SZA2_zh1.pdf

1) Igaz-e, hogy $\varphi = \neg(p \vee q \wedge p) \to \neg p \vee \neg q$ formulának a $\psi = p \to q \to p$ formula tautologikus következménye? (Indoklás!)

$$\varphi = \neg(\underbrace{p \vee (q \wedge p)}_{p}) \to (\neg p \vee \neg q) = \underbrace{p \vee (\neg p \vee \neg q)}_{i}$$

tehát $\models_0 \varphi$.

$$\psi = p \to \underbrace{(q \to p)}_{\neg q \vee p} = \underbrace{\neg p \vee (\neg q \vee p)}_{i}$$, tehát $\models_0 \psi$ is.

És igen, $\varphi \models_0 \psi$ is igaz, mert $\models_0 \psi$.

2) Adjunk meg egy, a $(\neg(\neg y \wedge x) \to \neg z) \to \neg y$ formulával tautologikusan ekvivalens konjunktív normálformájú (KNF) formulát!

$$\underbrace{(\underbrace{\neg(\neg y \wedge x)}_{y \vee \neg x} \to \neg z)}_{(\neg y \wedge x) \vee \neg z} \to \neg y \sim_0 \neg((\neg y \wedge x) \vee \neg z) \vee \neg y \sim_0$$

$$\Big(\underbrace{\neg(\neg y \wedge x)}_{(y \vee \neg x)} \wedge z\Big) \vee \neg y$$

$$\sim_0 \Big(\underbrace{(y \vee \neg x) \vee \neg y}_{i}\Big) \wedge (z \vee \neg y) \sim_0 \underline{\underline{z \vee \neg y}} .$$

3) Rezolúcióval igazoljuk, hogy

$\{\overset{K_1}{p \vee \neg q \vee r \vee s}, \overset{K_2}{\neg p \vee \neg q}, \overset{K_3}{\neg p \vee \neg r \vee \neg s}, \overset{K_4}{\neg q \vee \neg r}, \overset{K_5}{q \vee s}, \overset{K_6}{\neg s}\}$

klózhalmaz kielégíthetetlen!

$K_7 = res(K_1, K_2) = \neg q \vee r \vee s$, $K_8 = res(K_7, K_5) = r \vee s$, $K_9 = res(K_8, K_6) = r$

$K_{10} = res(K_4, K_9) = \neg q$, $K_{11} = res(K_{10}, K_5) = s$, $K_{12} = res(K_6, K_{11}) = \square$.

4. Egy elsőrendű logikában legyen $Pr = \{P, Q\}$, $ar(P) = 2$, $ar(Q) = 1$; $Fn = \{f\}$, $ar(f) = 2$; $Cnst = \{a\}$.

Tekintsük ennek a logikának az alábbi $I = \langle U, I_{Pr}, I_{Fn}, I_{Cnst} \rangle$ interpretációját. $U = \{0, 1, 2\}$, $I_{Pr} = P \to P^I$, $Q \to Q^I$, $I_{Fn}: f \to f^I$, $I_{Cnst}: a \to a^I$, ahol

P^I	0	1	2
0	h	i	i
1	h	i	i
2	h	h	h

Q^I	
0	h
1	i
2	i

f^I	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$a^I = 1$, $\kappa(x) = 2$, $\kappa(y) = 1$

sorok: első arg., oszlopok: második arg.

a) $$\Big|\underbrace{f(\underbrace{f(\underbrace{x}_{2}, \underbrace{f(\underbrace{a}_{1}, \underbrace{x}_{2})}_{0})}_{2}, \underbrace{y}_{1})}_{0}\Big|^{I,\kappa} = 0$$

b) $$\Big|\underbrace{\underbrace{P(\underbrace{x}_{2}, \underbrace{y}_{1})}_{h} \vee \underbrace{Q(\underbrace{a}_{1})}_{i}}_{i} \to \underbrace{\neg \underbrace{Q(\underbrace{f(\underbrace{x}_{2}, \underbrace{y}_{1})}_{0})}_{h}}_{i}\Big|^{I,\kappa} = i$$

c) $$\Big|\underbrace{\exists y P(y, \underbrace{x}_{2})}_{i} \to \underbrace{\neg \underbrace{Q(\underbrace{f(\underbrace{y}_{1}, \underbrace{y}_{1})}_{2})}_{i}}_{h}\Big|^{I,\kappa} = h$$

SZA2 – zh1 . pdf)

5) Mutassuk meg, hogy nem igaz:
„Minden φ és ψ elsőrendű formulára
$$\varphi \to \forall x \psi \sim \forall x(\varphi \to \psi)"$$

Ellenpélda:
Legyen az I interpretáció a következő:
$U := \{0,1\}$, $R = \{P\}$, $ar(P) = 1$, $P^I := \{(0)\}$,
$\varphi := P(x)$, $\psi := P(x)$.

x	$P(x)$	$\forall x P(x)$	$P(x) \to \forall x P(x)$	$P(x) \to P(x)$	$\forall x(P(x) \to P(x))$
0	i	h	h	i	i
1	h		i	i	

Legyen K az az I-beli változókiértékelés, ami x-hez a 0-t rendeli. Ekkor
$$|\varphi \to \forall x \psi|^{I,K} = |P(x) \to \forall x P(x)|^{I,K} = h \text{, de}$$
$$|\forall x(\varphi \to \psi)|^{I,K} = |\forall x(P(x) \to P(x))|^{I,K} = i.$$