2. előadás

DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS 2.

Egyoldali pontbeli deriváltak

Vannak olyan esetek, amikor a differenciálhányados létezése a bal és a jobb oldali határértékek egyezésével szükséges vizsgálni. Például, az

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\qquad f(x):=|x|=\begin{cases} x & (x\geq 0)\\ -x & (x<0)\end{cases}$$

abszolút érték függvény az $a=0$ pontban nem differenciálható, mert

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-0}\frac{-x}{x}=-1\qquad \text{és}\qquad \lim_{x\to 0+0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+0}\frac{x}{x}=1.$$

Érdemes tehát az egyoldali pontbeli deriváltakat értelmezni.

1. Definíció. *Legyen $f\in\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ és $a\in\mathcal{D}_f$ olyan pont, hogy $\exists\delta>0\colon [a,a+\delta)\subset\mathcal{D}_f$. Azt mondjuk, hogy* **az f függvény jobbról differenciálható** *(vagy* **jobbról deriválható***)* **az a pontban***, ha*

$$\textit{létezik és véges a}\quad \lim_{x\to a+0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\quad \textit{határérték.}$$

Ezt a határértéket az $\boldsymbol{f'_+(a)}$ *szimbólummal jelöljük, és* **az f függvény a pontbeli jobb oldali deriváltjának** *(vagy* **differenciálhányadosának***) nevezzük, azaz*

$$f'_+(a):=\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\in\mathbb{R}.$$

Az f függvény bal oldali differenciálhatóságát az a pontban *hasonlóan értelmezzük, és az* $\boldsymbol{f'_-(a)}$ *szimbólummal jelöljük* **az a pontbeli bal oldali deriváltját***.*

Az előző jelölés értelmében, ha $f(x)=|x|$ $(x\in\mathbb{R})$, akkor $f'_-(0)=-1$ és $f'_+(0)=1$.

Az egyoldali függvényhatárértékeknél tanultak szerint világos, hogy

$$f\in D\{a\}\qquad\Longleftrightarrow\qquad \exists f'_-(a),\ \exists f'_+(a)\ \text{ és }\ f'_-(a)=f'_+(a)\ (=f'(a)).$$

A bal és jobb oldali deriváltak segítséget nyújtanak a következő általános probléma megoldásában. Legyen $b,j\in\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $a\in\mathbb{R}$ olyan pont, hogy $\exists\delta>0\colon (a-\delta,a)\subset\mathcal{D}_b$, $(a,a+\delta)\subset\mathcal{D}_j$, és $A\in\mathbb{R}$. Milyen legyenek a b és j függvények ahhoz, hogy az

$$f(x):=\begin{cases} b(x) & (x\in\mathcal{D}_b\colon x<a)\\ A & (x=a)\\ j(x) & (x\in\mathcal{D}_j\colon x>a)\end{cases}$$

függvény differenciálható legyen az a pontban?

Világos, hogy $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. Ha $f \in C\{a\}$, akkor $\exists \lim_{a-0} f$, $\exists \lim_{a+0} f$ és $\lim_{a-0} f = \lim_{a+0} f = f(a) = A$. Ezért

$$\exists \lim_{a-0} b = \lim_{a-0} f = A \qquad \text{és} \qquad \exists \lim_{a+0} j = \lim_{a+0} f = A,$$

azaz

$$\boxed{\text{I.} \quad \exists \lim_{a-0} b,\ \exists \lim_{a+0} j \quad \text{és} \quad \lim_{a-0} b = A = \lim_{a+0} j}\ .$$

Az I. feltétel azt jelenti, hogy $f \in C\{a\}$, ami szükséges ahhoz, hogy $f \in D\{a\}$ teljesüljön.

Gyakori eset, amikor b balról, j jobbról folytonos a-ban és $b(a) = j(a) = A$. Világos, hogy ekkor az I. feltétel teljesül. Fordítva, ha az I. feltétel teljesül, akkor a

$$b(a) := \lim_{a-0} b \qquad \text{és} \qquad j(a) := \lim_{a+0} j.$$

értékadással (módosítással) elérhetjük, hogy b balról és j jobbról folytonos legyen a-ban, valamint $b(a) = j(a) = A$. Ez a módosítás nem befolyásolja az f függvény értékét, hiszen $f(a) = A$.

