazolásához elég belátni, hogy az alábbi KMP(T, P, S) eljárás fő ciklusának futási ideje $\Theta(n)$, ui. $m \in 1..n$ miatt ezen az init$(next, P)$ eljárás és egyéb inicializálások $\Theta(m)$ műveletigénye aszimptotikus nagyságrendben már nem módosít. A fő ciklus $\Theta(n)$ műveletigényének igazolásához pedig elegendő azt belátni, hogy az legalább n és legfeljebb $2n$ iterációt hajt végre. A ciklus alábbi invariánsa szerint $i \in 0..n \wedge j \in 0..(m{-}1) \wedge j \leq i$.

- Mivel az első iteráció előtt $i = 0$, mindegyik iteráció legfeljebb eggyel növeli i-t, és a ciklusfeltétel $i < n$, legalább n iteráció szükséges ahhoz, hogy $i = n$ legyen, és az eljárás befejeződjék.

- Most $t(i, j) := 2i - j$. Az $i \in 0..n \wedge j \in 0..(m-1) \wedge j \leq i$ invariáns tulajdonság miatt $t(i, j) \in 0..2n$. Az első iteráció előtt $t(i, j) = 0$, mindegyik iterációval (mind a négy programágon) szigorúan monoton nő, és végig $\leq 2n$, így legfeljebb $2n$ iteráció után megáll a ciklus.



Az eljárás utófeltétele: $S = \{ s \in 0..(n-m) \mid T[s+1..s+m] = P_m \}$.

1.15. Tulajdonság. *A KMP algoritmus ciklusának invariánsa:*
$i \in 0..n \wedge j \in 0..(m-1) \wedge j \leq i \wedge$
$S = \{ s \in 0..(i-m) \mid T[s+1..s+m] = P_m \} \wedge$
$P_j \sqsupseteq T_i \wedge (\forall l \in (j+2)..m : P_l \not\sqsupseteq T_{i+1})$.

A ciklusfetétel tagadásából ($i \geq n$) és az $i \in 0..n$ invariáns tulajdonságból $i = n$ adódik. Ezután az S halmazra vonatkozó invariánsban a i változó n-nel helyettesíthető. Ennek eredménye pedig éppen az utófeltétel.

Bizonyítás. Hátra van még az 1.15. ciklusinvariáns helyességének igazolása. Az első iteráció előtt $S = \{\} \wedge i = j = 0$. Az invariáns ezekkel a helyettesítésekkel a következő:

$0 \in 0..n \wedge 0 \in 0..(m-1) \wedge 0 \leq 0 \wedge$
$\{\} = \{ s \in 0..(0-m) \mid T[s+1..s+m] = P_m \} \wedge$
$P_0 \sqsupseteq T_0 \wedge (\forall l \in 2..m : P_l \not\sqsupseteq T_1)$.

Ez az állítás pedig könnyen látható, hogy igaz. Egyrészt $1 \leq m \leq n$ miatt $0 \in 0..n \wedge 0 \in 0..(m-1)$. Másrészt a halmazegyenlőség jobb oldalán is üres halmaz áll, ui. $0..(0-m)$ üres intervallum. Harmadrészt a $P_0 \sqsupseteq T_0$ nem jelent mást, mint hogy az üres sztring önmaga teljes szuffixe. Végül, a $(\forall l \in 2..m : P_l \not\sqsupseteq T_1)$ is teljesül, hiszen $m = 1$ esetén a $2..m$ intervallum üres, $m \geq 2$ esetén pedig $|P_l| \geq 2$, míg $|T_1| = 1$.

Azt kell még belátnunk, hogy amennyiben a ciklusinvariáns és a ciklusfeltétel egy adott iteráció végrehajtása előtt teljesül, az invariáns utána is igaz marad. A ciklusmag előtt tehát:

$i \in 0..(n-1) \wedge j \in 0..(m-1) \wedge j \leq i \wedge$
$S = \{ s \in 0..(i-m) \mid T[s+1..s+m] = P_m \} \wedge$
$P_j \sqsupseteq T_i \wedge (\forall l \in (j+2)..m : P_l \not\sqsupseteq T_{i+1})$.

