Emlékeztető. Legyen $0 < r \in \mathbb{R}$; $\alpha, \omega \in \mathbb{R}$.

1. Az $a \in \mathbb{R}$ **pont (r-sugarú) környezeté**nek neveztük a

$$K(a) := K_r(a) := \{x \in \mathbb{R} : \ |x - a| < r\} = (a - r, a + r)$$

   intervallumot.

2. A $-\infty$, ill. $+\infty$ környezeteinek neveztük a $(-\infty, \alpha)$, ill. $(\omega, +\infty)$ intervallumokat:

$$K_\alpha(-\infty) := K(-\infty) := (-\infty, \alpha), \qquad \text{ill.} \qquad K_\omega(+\infty) := K(+\infty) := (\omega, +\infty).$$

Definíció. Legyen $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy

1. $a \in \mathbb{R}$ a $\mathcal{H}$ halmaz **torlódási pont**ja (jelben: $a \in \mathcal{H}'$), ha minden környezetében van $\mathcal{H}$-nak a-tól különböző eleme:

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \qquad K_\varepsilon(a)\backslash\{a\}) \cap \mathcal{H} \neq \emptyset.$$

2. $a \in \mathcal{H}$ a $\mathcal{H}$ halmaz **izolált pont**ja, ha nem torlódási pontja $\mathcal{H}$-nak.

3. $-\infty$, ill. $+\infty$ a $\mathcal{H}$ halmaz **torlódási pont**ja (jelben: $-\infty \in \mathcal{H}'$, ill. $+\infty \in \mathcal{H}'$), ha bármely $\alpha \in \mathbb{R}$, ill. $\omega \in \mathbb{R}$ esetén

$$\mathcal{H} \cap (-\infty, \alpha) \neq \emptyset, \qquad \text{ill.} \qquad \mathcal{H} \cap (\omega, +\infty) \neq \emptyset.$$

Definíció. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy $a \in \mathcal{D}_f'$. Azt mondtuk, hogy az f függvénynek az a pontban $A \in \overline{\mathbb{R}}$ a határértéke, jelben:

$$\lim_a f = A \qquad \text{vagy} \qquad \lim_{x \to a} f = A \qquad \text{vagy} \qquad f(x) \longrightarrow A \quad (x \to a),$$

ha

$$\forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists\, \delta > 0, \text{ hogy } \forall\, x \in \mathcal{D}_f \quad \text{esetén} \quad (K_\delta(a)\backslash\{a\} \quad \Longrightarrow \quad f(x) \in K_\varepsilon(A)).$$

Definíció. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ill. tegyük fel, hogy valamely $a \in \mathbb{R}$ esetén $a \in (\mathcal{D}_f \cap (-\infty, a))'$, azaz minden $\delta > 0$ esetén az $(a - \delta, a)$ intervallum végtelen sok pontjában f értelmezve van). Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az a pontban van baloldali határértéke, jelben

$$\exists \lim_{a-0} f, \qquad \exists \lim_{x \to a-0} f(x), \qquad \exists f(a - 0)$$

ha a

$$g(x) := f(x) \qquad (x \in (a - \delta, a))$$

függvénynek van a-ban határértéke, azaz

$$\exists A \in \overline{\mathbb{R}}\, \forall\, \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall\, x \in \mathcal{D}_f : \qquad (a - \delta < x < a \quad \Longrightarrow \quad f(x) \in K_\varepsilon(A)).$$

Definíció. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ill. tegyük fel, hogy valamely $a \in \mathbb{R}$ esetén $a \in (\mathcal{D}_f \cap (a, +\infty))'$, azaz minden $\delta > 0$ esetén az $(a, a+\delta)$ intervallum végtelen sok pontjában f értelmezve van). Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az a pontban van jobboldali határértéke, jelben

$$\exists \lim_{a+0} f, \qquad \exists \lim_{x \to a+0} f(x), \qquad \exists f(a+0)$$

ha a

$$g(x) := f(x) \qquad (x \in (a, a+\delta))$$

függvénynek van a-ban határértéke, azaz

$$\exists A \in \overline{\mathbb{R}}\, \forall\, \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in \mathcal{D}_f : \qquad (a < x < a+\delta \quad \Longrightarrow \quad f(x) \in K_\varepsilon(A))\,.$$

Tétel. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}_f'$. Ekkor

$$\exists \lim_a f \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\exists \lim_{a\pm 0} f \quad \text{és} \quad \lim_{a-0} f = \lim_{a+0} f\right)$$

Tétel (átviteli elv). Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}_f'$ és $A \in \overline{\mathbb{R}}$. Ekkor igaz a

$$\lim_a f = A \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall (x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f \backslash \{a\}, \quad \lim_{n\to\infty} (x_n) = A \qquad \text{esetén} \qquad \lim_{n\to} f(x_n) = A.$$

ekvivalencia.

Tétel. (Sandwich-tétel). Legyen $f, g, h \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in (\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \cap \mathcal{D}_h)'$ és tegyük fel, hogy van olyan $r > 0$, hogy

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad (x \in K_r(a) \cap (\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \cap \mathcal{D}_h))\;,$$

továbbá

$$\exists \lim_a f \quad \exists \lim_a h \qquad \text{és} \qquad \lim_a f = \lim_a h =: A.$$

Ekkor

$$\exists \lim_a g \qquad \text{és} \qquad \lim_a g = A.$$

Tétel. Legyen $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in (\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g)'$ és tegyük fel, hogy

$$\exists \lim_a f =: A \in \overline{\mathbb{R}}, \qquad \exists \lim_a g =: B \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ekkor

1. $\exists \lim_a (f+g)$ és $\lim_a (f+g) = A + B$, ha $A + B$ értelmezve van;
2. $\exists \lim_a (fg)$ és $\lim_a (fg) = AB$, ha AB értelmezve van;

3. $\exists \lim\limits_a \left(\frac{f}{g}\right)$ és $\lim\limits_a \left(\frac{f}{g}\right) = \frac{A}{B}$, ha $\frac{A}{B}$ értelmezve van.

Tétel. Legyen

$$f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad a \in \mathcal{D}'_g, \qquad \mathcal{R}_g \subset \mathcal{D}_f.$$

Ha

$$\lim_a g =: b \in \mathcal{D}'_f, \qquad g(x) \neq b \quad (a \neq x \in \mathcal{D}_g), \qquad \lim_b f =: c \in \mathbb{R},$$

akkor

$$\lim_a (f \circ g) = c.$$

Definíció. Legyenek $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan függvények, amelyekre

$$\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g =: \mathcal{D} \neq \emptyset \qquad \text{és} \qquad f(x) > 0 \quad (x \in \mathcal{D})$$

teljesül. Ekkor

$$(f^g)(x) := f(x)^{g(x)} := \exp\left(g(x)\ln(f(x))\right) \qquad (x \in \mathcal{D}).$$

Feladat. A definíció alapján számítsuk ki a következő határértékeket!

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{1+x}$;

Legyen

$$f(x) := \frac{1}{1+x} \qquad (-1 \neq x \in \mathbb{R}),$$

így $0 \in \mathcal{D}'_f$. Látható, hogy ha „x közel van 0-hoz, akkor $f(x)$ közel van 1-hez". Így sejthető, hogy

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{1+x} = 1.$$

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor bármely $x \in \mathcal{D}_f$ számra

$$|f(x) - 1| = \left|\frac{1}{1+x} - 1\right| = \left|\frac{-x}{1+x}\right| = \frac{|x|}{|1+x|}.$$

Ha $|x| < \frac{1}{2}$, akkor $\frac{1}{2} < |1+x|$, így

$$|f(x) - 1| < 2|x| < \varepsilon \quad \iff \quad |x - 0| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Következésképpen a $\delta := \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right\}$ választás megfelelő.

2. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2-1}{2x^2+1}$;

Legyen

$$f(x) := \frac{x^2-1}{2x^2+1} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

így $\pm\infty \in \mathcal{D}_f'$, hiszen $\mathcal{D}_f$ sem alulról, sem pedig felülről nem korlátos. Ha $0 \neq x \in \mathbb{R}$, akkor

$$f(x) = \frac{\frac{x^2-1}{x^2}}{\frac{2x^2+1}{x^2}} = \frac{1-\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x^2}}, \qquad \text{így sejthető, hogy} \qquad \lim_{\pm\infty} f = \frac{1}{2}.$$

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ adott. Ekkor tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ számra

$$\left|f(x) - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{x^2-1}{2x^2+1} - \frac{1}{2}\right| = \frac{|-3|}{4x^2+2} = \frac{3}{4x^2+2} < \frac{3}{4x^2} < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 > \frac{3}{4\varepsilon}.$$

Tehát az

$$\alpha := -\sqrt{\frac{3}{4\varepsilon}}, \qquad \text{ill.} \qquad \omega := \sqrt{\frac{3}{4\varepsilon}}$$

3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}$;

Legyen

$$f(x) := \frac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2} \qquad (x \in \mathbb{R}\backslash\{1;2\}),$$

így $1 \in \mathcal{D}_f'$. Mivel tetszőleges $x \in \mathcal{D}_f$ számra

$$f(x) = \frac{(x^2-1)(x^2+3)}{(x-1)(x-2)} = \frac{(x-1)(x+1)(x^2+3)}{(x-1)(x-2)} = \frac{(x+1)(x^2+3)}{x-2} = \frac{x^3+x^2+3x+3}{x-2},$$

ezért „ha x közel van 1-hez, akkor $f(x)$ közel van (-8)-hoz”. Sejtés: $\lim\limits_{1} f = -8$.
Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ adott. Ekkor tetszőleges $x \in \mathcal{D}_f$ esetén

$$\begin{aligned} |f(x) - (-8)| &= \left|\frac{x^3+x^2+3x+3}{x-2} + 8\right| = \left|\frac{x^3+x^2+11x-13}{x-2}\right| = \\ &= \frac{|x^2+2x+13|}{|x-2|} \cdot |x-1|. \end{aligned}$$

Megjegyzés. A harmadik egyenlőség a Horner-módszer következménye (vö. (vö. Matematikai alapozás, 7-10. oldal)):

	1	1	11	−13
1	1	2	13	0

Könnyen belátható (**HF**), hogy ha

$$0 < |x-1| < \frac{1}{2} \iff -\frac{1}{2} < x-1 < \frac{1}{2} \iff \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \iff -\frac{3}{2} < x-2 < -\frac{1}{2},$$

akkor

$$|x-2| = 2-x > \frac{1}{2} \qquad \text{és} \qquad |x| < \frac{3}{2}.$$

Következésképpen

$$\frac{|x^2+2x+13|}{|x-2|} \leq \frac{|x|^2+2|x|+13}{1/2} < \frac{(3/2)^2+2\cdot(3/2)+13}{\frac{1}{2}} = \frac{47}{2} < 24.$$

Innen már látható, hogy a $\delta := \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{24}\right\}$ választás megfelelő.

4. $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{2x+5}$.

Legyen

$$f(x) := \sqrt{2x+5} \qquad (-5/2 \leq x \in \mathbb{R}),$$

így $2 \in \mathcal{D}_f'$. Látható, hogy „ha x közel van 2-höz, akkor $f(x)$ közel van $\sqrt{9} = 3$-hoz”. Sejtés: $\lim\limits_{1} f = 3$.
Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ adott. Ekkor tetszőleges $x \in \mathcal{D}_f$ esetén

$$|f(x)-3| = \left|\sqrt{2x+5}-3\right| \cdot \frac{\sqrt{2x+5}+3}{\sqrt{2x+5}+3} = \frac{|2x-4|}{\sqrt{2x+5}+3} \leq$$

$$\leq \frac{2}{3}\cdot|x-2| < \varepsilon \iff |x-2| < \frac{3\varepsilon}{2}.$$

Így a $\delta := \frac{3\varepsilon}{2}$ választás megfelelő. ■

Feladat. A definíció alapján lássuk be, hogy

$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$$

határérték-reláció!

Legyen

$$f(x) := \sqrt[n]{x} \qquad (x \in [0, +\infty))\,.$$

Így $a \in D_f'$ és két eset van:

- $a > 0$: legyen $\varepsilon > 0$ adott és $\delta := \min\left\{a, \varepsilon \sqrt[n]{a^{n-1}}\right\}$. Ekkor minden $0 < |x - a| < \delta$ valós számra

$$\left|f(x) - \sqrt[n]{a}\right| = \left|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}\right| = \frac{|x-a|}{\sum_{k=1}^{n} \sqrt[n]{x^{n-k}a^{k-1}}} \leq \frac{|x-a|}{\sqrt[n]{a^{n-1}}} < \begin{cases} \dfrac{\varepsilon \sqrt[n]{a^{n-1}}}{\sqrt[n]{a^{n-1}}} = \varepsilon & (\varepsilon \sqrt[n]{a^{n-1}} \leq a), \\[2em] \dfrac{a}{\sqrt[n]{a^{n-1}}} < \varepsilon & (\varepsilon \sqrt[n]{a^{n-1}} > a), \end{cases}$$

  tehát $\lim\limits_{a} f = \sqrt[n]{a}$.

- $a = 0$: tegyük fel, hogy $\lim\limits_{a} f \neq \sqrt[n]{a}$. Ekkor van olyan $\varepsilon > 0$, hogy minden $\delta > 0$ (így pl. $\delta := \varepsilon^n$) esetén $\exists x \in (0, \delta)$: $\sqrt[n]{x} \geq \varepsilon$, azaz $\exists x \in (0, \varepsilon^n)$: $\sqrt[n]{x} \geq \varepsilon$, azaz $x \geq \varepsilon^n$, ami nem igaz. ■

Házi (gyakorló) feladat. A definíció alapján számítsuk ki a következő határértékeket!

1. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$;

A nevező gyöktényezős felbontásához a Horner-módszert használva:

	1	-2	-1	2
1	1	-1	-2	0

jól látható, hogy bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x-1)(x^2 - x - 2) = (x-1)(x+1)(x-2).$$

Legyen tehát

$$f(x) := \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 2x^2 - x + 2} \qquad (x \in \mathbb{R}\backslash\{-1; 1; 2\})\,,$$

így $2 \in \mathcal{D}_f'$. Mivel bármely $x \in \mathcal{D}_f$ esetén

$$f(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-1)(x+1)(x-2)} = \frac{x-3}{(x-1)(x+1)} = \frac{x-3}{x^2-1},$$

ezért látható, hogy ha „x közel van 2-höz, akkor $f(x)$ közel van $\left(-\frac{1}{3}\right)$-hoz”. Így sejthető, hogy

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^3-2x^2-x+2}=-\frac{1}{3}.$$

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon>0$ tetszőleges. Ekkor bármely $x\in\mathcal{D}_f$ számra

$$\left|f(x)-\left(-\frac{1}{3}\right)\right|=\left|\frac{x-3}{x^2-1}+\frac{1}{3}\right|=\left|\frac{x^2+3x-10}{3(x^2-1)}\right|=\left|\frac{(x+5)(x-2)}{3(x^2-1)}\right|=\frac{|x+5|}{3|x^2-1|}\cdot|x-2|.$$

Ha most

$$2\neq x\in\left(2-\frac{1}{2},2+\frac{2}{2}\right)=\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right),$$

akkor

$$\frac{13}{2}<|x+5|<\frac{15}{2}\qquad\text{és}\qquad\frac{5}{4}<|x^2-1|<\frac{21}{4},$$

így

$$\frac{|x+5|}{3|x^2-1|}\cdot|x-2|<\frac{\frac{15}{2}}{3\cdot\frac{5}{4}}\cdot|x-2|=2\cdot|x-2|<\varepsilon\qquad\Longleftrightarrow\qquad|x-2|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Következésképpen a $\delta:=\min\left\{\frac{1}{2},\frac{\varepsilon}{2}\right\}$ választás megfelelő.

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+x^2-6x}{x^2-x-2}$;

Legyen

$$f(x):=\frac{x^3+x^2-6x}{x^2-x-2}=\frac{x(x^2+x-6)}{x^2-x-2}=\frac{x(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+1)}=\frac{x(x+3)}{x+1}\qquad(x\in\mathbb{R}\backslash\{-1;2\}).$$

Látható, hogy ha „x közel van 2-höz, akkor $f(x)$ közel van $\left(\frac{10}{3}\right)$-hoz". Így sejthető, hogy

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3+x^2-6x}{x^2-x-2}=\frac{10}{3}.$$

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon>0$ tetszőleges. Ekkor bármely $x\in\mathcal{D}_f$ számra

$$\left|f(x)-\frac{10}{3}\right|=\left|\frac{x(x+3)}{x+1}-\frac{10}{3}\right|=\left|\frac{3x^2+9x-10x-10}{3(x+1)}\right|=\left|\frac{3x^2-x-10}{3(x+1)}\right|=$$

$$=\left|\frac{(x-2)(3x+5)}{3(x+1)}\right|=\frac{|3x+5|}{3\cdot|x+1|}\cdot|x-2|.$$

Világos, hogy

$$|x-2|<1\qquad\Longleftrightarrow\qquad-1<x-2<1\qquad\Longleftrightarrow\qquad1<x<3,$$

és

- $1 < x < 3 \quad \Longrightarrow \quad 3 < 3x < 9 \quad \Longrightarrow \quad 8 < 3x+5 < 14 \quad \Longrightarrow \quad |3x+5| < 14,$
- $1 < x < 3 \quad \Longrightarrow \quad 2 < x+1 < 4 \quad \Longrightarrow \quad |x+1| > 2.$

Így tetszőleges $x \in \mathcal{D}_f$, $|x-2| < 1$ esetén

$$\frac{|3x+5|}{3\cdot|x+1|}\cdot|x-2| < \frac{14}{3\cdot 2}\cdot|x-2| < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad |x-2| < \frac{6\varepsilon}{14},$$

azaz

$$\delta := \min\left\{1, \frac{6\varepsilon}{14}\right\}$$

megfelelő választás.

3. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{x^2-2x-3}$;

Legyen

$$f(x) := \frac{x^3+1}{x^2-2x-3} = \frac{(x+1)\cdot(x^2-x+1)}{(x+1)\cdot(x-3)} = \frac{x^2-x+1}{x-3} \qquad (x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,3\}).$$

Ekkor $-1 \in \mathcal{D}_f'$, és sejthető, hogy

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x^2-2x-3} = \frac{3}{-4} =: A.$$

Azt kell tehát megmutatni, hogy

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in \mathcal{D}_f: \quad \left(0 < |x+1| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{x^2-x+1}{x-3} - A\right| < \varepsilon\right).$$

Világos, hogy bármely $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,3\}$ esetén

$$\left|\frac{x^2-x+1}{x-3} - A\right| = \left|\frac{4x^2-4x+4+3x-9}{4(x-3)}\right| = \frac{|4x^2-x-5|}{4|x-3|} = \frac{|(x+1)(4x-5)|}{4|x-3|} = \frac{|4x-5|}{4|x-3|}\cdot|x+1|.$$

Ha most $-1 \neq x \in (-1-1, -1+1) = (-2, 0)$, akkor

$$5 < |4x-5| < 13, \qquad \text{ill.} \qquad 3 < |x-3| < 5.$$

Ez azt jelenti, hogy bármely $x \in \mathbb{R}$: $0 < |x+1| < 1$ esetén

$$\left|\frac{x^2-x+1}{x-3} - A\right| < \frac{13}{4\cdot 3} \cdot |x+1|.$$

Ekkor valamely $\varepsilon > 0$ esetén

$$\frac{13}{12} \cdot |x+1| < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad |x+1| < \frac{12\varepsilon}{13}.$$

Így tehát tetszőleges $\varepsilon > 0$ szám esetén van olyan $\delta := \min\left\{1, \frac{12\varepsilon}{13}\right\} > 0$ szám, hogy bármely $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1;3\}$ elemre

$$0 < |x+1| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \left|\frac{x^3+1}{x^2-2x-3} - A\right| < \frac{13}{12} \cdot |x+1| < \varepsilon.$$

4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+6x-7}{x^3-x^2+x-1}$;

Legyen

$$f(x) := \frac{x^2+6x-7}{x^3-x^2+x-1} = \frac{(x-1)(x+7)}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{x+7}{x^2+1} \qquad (1 \neq x \in \mathbb{R}).$$

Ekkor $1 \in \mathcal{D}_f'$, és sejthető, hogy

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+6x-7}{x^3-x^2+x-1} = \frac{8}{2} = 4 =: A.$$

Azt kell tehát megmutatni, hogy

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0\; \forall\, x \in \mathcal{D}_f : \quad \left(0 < |x-1| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{x+7}{x^2+1} - A\right| < \varepsilon\right).$$

Világos, hogy bármely $1 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\left|\frac{x+7}{x^2+1} - A\right| = \left|\frac{4x^2-x-3}{x^2+1}\right| = \frac{|(x-1)(4x+3)|}{x^2+1} = \frac{|4x+3|}{x^2+1} \cdot |x+1|.$$

Ha most $1 \neq x \in (1-1, 1+1) = (0,2)$, akkor

$$\frac{|4x+3|}{x^2+1} = \frac{4x+3}{x^2+1} < \frac{4\cdot 2+3}{1} = 11.$$

Ez azt jelenti, hogy bármely $x \in \mathbb{R}$: $0 < |x-1| < 1$ esetén

$$\left|\frac{x+7}{x^2+1} - A\right| < 11 \cdot |x-1|.$$

Ekkor valamely $\varepsilon > 0$ esetén

$$11 \cdot |x-1| < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad |x-1| < \frac{\varepsilon}{11}.$$

Így tehát tetszőleges $\varepsilon > 0$ szám esetén van olyan $\delta := \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{11}\right\} > 0$ szám, hogy bármely $1 \neq x \in \mathbb{R}$ elemre

$$0 < |x-1| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \left|\frac{x^3+1}{x^2-2x-3} - A\right| < 11 \cdot |x-1| < \varepsilon.$$

5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-\sin(x)}{x^2+\sin(x)}$;

Legyen

$$f(x) := \frac{x^2-\sin(x)}{x^2+\sin(x)} \qquad (1 < x \in \mathbb{R}).$$

Ekkor $\mathcal{D}_f$ felülről nem korlátos, így $+\infty \in \mathcal{D}_f'$. Látható, hogy ha „x elég nagy”, akkor $f(x) \approx 1$, innen sejthető, hogy $\lim\limits_{+\infty} f = 1$.

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$. Ekkor bármely $x \in \mathcal{D}_f = (1+, \infty)$ esetén $x^2 + \sin(x) > 0$ és így

$$|f(x)-1| = \left|\frac{x^2-\sin(x)}{x^2+\sin(x)} - 1\right| = \left|\frac{-2\sin(x)}{x^2+\sin(x)}\right| = \frac{2\cdot|\sin(x)|}{x^2+\sin(x)} \leq \frac{2}{x^2-1},$$

ill.

$$\frac{2}{x^2-1} < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad x > \sqrt{\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}}.$$

Így az $\omega := \sqrt{\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}}$ választás megfelelő.

6. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{3x^2}{1+x^2}$.

Legyen

$$f(x) := \frac{3x^2}{1+x^2} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

így $\pm\infty \in \mathcal{D}_f'$. Sejtés: $\lim\limits_{\pm\infty} f = 3$. Legyen $\varepsilon > 0$ adott és

$$\alpha := -\sqrt{\frac{3}{\varepsilon}}, \qquad \text{ill.} \qquad \omega := \sqrt{\frac{3}{\varepsilon}}.$$

Ekkor minden $x > \omega$ ill. $x < \alpha$ valós számra

$$|f(x)-3| = \frac{3}{1+x^2} < \frac{3}{x^2} < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Feladat. Mutassuk meg, hogy nem léteznek az $\lim_{\pm\infty} f$ határértékek, ahol $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nem állandó, periodikus függvény!

Útm. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}_f'$ és tegyük fel, hogy léteznek olyan $(x_n), (y_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f$ sorozatok, amelyekre

$$\lim(x_n) = \lim(y_n) = a \qquad \text{és} \qquad \lim(f(x_n)) \neq \lim(f(y_n))$$

teljesül. Ekkor az átviteli elv felhasználásával megmutatható, hogy f-nek nincs határértéke a-ban. Ha f nem állandó, periodikus függvény, akkor van olyan $a, b \in \mathcal{D}_f$, hogy $f(a) \neq f(b)$. Így van olyan $p \in (0, +\infty)$, hogy p periódusa f-nek, azaz minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a \pm np, b \pm np \in \mathcal{D}_f$, továbbá

$$f(a \pm np) = f(a), \quad f(b \pm np) = f(b) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Legyen

$$x_n := a \pm np, \quad y_n := b \pm np \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor

$$\lim(x_n) = \lim(y_n) = \pm\infty, \qquad \text{de} \qquad \lim(f(x_n)) = f(a) \neq f(b) = \lim(f(y_n)). \quad \blacksquare$$

Házi (gyakorló) feladat. Mutassuk meg, hogy nem léteznek az alábbi határértékek!