Ha az I. feltétel teljesül, és $b(a) = j(a) = A$, akkor $f \in D\{a\} \iff f'_-(a) = f'_+(a)$, ahol

$$f'_-(a) = \lim_{x \to a-0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a-0} \frac{b(x) - A}{x - a} = \lim_{x \to a-0} \frac{b(x) - b(a)}{x - a} = b'_-(a)$$
$$f'_+(a) = \lim_{x \to a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a+0} \frac{j(x) - A}{x - a} = \lim_{x \to a+0} \frac{j(x) - j(a)}{x - a} = j'_+(a),$$

azaz

$$\boxed{\text{II.} \quad b'_-(a) = j'_+(a)}\ .$$

Ekkor $f'(a) = b'_-(a) = j'_+(a)$. Ha $b \in D\{a\}$ és $j \in D\{a\}$, akkor a II. feltétel ekvivalens, azzal, hogy $b'(a) = j'(a)$.

1. Feladat. *Állapítsa meg, hogy differenciálható-e az alábbi függvény az $a = 0$ pontban!*

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & (x \le 0) \\ e^{-x} & (x > 0). \end{cases}$$

Megoldás. Alkalmazzuk a fenti jelöléseket! Ekkor $A := f(0) = 1 - 0 = 1$, illetve legyen

$$b(x) := 1 - x \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad j(x) := e^{-x} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

A deriválási szabályok alapján $b, j \in D(\mathbb{R})$ és

$$b'(x) = -1, \qquad j'(x) = -e^{-x} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Ekkor

- I. teljesül, hiszen $b, j \in C\{0\}$, és $b(0) = j(0) = 1 = A$.
- II. teljesül, hiszen $b, j \in D\{0\}$ és $b'(0) = -1 = j'(0)$.

Ezért $f \in D\{0\}$ és $f'(0) = -1$.

Magasabb rendű deriváltak

Ha valamely valós-valós függvénynek létezik a deriváltfüggvénye, akkor természetes módon felvethetjük annak újbóli deriválhatóságát, és így eljuthatunk a ***többször deriválható függvények*** és a ***magasabb rendű deriváltak*** fogalmához. A rekurzió módszerét alkalmazzuk. Először a kétszer deriválhatóság fogalmát definiáljuk.

2. Definíció. *Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. Azt mondjuk, hogy* **$f$ kétszer deriválható az a pontban** *(jelölése:* $\boldsymbol{f \in D^2\{a\}}$ *), ha*

- *$\exists r > 0\colon f \in D\big(K_r(a)\big)$, és*
- *az f' deriváltfüggvény deriválható a-ban, azaz $f' \in D\{a\}$.*

Legyen ekkor

$$f''(a) := \big(f'\big)'(a)$$

az f függvény **a-beli második deriváltja**.

Ha $H := \Big\{x \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f \mid f \in D^2\{x\}\Big\} \neq \emptyset$, akkor $H \ni x \mapsto f''(x)$ az f függvény ***második deriváltfüggvénye***, amit röviden az f'' szimbólummal jelölünk.

Jelölések. A deriváltakra és a deriváltfüggvényekre a következő jelöléseket is fogjuk használni:

$$f^{(1)}(a) := f'(a) \quad \text{és} \quad f^{(1)} := f',$$
$$f^{(2)}(a) := f''(a) \quad \text{és} \quad f^{(2)} := f''.$$

Megállapodunk abban is, hogy $\quad f^{(0)}(a) := f(a) \quad$ és $\quad f^{(0)} := f$.

Indukcióval értelmezzük az ***n-szeri deriválhatóságot*** és az ***n-edik deriváltat***. Tegyük fel, hogy valamely $n \in \mathbb{N}$ esetében már értelmeztük azt, hogy valamely $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény mikor deriválható $(n-1)$-szer egy $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban (jelölése: $f \in D^{n-1}\{a\}$), továbbá azt is, hogy mikor létezik és mi az $(n-1)$-edik deriváltfüggvénye. Ha ez utóbbi létezik, akkor jelöljük azt az $f^{(n-1)}$ szimbólummal.

3. Definíció. *Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$, és tegyük fel, hogy valamely $n = 2, 3, \ldots$ esetén létezik az $f^{(n-1)}$-gyel jelölt $(n-1)$-edik deriváltfüggvény. Azt mondjuk, hogy* **f n-szer deriválható az a pontban** *(jelölése: $f \in D^n\{a\}$), ha*

- *$\exists r > 0\colon f \in D^{n-1}\big(K_r(a)\big)$, és*
- *az $f^{(n-1)}$ deriváltfüggvény deriválható a-ban, azaz $f^{(n-1)} \in D\{a\}$.*

Legyen ekkor

$$f^{(n)}(a) := \big(f^{(n-1)}\big)'(a)$$

az f függvény **a-beli n-edik deriváltja.**

Ha $H := \Big\{x \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f \mid f \in D^n\{x\}\Big\} \neq \emptyset$, akkor $H \ni x \mapsto f^{(n)}(x)$ az f függvény ***n-edik deriváltfüggvénye***, amit röviden az $f^{(n)}$ szimbólummal jelölünk.