— Ha most $T[i+1] = P[j+1]$, akkor $P_j \sqsupseteq T_i$ és az 1.6. tulajdonság miatt $P_{j+1} \sqsupseteq T_{i+1}$. Miután pedig végrehajtódnak az $i++$; $j++$ utasítások:

$i \in 1..n \wedge j \in 1..m \wedge j \leq i \wedge$
$S = \{ s \in 0..(i-1-m) \mid T[s+1..s+m] = P_m \} \wedge$
$P_j \sqsupseteq T_i \wedge (\forall l \in (j+1)..m : P_l \not\sqsupseteq T_i)$.

– Amennyiben ezután $j = m$ igaznak bizonyul, akkor $P_m \sqsupseteq T_i$, azaz $T[i-m+1..i-m+m] = P_m$, ami azt jelenti, hogy $T[s+1..s+m] = P_m$ az $s = i-m$ helyettesítéssel is teljesül. Az $S := S \cup \{i-m\}$ értékadás hatására tehát helyreáll az $S = \{ s \in 0..(i-m) \mid T[s+1..s+m] = P_m \}$ invariáns tulajdonság, azaz most

$i \in 1..n \wedge j \in 1..m \wedge j \leq i \wedge$
$S = \{ s \in 0..(i-m) \mid T[s+1..s+m] = P_m \} \wedge P_m \sqsupseteq T_i$.

Ezután a $j := next[m]$ értékadással $P_j \sqsupset P_m \wedge j \in 0..(m-1) \wedge j < i$. Mivel $P_m \sqsupseteq T_i$, ebből $P_j \sqsupseteq T_i$ adódik. A $next$ függvény definíciója szerint pedig P_j egyben a leghosszabb P_m prefix-szuffixei között, azaz $(\forall l \in (j+1)..(m-1) : P_l \not\sqsupset P_m)$. Ha viszont létezne olyan $k \in (j+2)..m$, amelyre $P_k \sqsupseteq T_{i+1}$, akkor erre a k értékre $k-1 \in (j+1)..(m-1) \wedge P_{k-1} \sqsupseteq T_i$ lenne, amit összevetve a $P_m \sqsupseteq T_i$ tulajdonsággal $P_{k-1} \sqsupset P_m$ adódna, ami ellentmond annak, hogy $(\forall l \in (j+1)..(m-1) : P_l \not\sqsupset P_m)$. Innét $(\forall k \in (j+2)..m : P_k \not\sqsupseteq T_{i+1})$, ami éppen a ciklusinvariáns vége. Eddigi eredményeinket összegezve, ennek a programágnak a végén az alábbi, az invariánsnál kicsit erősebb állítás adódik.

$i \in 1..n \wedge j \in 0..(m-1) \wedge j < i \wedge$
$S = \{ s \in 0..(i-m) \mid T[s+1..s+m] = P_m \} \wedge$
$P_j \sqsupseteq T_i \wedge (\forall l \in (j+2)..m : P_l \not\sqsupseteq T_{i+1})$.

— Az, hogy a KMP algoritmus ciklusmagjának másik három ága is tartja az invariánst, a fentiekhez hasonlóan igazolható. □

1.16. Feladat. *Igazolja, hogy a KMP algoritmus ciklusmagjának másik három ága is tartja az 1.15. invariánst!*

Mint látjuk, a $T[1..n]$ szövegen sohasem kell visszalépni. Ezért ez a KMP algoritmus kényelmesen, hatékonyan implementálható abban az esetben is, ha a szöveg (amiben keressük a mintát) egy szekvenciális fájlban van. Mivel a Brute-force és a Quicksearch algoritmusoknál a szövegen esetleg $m-2$ karakternyit is vissza kell lépni, ezeknél – feltéve, hogy a szöveg egy szekvenciális input fájlban van – annak az utoljára beolvasott $m-1$ karakterét folyamatosan nyilván kell tartani egy átmeneti tárolóban.

Példa:
A $P[1..8] = ABABBABA$ mintát keressük
a $T[1..17] = ABABABBABABBABABA$ szövegben.