(a) $\lim_{x \to 0} \operatorname{sgn}(x)$;

Legyen

$$x_n := -\frac{1}{n}, \quad y_n := \frac{1}{n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor

$$\lim(x_n) = \lim(y_n) = 0, \qquad \text{de} \qquad \lim(f(x_n)) = -1 \neq 1 = \lim(f(y_n)).$$

(b) $\lim_{x \to 2} \frac{5}{2 - x}$;

Legyen

$$x_n := 1 + \frac{n}{n+1}, \quad y_n := 2 + \frac{1}{n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor

$$\lim(x_n) = \lim(y_n) = 2, \qquad \text{de} \qquad \lim(f(x_n)) = +\infty \neq -\infty = \lim(f(y_n)).$$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Legyen

$$x_n := \frac{1}{n\pi}, \quad y_n := \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor

$$\lim(x_n) = \lim(y_n) = 0, \qquad \text{de} \qquad \lim(f(x_n)) = 0 \neq 1 = \lim(f(y_n)). \quad \blacksquare$$

Feladat. Legyen $n \in \mathbb{N}_0$, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$: $a_n \neq 0$. Mutassuk meg, hogy a

$$p(x) := a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \qquad (x \in \mathbb{R})$$

polinom határértékéről a következők állíthatók!

1. bármely $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén $\lim\limits_{\alpha} p = p(\alpha)$;

1. Mivel bármely $\alpha \in \mathbb{R}$, ill. $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $\lim\limits_{x\to\alpha} x^n = \alpha^n$, ezért a határérték és a műveletek kapcsolatára vonatkozó tétel következményeként

$$\lim_{\alpha} p = \lim_{x\to\alpha} (a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n) = a_0 + a_1 \alpha + \ldots + a_n \alpha^n = p(\alpha).$$

2. $\lim\limits_{+\infty} p = \operatorname{sgn}(a_n)(+\infty)$;

Mivel bármely $0 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$p(x) = x^n \left(\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \ldots + a_n\right),$$

továbbá

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^k} = 0 \quad (k \in \mathbb{N}),$$

ezért az állítás a határéerték és a műveletek kapcsolatára vonatkozó tétel alapján nyilvánvaló.

3. $\lim\limits_{-\infty} p = (-1)^n \operatorname{sgn}(a_n)(+\infty)$.

Az előbbihez hasonlóan igazolható. $\blacksquare$

Feladat. Legyen $m, n \in \mathbb{N}_0$, $a_0, \ldots, a_m, b_0, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$: $a_m b_n \neq 0$ és

$$\mathcal{H} := \{\xi \in \mathbb{R} : \; b_0 + b_1\xi + \ldots + b_n\xi^n = 0\}.$$

Mutassuk meg, hogy az

$$r(x) := \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n} \qquad (x \in \mathbb{R}\backslash\mathcal{H})$$

racionális függvény esetében ha $\alpha \in \mathbb{R}\backslash H$, akkor

$$\lim_{\alpha} r = r(\alpha),$$

továbbá

$$\lim_{+\infty} r = \begin{cases} 0 & (m < n), \\ \dfrac{a_m}{b_n} = \dfrac{a_m}{b_m} & (m = n), \\ \operatorname{sgn}\left(\dfrac{a_m}{b_n}\right)(+\infty) & (m > n), \end{cases} \quad \text{és} \quad \lim_{-\infty} r = \begin{cases} 0 & (m < n) \\ \dfrac{a_m}{b_n} = \dfrac{a_m}{b_m} & (m = n), \\ \operatorname{sgn}\left(\dfrac{a_m}{b_n}\right)(-1)^{m-n}(+\infty) & (m > n). \end{cases}$$

Mivel tetszőleges $0 \neq x \in \mathbb{R}\backslash\mathcal{H}$ esetén

$$r(x) = x^{m-n} \cdot \frac{\frac{a_0}{x^m} + \frac{a_1}{x^{m-1}} + \ldots + a_m}{\frac{b_0}{x^n} + \frac{b_1}{x^{n-1}} + \ldots + b_n},$$

ezért $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathcal{H}$ esetén a a határérték és a műveletek kapcsolatára vonatkozó tétel alapján

$$\lim_{\alpha} r = \lim_{x \to \alpha} \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n} = \frac{a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_m\alpha^m}{b_0 + b_1\alpha + \ldots + b_n\alpha^n} = r(\alpha).$$

Igaz továbbá, hogy

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{a_0}{x^m} + \frac{a_1}{x^{m-1}} + \ldots + a_m}{\frac{b_0}{x^n} + \frac{b_1}{x^{n-1}} + \ldots + b_n} = \frac{a_m}{b_n},$$

ill.

$$\lim_{x \to +\infty} x^{m-n} = \begin{cases} 0 & (m < n), \\ 1 & (m = n), \\ +\infty & (m > n), \end{cases}$$

és

$$\lim_{x \to -\infty} x^{m-n} = \begin{cases} 0 & (m < n) \\ 1 & (m = n), \\ (-1)^{m-n}(+\infty) & (m > n), \end{cases}$$

ezért az állítás nyilvánvaló. ■

Példák. A fentiek alapján világos, hogy

$$1)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}=1; \qquad 2)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3x+2}{x^3-7x^2+5x-1}=0;$$

$$3)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3+3x^2+23}{-3x^3-5x^2+31x+1}=-\frac{2}{3}; \qquad 4)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+2x^2+11x+2}{x^2+3x+2}=+\infty.$$

Feladat. Számítsuk ki az alábbi határértékeket, ha léteznek!

1. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-x+1}{x^2+x-2}$;

Legyen

$$f(x):=\frac{x^3-x+1}{x^2+x-2}\qquad(x\in\mathbb{R}\backslash\{-2;1\}).$$

Mivel minden $x\in\mathcal{D}_f$ esetén

$$\frac{x^3-x+1}{x^2+x-2}=\frac{x^3-x+1}{(x-1)(x+2)},$$

ezért $\lim\limits_{1\pm0}f=\pm\infty$ következtében $\nexists\lim\limits_{1}f$.

2. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}$;

Legyen

$$f(x):=\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}\qquad(x\in\mathbb{R}\backslash\{2;5\}).$$

Mivel minden $x\in\mathcal{D}_f$ esetén

$$\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}=\frac{\cancel{(x-2)}(x-3)}{\cancel{(x-2)}(x-5)}=\frac{x-3}{x-5},$$

ezért $\lim\limits_{2}f=\frac{1}{3}$.

3. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$.

Legyen

$$f(x):=\frac{x^m-1}{x^n-1}\qquad(1\neq x\in\mathbb{R}).$$

Mivel minden $x \in \mathcal{D}_f$ esetén

$$\frac{x^m-1}{x^n-1}=\frac{\cancel{(x-1)}(x^{m-1}+x^{m-2}+\ldots+x+1)}{\cancel{(x-1)}(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1)}=\frac{x^{m-1}+x^{m-2}+\ldots+x+1}{x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1},$$

ezért $\lim\limits_{1} f=\frac{m}{n}$. ■

Feladat. Legyen $2 \leq n \in \mathbb{N}$. A gyöktelenítés technikájával határozzuk meg az alábbi határértékeket!

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$;

Legyen

$$f(x):=\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x^2-1} \qquad (x\in\mathbb{R}:\ |x|\geq 1).$$

Mivel minden $x\in(-\infty,-1)$ esetén

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x^2-1}\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2-1}}=\frac{2-x}{\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2-1}}= \\ &= \frac{\frac{2}{x}-1}{\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x}+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}}=\frac{\frac{2}{x}-1}{\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{x^2}}+\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2}}}=\frac{\frac{2}{x}-1}{-\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}, \end{aligned}$$

ezért $\lim\limits_{-\infty} f=1/2$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x}-1}$;

Legyen

$$f(x):=\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x}-1} \qquad (0\neq x\in[-1,1]).$$

Mivel minden $x\in\mathcal{D}_f$ esetén

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x}-1}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}= \\ &= \frac{(1+x-1+x^2)(\sqrt{1+x}+1)}{(1+x-1)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x^2})}=\frac{(1+x)(\sqrt{1+x}+1)}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x^2}}, \end{aligned}$$

ezért $\lim\limits_{0} f=1$.

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$.

Legyen
$$f(x) := \frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x} \qquad (0 \neq x \in (-1, +\infty)).$$
Ekkor (vö. (1)) bármely $x \in \mathcal{D}_f$ esetén
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x} \cdot \frac{\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}} + \sqrt[n]{(1+x)^{n-2}} + \ldots + 1}{\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}} + \sqrt[n]{(1+x)^{n-2}} + \ldots + 1} = \\ &= \frac{1+x-1^n}{x(\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}} + \sqrt[n]{(1+x)^{n-2}} + \ldots + 1)} = \frac{1}{\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}} + \sqrt[n]{(1+x)^{n-2}} + \ldots + 1}, \end{aligned}$$
ezért $\lim\limits_{0} f = 1/n$. ■

Feladat. Számítsuk ki az alábbi határértékeket, ha léteznek!

1. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+2}}{x^2-1}$;

Az $y := \sqrt[6]{x+2}$ helyettesítést alkalmazva azt kapjuk, hogy bármely $-1 \neq x \in (-2, 0)$, azaz $1 \neq y \in (0, \sqrt[6]{2})$ esetén
$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+2}}{x^2-1} &= \frac{y^3-y^2}{(y^6-2)^2-1} = \frac{y^3-y^2}{y^{12}-4y^6+3} = \frac{y^2(y-1)}{(y^6-1)(y^6-3)} = \\ &= \frac{y^2\cancel{(y-1)}}{\cancel{(y-1)}(y^5+y^4+y^3+y^2+1)(y^6-3)} = \\ &= \frac{y^2}{(y^5+y^4+y^3+y^2+1)(y^6-3)} \longrightarrow \frac{1}{-12} \quad (y \to 1). \end{aligned}$$

2. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[5]{x}+1}$;

$$\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[5]{x}+1} = \lim_{y\to -1} \frac{\sqrt[3]{y^{15}}+1}{\sqrt[5]{y^{15}}+1} = \lim_{y\to -1} \frac{y^5+1}{y^3+1} = \lim_{y\to -1} \frac{\cancel{(y+1)}(y^4-y^3+y^2-y+1)}{\cancel{(y+1)}(y^2-y+1)} = \frac{5}{3}.$$

3. $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1} \quad (m,n\in\mathbb{N}).$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1} = \lim_{y\to 1} \frac{\sqrt[m]{y^{mn}}-1}{\sqrt[n]{y^{mn}}-1} = \lim_{y\to 1} \frac{y^n-1}{y^m-1} = \frac{n}{m}. \blacksquare$$

Házi (gyakorló) feladatok.

1. Számítsuk ki a következő határértékeket!

(a) $\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{3}{x^3-1}\right);$

Legyen

$$f(x) := \frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1} \quad (1 \neq x \in \mathbb{R}).$$

Ekkor $1 \in \mathcal{D}_f'$ és minden $1 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{3}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{x^2+x-2}{x^3-1} =$$

$$= \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{x+2}{x^2+x+1},$$

ezért

$$\lim_1 f = \frac{3}{3} = 1.$$

(b) $\lim_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5};$

Legyen

$$f(x) := \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} \qquad (5 \neq x \in (1,+\infty)).$$

Ekkor $5 \in \mathcal{D}_f'$ és minden $5 \neq x \in (1,+\infty)$ esetén

$$\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} = \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} \cdot \frac{\sqrt{x-1}+2}{\sqrt{x-1}+2} = \frac{x-5}{(x-5)\sqrt{x-1}+2} = \frac{1}{\sqrt{x-1}+2},$$

ezért

$$\lim_5 f = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}.$$

(c) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x}{x-1}-\frac{x^2-x}{x+1}\right)$.

Mivel bármely $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ esetén

$$\frac{x^2+x}{x-1}-\frac{x^2-x}{x+1} = \frac{(x^2+x)(x+1)-(x^2-x)(x-1)}{(x-1)(x+1)} =$$

$$= \frac{x^3+2x^2+x-x^3+2x^2-x}{x^2-1}=\frac{4x^2}{x^2-1},$$

ezért

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x}{x-1}-\frac{x^2-x}{x+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2}{x^2-1}=4.$$

2. Adott $m,n\in\mathbb{N}$, ill. $0<a,b\in\mathbb{R}$ esetén számítsuk ki az alábbi határértéket!

(a) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{a}{x-1}-\frac{b}{x^3-1}\right)$;

Legyen

$$f(x):=\frac{a}{x-1}-\frac{b}{x^3-1}\qquad (1\neq x\in\mathbb{R}).$$

Ekkor $1\in\mathcal{D}_f'$ és minden $1\neq x\in\mathbb{R}$ esetén

$$\frac{a}{x-1}-\frac{b}{x^3-1} = \frac{a}{x-1}-\frac{b}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{a(x^2+x+1)-b}{x^3-1}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{a(x+2)}{x^2+x+1} & (b=3a),\\[2ex] \dfrac{ax^2+ax+a-b}{x^3-1} & (b\neq 3a),\end{cases}$$

ezért

- $b=3a$ esetén $\lim_1 f=a$;
- $b\neq 3a$ esetén $\nexists\lim_1 f$, ui.

$$\lim_{1\pm 0} f=\operatorname{sgn}(3a-b)\cdot(\pm\infty).$$

(b) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right)$;

Legyen

$$f(x) := \frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n} \qquad (1 \neq x \in \mathbb{R}).$$

- Ha $m=n=1$, akkor bármely $1 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x)=0,$$

  így

$$\lim_1 f = 0 = \frac{1-1}{2}.$$

- Ha $m=1$, $n>1$, akkor bármely $1 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) = \frac{1}{1-x}-\frac{n}{1-x^n} = \frac{1}{1-x}-\frac{n}{(1-x)\cdot\sum_{k=0}^{n-1}x^k} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1}x^k - n}{1-x^n} =$$

$$= \frac{-(1-x)\cdot\sum_{k=0}^{n-2}(n-k-1)x^k}{(1-x)\cdot\sum_{k=0}^{n-1}x^k} = \frac{-\sum_{k=0}^{n-2}(n-k-1)\cdot x^k}{\sum_{k=0}^{n-1}x^k} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow -\frac{(n-1)n-\frac{(n-2)(n-1)}{2}-n+1}{n} = -\frac{2n^2-2n-n^2+3n-2-2n+2}{2n} =$$

$$= -\frac{n^2-n}{2n} = \frac{1-n}{2} \quad (x \to 1).$$

- Ha $m>2$, $n=1$, akkor a fentiekhez hasonlóan azt kapjuk, hogy $\lim_1 f = \frac{m-1}{2}$.
- Tegyük fel, hogy $2 \leq m, n \in \mathbb{N}$. Ekkor az $x =: 1+h$ helyettesítést alkalmazva bármely $1 \neq x \in \mathbb{R}$, azaz $0 \neq h \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) = \frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n} = \frac{m}{1-(1+h)^m}-\frac{n}{1-(1+h)^n} =$$

$$= \frac{m}{1-\sum\limits_{k=0}^{m}\binom{m}{k}h^k} - \frac{n}{1-\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}h^k} = \frac{m}{-\sum\limits_{k=1}^{m}\binom{m}{k}h^k} - \frac{n}{-\sum\limits_{k=1}^{n}\binom{n}{k}h^k} =$$

$$= \frac{-m\sum\limits_{k=1}^{n}\binom{n}{k}h^k + n\sum\limits_{k=1}^{m}\binom{m}{k}h^k}{\left(\sum\limits_{k=1}^{m}\binom{m}{k}h^k\right)\cdot\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\binom{n}{k}h^k\right)} = \frac{-mnh - m\sum\limits_{k=2}^{n}\binom{n}{k}h^k + nmh + n\sum\limits_{k=2}^{m}\binom{m}{k}h^k}{\left(\sum\limits_{k=1}^{m}\binom{m}{k}h^k\right)\cdot\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\binom{n}{k}h^k\right)} =$$

$$= \frac{n\sum\limits_{k=2}^{m}\binom{m}{k}h^k - m\sum\limits_{k=2}^{n}\binom{n}{k}h^k}{\left(\sum\limits_{k=1}^{m}\binom{m}{k}h^{k-1}\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\binom{n}{k}h^{k-1}\right)} = \frac{h^2 n\sum\limits_{k=2}^{m}\binom{m}{k}h^{k-2} - h^2 m\sum\limits_{k=2}^{n}\binom{n}{k}h^{k-2}}{\left(h\sum\limits_{k=1}^{m}\binom{m}{k}h^{k-1}\right)\left(h\sum\limits_{k=1}^{n}\binom{n}{k}h^{k-1}\right)} =$$

$$= \frac{n\sum\limits_{k=2}^{m}\binom{m}{k}h^{k-2} - m\sum\limits_{k=2}^{n}\binom{n}{k}h^{k-2}}{\left(\sum\limits_{k=1}^{m}\binom{m}{k}h^{k-1}\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\binom{n}{k}h^{k-1}\right)} \longrightarrow \frac{n\binom{m}{2} - m\binom{n}{2}}{\binom{m}{1}\binom{n}{1}} = \frac{n\frac{m(m-1)}{2} - m\frac{n(n-1)}{2}}{mn} =$$

$$= \frac{m-n}{2} \quad (h \to 0).$$

(c) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{a}{1-x^a} - \frac{b}{1-x^b}\right)$.