Példa. Ha $f(x) := x^4$ $(x \in \mathbb{R})$, akkor

$$f'(x) = 4x^3 \ (x \in \mathbb{R}), \quad f''(x) = 12x^2 \ (x \in \mathbb{R}), \quad f^{(3)}(x) = 24x \ (x \in \mathbb{R}), \quad f^{(4)}(x) = 24 \ (x \in \mathbb{R}).$$

Ha egy f függvényre valamilyen $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban minden $n \in \mathbb{N}$ mellett teljesül, hogy $f \in D^n\{a\}$, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény ***a*-ban végtelen sokszor** (vagy **akárhányszor**) deriválható. Ennek jelölésére az $f \in D^\infty\{a\}$ szimbólumot használjuk. Ha ez minden $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban igaz, akkor az ***f* függvény végtelen sokszor** (vagy **akárhányszor**) deriválható, amit röviden így jelölünk: $f \in D^\infty$.

Könnyen igazolható, hogy ha a p függvény egy polinom, akkor $p \in D^\infty$. Másrészt $\exp \in D^\infty$, $\sin \in D^\infty$, $\cos \in D^\infty$.

A deriválási szabályok némelyike magasabb rendű deriváltakra is átvihető.

1. Tétel. *Ha valamilyen $n \in \mathbb{N}$ esetén $f, g \in D^n\{a\}$, akkor*

a) $f + g \in D^n\{a\}$ *és* $(f+g)^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) + g^{(n)}(a)$,

b) $f \cdot g \in D^n\{a\}$ *és* $(f \cdot g)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a)$ (**Leibniz-szabály**).

Bizonyítás. Mindkét állítás teljes indukcióval igazolható.

- Az a) bizonyítása szinte triviális.
- A b) belátása némi számolgatást igényel.

FÜGGVÉNYTULAJDONSÁGOK KAPCSOLATA A DERIVÁLTTAL 1.

Lokális szélsőértékek

Korábban már értelmeztük az abszolút szélsőértékek fogalmát. Célszerű bevezetni ezek lokális változatait.

4. Definíció. *Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban* **lokális maximuma van**, *ha*

$$\exists K(a) \subset \mathcal{D}_f, \ \forall x \in K(a) \colon f(x) \le f(a).$$

Ekkor az a pontot ***f*** **lokális maximumhelyének** *nevezzük, az $f(a)$ függvényérték pedig a függvény* **lokális maximuma**.

Hasonlóan értelmezzük a ***lokális minimum*** fogalmát. A lokális maximumot, illetve minimumot közösen ***lokális szélsőértéknek***, a lokális maximumhelyet, illetve lokális minimumhelyet ***lokális szélsőértékhelynek*** nevezzük.

Megjegyzés. Az abszolút szélsőértékhely és a lokális szélsőértékhely fogalmai között a következő kapcsolat áll fenn.

- Egy abszolút szélsőértékhely nem szükségképpen lokális szélsőértékhely, mert a lokális szélsőértékhelynek feltétele, hogy a függvény értelmezve legyen a pont egy környezetében. Így például az $f(x) = x$ $(x \in [0, 1])$ függvénynek a 0 pontban abszolút minimuma van, de ez nem lokális minimumhely. Azonban, ha az $f : A \to \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in A$ pontban abszolút szélsőértéke van, és A tartalmazza az a pont egy környezetét, akkor a lokális szélsőértékhely.
- Egy lokális szélsőértékhely nem szükségképpen abszolút szélsőértékhely, hiszen attól, hogy az f függvénynek az a pont egy környezetében nincs $f(a)$-nál nagyobb értéke, a környezeten kívül f felvehet $f(a)$-nál nagyobb értéket.

2. Tétel (A lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű szükséges feltétel). *Tegyük fel, hogy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és*

- *$f \in D\{a\}$ valamilyen $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$-ben,*
- *f-nek a-ban lokális szélsőértéke van.*

Ekkor $f'(a) = 0$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pont lokális maximumhelye az $f \in D\{a\}$ függvénynek. Ekkor

$$\exists r > 0,\ \forall x \in (a - r, a + r)\colon f(x) \le f(a).$$

Tekintsük az f függvény a-hoz tartozó különbséghányados-függvényét:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad \big(x \in \mathcal{D}_f \setminus \{a\}\big). \tag{1}$$