A mintához tartozó $next/1 : \mathbb{N}[8]$ tömböt fentebb már kiszámoltuk:

$P[j] =$	A	B	A	B	B	A	B	A
$j =$	1	2	3	4	5	6	7	8
$next[j] =$	0	0	1	2	0	1	2	3

A keresés:

$i =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$T[i]=$	A	B	A	B	A	B	B	A	B	A	B	B	A	B	A	B	A
	$\underline{A}$	$\underline{B}$	$\underline{A}$	$\underline{B}$	$\cancel{B}$												
s=2			A	B	$\underline{A}$	$\underline{B}$	$\underline{B}$	$\underline{A}$	$\underline{B}$	$\underline{A}$							
s=7								A	B	A	$\underline{B}$	$\underline{B}$	$\underline{A}$	$\underline{B}$	$\underline{A}$		
													A	B	A	$\underline{B}$	$\cancel{B}$
															A	B	$\underline{A}$

$$S = \{\,2; 7\,\}$$

2. Információtömörítés ([4] 5)

2.1. Naiv módszer

A tömörítendő szöveget karakterenként, fix hosszúságú bitsorozatokkal kódoljuk.

$\Sigma = \langle \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_d \rangle$ az ábécé.

Egy-egy karakter $\lceil \lg d \rceil$ bittel kódolható, ui. $\lceil \lg d \rceil$ biten $2^{\lceil \lg d \rceil}$ különböző bináris kód ábrázolható, és $2^{\lceil \lg d \rceil} \geq d > 2^{\lceil \lg d \rceil - 1}$, azaz $\lceil \lg d \rceil$ biten ábrázolható d-féle különböző kód, de eggyel kevesebb biten már nem.

$In : \Sigma\langle\rangle$ a tömörítendő szöveg. $n = |In|$ jelöléssel $n * \lceil \lg d \rceil$ bittel kódolható.

Pl. az ABRAKADABRA szövegre $d = 5$ és $n = 11$, ahonnét a tömörített kód hossza $11 * \lceil \lg 5 \rceil = 11 * 3 = 33$ bit. (A 3-bites kódok közül tetszőleges 5 kiosztható az 5 betűnek.) A tömörített fájl a kódtáblázatot is tartalmazza.

A fenti ABRAKADABRA szöveg kódtáblázata lehet pl. a következő:

karakter	kód
A	000
B	001
D	010
K	011
R	100

A fenti kódtáblázattal a tömörített kód a következő lesz:
000001100000011000010000001100000.

Ez a tömörített fájlba foglalt kódtáblázat alapján könnyedén 3 bites szakaszokra bontható és kitömöríthető. A kódtáblázat mérete miatt a gyakorlatban csak hosszabb szövegeket érdemes így tömöríteni.

2.2. Huffman-kód

A tömörítendő szöveget karakterenként, változó hosszúságú bitsorozatokkal kódoljuk. A gyakrabban előforduló karakterek kódja rövidebb, a ritkábban előfordulóké hosszabb.

Prefix-mentes kód: Egyetlen karakter kódja sem prefixe semelyik másik karakter kódjának sem.

A karakterenként kódoló tömörítések között a Huffman-kód hossza minimális. Ugyanahhoz a szöveghez többféle kódfa és hozzátartozó kódtáblázat építhető, de mindegyik segítségével az input szövegnek ugyanolyan hosszú tömörített kódját kapjuk. Betömörítés a kódtáblával, kitömörítés a kódfával. Ezért a tömörített fájl a kódfát is tartalmazza.

A **tömörítendő fájlt, illetve szöveget kétszer olvassa végig.**
- Először meghatározza a szövegben előforduló karakterek halmazát és az egyes karakterek gyakoriságát, majd ennek alapján kódfát, abból pedig kódtáblázatot épít.
- Másodszorra a kódtábla alapján kiírja az output fájlba sorban a karakterek bináris kódját.

