13. előadás

TÖBBSZÖRÖS INTEGRÁLOK 2.

Kettős integrálok kiszámítása integráltranszformációval

A helyettesítéssel való integrálást illetően idézzük fel a valós-valós függvényekre vonatkozó állításokat. Először a határozatlan integrálokkal kapcsolatos ***második helyettesítési szabályra*** emlékeztetünk:

Legyenek $I, J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumok. Tegyük fel, hogy $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to I$, $\mathcal{R}_g = I$, $g \in D(J)$, $g' > 0$ J-n (vagy $g' < 0$ J-n) és az $(f \circ g) \cdot g' : J \to \mathbb{R}$ függvénynek van primitív függvénye. Ekkor az f függvénynek is van primitív függvénye és

$$\int f(x)\,dx \underset{x=g(t)}{=} \int f\big(g(t)\big) \cdot g'(t)\,dt\Big|_{t=g^{-1}(x)} \qquad (x \in I).$$

Tegyük fel, hogy egy $\int f(x)\,dx$ alakú határozatlan integrált akarunk kiszámítani. Olyan g-t keresünk, amelyre az $\int f\big(g(t)\big) \cdot g'(t)\,dt$ integrált ki tudjuk számítani. E cél érdekében általában olyan g függvényt próbálunk választani, amelyre $f \circ g \cdot g'$ egyszerűbb, mint f.

A Newton–Leibniz-formulából következik a helyettesítéssel való integrálás határozott integrálokra vonatkozó alábbi változata: tegyük fel, hogy $f \in C[a,b]$ és $g : [\alpha, \beta] \to [a,b]$ folytonosan differenciálható. Ekkor

$$(*) \qquad \int\limits_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f \circ g \cdot g'.$$

Tegyük fel még, hogy g olyan bijekció, amire $\mathcal{R}_g = [a,b]$ teljesül. Ekkor két eset lehetséges:

- ha $g \uparrow [\alpha,\beta]$-n ($g' \geq 0$), akkor $g(\alpha) = a$ és $g(\beta) = b$, ezért $(*)$-ból következik, hogy

$$\int\limits_{a}^{b} f = \int\limits_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f \circ g \cdot g'.$$

- ha $g \downarrow [\alpha,\beta]$-n ($g' \leq 0$), akkor $g(\alpha) = b$ és $g(\beta) = a$, ezért $(*)$-ból azt kapjuk, hogy

$$\int\limits_{a}^{b} f = -\int\limits_{b}^{a} f = -\int\limits_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f = -\int\limits_{\alpha}^{\beta} f \circ g \cdot g' = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f \circ g \cdot \big(-g'\big).$$

Fontos még megjegyezni, hogy $(*)$ akkor is igaz, ha f folytonossága helyett feltesszük, hogy f integrálható az $[a,b]$-n. A tételt ebben az általánosabb esetben nehezebb bizonyítani, mert ekkor $f \circ g \cdot g'$ integrálhatósága nem következik rögtön a folytonosságból, és a Newton-Leibniz-formula sem alkalmazható. Összefoglalva a következő állítás igaz:

Tegyük fel, hogy $f \in R[a,b]$ és $g : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ egy folytonosan deriválható bijekció, amire $\mathcal{R}_g = [a,b]$ teljesül. Ekkor

$$\int\limits_{a}^{b} f = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f \circ g \cdot \big|g'\big|.$$

Az előző állítás általánosítása többszörös integrálokra már jóval bonyolultabb. Valós-valós esetben az f és a g függvények intervallumokon értelmeztük. Többdimenziós esetben olyan H halmazok kerülnek szóba, amelyeknek „van mértékük”, és így érdemes ezeken az integrált értelmezni. Emlékezzünk arra, hogy egy $H \subset \mathbb{R}^2$ korlátos síkidomnak akkor van területe, ha a konstans 1 függvény Riemann-integrálható H-n, és ekkor a területét a

$$t(H) := \iint\limits_H 1 \, dx \, dy$$

kettős integrállal értelmezzük. Hasonlóan járunk el egy $H \subset \mathbb{R}^3$ téridom térfogatának értelmezésekor hármas integrállal. Általánosan, akkor mondjuk, hogy a $H \subset \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ korlátos halmaz Jordan-mérhető, ha a konstans 1 függvény Riemann-integrálható H-n, és ekkor a H halmaz Jordan-mértéke a

$$\mu(H) := \int\limits_H 1$$

integrállal értelmezzük.