Ha $a < x < a + r$, azaz $x - a > 0$, akkor $f(x) \le f(a)$ (vagyis $f(x) - f(a) \le 0$) miatt (1)-ben szereplő különbséghányados nem pozitív. Mivel $f \in D\{a\}$, ezért

$$f'(a) = f'_+(a) = \lim_{x \to a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \le 0.$$

Ha $a - r < x < a$, azaz $x - a < 0$, akkor $f(x) \le f(a)$ (vagyis $f(x) - f(a) \le 0$) miatt (1)-ben szereplő különbséghányados nem negatív. Mivel $f \in D\{a\}$, ezért

$$f'(a) = f'_-(a) = \lim_{x \to a-0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \ge 0.$$

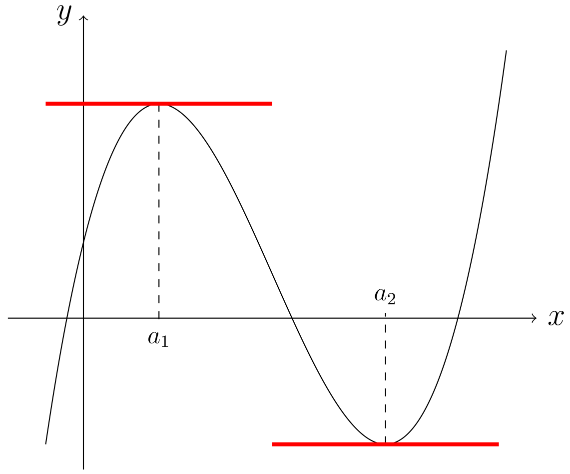
Azt kaptuk tehát, hogy $f'(a) \le 0$ és $f'(a) \ge 0$, ami csak úgy lehetséges, ha $f'(a) = 0$.

A bizonyítás hasonló akkor is, ha a lokális minimumhelye az f függvénynek.

Megjegyzések.

1. A deriválható f függvénynek csak olyan pontban lehet lokális szélsőértéke, ahol a függvény deriváltja nulla. A lokális szélsőértékek meghatározásához tehát az $f'(x) = 0$ egyenletet kell megoldani.

2. A tételnek az a geometriai jelentése, hogy ha a függvény grafikonjának létezik érintője egy lokális szélsőértékpontban, akkor az érintő vízszintes, párhuzamos az x tengellyel.



3. Abból, hogy $f'(a) = 0$, nem következik, hogy az f függvénynek az a pontban lokális szélsőértékhelye van. Például az

$$f(x) := x^3 \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{függvényre} \qquad f'(x) = 3x^2 \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{miatt} \qquad f'(0) = 0,$$

de a függvénynek a 0 pontban nincs lokális szélsőértéke (hiszen a függvény az egész számegyenesen szigorúan monoton növekvő). Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy ha f differenciálható a-ban, akkor az $f'(a) = 0$ csak szükséges, de nem elégséges feltétele annak, hogy az f függvénynek a-ban lokális szélsőértéke legyen.

A fenti példa motiválja a következő fogalom bevezetését.

5. Definíció. *Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$* **stacionárius pontja**, *ha $f \in D\{a\}$ és $f'(a) = 0$.*

A lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű szükséges feltétel azt állítja, hogy deriválható függvények lokális szélsőértékhelyei csak a függvény stacionárius pontjaiban lehetnek. A fenti példa azonban azt mutatja, hogy lehetnek olyan stacionárius pontok, amelyek nem lokális szélsőértékhelyek. Fontos feladat tehát annak eldöntése, hogy egy stacionárius pont vajon lokális szélsőértékhely-e. Erre hamarosan jól használható eredményeket fogunk mutatni.

A differenciálszámítás középértéktételei

A középértéktételek olyan segédállítások, amelyek egy intervallumon értelmezett függvényről garantálják, hogy mindig van olyan pont az intervallum belsejében, amire bizonyos tulajdonság teljesül. Ilyen típusú állítás például a Bolzano tétele, miszerint ha $f \in C[a,b]$ és $f(a) \cdot f(b) < 0$, akkor $\exists \xi \in (a,b)\colon f(\xi) = 0$. Emlékezzük arról, hogy $f \in C[a,b]$ azt jelenti, hogy $[a,b] \in \mathcal{D}_f$, $f \in C\{x\}$ $\big(x \in (a,b)\big)$, illetve f jobbról folytonos a-ban és balról folytonos b-ben

Differenciálszámításnál a középértéktételek egy olyan pont létezését garantálják, ahol a függvény deriváltja olyan értéket vesz fel, ami a függvényhez kapcsolódik. Három ilyen tételt mutatunk meg: a Rolle-, a Lagrange- és a Cauchy-féle középértéktételt. A középértéktételekkel fontos tulajdonságokat tudunk igazolni a függvény viselkedéséről.