A **kódfa** szigorúan bináris fa. Mindegyik karakterhez tartozik egy-egy levele, amit a karakteren kívül annak gyakorisága, azaz előfordulásainak száma is címkéz. A belső csúcsokat a csúcshoz tartozó részfa leveleit címkéző karakterek gyakoriságainak összegével címkézzük. (Így a kódfa gyökerét a tömörítendő szöveg hossza címkézi.)

A **kódfát** úgy**építjük** fel, hogy először egycsúcsú fák egy minimum-prioritásos sorát határozzuk meg, amelyben mindegyik karakter pontosan egy csúcsot címkéz. A csúcsot a karakteren kívül annak gyakorisága is címkézi. A minimum-prioritásos sort a benne tárolt fák gyökerét címkéző gyakoriság-értékek szerint építjük fel. Ezután a következőt csináljuk ciklusban, amíg a kupac még legalább kettő fából áll.

Kiveszünk a kupacból egy olyan fát, amelyeknek gyökerét a legkisebb gyakoriság címkézi. Ezután a maradék kupacra ezt még egyszer megismételjük. Összeadjuk a két gyakoriságot. Az összeggel címkézünk egy új csúcsot, amelynek bal és jobb részfája az előbb kiválasztott két fa lesz. A bal ágat a 0, a jobb ágat az 1 címkézi. Az így képzett új fát visszatesszük a minimum-prioritásos sorba.

A fenti ciklus után a minimum-prioritásos sorban maradó egyetlen bináris fa a Huffman-féle kódfa.

A kódfából ezután kódtáblázatot készítünk. Mindegyik karakterekhez tartozó kódot úgy kapjuk meg, hogy a kódfa gyökerétől elindulva és a karakterhez tartozó levélig lefelé haladva a kódfa éleit címkéző biteket összeolvassuk. (Ezt hatékonyan kivitelezhetjük pl. a kódfa preorder bejárásával, az aktuális csúcshoz vezető bitsorozat folyamatos nyilvántartásával, és levélhez érve, a kódtáblázatba írásával.)

Befejezésül újra végigolvassuk a tömörítendő szöveget, és a kódtáblázat segítségével sorban mindegyik karakter bináris kódját a (kezdetben üres) tömörített bitsorozat végéhez fűzzük. A tömörített fájl a kódfát is tartalmazza, így a gyakorlatban Huffman-kódolással is csak hosszabb szövegeket érdemes tömöríteni.

A **kitömörítést** is karakterenként végezzük. Mindegyik karakter kinyeréséhez a kódfa gyökerétől indulunk, majd a tömörített kód sorban olvasott bitjeinek hatására 0 esetén balra, 1 esetén jobbra lépünk lefelé a fában, mígnem levélcsúcshoz érünk. Ekkor kiírjuk a levelet címkéző karaktert, majd a Huffman-kódban a következő bittől és újra a kódfa gyökerétől folytatjuk, amíg a tömörített kódon végig nem érünk.

2.2.1. Huffman-kódolás szemléltetése

Pl. az $ABRAKADABRA$ szöveget egyszer végigolvasva meghatározhatjuk milyen karakterek fordulnak elő a szövegben, és milyen gyakorisággal. Úgy képzelhetjük, hogy az alábbi táblázat az új betűkkel folyamatosan bővül, ahogy haladunk előre a szövegben.

szöveg:	A	B	R	A	K	A	D	A	B	R	A
A	1			2		3		4			5
B	-	1							2		
D	-	-	-	-	-	-	1				
K	-	-	-	-	1						
R	-	-	1							2	

A fenti számolást (betű/gyakoriság) alakban összegezve:

$$\langle (D/\mathbf{1}), (K/\mathbf{1}), [B/\mathbf{2}], \{R/\mathbf{2}\}, (A/\mathbf{5}) \rangle$$

A fenti öt kifejezést öt egycsúcsú bináris fának tekinthetjük. (A jobb olvashatóság kedvéért többféle zárójelpárt alkalmaztunk.) Mindegyik csúcs egyben levél és gyökér. A levelekhez tartozó két címkét *karakter/gyakoriság* alakban írtuk le. A tömörítés algoritmusa szerint ezeket egy minimum-prioritásos sorba tesszük. A könnyebb érthetőség kedvéért ezt a minimum-prioritásos sort a szokásos minimum-kupacos reprezentáció helyett most a fák gyökerében lévő gyakoriság-értékek (röviden *fa-gyakoriság-értékek*) szerint rendezett fa-sorozattal szemléltetjük. (Azonos gyakoriságok esetén a betűk alfabetikus sorrendje szerint rendezünk. Ez ugyan önkényes, de az algoritmus bemutatása szempontjából hasznos egyértelműsítés. A fák ágait is hasonlóképpen rendezzük sorba.)

