Algoritmusok és adatszerkezetek II. gyakorlati segédlet

Tömörítés

Nagy Ádám - nagyadam888@gmail.com

2020. szeptember 7.

Informatikában a **kódoláselmélet** adatok különböző reprezentációjával és azok közötti átalakításokkal foglalkozik. Ennek egyik ága, a **forráskódolás** az adott alak hosszát vizsgálja; vagyis azt a kérdést, hogy az adott mennyiségű információt mekkora mennyiségű adattal lehet tárolni. Legtöbb esetben a cél a rövidebb reprezentáció, tehát beszélhetünk információ- vagy adat**tömörítésről**.

Veszteségmentes tömörítés

A kódolás során fontos kérdés, hogy az adat teljes egészében visszaállítható-e. Tömörítés esetében ennek megfelelően használhatunk **veszteségmentes** vagy veszteséggel járó eljárásokat (pl. JPEG, MPEG, MP3, ...). Mi csak az előbbivel foglalkozunk.

Információ alapegysége

A kódoláselméletnél meg kell adnunk az **információ alapegységét**, azaz azt, mennyi információtartalma van az atomi „tárolási egységnek". Mivel a jelenlegi számítógépek bináris elven működnek, ez $r = 2$ és így a kódszavaink a $\Gamma = \{'0','1'\}$ ábécé feletti szavak lesznek.

Kód, kódfa

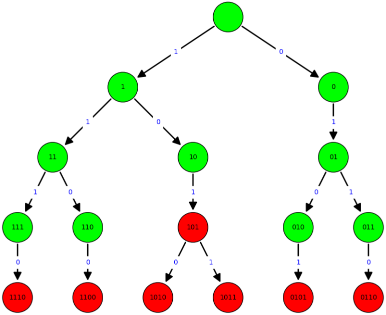
Kódnak nevezzük a Γ feletti véges szavak (kódszavak) egy tetszőleges nem üres halmazát. Például bináris kód a

$$C = \{\texttt{'1011'}, \texttt{'0110'}, \texttt{'0101'}, \texttt{'101'}, \texttt{'1010'}, \texttt{'1100'}, \texttt{'1110'}\}.$$

Egy kód szemléletesebb ábrázolásához elkészíthetjük annak **kódfá**ját. Ebben a fában a fa csúcsai szavak (nem feltétlenül kódszavak), az éleit pedig a kódszavak lehetséges karaktereivel címkézzük. A fa gyökerében az üres szó szerepel és egy szóhoz tartozó csúcs leszármazottai azok a szavak, amelyeket úgy kapunk, hogy a szó után írjuk az élen szereplő karaktert. A kódhoz tartozó kódfa az a legkevesebb csúcsot tartalmazó ilyen tulajdonságú fa, ami tartalmazza az összes kódszót.

Kódfa

$C =$ {'1011', '0110', '0101', '101', '1010', '1100', '1110'}.



ábra: Kódfa a C kód esetén, kódszavak pirossal jelölve

Kódfa

A kódfa szemléltetés mellett más szempontból is hasznos lehet. Egyrészt a fa tulajdonságaiból következtethetünk a kód tulajdonságaira, másrészt a kódfa segítségével egy bitsorozat hatékonyan dekódolható: A gyökérből indulva a bitek szekvenciájának megfelelően járjuk be a fát, az élek mentén kódszavat keresve és találat esetén ismételve a bejárást megkapjuk a a dekódolt adatot[1].

[1] Természetesen ez csak akkor igaz, ha a dekódolás egyáltalán lehetséges és egyértelmű.

Betűnkénti kódolás

A kódolást **betűnkénti kódolás**nak nevezzük, ha az eredeti Σ ábécé feletti adatot betűnként egy $\Sigma \mapsto C \subset \Gamma^*$ kölcsönösen egyértelmű (bijektív) leképezéssel készítjük el. Például az ASCII kódolás is ilyen, hiszen a megfelelő táblázat alapján betűnként történik a kódolt adat kiszámolása.

Egyenletes kód, naiv módszer

Egy kódot **egyenletes kód**nak nevezünk, ha a kód szavainak hossza egyenlő. A **naiv módszer** egyenletes kódot használó betűnkénti kódolás.

A Σ ábécé feletti kódolt adat akkor lesz a legkisebb, ha a kódszavak közös hossza a legkisebb. Mivel $|\Gamma| = r$ és $|\Sigma| = d$ ez azt jelenti, hogy az egyes karakterek legkevesebb $\lceil \log_r d \rceil$ hosszal kódolhatóak naiv módszer segítségével.