1. Tétel (Integráltranszformáció). *Legyen $U \subset \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ egy nem üres nyílt halmaz, és $H \subset U$ egy nem üres, Jordan-mérhető és zárt halmaz. Tegyük fel, hogy*

a) *$g : U \to \mathbb{R}^n$ egy folytonosan differenciálható függvény,*

b) *a g függvény injektív a H halmaz belsejében, azaz $g|_{\operatorname{int} H}$ invertálható.*

Ekkor a $g[H]$ halmaz is Jordan-mérhető, illetve az $f : g[H] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény akkor és csak akkor integrálható, ha a

$$H \ni t \mapsto f\big(g(t)\big) \cdot \big|\det g'(t)\big|$$

függvény is integrálható, és

$$\int\limits_{g[H]} f(x) \, dx = \int\limits_H f\big(g(t)\big) \cdot \big|\det g'(t)\big| \, dt.$$

Bizonyítás. A tételt nem bizonyítjuk.

Megjegyzés. Az alkalmazások szempontjából az integráltranszformációra két okból is szükség lehet. Egyrészt, ha H olyan tartomány, amelyen az integrált csak „körülményesen” lehet kiszámolni, akkor *kereshetünk* olyan g-t, amely már egy „egyszerűbb” halmazon van értelmezve (pl. téglalapon), ezért a jobb oldali integrált könnyebb kiszámolni. Másrészt előfordulhat az is, hogy sikerül olyan g függvényt *találni*, amelyre $f \circ g \cdot |\det g'|$ egyszerűbb, mint f.

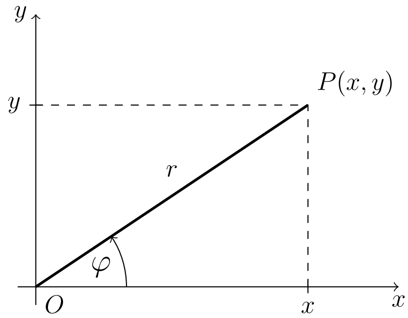
A következőben néhány nevezetes integráltranszformációt fogjuk bemutatni.

Síkbeli polárkoordináta-transzformáció:

Sok esetben a sík Descates-féle derékszögű koordinátarendszer helyett/mellett célszerű ***polárkoordináta-rendszert*** bevezetni a következő módon. Kiválasztunk a síkon egy rögzített O pontot (pólus) és egy ebből kiinduló félegyenest (polártengely). A pólustól különböző P pont *polárkoordinátáin* az (r, φ) számpárt értjük, ahol $r = \overline{OP}$ és φ az $\overrightarrow{OP}$ félegyenesnek a polártengellyel bezárt szöge.

Világos, hogy r és φ egyértelműen meghatározza a P pont helyzetét, ezzel szemben a P pont csak r-et határozza meg egyértelműen, a φ szöget csak 2π egész számú többszörösétől eltekintve. Az O pont polárszöge határozatlan.

A vizsgálataink során gyakran egymás mellett használjuk a Descates-féle derékszögű és a polárkoordináta-rendszert. Ha a kétféle koordinátarendszer kezdőpontja, valamint a polártengely és az x tengely pozitív fele egybeesik, akkor a következő összefüggések állnak fenn az (x, y) derékszögű és az (r, φ) polárkoordináták között:



$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned} \qquad \longleftrightarrow \qquad r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \varphi = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} & (x>0,\ y \geq 0) \\ 2\pi + \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} & (x>0,\ y<0) \\ \pi + \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} & (x<0) \\ \pi/2 & (x=0,\ y>0) \\ 3\pi/2 & (x=0,\ y<0). \end{cases}$$

Síkbeli polárkoordináta-transzformációról beszélünk, ha a

$$g(r,\varphi) := (r\cos\varphi,\ r\sin\varphi) \qquad \big((r,\varphi)\in\mathbb{R}^2\big)$$

leképezést alkalmazzuk. Világos, hogy $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$, illetve

$$g'(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \partial_r(r\cos\varphi) & \partial_\varphi(r\cos\varphi) \\ \partial_r(r\sin\varphi) & \partial_\varphi(r\sin\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \qquad \big((r,\varphi)\in\mathbb{R}^2\big).$$