Ezután kivesszük a két legkisebb gyakoriság-értékű fát, egy új gyökércsúcs alá tesszük őket bal- és jobboldali részfának, a új gyökércsúcsot pedig a két fa-gyakoriság-érték összegével címkézzük. Végül visszatesszük az új fát a minimum-prioritásos sorba.

$$\langle [B/\mathbf{2}], [(D/1)\mathbf{2}(K/1)], \{R/\mathbf{2}\}, (A/\mathbf{5})\rangle$$

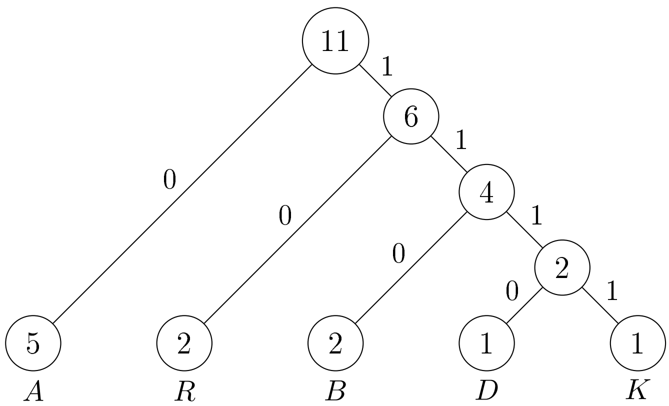
A fenti eljárást addig ismételjük, amíg már csak egy fánk marad. Ezt végül kivesszük a minimum-prioritásos sorból: ez a Huffman-féle kódfa.

$$\langle \{R/\mathbf{2}\}, \{[B/2]\mathbf{4}[(D/1)2(K/1)]\}, (A/\mathbf{5})\rangle$$

$$\langle (A/\mathbf{5}), (\{R/2\}\mathbf{6}\{[B/2]4[(D/1)2(K/1)]\})\rangle$$

$$[(A/5)\mathbf{11}(\{R/2\}6\{[B/2]4[(D/1)2(K/1)]\})]$$

A fent kapott kódfát az 1. ábrán is láthatjuk.



1. ábra. Az *ABRAKADABRA* szövegnek az alfabetikus konvencióval adódó Huffman-féle kódfája

Tekintsünk az 1. ábrán látható kódfában egy tetszőleges egyszerű, azaz körmentes utat, amely a fa gyökerétől lefelé valamelyik leveléig halad! Az út éleit címkéző biteket összeolvasva adódik a levelet címkéző karakter Huffman-kódja. Így a karaktarekre a következő kódtáblázatot kapjuk.

karakter	kód
A	0
B	110
D	1110
K	1111
R	10

A fentiek alapján az ABRAKADABRA szöveg Huffman kódja 23 bit, ami lényegesen rövidebb, mint a fenti naiv tömörítés esetén. A kódtáblázat bináris kódjait az ABRAKADABRA szöveg karakterei szerint sorban egymás után fűzve kapjuk a szöveg Huffman-kódját.

$$01101001111011100110100$$

A **kitömörítéshez** az előbbi Huffman-kód és a kódfa alapján a kezdő nulla rögtön az „A” címkéjű levélhez visz. Ezután sorban olvasva a maradékból a biteket, a 110 a B-hez visz, majd a 10 az R-hez, a 0 az A-hoz, a 1111 a K-hoz, a 0 az A-hoz, az 1110 a D-hez, a 0 az A-hoz, a 110 a B-hez, a 10 az R-hez, és végül a 0 az A-hoz. Így visszakaptuk az eredeti, tömörítetelen szöveget.