3. Tétel (Rolle-féle középértéktétel). *Legyen $a, b \in \mathbb{R}$ és $a < b$. Ekkor*

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \in C[a,b], \\ \bullet\ f \in D(a,b), \\ \bullet\ f(a) = f(b) \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \exists \xi \in (a,b)\colon f'(\xi) = 0.$$

Bizonyítás. A Weierstrass-tétel szerint, ha $f \in C[a,b]$, akkor f felveszi a maximumát és a minimumát az $[a,b]$ intervallumon, azaz

$$\exists \xi_1, \xi_2 \in [a,b]\colon f(\xi_1) = \min\{f(x) \mid x \in [a,b]\}, \ f(\xi_2) = \max\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$$

Ekkor két eset lehetséges

a) $\underline{f(\xi_1) = f(\xi_2)}$. Ekkor a maximum és a minimum megegyezik, azaz f konstans az $[a,b]$ intervallumon. Ezért $f'(\xi) = 0$ minden $\xi \in (a,b)$ esetén.

b) $\underline{f(\xi_1) \neq f(\xi_2)}$. Ekkor az $f(a) = f(b)$ feltétel miatt nem lehetséges, hogy ξ_1 és ξ_2 legyen az $[a,b]$ intervallum két végpontja. Tehát egyikük az intervallum belsejében van, amelyet ξ-vel fogjuk jelölni. Így már ξ lokális szélsőértékhelye lesz f-nek. Ezért a lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű szükséges feltétel miatt $f'(\xi) = 0$.

Megjegyzés. A Rolle-féle középértéktételből következik, hogy ha $f \in C[a,b]$, $f \in D(a,b)$ és $\forall x \in (a,b)\colon f'(x) \neq 0$, akkor $f(a) \neq f(b)$.

2. Feladat. *Igazoljuk, hogy az*

$$e^x = x + 1$$

egyenletnek egyetlen egy megoldása van!

Megoldás. Vegyük észre, hogy az egyenlet megoldása egyben az

$$f(x) := e^x - x - 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény zérushelye is. Világos, hogy $a = 0$ megoldása az egyenletnek, azaz $f(a) = 0$. Azonban az

$$f'(x) = e^x - 1$$

deriváltfüggvény csak az $x = a = 0$ helyen lehet nulla az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt.

Ezért, ha $b > a$ tetszőleges szám, akkor $f \in C[a,b]$, $f \in D(a,b)$ és $\forall x \in (a,b)\colon f'(x) \neq 0$, amiből a Rolle-tétel alapján következik, hogy $f(a) \neq f(b)$, azaz $f(b) \neq 0$. Ez azt jelenti, hogy az egyenletnek nincs pozitív megoldása.

Hasonlóan igazolható, hogy az egyenletnek nincs negatív megoldása.

A Rolle-féle középértéktétel a következő módon általánosítható.

4. Tétel (Cauchy-féle középértéktétel). *Legyen $a, b \in \mathbb{R}$ és $a < b$. Ekkor*

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f, g \in C[a,b], \\ \bullet\ f, g \in D(a,b), \\ \bullet\ \forall x \in (a,b)\colon g'(x) \neq 0 \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \exists \xi \in (a,b)\colon \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Bizonyítás. Először vegyük észere, hogy a Rolle-tételből következik, hogy $g(a) \neq g(b)$. Tekintsük az

$$F(x) := f(x) - \lambda g(x) \quad (x \in [a,b]), \qquad \text{ahol} \qquad \lambda := \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

függvényt! Világos, hogy

$$f, g \in C[a,b] \implies F \in C[a,b] \qquad \text{és} \qquad f, g \in D(a,b) \implies F \in D(a,b).$$

Másrészt

$$F(a) = f(a) - \lambda g(a) = \ (\lambda \text{ definiciója szerint})\ = f(b) - \lambda g(b) = F(b).$$

Ez azt jelenti, hogy F eleget tesz a Rolle-tétel feltételeinek, és így $\exists \xi \in (a,b)\colon F'(\xi) = 0$. Azonban

$$F'(x) = f'(x) - \lambda g'(x) \quad (x \in (a,b)),$$

tehát

$$f'(\xi) - \lambda g'(\xi) = F'(\xi) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lambda = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

A Cauchy-féle középértéktételnek van egy fontos speciális esete.