Ezért

$$\det g'(r,\varphi) = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi) = r.$$

Adott $R>0$, legyen

$$H \subset [0,R]\times[0,2\pi]$$

egy nem üres, Jordan-mérhető, zárt halmaz. $g|_{\operatorname{int} H}$ invertálható, azaz

$$\begin{aligned} (r_1,\varphi_1),\ (r_2,\varphi_2) &\in \operatorname{int} H \\ g(r_1,\varphi_1) &= g(r_2,\varphi_2) \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad (r_1,\varphi_1) = (r_2,\varphi_2),$$

hiszen nem nehéz igazolni, hogy

$$\begin{aligned} 0<r_1,r_2<R,\ 0<\varphi_1,\varphi_2<2\pi \\ r_1\cos\varphi_1 = r_2\cos\varphi_2,\ r_1\sin\varphi_1 = r_2\sin\varphi_2 \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad r_1=r_2,\ \varphi_1=\varphi_2.$$

Ekkor az integráltranszformációról szóló tétel feltételei teljesülnek, és így az

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

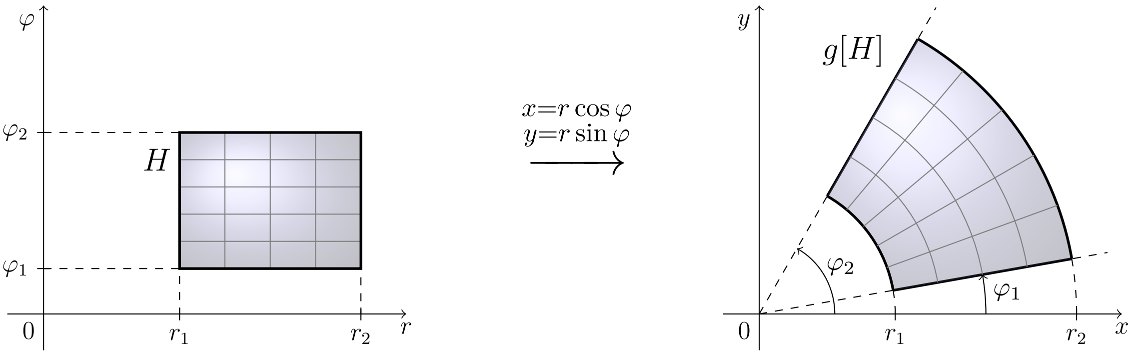
transzformációval

$$(*) \qquad \iint\limits_{g[H]} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{H} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot r\,dr\,d\varphi,$$

hiszen $\det g'(r,\varphi) = r \geq 0$, ha $H\subset[0,R]\times[0,2\pi]$.

Polárkoordináta-transzformációval egy téglalapot körgyűrűcikkbe képezhetünk. Ezt szemlélteti az alábbi ábra, ahol a téglalap:

$$H := \Big\{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; 0 \le r_1 < r_2,\ 0 \le \varphi_1 < \varphi_2 \le 2\pi\Big\}.$$



Példa. Számítsuk ki a

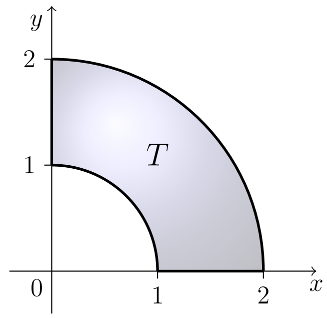
$$\iint_T x^2y\,dx\,dy$$

kettős integrált, ahol T az

$$1 \le x^2+y^2 \le 4, \quad y \ge 0, \quad x \ge 0$$

egyenlőtlenségekkel meghatározott korlátos síkrész!

Megoldás. Az ábra a T-vel jelölt integrálási tartományt szemlélteti.