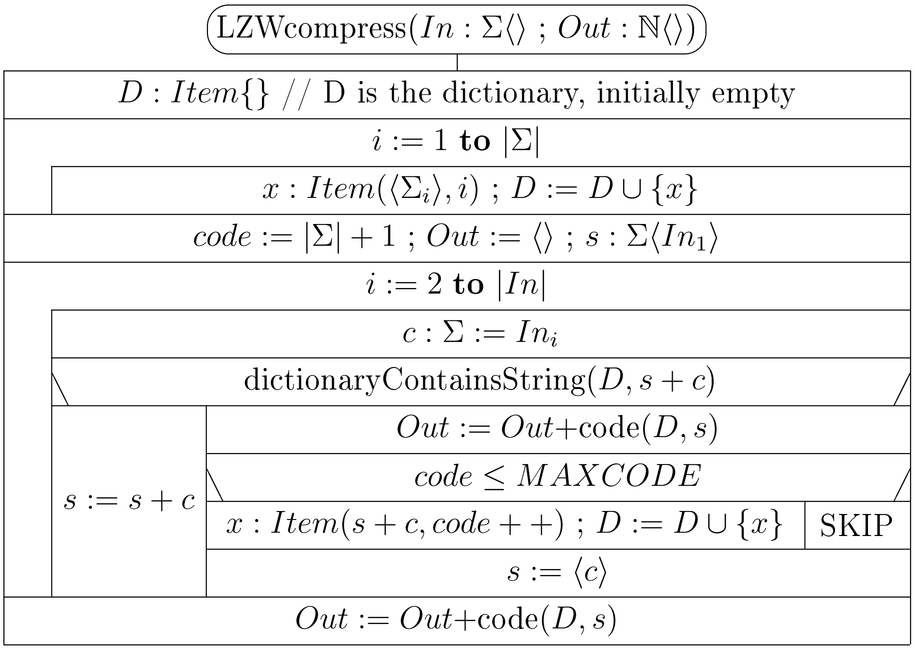
2.1. Feladat. *Próbáljuk ki, hogy ha a Huffman-kódolásban lévő indeterminizmusokat a fenti alfabetikus sorrendtől eltérően oldjuk fel, ugyanarra a tömörítendő szövegre mégis mindig ugyanolyan hosszú Huffman-kódot kapunk! (Ha például a minimum-prioritásos sorból azonos fa-gyakoriság-értekek esetén az alacsonyabb fát vesszük ki előbb – ezt az ad-hoc szabályt az alfabetikus konvenciónál erősebbnek véve –, akkor a fenti példában a kódfát felépítő ciklus második iterációjában a* $[B/\mathbf{2}]$ *és az* $\{R/\mathbf{2}\}$ *fát fogjuk összevonni.)*