Feladatok

Tekintsük a $S = \texttt{AABCAADEAAB}$ szöveget.

1. Naiv módszert alkalmazva hány bittel tudjuk ábrázolni az S-t?
2. Adjuk meg S egy kódolt alakját naiv módszer esetén!
3. Adjunk meg betűnkénti kódolást, amely tömörebb eredményt ad mint a naiv módszer!
4. Adjunk meg egy egyenletes kódolást, amely tömörebb eredményt ad mint a naiv módszer!
5. Rajzoljuk fel a korábban használt kód kódfáját! Milyen tulajdonsággal rendelkezik egy egyenletes kódhoz tartozó kódfa?

Gyakorlatban, ha a tömörítés nem igazán fontos szempont, egyszerűsége miatt sok helyen alkalmazzák, például a 8 bit hosszúságú kódszavakat használó ASCII kód is ilyen.

Huffman-kód

Intuitíven, betűnkénti kódolás esetén akkor kapunk rövidebb kódolt adatot, ha a gyakori betűkhöz rövid kódszót, a ritkákhoz pedig hoszabbakat rendelünk.
A **Huffman-kódolás** egy betűnkénti optimális kódolás, azaz az ilyen kódolások között szinte a legjobb tömörítés érhető el vele adott adat esetén. Ezt úgy érjük el, hogy a kódhoz tartozó kódfát alulról felfelé építjük az eredeti szöveg karaktereinek gyakorisága alapján.

Bináris ($r = 2$) esetben a következőképpen járunk el:

1. Olvassuk végig a szöveget és határozzuk meg az egyes karakterekhez tartozó gyakoriságokat.
2. Hozzunk létre minden karakterhez egy csúcsot és helyezzük el azokat egy (min) prioritásos sorban a gyakoriság mint kulcs segítségével.
3.
   3.1 Vegyünk ki két csúcsot a prioritásos sorból és hozzunk létre számukra egy szülő csúcsot.
   3.2 A szülő-gyerek éleket címkézzük nullával és eggyel a gyakoriságnak megfelelő sorrendben.
   3.3 Helyezzük el a szülő csúcsot a prioritásos sorba gyerekei gyakoriságának összegét használva kulcsként.
4. Ismételjük meg az előző pontot, ha több mint egy csúcs szerepel a sorban.
5. Olvassuk ki a karakterekhez tartozó kódszavakat a kódfából.
6. Olvassuk végig újra a bemenetet és kódoljuk azt karakterenként.

Megjegyzések

- A Huffman-kód mindig egyértelműen dekódolható (a kódfa segítségével), mivel egy prefix-kód. A **prefix-kód** egy olyan kód, amely esetén a kódszavak halmaza prefixmentes, azaz nincs két olyan kódszó, ami esetén az egyik a másiknak valódi prefixe lenne. Ez a tulajdonság a kódfára azt jelenti, hogy minden kódszóhoz tartozó csúcs levél.
- Általában a Huffman-kódolás nem egyértelmű. Egyrészt ha több azonos gyakoriság van, akkor bármelyiket választva Huffman-kódolást kapunk; másrészt a 0 és 1 szerepe felcserélhető.

Megjegyzések

- Mivel a kódolás miden adathoz különböző, a dekódoló oldalon is ismertnek kell lennie. Ez gyakorlatban azt jelenti, hogy
  - a kódfát vagy kódtáblát is csatolnunk kell a kódolt adathoz (ront a tömörítési arányon), vagy
  - a Huffman-kódot általánosított adathoz készítjük el. Például magyar szöveg kódolásánál a magyar nyelv karaktereinek általános gyakorisága alapján (ált. tömörít, de nem az optimális kód).

Huffman-kódolás szemléltetése

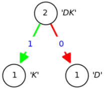
Tekintsük az $S =$ `AZABBRAKADABRAA` szöveget. A gyakoriságok

A	Z	B	R	K	D
7	1	3	2	1	1

Program segítségével a prioritásos sor alapján azonnal építhetnénk a fát, azonban papíron számolva nem tudjuk előre, hogy a fa hogyan fog kinézni, így nem túl sok karakter estén érdemes lehet előtte egy táblázatban az összevonásokat regisztrálni.
A táblázat alapján könnyebben fel lehet rajzolni a fát ábra), de a táblázat nélkül is ugyanazt a kódfát kapnánk.