Az integrál kiszámításához az

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$
$$\big(1 \le r \le 2,\ 0 \le \varphi \le \pi/2\big)$$

polárkoordinátás helyettesítést alkalmazzuk. A $(*)$ integráltranszformáció alapján $T = g\big([1,2]\times[0,\pi/2]\big)$ és

$$\iint_T x^2y\,dx\,dy = \iint_{[1,2]\times[0,\pi/2]} (r\cos\varphi)^2\cdot(r\sin\varphi)\cdot r\,dr\,d\varphi = \iint_{[1,2]\times[0,\pi/2]} r^4\cdot(\sin\varphi)\cdot\cos^2\varphi\,dr\,d\varphi =$$

$$= \left(\int_1^2 r^4\,dr\right)\cdot\left(\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi\right) = \left[\frac{r^5}{5}\right]_{r=1}^{r=2}\cdot\left[-\frac{\cos^3\varphi}{3}\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} =$$

$$= \left(\frac{2^5}{5}-\frac{1}{5}\right)\cdot\left(-\frac{\cos^3(\pi/2)}{3}+\frac{\cos^3(0)}{3}\right) = \frac{31}{5}\cdot\frac{1}{3} = \frac{31}{15}.$$

Példa. Kettős integrállal határozzuk meg az R sugarú kör területét!

Megoldás. Jelölje T_R az origó középpontú R sugarú zárt körlapot. T_R területe definíció szerint

$$t(T_R) := \iint_{T_R} 1\,dx\,dy,$$

ha a fenti kettős integrál létezik. Ezt az

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$
$$\Big(0 \le r \le R,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\Big)$$

síkbeli polárkoordinátás helyettesítéssel számoljuk ki. A $H_R := [0,R] \times [0,2\pi]$ jelöléssel

$$t(T_R) = \iint\limits_{H_R} r\,dr\,d\varphi,$$

ami integrálható, hiszen az integrandus folytonos a H_R téglalapon. Ezt már szukcesszív integrálással könnyű kiszámítani:

$$t(T_R) = \iint\limits_{H_R} r\,dr\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^R r\,dr\right)d\varphi = \left(\int_0^R r\,dr\right)\cdot\left(\int_0^{2\pi} 1 d\varphi\right) = \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R \cdot 2\pi = \frac{R^2}{2}\,2\pi = R^2\pi.$$

Megjegyzés. Emlékeztetünk arra, hogy az egyváltozós analízisben a félkör területét a

$$\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\,dx$$

határozott integrállal számoltuk ki.

Példa. Kettős integrállal határozzuk meg az R sugarú gömb térfogatát!

Megoldás. Legyen $R > 0$ adott valós szám és

$$f(x,y) := \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \qquad \left(D_R := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \sqrt{x^2+y^2} \le R\right\}\right).$$

Az f függvény grafikonja az origó középpontú R sugarú gömb felső féltérbe eső felülete, az ez alatti térrész pedig a félgömb. Ennek térfogata az alábbi kettős integrállal egyenlő:

$$\iint\limits_{D_R} f = \iint\limits_{D_R} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D_R} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dx\,dy.$$

Ezt az

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$
$$\Big(0 \le r \le R,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\Big)$$

polárkoordinátás helyettesítéssel számoljuk ki. A tanult képlet alapján

$$\iint\limits_{D_R} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{[0,R]\times[0,2\pi]} f\Big(r\,\cos\varphi,\ r\,\sin\varphi\Big)\cdot r\,dr\,d\varphi = \iint\limits_{[0,R]\times[0,2\pi]} \sqrt{R^2 - r^2}\cdot r\,dr\,d\varphi,$$

ami integrálható, mert az integrandus folytonos a $[0,R] \times [0,2\pi]$ téglalapon. Így szukcesszív integrálással

$$\iint\limits_{[0,R]\times[0,2\pi]} \sqrt{R^2 - r^2}\cdot r\,dr\,d\varphi = \left(\int_0^R \sqrt{R^2 - r^2}\cdot r\,dr\right)\cdot\left(\int_0^{2\pi} 1\,d\varphi\right) =$$

$$= \left[-\frac{1}{3}(R^2 - r^2)^{3/2}\right]_0^R \cdot 2\pi = \frac{2R^3\pi}{3}.$$

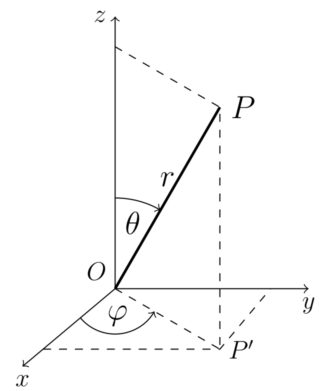
Az R sugarú gömb térfogata tehát $4R^3\pi/3$.

