Analízis I.
1. Mintavizsga

1. Melyik állítás **igaz** minden $h \in (-\infty; 1]$ és $n \in \mathbb{N}^+$ esetén?

(A) $(1-h)^n + nh \geq 1$.

(B) $(1+h)^n \geq 1 + nh$.

(C) $(1+n)^h < 1 + nh$.

(D) $\left(\frac{2022}{2021}\right)^{10105} < 5 + |h|$.

2. Melyik halmaznak van maximuma, de nincsen szuprémuma?

(A) $\left\{ 1 + \frac{2}{n} \;\middle|\; n = 1, 2, 3, \ldots \right\}$

(B) $\left\{ 2 - \frac{3}{x} \;\middle|\; x \in [1, +\infty) \right\}$

(C) $\left\{ \frac{4}{x} \;\middle|\; x \in [1, 4] \right\}$

(D) Ilyen halmaz nem létezik.

3. Legyen $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ felülről korlátos, $c = \sup A$. Az alábbi állítások közül melyik **hamis**?

(A) $\forall\, a \in A: \quad a < c + 1$

(B) $\exists\, a \in A: \quad a > c - 1$

(C) $\forall\, a \in A: \quad a > c - 1$

(D) $\exists\, a \in A: \quad a < c + 1$

4. Legyen $(x_n): \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ egy sorozat. Válassza ki a **hamis** állítást!

(A) Ha (x_n) konvergens, akkor korlátos.

(B) Ha (x_n) monoton és korlátos, akkor konvergens.

(C) Ha (x_n) határértéke $+\infty$, akkor divergens.

(D) Ha (x_n) divergens, akkor nincs határértéke.

5. Legyen $(x_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ egy sorozat. Az alábbi állítások közül melyikből **nem** következik az, hogy (x_n) divergens?

(A) $\forall B \in \mathbb{R} \;\; \exists \varepsilon > 0 \;\; \forall N \in \mathbb{N} \;\; \exists n > N : \quad |x_n - B| \geq \varepsilon$

(B) $\forall K > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} \;\; \forall n > N : \quad x_n > K$

(C) (x_n) szigorúan monoton nő.

(D) (x_n) alulról nem korlátos.

6. Az alábbi sorozatok közül melyiknek a határértéke $\sqrt[3]{2}$?

(A) $a_0 = 1,\; a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{a_n} + a_n\right) \; (n \in \mathbb{N})$

(B) $a_0 = 1,\; a_{n+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{a_n^3} + 3a_n\right) \; (n \in \mathbb{N})$

(C) $a_0 = 1,\; a_{n+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{a_n^2} + 2a_n\right) \; (n \in \mathbb{N})$

(D) $a_0 = 1,\; a_{n+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{a_n^2} + 2a_n\right) \; (n \in \mathbb{N})$

7. Legyenek (x_n), (y_n) és (z_n) valós sorozatok úgy, hogy $x_n \leq y_n \leq z_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Válassza ki az **igaz** állítást!

(A) $\lim(y_n) \leq \lim(z_n)$

(B) $\lim(x_n) < \lim(y_n)$

(C) $\lim(y_n) = \lim(x_n) = \lim(z_n)$

(D) $\lim(x_n) < \lim(z_n)$

8. Adjon meg egy olyan sorozatot, amely konvergens, de nem monoton!

(A) $a_n = \frac{n+1}{n+2} \quad (n \in \mathbb{N})$

(B) $b_n = 3n + (-1)^n \quad (n \in \mathbb{N})$

(C) $c_n = \frac{(-1)^n}{n} \quad (n \in \mathbb{N})$

(D) Ilyen sorozat nem létezik.

9. Legyen $x_n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$, és tekintsük a $\sum x_n$ végtelen sort. Az alábbiak közül melyikből **nem** következik a sor konvergenciája?

(A) $\lim\left(\sqrt[n]{x_n}\right) = \dfrac{1}{2}$

(B) $\lim(x_n) = 0$

(C) $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2}$ $(n \in \mathbb{N})$

(D) $x_n < \dfrac{1}{2^n}$ $(n \in \mathbb{N})$

10. Az alábbiak közül melyik lehet egy $\sum\limits_{n=0} \alpha_n x^n$ hatványsor konvergenciahalmaza?

(A) $\mathrm{KH}\left(\sum\limits_{n=0} \alpha_n x^n\right) = \{0\}$

(B) $\mathrm{KH}\left(\sum\limits_{n=0} \alpha_n x^n\right) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(C) $\mathrm{KH}\left(\sum\limits_{n=0} \alpha_n x^n\right) = [0, 1)$

(D) $\mathrm{KH}\left(\sum\limits_{n=0} \alpha_n x^n\right) = [0, +\infty)$

11. Tegyük fel, hogy $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |x_n| =: A < +\infty$ és $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |y_n| =: B < +\infty$. Melyik állítás **igaz** az alábbiak közül?

(A) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |x_n| \cdot |y_n| = A \cdot B$

(B) A $\sum (x_n + (-1)^n \cdot y_n)$ sor divergens.

(C) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} x_n \cdot y_{n-k} = \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_n\right) \cdot \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} y_n\right)$

(D) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} x_n \cdot y_{n-k} = A \cdot B$

12. Legyen $H := (-\infty, 0] \cup \{1, 2\} \cup (2, 3)$. Ekkor a H' halmaz a következő:

(A) $[-\infty, 0] \cup [2, 3]$

(B) $(-\infty, 0] \cup [2, 3)$

(C) $[-\infty, 0] \cup \{1, 2\} \cup (2, 3)$

(D) $\{0, 1, 2, 3\}$

13. Legyen $g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \in \mathcal{D}_g'$, $a \in \mathbb{R}$. Melyik állítás jelenti azt, hogy $\lim_x g = a$?

(A) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall y \in \mathcal{D}_g, \ 0 < |x - y| < \delta : \ |g(x) - a| < \varepsilon$

(B) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall y \in \mathcal{D}_g, \ 0 < |y - a| < \delta : \ |g(y) - x| < \varepsilon$

(C) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall y \in \mathcal{D}_g \setminus \{a\}, \ |x - a| < \delta : \ |g(x) - y| < \varepsilon$

(D) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall y \in \mathcal{D}_g \setminus \{x\}, \ |x - y| < \delta : \ |g(y) - a| < \varepsilon$

14. Mit tud mondani az alábbi függvény folytonosságáról az 1 pontban?

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{ha } x \in (-\infty, 1) \\ 1 & \text{ha } x = 1 \\ x - 1 & \text{ha } x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

(A) Folytonos.

(B) Megszüntethető szakadása van.

(C) Elsőfajú szakadása (ugrása) van.

(D) Másodfajú szakadása van.

15. Igaz-e minden $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) folytonos függvényre, hogy van az értékkészletének minimuma, illetve maximuma?

(A) Igen, a Bolzano–Darboux-tétel miatt.

(B) Igen, a Weierstrass-tétel miatt.

(C) Csak akkor, ha a $\lim_{a+0} f$ és $\lim_{b-0} f$ határértékek végesek.

(D) Nem.