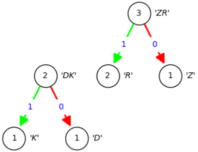
Huffman-kódolás szemléltetése

A	7					
B	3					
R	2					
Z	1					
K	1	2				
D	1					



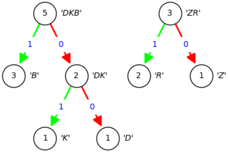
Huffman-kódolás szemléltetése

A	7					
B	3					
R	2		3			
Z	1					
K	1	2				
D	1					



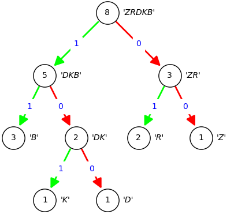
Huffman-kódolás szemléltetése

A	7					
B	3			5		
R	2		3			
Z	1					
K	1	2				
D	1					



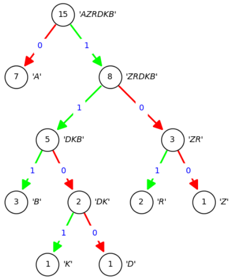
Huffman-kódolás szemléltetése

A	7					
B	3			5	8	
R	2		3			
Z	1					
K	1	2				
D	1					



Huffman-kódolás szemléltetése

A	7					15
B	3			5	8	
R	2		3			
Z	1					
K	1	2				
D	1					



Huffman-kódolás szemléltetése

A karakterek kódjai leolvashatóak a kódfából

Char	Code
Z	100
R	101
K	1101
D	1100
B	111
A	0

Az S = `AZABBRAKADABRAA` kódolt alakja:

$$010001111111010110101100011110100.$$

Ez 33 bitet jelent és így az átlagos szóhossz 2.2. Ha a naiv módszert alkalmaznánk, akkor a kódszavak hossza minimálisan is 3 lenne és a szöveget így legalább 45 bittel ábrázolhatnánk.

Feladatok

1. A mintához hasonlóan végezzük el a Huffman-kódolást egy általunk választott tetszőleges szöveg esetén!
2. Keressünk olyan szöveget, ahol a Huffman-kódolás pontosan annyi bittel történik mint a naiv módszerrel!
3. Írjunk programot (struktogrammot), amely a bemenetként kapott kódolt szöveg és hozzá tartozó Huffman-kód kódfája alapján helyreállítja az eredeti szöveget!
4. Írjuk meg a Huffman-kódolást megvalósító programot. Bemenet egy szöveg, kimenet a kódolt szöveg és a kódfa!
5. Verseny a csoportban: Keressük azt a 10 hosszú szöveget, amelyet a legnagyobb mértékben lehetett tömöríteni a minimális szóhosszt használó naiv módszerhez képest.

Szótárkód, LZW

A betűnkénti kódolás tömörítési tulajdonsága ismert és elmondható, hogy hatékonysága korlátozott is. Könnyen tudunk olyan adatot adni, amit sokkal tömörebben formában lehet reprezentálni, ha a kódolás nem karakterenként történik. Ezt az észrevételt használják ki a **szótárkódok** úgy, hogy egy kódszó nem csak egy karakter képe lehet, hanem egy szóé is.

Az **LZW kódolás** egy kezdeti kódtáblát bővít lépésről-lépésre úgy, hogy egyre hosszabb már „látott" szavakhoz rendel új kódszót. Ezzel a valós adatok azt a tulajdonságát használjuk ki, hogy abban relatív rövid részek sűrűn ismétlődnek. Például gondoljunk élő nyelvben milyen sűrűn fordulnak elő névelők, kötőszavak, stb.

LZW működése és szemléltetése

Legyen $S = \texttt{ABABABAACAACCBBAAAAAAAAA}$ a példaszövegünk és így a kezdeti kódtáblánk (a szöveg karakterei alapján):

Char	Code
A	1
B	2
C	3

A bemenetet pontosan egyszer fogjuk olvasni a kódolás során úgy, hogy mindig a már ismert (kóddal rendelkező) leghosszabb következő szót keressük. Ha megtaláltuk, akkor egyrészt

- kiírjuk a talált szó kódját a kimenetre (eredmény), másrészt
- bővítjük a kódszavak halmazát az αc szó képével, ahol az α a talált szó és c a következő karakter.

LZW szemléltetése

Például az S esetén kezdetben a leghosszabb „ismert" szó az `A`, ennek kódja 1 és az új kóddal rendelkező szó `AB` a 4 kóddal.
A kódolás folyamán ezt az lépést ismételjük, amíg a szöveg végére nem érünk.
Egy szemléltetése a teljes kódolásnak a következő táblázat, ahol az egyes lépések soronként szerepelnek, a kimenetet a Code oszlop tartalmazza soronként és az új kód mindig a megfelelő sor második és harmadik oszlopban szereplő értékek konkatenációjához tartozik.