Megjegyzés. Emlékeztetünk arra, hogy az egyváltozós analízisben a gömb (forgástest) térfogatát a

$$V = \pi \int_{-R}^{R} \left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 \, dx$$

határozott integrállal számoltuk ki.

<u>Térbeli polárkoordináta-transzformáció</u>:



A síkbeli polárkoordináta-rendszert „térbeli” megfelelője az ábrán található jelölésekkel tudjuk megvalósítani. Ha $\overrightarrow{OP}(x, y, z)$ vektor hossza

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} > 0,$$

akkor a síkbeli polárkoordináták alapján

$$z = r \cos\theta$$

és $\overrightarrow{OP'}$ hossza $r \sin\theta$, ahol $0 \leq \theta \leq \pi$. Ha felírjuk a P' pont síkbeli polárkoordinátait, akkor

$$x = r \sin\theta \cos\varphi \qquad \text{és} \qquad y = r \sin\theta \sin\varphi,$$

ahol $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Térbeli polárkoordináta-transzformációról beszélünk, ha a

$$g(r, \varphi, \theta) := (r \sin\theta \cos\varphi,\ r \sin\theta \sin\varphi,\ r \cos\theta) \qquad \left((r, \varphi, \theta) \in \mathbb{R}^3\right)$$

leképezést alkalmazzuk. Világos, hogy $g \in C^1(\mathbb{R}^3)$, illetve

$$g'(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} \partial_r(r \sin\theta \cos\varphi) & \partial_\varphi(r \sin\theta \cos\varphi) & \partial_\theta(r \sin\theta \cos\varphi) \\ \partial_r(r \sin\theta \sin\varphi) & \partial_\varphi(r \sin\theta \sin\varphi) & \partial_\theta(r \sin\theta \sin\varphi) \\ \partial_r(r \cos\theta) & \partial_\varphi(r \cos\theta) & \partial_\theta(r \cos\theta) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sin\theta \cos\varphi & -r \sin\theta \sin\varphi & r \cos\theta \cos\varphi \\ \sin\theta \sin\varphi & r \sin\theta \cos\varphi & r \cos\theta \sin\varphi \\ \cos\theta & 0 & -r \sin\theta \end{pmatrix} \qquad \left((r, \varphi, \theta) \in \mathbb{R}^3\right).$$

Ezért

$$\det g'(r, \varphi, \theta) = \cos\theta \cdot \det \begin{pmatrix} -r \sin\theta \sin\varphi & r \cos\theta \cos\varphi \\ r \sin\theta \cos\varphi & r \cos\theta \sin\varphi \end{pmatrix} - r \sin\theta \cdot \det \begin{pmatrix} \sin\theta \cos\varphi & -r \sin\theta \sin\varphi \\ \sin\theta \sin\varphi & r \sin\theta \cos\varphi \end{pmatrix} =$$

$$= \cos\theta \cdot (r^2 \sin\theta \cos\theta) \cdot \underbrace{\det \begin{pmatrix} -\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\varphi & \sin\varphi \end{pmatrix}}_{=-1} - r \sin\theta \cdot (r \sin^2\theta) \cdot \underbrace{\det \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}}_{=1} =$$

$$= -r^2 \sin\theta (\cos^2\theta + \sin^2\theta) = -r^2 \sin\theta$$

Adott $R > 0$, legyen

$$H \subset [0, R] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$$

egy nem üres, Jordan-mérhető, zárt halmaz. Nem nehéz igazolni, hogy $g|_{\operatorname{int} H}$ invertálható.

Ekkor az integráltranszformációról szóló tétel feltételei teljesülnek, és így az

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi, \qquad \text{és} \qquad z = r\cos\theta$$

transzformációval

$$(**) \qquad \iiint\limits_{g[H]} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{H} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\cdot r^2\sin\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta,$$

hiszen $\det g'(r,\varphi,\theta) = -r^2\sin\theta \leq 0$, ha $H \subset [0,R]\times[0,2\pi]\times[0,\pi]$.

Példa. Számítsuk ki az R sugarú gömb térfogatát!