5. Tétel (Lagrange-féle középértéktétel). *Legyen $a, b \in \mathbb{R}$ és $a < b$. Ekkor*

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \in C[a,b], \\ \bullet\ f \in D(a,b) \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \exists \xi \in (a,b)\colon\ f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

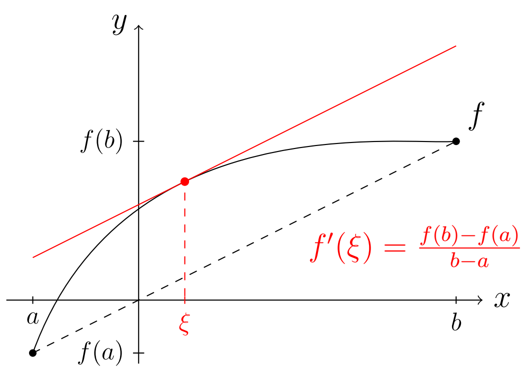
Bizonyítás. Legyen $g(x) := x$ a Cauchy-féle középértéktételben.

A Rolle-féle középértéktétel a Lagrange-féle középértéktétel speciális esete.

A Lagrange-féle középértéktétel geometriai jelentése: az $\big(a, f(a)\big)$ és $\big(b, f(b)\big)$ pontokon átmenő húr meredeksége

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Tehát f grafikonjának van olyan pontja, ahol az érintő párhuzamos ezzel a húrral.



A Lagrange-féle középértéktétel egyszerű, de fontos következményei a következő állítások:

6. Tétel (A deriváltak egyenlősége). *Legyen $a, b \in \mathbb{R}$ és $a < b$.*

1. *Tegyük fel, hogy $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ és $f \in D(a, b)$. Ekkor*

$$f' \equiv 0 \ (a, b)\text{-n} \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \equiv \textit{állandó} \ (a, b)\text{-n.}$$

2. *Tegyük fel, hogy $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ és $f, g \in D(a, b)$. Ekkor*

$$f' \equiv g' \ (a, b)\text{-n} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists c \in \mathbb{R},\ \forall x \in (a, b) \colon f(x) = g(x) + c.$$

Bizonyítás.

1. Az állítás $\boxed{\Leftarrow}$ irányát már ismerjük, ugyanis a konstansfüggvény deriváltja 0.

   A $\boxed{\Rightarrow}$ irány a Lagrange-féle középértéktétel következménye. Valóban, $\forall x, y \in (a, b)$, $x < y$ esetén $f \in C[x, y]$, $f \in D(x, y)$, és így

$$\exists \xi \in (x, y) \colon \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(\xi) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) = f(y).$$

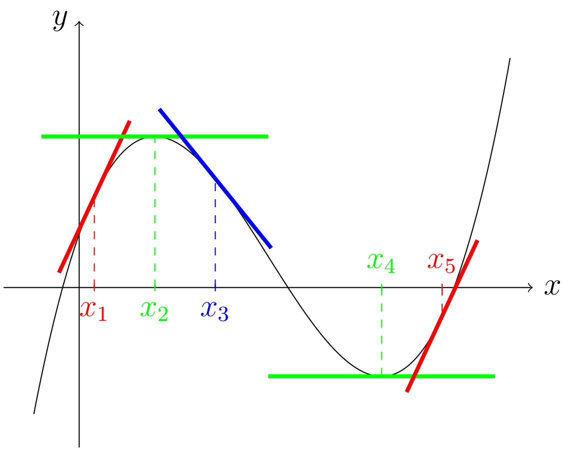
2. Alkalmazzuk az 1. állítást az $F := f - g$ függvényre.

Monotonitás

Az egyszerűség kedvéért csak intervallumon vizsgáljuk a monotonitást. Az $(a, b) \subset \mathbb{R}$ szimbólummal jelölünk egy korlátos vagy nem korlátos nyílt intervallumot, tehát $a = -\infty$ vagy $b = +\infty$ is lehetséges.

Egy függvény esetén a „monoton növekvő”, a „monoton csökkenő”, a „szigorúan monoton növekvő”, illetve a „szigorúan monoton csökkenő” kifejezések helyett gyakran a „$\nearrow$”, a „$\searrow$”, a „$\uparrow$”, illetve a „$\downarrow$” jeleket használjuk.

Az első fontos észrevétel az, hogy az első derivált előjeléből következtethetünk a függvény monotonitására. A következő animációban „látjuk”, hogy a lokális szélsőértékeken a függvényhez húzott érintő párhuzamos az x tengellyel, továbbá a szigorúan monoton növekvő szakaszokon az érintő meredeksége pozitív, illetve a szigorúan monoton csökkenő szakaszokon az érintő meredeksége negatív. Igazolni fogjuk, hogy tetszőleges differenciálható függvényekre ez az állítás „csak majdnem” igaz.