LZW szemléltetése

Code	Actual word	Next char	New code
1	A	B	4
2	B	A	5
4	AB	A	6
6	ABA	A	7
1	A	C	8
3	C	A	9
1	A	A	10
8	AC	C	11
3	C	B	12
2	B	B	13
5	BA	A	14
10	AA	A	15
15	AAA	A	16
15	AAA	-	-

LZW szemléltetése

A kódolt üzenet tehát

$$[1, 2, 4, 6, 1, 3, 1, 8, 3, 2, 5, 10, 15, 15]$$

LZW szemléltetése – dekódolás

A dekódoláshoz ugyanazt a kezdeti, csak a karakterek kódját tartalmazó kódtáblát használjuk és szemléltethetjük ugyanazzal a táblázattal. Az első és utolsó oszlopot teljes egészében ki tudjuk tölteni, majd soronként haladunk. Jelen esetben az első két sorhoz tartozó aktuális szó nyilván ismert.

Code	Actual word	Next char	New code
1	A	?	4
2	B	?	5
4	?	?	6
6	?	?	7
⋮	⋮	⋮	⋮

LZW szemléltetése – dekódolás

Mivel a második sor szavának első karaktere éppen az első sorban szereplő következő karakter, így az ismert.

Code	Actual word	Next char	New code
1	A	B	4
2	B	?	5
4	?	?	6
6	?	?	7
⋮	⋮	⋮	⋮

LZW szemléltetése – dekódolás

Most már ismerjük mit kódolt az első sor új kódja, így folytathatjuk a kitöltést:

Code	Actual word	Next char	New code
1	A	B	4
2	B	A	5
4	AB	?	6
6	?	?	7
⋮	⋮	⋮	⋮

LZW szemléltetése – dekódolás

Itt viszont látszólag elakadunk. Eddig mindig ismert volt a kódszóhoz tartozó szó mielőtt használni szerettük volna. Azonban most azt a kódszót szeretnénk használni, aminek visszaállításához szükség lenne annak inverz képére. Nyilván amíg nem ismert a kódhoz tartozó szó addig nem is használhatjuk. Szerencsére csak az első karakterére van szükség, ami ismert.

Code	Actual word	Next char	New code
1	A	B	4
2	B	A	5
4	AB	A	6
6	?	?	7
⋮	⋮	⋮	⋮

LZW szemléltetése – dekódolás

A dekódolás ez alapján már egyszerűen befejezhető, a táblázat meg fog egyezni a kódolásnál már bemutatottal és a dekódolt szöveg kiolvasható a második oszlopból.

Megjegyzések

- Fontos észrevenni, hogy egy hosszú szöveg esetén az ismertetett eljárás annyi új kódszót is bevezethet, hogy az azok közötti keresés összemérhető lenne a teljes szöveg végigolvasásával. Természetesen ezt nem szeretnénk, ezért gyakorlatban korlátozzuk a kódszavak halmazát. Ez történhet például
  - a kódszavak számának korlátozásával;
  - a kódszavakhoz tartozó szavak hosszának korlátozásával;
  - azzal, hogy a bemenet csak egy kezdőszeletén építjük a szótárat, utána csak kódolunk.

Megjegyzések

- Mivel a Huffman-kódolás csak a betűnkénti kódolások között optimális az LZW eljárás könnyen eredményezhet rövidebb kódolt alakot, annak ellenére is, hogy az itt használt kódszavakat még binárisan kódolni kell.
- Az LZW eljárás egyszerűnek nevezhető (összehasonlítva például a Huffman kódolással) és mivel csak egyszer kell olvasni a bemenetet, hatékony is (amennyiben a kódszavak tárolása hatékony).

Feladatok

1. Szemléltessük a `ABCABCABCAAABBCCAABABA` kódolását.
2. Dekódoljuk az `1,3,4,5,6` üzenetet, ha a kezdeti tábla $A \to 1$ és $B \to 2$.
3. Adjunk meg olyan 20 hosszú három karaktert tartalmazó (legalább egyszer mindegyiket) szöveget, ami esetén a kódolt (LZW) szöveg pontosan 13 hosszú.
4. Keressünk olyan szöveget, aminek LZW kódolása rövidebb eredményt ad a Huffman-kódolással összehasonlítva.