Megoldás. A gömb térfogatát kiszámíthatjuk az alábbi hármas integrállal:

$$V = \iiint\limits_{G} 1\,dx\,dy\,dz, \qquad \text{ahol} \qquad G := \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2+z^2 \leq R^2\right\}.$$

Térbeli polárkoordináta-transzformációval

$$H := [0,R]\times[0,2\pi]\times[0,\pi] \qquad \Longrightarrow \qquad G = g[H],$$

ezért $(**)$ alapján

$$V = \iiint\limits_{G} 1\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{H} 1\cdot r^2\sin\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta = \left(\int_0^R r^2\,dr\right)\cdot\left(\int_0^{2\pi} 1\,d\varphi\right)\cdot\left(\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\right) =$$

$$= \left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=R}\cdot\left[\varphi\right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\cdot\left[-\cos\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi} = \frac{R^3}{3}\cdot 2\pi\cdot 2 = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

A normális eloszlás sűrűségfüggvénye

A valószínűségszámításban nagyon fontos szerepet játszanak azok az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvények, amikre

$$f(x)\geq 0 \quad (x\in\mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

teljesül, az ún. ***sűrűségfüggvények***. A folytonos eloszlások közül a normális eloszlás központi szerepet tölt be. Ennek sűrűségfüggvénye

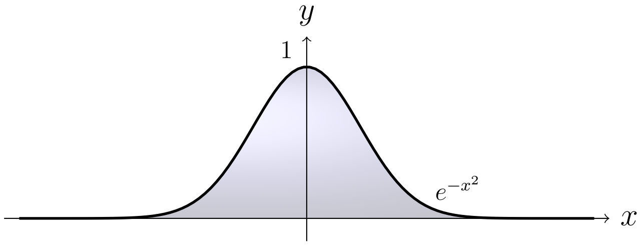
$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \qquad (m\in\mathbb{R},\ \sigma>0,\ x\in\mathbb{R}).$$

De miért lesz f sűrűségfüggvény? Az $f(x)\geq 0$ tulajdonság nyilván teljesül, de a teljes $\mathbb{R}$ halmazon vett improprius integrálját ki kellene számítani. Azonban ezt nem tudjuk a Newton–Leibniz-formula alapján kiszámolni, mert ehhez ismerni kellene f primitív függvényeit, de ezek nem elemi függvények. Más szavakkal, nincs képlet, amivel tudnánk a Newton–Leibniz-formulát alkalmazni, és majd határértéket venni.

Érdekes módon, a többszörös integrálásnál megismert módszerek segítenek megoldani a feladatot. Először számítsuk ki az

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

ún. ***Gauss-integrált***. Ez úgy értelmezhető, mint az e^{-x^2} függvény alatti terület, amely az alábbi ábrán látható.



Az improprius integrál fogalma szerint

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\,dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx, \quad \text{ahol} \quad \int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\,dx = \int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_{0}^{t} e^{-x^2}\,dx,$$

hiszen az e^{-x^2} függvény páros. A fenti határérték létezik és véges, mert az

$$F(t) = \int_0^t e^{-x^2}\,dx \qquad (t>0)$$

integrálfüggvény szigorúan monoton növekvő és korlátos. Valóban, F létezik, mert az e^{-x^2} függvény folytonos, tehát integrálható minden $[0,t]$ intervallumon. F szigorúan monoton növekvő, mert az e^{-x^2} függvény pozitív. F korlátos a $[0,1]$ intervallumon, mert folytonos, illetve minden $t>1$ esetén

$$F(t) = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx + \int_1^t e^{-x^2}\,dx < \int_0^1 1\,dx + \int_1^t e^{-x}\,dx = 1 + \left[\frac{e^{-x}}{-1}\right]_1^t = 1 - \frac{1}{e^t} + \frac{1}{e} < 2.$$

A fentiekből következik, hogy a Gauss-integrál konvergens, azaz

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\,dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_{-t}^{0} e^{-x^2}\,dx + \lim_{t\to+\infty}\int_{0}^{t} e^{-x^2}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_{-t}^{t} e^{-x^2}\,dx$$

egy véges szám.