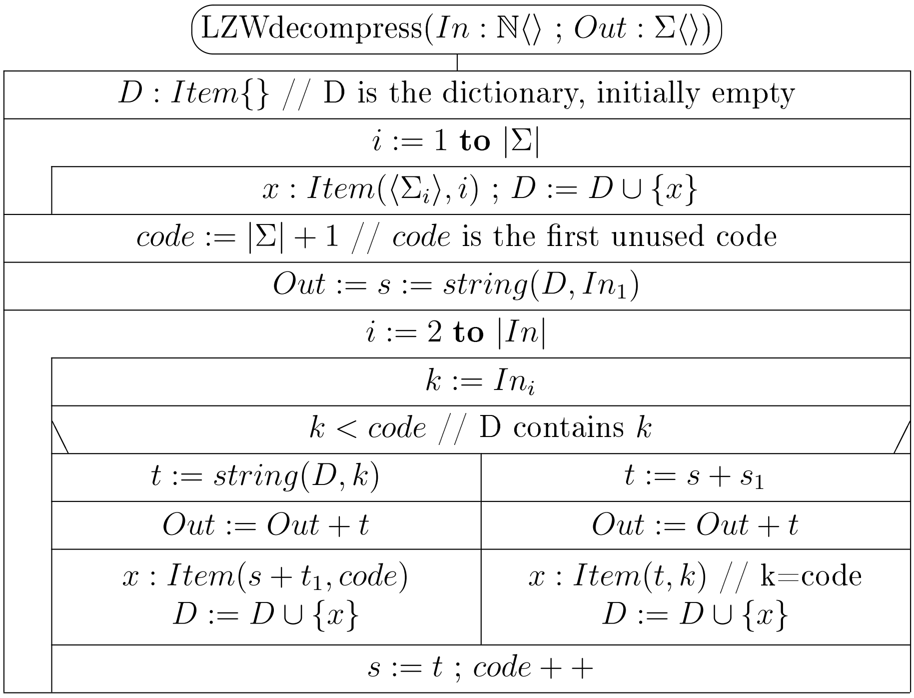
2.3. Lempel–Ziv–Welch (LZW) módszer

Az input szöveget ismétlődő mintákra (sztringekre) bontja. Mindegyik mintát ugyanolyan hosszú bináris kóddal helyettesíti. Ezek a minták kódjai. A tömörített fájl a kódtáblázatot nem tartalmazza. Részletes magyarázat olvasható Ivanyos Gábor, Rónyai Lajos és Szabó Réka: *Algoritmusok* c. könyvében [4]. (Online elérhetősége az irodalomjegyzékünkben.)

Jelölések az absztrakt struktogramokhoz:
- Ha a kódok b bitesek, akkor $MAXCODE = 2^b - 1$ globális konstans a kódként használható legnagyobb számérték. Ha pl. $b = 12$, akkor $MAXCODE = 2^{12} - 1 = 4095$.
- A $\Sigma = \langle \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_d \rangle$ sorozat tartalmazza az ábécé karaktereit.
- A tömörítésnél „In” a tömörítendő szöveg. „Out” a tömörítés eredménye: kódok sorozata. A kitömörítésnél fordítva.
- D a szótár, ami $(string, code)$ rendezett párok, azaz $Item$-ek halmaza. A szótárat a tömörített kód nem tartalmazza. Ehelyett a kitömörítés rekonstruálja az ábécé és a tömörített kód alapján.

$Item$
$+string : \Sigma\langle\rangle$ $+code : \mathbb{N}$
$+Item(s : \Sigma\langle\rangle \ ; \ k : \mathbb{N})\{string := s \ ; \ code := k\}$


LZWcompress($In : \Sigma\langle\rangle$; $Out : \mathbb{N}\langle\rangle$)
$D : Item\{\}$ // D is the dictionary, initially empty
$i := 1$ **to** $|\Sigma|$
$x : Item(\langle\Sigma_i\rangle, i)$; $D := D \cup \{x\}$
$code := |\Sigma| + 1$; $Out := \langle\rangle$; $s : \Sigma\langle In_1\rangle$
$i := 2$ **to** $|In|$
$c : \Sigma := In_i$
dictionaryContainsString($D, s + c$)
$s := s + c$
$Out := Out$+code(D, s)
$code \leq MAXCODE$
$x : Item(s + c, code + +)$; $D := D \cup \{x\}$
SKIP
$s := \langle c\rangle$
$Out := Out$+code(D, s)


LZWdecompress($In : \mathbb{N}\langle\rangle$; $Out : \Sigma\langle\rangle$)
$D : Item\{\}$ // D is the dictionary, initially empty
$i := 1$ **to** $|\Sigma|$
$x : Item(\langle\Sigma_i\rangle, i)$; $D := D \cup \{x\}$
$code := |\Sigma| + 1$ // $code$ is the first unused code
$Out := s := string(D, In_1)$
$i := 2$ **to** $|In|$
$k := In_i$
$k < code$ // D contains k
$t := string(D, k)$
$t := s + s_1$
$Out := Out + t$
$Out := Out + t$
$x : Item(s + t_1, code)$
$D := D \cup \{x\}$
$x : Item(t, k)$ // k=code
$D := D \cup \{x\}$
$s := t$; $code + +$