Az érintő viselkedése

7. Tétel (A monotonitás és a derivált kapcsolata). *Legyen* $(a,b) \subset \mathbb{R}$ *egy nyílt intervallum. Tegyük fel, hogy* $f \in D(a,b)$. *Ekkor*

1. $f \nearrow$ [*illetve* $\searrow$] (a,b)-*n* $\iff$ $f' \geq 0$ [*illetve* $f' \leq 0$] (a,b)-*n;*
2. $f' > 0$ [*illetve* $f' < 0$] (a,b)-*n* $\implies$ $f \uparrow$ [*illetve* $\downarrow$] (a,b)-*n.*

Bizonyítás.

1. $\boxed{\Rightarrow}$ Ha $f \nearrow (a,b)$-n és $t \in (a,b)$ egy tetszőleges pont, akkor

$$\frac{f(x)-f(t)}{x-t} \geq 0 \qquad (t < x < b),$$

hiszen $x - t > 0$ és a monotonitás miatt $f(x) - f(t) \geq 0$. Mivel $f \in D\{t\}$, így

$$f'(t) = f'_+(t) = \lim_{x \to t+0} \frac{f(x)-f(t)}{x-t} \geq 0.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Ha $\forall x \in (a,b)\colon f'(x) \geq 0$, akkor legyen $x, y \in (a,b)$, $x < y$ két tetszőleges pont. Ekkor $f \in C[x,y]$, $f \in D(x,y)$, és így a Lagrange-féle középértéktétel szerint

$$\exists \xi \in (x,y)\colon \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(\xi) \geq 0 \qquad \implies \qquad f(x) \leq f(y).$$

Ezért $f \nearrow (a,b)$-n.

Az állítás hasonlóan igazolható monoton csökkenő függvények esetében is.

2. Alkalmazzuk „éles” egyenlőtlenségeket az 1. pont $\boxed{\Leftarrow}$ irányában.

Megjegyzések.

1. A tételben lényeges feltétel, hogy intervallumon értelmezett függvényről van szó. Például, ha
$$f(x) := \frac{1}{x} \quad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big), \qquad \text{akkor} \qquad \forall x \in \mathcal{D}_f\colon f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0,$$
de az f függvény nem szigorúan monoton csökkenő a $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ halmazon, ami ***nem intervallum***.

2. Az 1. pont $\boxed{\Rightarrow}$ irányában nem tudunk „éles” egyenlőtlenségeket alkalmazni. ***A szigorú monotonitásra vonatkozó elégséges feltételek nem is fordíthatók meg.*** Például az
$$f(x) := x^3 \qquad (x \in \mathbb{R})$$
függvény szigorúan monoton növekvő az egész valós számok halmazán, de $f'(0) = 0$.

3. Nem nehéz igazolni (pl. átviteli elvvel), hogy ha f monoton az (a,b) intervallumon, és folytonos az intervallum egyik végpontján, akkor a monotonitás kiterjeszthető a végponttal bővített intervallumra. Ez az állítás szigorú monotonitás esetén is igaz. Így tudjuk az előbbi tételt kiterjeszteni tetszőleges intervallumra. Például, $f \in C[a,b]$ és $f \in D(a,b)$ esetén
$$f \nearrow [a,b] - n \qquad \iff \qquad f' \geq 0 \quad (a,b) - n.$$

A lokális szélsóértékre vonatkozó elégséges feltételek

Az eddigiek alapján könnyen kaphatunk elégséges feltételeket arra, hogy egy függvénynek valamilyen pontban lokális szélsőértéke legyen.

Az egyik ahhoz kapcsolódik, hogy a deriváltfüggvény ***előjelet vált***. Azt mondjuk, hogy a $g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény az $t \in \operatorname{int} \mathcal{D}_g$ pontban negatívból pozitívba megy át (röviden: $(-,+)$ előjelváltása van), ha $g(t) = 0$ és $\exists \delta > 0$ úgy, hogy $g < 0$ $(t-\delta, t)$-n és $g > 0$ $(t, t+\delta)$-n. A $(+,-)$ előjelváltást hasonló módon értelmezzük.