Felhasználva, hogy bármely $\mu \in \mathbb{R}$, ill. $x \in (0, +\infty)$ esetén

$$x^\mu = \exp(\mu\cdot\ln(x)) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mu\cdot\ln(x))^n}{n!}$$

teljesül, a fentiekhez hasonlóan azt kapjuk, hogy tetszőleges $0 < a, b \in \mathbb{R}$ esetén

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{a}{1-x^a} - \frac{b}{1-x^b}\right) = \frac{a-b}{2}.$$

3. Számítsuk ki a

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)$;

Világos, hogy

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x^2-x+1}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-2}{\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x^2-x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}=1.$$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)$;

A fentiekhez hasonlóan kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)\cdot\frac{\sqrt{9x^2+1}+3x}{\sqrt{9x^2+1}+3x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{9x^2+1}+3x}=0.$$

(c) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$

Egyszerű átalakítással azt kapjuk, hogy bármely $1\neq x\in(0,+\infty)$ számra

$$\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}\cdot\frac{x^2+\sqrt{x}}{x^2+\sqrt{x}}=\frac{(x^4-x)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(x^2+\sqrt{x})}=\frac{x(x^3-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(x^2+\sqrt{x})}=$$

$$=\frac{x\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)(\sqrt{x}+1)}{\cancel{(x-1)}(x^2+\sqrt{x})}\longrightarrow\frac{1\cdot(1+1+1)\cdot(1+1)}{1+1}=3\quad(x\to1).$$

4. Számítsuk ki a

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$;

Mivel bármely $0 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4} = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}+1} \cdot \frac{\sqrt{x^2+16}+4}{\sqrt{x^2+16}+4} = \frac{x^2(\sqrt{x^2+16}+4)}{x^2(\sqrt{x^2+1}+1)},$$

ezért

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4} = 4.$$

(b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{\sqrt{x-1}-1}$;

Mivel bármely $2 \neq x \in (1, +\infty)$ esetén

$$\frac{x^2-4}{\sqrt{x-1}-1} = \frac{x^2-4}{\sqrt{x-1}-1} \cdot \frac{\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{x-1}+1} = \frac{x^2-4}{x-2}(\sqrt{x-1}+1) =$$

$$= \frac{(x+2)(x-2)}{x-2}(\sqrt{x-1}+1) = (x+2)(\sqrt{x-1}+1),$$

ezért

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{\sqrt{x-1}-1} = \lim_{x\to 2}(x+2)(\sqrt{x-1}+1) = 4 \cdot 2 = 8.$$

(c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{1-x^2}$.

Világos, hogy

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{1-x^2} = \lim_{x\to 1} \frac{x+3-4}{(1-x^2)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(1-x)(1+x)(\sqrt{x+3}+2)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{-1}{(1+x)(\sqrt{x+3}+2)} = -\frac{1}{8}.$$

5. Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$. Számítsuk ki a

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{\sqrt{1+\alpha x} - x - 1}$;

Mivel bármely $0 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{x^2}{\sqrt{1+\alpha x}-x-1} = \frac{x^2 \cdot (\sqrt{1+\alpha x}+x+1)}{1+\alpha x-(x^2+2x+1)} = \frac{x^2 \cdot (\sqrt{1+\alpha x}+x+1)}{-x^2+(\alpha-2)x} = \frac{x \cdot (\sqrt{1+\alpha x}+x+1)}{-x+\alpha-2},$$

ezért

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+\alpha x}-x-1} = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0} \left(-(\sqrt{1+2x}+x+1)\right) = -2 & (\alpha = 2), \\ \\ \dfrac{0}{\alpha-2} = 0 & (\alpha \neq 2). \end{cases}$$

(b) $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x-\alpha}-\sqrt{\alpha}}{\sqrt{x^2-\alpha^2}}$.

Világos, hogy

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \alpha} \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-\alpha}-\sqrt{\alpha}}{\sqrt{x^2-\alpha^2}} &= \lim_{x \to \alpha} \frac{1+\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}}{\sqrt{x-\alpha}}}{\sqrt{x+\alpha}} = \lim_{x \to \alpha} \frac{1}{\sqrt{x+\alpha}} \cdot \lim_{x \to \alpha} \left(1+\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}}{\sqrt{x-\alpha}}\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \lim_{x \to \alpha} \left(1+\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}}{\sqrt{x-\alpha}}\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \cdot \lim_{x \to \alpha} \left(1+\frac{x-\alpha}{(\sqrt{x}+\sqrt{\alpha})\sqrt{x-\alpha}}\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \cdot \lim_{x \to \alpha} \left(1+\frac{\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x}+\sqrt{\alpha}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}. \end{aligned}$$

6. Milyen $a, b \in \mathbb{R}$ esetén teljesül a

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-(ax+b)\right)=0$$

határértékreláció?

Világos, hogy $a \leq 0$ esetén a keresett határérték $+\infty$. Tegyük fel most, hogy $a > 0$. Mivel bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sqrt{x^2-x+1}-(ax+b)=\frac{x^2-x+1-a^2x^2-2abx-b^2}{\sqrt{x^2-x+1}+ax+b}=\frac{(1-a^2)x^2-(2ab+1)x+1-b^2}{\sqrt{x^2-x+1}+ax+b},$$

ezért két esetet különböztetünk meg:

1. eset $(a^2 \neq 1)$**:**

$$\frac{(1-a^2)x^2-(2ab+1)x+1-b^2}{\sqrt{x^2-x+1}+ax+b}=\frac{x}{x}\cdot\frac{(1-a^2)x-(2ab+1)+\frac{1-b^2}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+a+\frac{b}{x}}=:\frac{g(x)}{h(x)}\qquad (x\neq 0),$$

ahol

$$\lim_{+\infty} g=\begin{cases}+\infty & (a^2<1),\\ -\infty & (a^2>1)\end{cases}\qquad \lim_{+\infty} h = 1+a\ (\neq 0).$$

Így

$$\lim_{+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-(ax+b))=\begin{cases}+\infty & (a<1),\\ -\infty & (a>1).\end{cases}$$

7. Számítsuk ki az alábbi határértékeket, amennyiben azok léteznek!

(a) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt[3]{1+5x}-x-1}$

Könnyen belátható, hogy

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt[3]{1+5x}-x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt[3]{1+5x}-x-1}\cdot\frac{\sqrt[3]{(1+5x)^2}+\sqrt[3]{(1+5x)(x+1)}+(x+1)^2}{\sqrt[3]{(1+5x)^2}+\sqrt[3]{(1+5x)(x+1)}+(x+1)^2}=$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2\left[\sqrt[3]{(1+5x)^2}+\sqrt[3]{(1+5x)(x+1)}+(x+1)^2\right]}{(1+5x)-(x+1)^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2\left[\sqrt[3]{(1+5x)^2}+\sqrt[3]{(1+5x)(x+1)}+(x+1)^2\right]}{1+5x-x^3-x^2-x-1} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x}\cdot\frac{\sqrt[3]{(1+5x)^2}+\sqrt[3]{(1+5x)(x+1)}+(x+1)^3}{-x^2-x+4} = 0\cdot\frac{3}{4} = 0.$$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$.

Mivel bármely $0 \neq x \in (-1,1)$ esetén

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x} &= \frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}\cdot\frac{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+\sqrt[3]{(1-x)^2}} = \\ &= \frac{2x}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+\sqrt[3]{(1-x)^2}},\end{aligned}$$

ezért

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+\sqrt[3]{(1-x)^2}} = \frac{2}{3}.$$

8. Számítsuk ki az alábbi határértékeket, amennyiben azok léteznek!

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x}$;

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{\frac{1}{x}}}{\sqrt[4]{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1} = \frac{\sqrt{1+0}+0}{\sqrt[4]{0+0}-1} = -1.$$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[5]{x^4+1}}$;

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}\left\{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}\right\}}{\cancel{x}\left\{\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^4}}-\sqrt[5]{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^5}}\right\}} = \frac{1-0}{1-0} = 1.$$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[5]{x^7+3}+\sqrt[4]{2x^3-1}}{\sqrt[6]{x^8+x^7+1}-x}$;

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[5]{x^7+3}+\sqrt[4]{2x^3-1}}{\sqrt[6]{x^8+x^7+1}-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[5]{x^7}\left\{\sqrt[5]{1+\frac{3}{x^7}}+\sqrt[4]{\frac{2}{\sqrt[5]{13}}-\frac{1}{\sqrt[5]{x^{28}}}}\right\}}{\sqrt[3]{x^4}\left\{\sqrt[6]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^8}}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right\}} = (+\infty)\cdot\frac{1+0}{1-0} =$$

$+\infty$.