Most nézzük meg az

$$I_R := \iint_{D_R} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

kettős integrált, ahol $D_R := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2 \le R^2\right\}$ az origó középpontú R sugarú zárt körlap, és természetesen $R>0$. Mivel $f\in C(\mathbb{R}^2)$ és D_R normaltartomány, ezért a fenti integrál létezik és véges. Az integrál kiszámításához az

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$
$$\Big(0\le r\le R,\ 0\le\varphi\le 2\pi\Big)$$

polárkoordinátás helyettesítést alkalmazzuk. Azt kapjuk, hogy

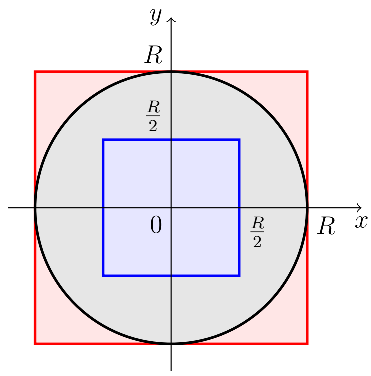
$$I_R = \iint_{[0,R]\times[0,2\pi]} e^{-r^2}\cdot r\,dr\,d\varphi = \left(\int_0^R e^{-r^2}\cdot r\,dr\right)\cdot\left(\int_0^{2\pi} 1\,d\varphi\right) = \left(-\frac{1}{2}\int_0^R e^{-r^2}\cdot(-2r)\,dr\right)\cdot 2\pi =$$

$$= -\pi\cdot\left[e^{-r^2}\right]_{r=0}^{r=R} = -\pi\left(e^{-R^2}-e^0\right) = \pi\cdot\left(1-e^{-R^2}\right).$$

A következő lépésben tekintsük a

$$T_R := [-R, R] \times [-R, R] \qquad (R > 0)$$

téglalapokat. Nem nehéz igazolni, hogy $T_{R/2} \subset D_R \subset T_R$ (lásd a jobb oldali ábrát). Ezért



$$\iint\limits_{T_{R/2}} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy \le \iint\limits_{D_R} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy \le \iint\limits_{T_R} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy.$$

Azonban minden $R > 0$ esetén

$$\iint\limits_{T_R} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \iint\limits_{T_R} e^{-x^2} \cdot e^{-y^2}\,dx\,dy = \left(\int\limits_{-R}^{R} e^{-x^2}\,dx\right) \cdot \left(\int\limits_{-R}^{R} e^{-y^2}\,dy\right) = \left(\int\limits_{-R}^{R} e^{-x^2}\,dx\right)^2.$$

Ennek következtében

$$\left(\int\limits_{-R/2}^{R/2} e^{-x^2}\,dx\right)^2 \le \pi \cdot \left(1 - e^{-R^2}\right) \le \left(\int\limits_{-R}^{R} e^{-x^2}\,dx\right)^2.$$

adódik minden $R > 0$-ra. Tudjuk, hogy a Gauss-integrál konvergens. Ezért a fenti egyenlőtlenségben R-rel plusz végtelenhez tartva azt kapjuk, hogy

$$\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2 \le \pi \le \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2,$$

tehát

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

Most térünk vissza az eredeti feladathoz, azaz a normális eloszlás sűrűségfüggvényéhez:

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \qquad (m \in \mathbb{R},\ \sigma > 0,\ x \in \mathbb{R}).$$

Minden $t > m$ esetén a következő helyettesítéssel:

$$u = \frac{x-m}{\sqrt{2}\sigma} \qquad \Longrightarrow \qquad x = \sqrt{2}\sigma u + m := g(u) \quad (u > 0) \qquad \Longrightarrow \qquad g'(u) = \sqrt{2}\sigma > 0,$$

azt kapjuk, hogy

$$\int\limits_{m}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{m}^{t} e^{-\left(\frac{x-m}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{0}^{\frac{t-m}{\sqrt{2}\sigma}} e^{-u^2} \cdot \sqrt{2}\sigma\,du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{\frac{t-m}{\sqrt{2}\sigma}} e^{-u^2}\,du.$$

Így ha t tart a plusz végtelenhez, akkor

$$\int\limits_{m}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-u^2}\,dx.$$

Hasonlóan igazolható, hogy

$$\int\limits_{-\infty}^{m} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\, du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-u^2}\, dx.$$

Ennek következtében

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\, dx = \int\limits_{-\infty}^{m} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\, dx + \int\limits_{m}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-u^2}\, du + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-u^2}\, du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\, du = 1.$$