8. Tétel (A lokális szélsóértékre vonatkozó elsőrendű elégséges feltétel). *Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy*

- *$f \in D(a, b)$,*
- *egy $c \in (a, b)$ pontban $f'(c) = 0$ és*
- *az f' deriváltfüggvény előjelet vált c-ben.*

Ekkor,

1. *ha az f' függvény a c pontban negatív értékből pozitív értékbe megy át, akkor c az f függvénynek lokális minimumhelye,*
2. *ha az f' függvény a c pontban pozitív értékből negatív értékbe megy át, akkor a c pont az f függvénynek lokális maximumhelye.*

Bizonyítás. Az állítás azonnal következik a monotonitás és a derivált kapcsolatárról szóló tételből, hiszen ha f-nek $(-,+)$ előjelváltása van a c pontban, akkor $\exists \delta > 0$ úgy, hogy $f' < 0$ $(c-\delta, c)$-n és $f' > 0$ $(c, c+\delta)$-n. Ezért $f \downarrow (c-\delta, c]$-n és $f \uparrow [c, c+\delta)$-n. Emiatt $\forall x \in (c-\delta, c+\delta)$: $f(x) > f(c)$, tehát c az f függvénynek lokális minimumhelye.

Az állítás hasonlóan igazolható $(+,-)$ előjelváltás esetén.

3. Feladat. *Határozzuk meg az*

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2} \qquad (x \neq 0)$$

függvény lokális szélsőértékhelyeit és monotonitási intervallumait!

Megoldás. A tanult tételek értelmében előjelvizsgálatot fogunk végezni az

$$f'(x) = \frac{1 \cdot x^2 - (x+1) \cdot 2x}{x^4} = -\frac{x+2}{x^3} \qquad (x \neq 0)$$

deriváltfüggvény esetében. Mivel f' folytonos minden $x \neq 0$ pontban, így csak az $x = 0$ és az f' zérushelyei olyan pontok, ahol eltérhet f' előjele a pont bal és jobb oldali környezetén. A példában f'-nek egyetlen zérushelye van:

$$f'(x) = -\frac{x+2}{x^3} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x = -2.$$

Ezzel három részintervallumot kapunk, ahol egységes f' előjele: $(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$ és $(0, +\infty)$. Nem nehéz meghatározni f' előjeleit ezeken az intervallumokon, hiszen ehhez elegendő kiszámolni f' értékét az intervallumok egyik pontján. A következő táblázat tartalmazza az előjelvizsgálatot és ennek következményeit az f függvényre vonatkozóan.

	$x < -2$	-2	$-2 < x < 0$	$x > 0$
f'	$-$	0	$+$	$-$
f	$\downarrow$	$-1/4$	$\uparrow$	$\downarrow$
lok.		min		

A táblázatból rögtön leolvashatók f monotonitási szakaszait, illetve azt, hogy f-nek lokális minimumhelye van az $x = -2$ pontban, és lokális minimuma $f(-2) = -1/4$.

Kétszer differenciálható függvények esetében van egy alternatív módszer, amivel nem szükséges előjelvizsgálatot végezni, ha a függvényt kétszer deriváljuk.

9. Tétel (A lokális szélsóértékre vonatkozó másodrendű elégséges feltétel). *Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy*

- *$f \in D^2\{c\}$, azaz kétszer deriválható egy $c \in (a, b)$ pontban,*
- *$f'(c) = 0$ és*
- *$f''(c) \neq 0$.*

Ekkor c lokális szélsőértékhelye az f függvénynek, és

1. *ha $f''(c) > 0$, akkor f-nek c-ben lokális minimuma van,*
2. *ha $f''(c) < 0$, akkor f-nek c-ben lokális maximuma van.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $f''(c) > 0$. Mivel

$$0 < f''(c) = \lim_{x\to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x) - 0}{x - c} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{x - c},$$

így a c pontnak van olyan bal oldali környezete, ahol $f' < 0$, és van olyan jobb oldali környezete, ahol $f' > 0$. Tehát f'-nek $(-, +)$ előjelváltása van, ami azt jelenti, hogy f'-nek c-ben lokális minimuma van.

Az állítás hasonlóan igazolható $f''(c) < 0$ esetén.

Megjegyzések.

1. A 3. Feladatban $f \in D^2\{x\}$ minden $x \neq 0$ esetén, és

$$f''(x) = \left(-\frac{x+2}{x^3}\right)' = -\frac{1 \cdot x^3 - (x+2) \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{2x+6}{x^4} \qquad \Longrightarrow \qquad f(-2) > 0.$$

   Ezért $x = -2$ valóban lokális minimumhely.

2. Ha egyszerre $f'(c) = 0$ és $f''(c) = 0$, akkor c lehet lokális szélsőértékhely, de lehet, hogy nem. A különböző lehetőségeket mutatják például az $f(x) := x^3$, $f(x) := x^4$ és az $f(x) := -x^4$ $(x \in \mathbb{R})$ függvények a $c = 0$ helyen. Ebben az esetben további vizsgálatok kellenek.