(d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^4+3}-\sqrt[5]{x^3+4}}{\sqrt[3]{x^7+1}}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^4+3}-\sqrt[5]{x^3+4}}{\sqrt[3]{x^7+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^4}\cdot\left\{\sqrt[3]{1+\frac{3}{x^4}}-\sqrt[5]{\frac{1}{\sqrt[3]{x^{11}}}+\frac{4}{\sqrt[3]{x^{20}}}}\right\}}{\sqrt[3]{x^7}\cdot\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^7}}} = 0\cdot\frac{1-0}{1} = 0. \blacksquare$$

Házi (gyakorló) feladat. Számítsuk ki az alábbi határértékeket, amennyiben azok léteznek!

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{7+x^3}-\sqrt{3+x^2}}{x-1}$;

Mivel tetszőleges $1 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$= \frac{\sqrt[3]{7+x^3}-\sqrt{3+x^2}}{x-1} = \frac{\sqrt[3]{7+x^3}}{x-1} - \frac{\sqrt{3+x^2}}{x-1} =$$

$$= \frac{7+x^3-8}{(x-1)\left(\sqrt[3]{(7+x^3)^2}+\sqrt[3]{(7+x^3)\cdot 8}+\sqrt[3]{64}\right)} - \frac{3+x^2-4}{(x-1)\left(\sqrt{3+x^2}+2\right)} =$$

$$= \frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{\cancel{(x-1)}\left(\sqrt[3]{(7+x^3)^2}+\sqrt[3]{(7+x^3)\cdot 8}+\sqrt[3]{64}\right)} - \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}\left(\sqrt{3+x^2}+2\right)},$$

ezért

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{7+x^3}-\sqrt{3+x^2}}{x-1} = \frac{1+1+1}{4+4+4} - \frac{1+1}{2+2} = -\frac{1}{4}.$$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}\right)$;

Világos, hogy bármely $x \in (1,+\infty)$ számra

$$\sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}\right) = \sqrt[3]{x^2}\cdot\frac{x^3+1-(x^3+1)}{\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3-1}} = \frac{2\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^3}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^3}}\right)} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt[6]{x^5}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^3}}\right)},$$

így

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}\right) = \frac{2}{(+\infty)(1+1)} = 0.$$

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}$;

Mivel bármely $x \in (0,+\infty)$ számra

$$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x} = \left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)\cdot\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{x + \sqrt{x + \sqrt{x}} - x}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1 + \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{x}} + 1} =$$

$$= \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}}}} + 1},$$

ezért

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x + x} - \sqrt{x}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

(d) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 \cdot \left(\sqrt{x^2 + \sqrt{x^4 + 1}} - x\sqrt{2} \right);$

Mivel bármely $x \in (0, +\infty)$ számra

$$x^3 \left(\sqrt{x^2 + \sqrt{x^4 + 1}} - x\sqrt{2} \right) = x^3 \cdot \left(\sqrt{x^2 + \sqrt{x^4 + 1}} - x\sqrt{2} \right) \cdot \frac{\sqrt{x^2 + \sqrt{x^4 + 1}} + x\sqrt{2}}{\sqrt{x^2 + \sqrt{x^4 + 1}} + x\sqrt{2}} =$$

$$= x^3 \cdot \frac{x^2 + \sqrt{x^4 + 1} - 2x^2}{\sqrt{x^2 + \sqrt{x^4 + 1}} + x\sqrt{2}} = x^3 \cdot \frac{\sqrt{x^4 + 1} - x^2}{\sqrt{x^2 + \sqrt{x^4 + 1}} + x\sqrt{2}} =$$

$$= x^3 \cdot \frac{\sqrt{x^4 + 1} - x^2}{\sqrt{x^2 + \sqrt{x^4 + 1}} + x\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{x^4 + 1} + x^2}{\sqrt{x^4 + 1} + x^2} =$$

$$= x^3 \cdot \frac{x^4 + 1 - x^4}{\left(\sqrt{x^2 + \sqrt{x^4 + 1}} \right) \cdot \left(\sqrt{x^4 + 1} + x^2 \right)} =$$

$$= \frac{x^3}{x^3 \cdot \left(\sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}} + \sqrt{2} \right) \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} + 1 \right)},$$

ezért

$$\lim_{x \to +\infty} x^3 \left(\sqrt{x^2 + \sqrt{x^4 + 1}} - x\sqrt{2} \right) = \frac{1}{(\sqrt{2} + \sqrt{2}) \cdot (1 + 1)} = \frac{1}{4\sqrt{2}}.$$

(e) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt[3]{2+x}+x}$;

Mivel tetszőleges $-1 \neq x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt[3]{2+x}+x} = \frac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt[3]{2+x}+x} \cdot \frac{\sqrt[3]{(2+x)^2} - \sqrt[3]{(2+x)x} + \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{(2+x)^2} - \sqrt[3]{(2+x)x} + \sqrt[3]{x^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{(1+2x)^2} - \sqrt[3]{1+2x} + 1}{\sqrt[3]{(1+2x)^2} - \sqrt[3]{1+2x} + 1} =$$

$$= \frac{(1+2x+1)\left(\sqrt[3]{(2+x)^2} - \sqrt[3]{(2+x)x} + \sqrt[3]{x^2}\right)}{(2+x+x^3)\left(\sqrt[3]{(1+2x)^2} - \sqrt[3]{1+2x} + 1\right)} =$$

$$= \frac{2\cancel{(x+1)}\left(\sqrt[3]{(2+x)^2} - \sqrt[3]{(2+x)x} + \sqrt[3]{x^2}\right)}{\cancel{(x+1)}(x^2-x+2)\left(\sqrt[3]{(1+2x)^2} - \sqrt[3]{1+2x} + 1\right)},$$

ezért

$$\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt[3]{2+x}+x} = \frac{2 \cdot (1+1+1)}{(1+1+2) \cdot (1+1+1)} = \frac{1}{2}.$$

(f) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$.

Világos, hogy

$$\lim_{x \to -2} \frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8} = \lim_{x \to -2} \frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8} = \lim_{x \to -2} \frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+2^3} =$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{x-6+8}{(x+2)(x^2-2x+4)\left(\sqrt[3]{(x-6)^2} - \sqrt[3]{(x-6) \cdot 8} + \sqrt[3]{64}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x+2)}(x^2-2x+4)\left(\sqrt[3]{(x-6)^2} - \sqrt[3]{(x-6) \cdot 8} + \sqrt[3]{64}\right)} =$$

$$= \frac{1}{(4+4+4) \cdot (4+4+4)} = \frac{1}{144}.$$

Házi (gyakorló) feladat. Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}'_f$ és tegyük fel, hogy $\lim_a f \in (0, +\infty)$. Mutassuk meg, hogy ekkor van olyan $\delta > 0$, hogy

$$x \in \mathcal{D}_f \cap (K_\delta(a) \backslash \{a\}) \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) > 0$$

teljesül!

Útm. A határérték definíciója alapján van olyan $\delta > 0$, hogy minden $x \in D_f \cap (K_\delta(a) \backslash \{a\})$ esetén $|f(x) - A| < A$. Ez pedig pontosan akkor teljesül, ha

$$-A < f(x) - A < A, \qquad \text{azaz} \qquad 0 < f(x) < 2A.$$

Megjegyzés. Az állítás nem fordítható meg, ui. az

$$f(x) := \begin{cases} |x| & (x \neq 0), \\ 1 & (x = 0) \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény csak pozitív értéket vesz fel, de $\lim_a f = 0$. Igaz viszont a következő (az átviteli elvvel könnyen bebizonyítható) állítás:

Ha f-nek van a-ban határértéke és

$$f(x) \geq 0 \qquad (x \in \mathcal{D}_f \cap ((a - \delta, a + \delta) \backslash \{a\})),$$

akkor $\lim_a f \geq 0$. ■

Házi feladat. Számítsuk ki a $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ határértéket!

1. $f(x) := \dfrac{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3 + x} - x}$;

Tetszőleges $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{\frac{1}{x}}}{\sqrt[4]{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} - 1} \longrightarrow \frac{\sqrt{1 + 0} + 0}{\sqrt[4]{0 + 0} - 1} = -1 \qquad (x \to +\infty).$$

2. $f(x) := \sqrt{x^3+1} - x;$

Tetszőleges $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) = \left(\sqrt{x^3+1} - x\right) \cdot \frac{\sqrt{x^3+1}+x}{\sqrt{x^3+1}+x} = \frac{x^3+1-x}{\sqrt{x^3+1}+x} = \frac{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x}\right)}{x^{3/2}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}+\sqrt{\frac{1}{x}}\right)} =$$

$$= x^{3/2}\cdot\frac{1+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}+\sqrt{\frac{1}{x}}} \longrightarrow +\infty\cdot 1 = +\infty \quad (x\to+\infty).$$

3. $f(x) := \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2};$

Tetszőleges $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) = \left(\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}\right)\cdot\frac{\sqrt[3]{(x+1)^4}+\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^4}}{\sqrt[3]{(x+1)^4}+\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^4}} =$$

$$= \frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{\sqrt[3]{(x+1)^4}+\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^4}} =$$

$$= \frac{4x}{\sqrt[3]{(x+1)^4}+\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^4}} =$$

$$= \frac{4x}{x^{4/3}\cdot\left\{\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}\right)^4}+\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x}\right)^4}\right\}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\cdot\frac{4}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}\right)^4}+\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x}\right)^4}} \longrightarrow 0\cdot\frac{4}{3} = 0 \quad (x\to+\infty).$$

4. $f(x) := \dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[5]{x^4+1}};$

Tetszőleges $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) = \frac{x\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}\right)}{x\cdot\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^4}}-\sqrt[5]{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^5}}\right)} == \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}}{\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^4}}-\sqrt[5]{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^5}}} \longrightarrow \frac{1-0}{1-0} = 1 \quad (x \to +\infty).$$

5. $f(x) := \dfrac{\sqrt[5]{x^7+3}+\sqrt[4]{2x^3-1}}{\sqrt[6]{x^8+x^7+1}-x};$

Tetszőleges $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén az $x \to \infty$ határátmenetben

$$f(x) = \frac{x^{7/5}\cdot\left(\sqrt[5]{1+\frac{3}{x^7}}+\sqrt[4]{\frac{2}{x^{13/5}}-\frac{1}{x^{21/5}}}\right)}{x^{4/3}\cdot\left(\sqrt[6]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^8}}-\frac{1}{x^{1/3}}\right)} = \frac{\sqrt[5]{1+\frac{3}{x^7}}+\sqrt[4]{\frac{2}{x^{13/5}}-\frac{1}{x^{21/5}}}}{\sqrt[6]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^8}}-\frac{1}{x^{1/3}}} \longrightarrow (+\infty)\cdot\frac{1+0}{1-0} = +\infty.$$

6. $f(x) := \dfrac{\sqrt[3]{x^4+3}-\sqrt[5]{x^3+4}}{\sqrt[3]{x^7+1}};$

Tetszőleges $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén az $x \to \infty$ határátmenetben

$$f(x) = \frac{x^{4/3}\cdot\left(\sqrt[3]{1+\frac{3}{x^4}}-\sqrt[5]{\frac{1}{x^{11/3}}+\frac{4}{x^{20/3}}}\right)}{x^{7/3}\cdot\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^7}}\right)} = \frac{\sqrt[3]{1+\frac{3}{x^4}}-\sqrt[5]{\frac{1}{x^{11/3}}+\frac{4}{x^{20/3}}}}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^7}}} \longrightarrow 0\cdot\frac{1-0}{1} = 0.$$

7. $f(x) := \dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[5]{x^4+1}};$

Tetszőleges $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) = \frac{x\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}\right)}{x\cdot\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^4}}-\sqrt[5]{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^5}}\right)} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}}{\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^4}}-\sqrt[5]{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^5}}} \longrightarrow \frac{1-0}{1-0} = 1 \quad (x \to +\infty).$$

8. $f(x) := \dfrac{(x+1)^{10}+(x+2)^{10}+\ldots+(x+100)^{10}}{x^{10}+10^{10}}$;

Tetszőleges $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) = \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{10}+\left(1+\frac{2}{x}\right)^{10}+\ldots+\left(1+\frac{100}{x}\right)^{10}}{1+\left(\frac{10}{x}\right)^{10}} \longrightarrow \frac{100\cdot 1}{1+0} = 100 \quad (x\to+\infty).$$

9. $f(x) := \sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}$;

Tetszőleges $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt{x^2-7x+3}}{\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt{x^2-7x+3}} = \\
&= \frac{x^2-2x-1-x^2+7x-3}{\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt{x^2-7x+3}} = \frac{5x-4}{\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt{x^2-7x+3}} = \\
&= \frac{5-\frac{4}{x}}{\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}}} \longrightarrow \frac{5-0}{1+1} = \frac{5}{2} \quad (x\to+\infty).
\end{aligned}$$

10. $f(x) := \phi(x)\cdot\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right)$,

$\phi(x) \in \left\{\sqrt[3]{x^2}, \sqrt{x^3}\right\}$;

Tetszőleges $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}
f(x) &= \phi(x)\cdot\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}+\sqrt{x-1}-\sqrt{x}\right) = \\
&= \phi(x)\cdot\left(\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}+\frac{x-1-x}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}}\right) = \\
&= \phi(x)\cdot\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}-\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)\cdot\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x}\right)} =
\end{aligned}$$

$$= \phi(x)\cdot\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)\cdot\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x}\right)}\cdot\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}} =$$

$$= \phi(x)\cdot\frac{x-1-x-1}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)\cdot\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x}\right)\cdot\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\right)}.$$

Ha

- $\phi(x)=\sqrt[3]{x^2}$, akkor az $x\to+\infty$ határátmenetben

$$f(x) = \frac{-2x^{2/3}}{x^{3/2}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)} =$$

$$= x^{-5/6}\cdot\frac{-2}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow 0\cdot\frac{-2}{8}=0;$$

- $\phi(x)=\sqrt{x^3}$, akkor az $x\to+\infty$ határátmenetben

$$f(x) = \frac{-2x^{3/2}}{x^{3/2}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)} =$$

$$= \frac{-2}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1\right)\cdot\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \frac{-2}{(1+1)(1+1)(1+1)} = -\frac{1}{4}.$$

11. $f(x) := x^3 \cdot \left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}} - x\sqrt{2}\right);$

Tetszőleges $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén az $x \to +\infty$ határátmenetben

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^3 \cdot \left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}} - x\sqrt{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}} + x\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}} + x\sqrt{2}} = \\
&= x^3 \cdot \frac{x^2+\sqrt{x^4+1}-2x^2}{\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}} + x\sqrt{2}} = x^3 \cdot \frac{\sqrt{x^4+1}-x^2}{\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}} + x\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{x^4+1}+x^2}{\sqrt{x^4+1}+x^2} = \\
&= x^3 \cdot \frac{x^4+1-x^4}{\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}} + x\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x^4+1}+x^2\right)} = \\
&= \frac{x^3}{x^3 \cdot \left(\sqrt{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}} + \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}+1\right)} \longrightarrow \frac{1}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)(1+1)} = \frac{1}{4\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

12. $f(x) := \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}};$

Tetszőleges $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left(\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}}\right) \cdot \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x-\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x-\sqrt{x}}} = \frac{x+\sqrt{x}-x+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x-\sqrt{x}}} = \\
&= \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} + \sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}} \longrightarrow \frac{2}{1+1} = 1 \qquad (x \to +\infty).
\end{aligned}$$

13. $f(x) := \sqrt[3]{x^2} \cdot \left(\sqrt{x^3+1} - \sqrt{x^3-1}\right);$

Tetszőleges $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2} \cdot \left(\sqrt{x^3+1} - \sqrt{x^3-1}\right) \cdot \frac{\sqrt{x^3+1} + \sqrt{x^3-1}}{\sqrt{x^3+1} + \sqrt{x^3-1}} = \sqrt[3]{x^2} \cdot \frac{x^3+1-x^3+1}{\sqrt{x^3+1} + \sqrt{x^3-1}} =$$

$$= \sqrt[3]{x^2} \cdot \frac{2}{x^{3/2} \cdot \left(\sqrt{1+\frac{1}{x^3}} + \sqrt{1-\frac{1}{x^3}}\right)} = \frac{2}{x^{5/6} \cdot \left(\sqrt{1+\frac{1}{x^3}} + \sqrt{1-\frac{1}{x^3}}\right)} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \frac{2}{(+\infty) \cdot (1+1)} = 0 \quad (x \to +\infty).$$

14. $f(x) := \dfrac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x}$.

Tetszőleges $0 < x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2}} - \frac{1}{x} \longrightarrow 0 - 0 = 0 \quad (x \to +\infty). \quad \blacksquare$$

Feladat. Számítsuk ki a

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

határértékeket!

Útm. Mivel minden $x \in (0, +\infty)$ esetén $x - 1 < [x] \leq x$, ezért

$$\left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1},$$

így a Sandwich-tétel alapján

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \quad \blacksquare$$