

# 控制理论笔记

经典控制理论与现代控制理论

学习笔记

2025 年 11 月 10 日

## 目录

<b>I</b>	<b>经典控制理论</b>	<b>12</b>
<b>1</b>	<b>自动控制系统的一般概念</b>	<b>12</b>
1.1	控制系统的基本组成 . . . . .	12
1.2	控制系统的基本要求 . . . . .	12
<b>2</b>	<b>自动控制系统的分类</b>	<b>12</b>
2.1	按输入信号分类 . . . . .	12
2.2	按系统结构分类 . . . . .	12
2.3	按系统特性分类 . . . . .	13
<b>3</b>	<b>拉普拉斯变换及其性质</b>	<b>13</b>
3.1	拉普拉斯变换定义 . . . . .	13
3.2	基本函数的拉普拉斯变换 . . . . .	13
3.3	拉普拉斯变换的性质 . . . . .	13
<b>4</b>	<b>微分方程和传递函数</b>	<b>14</b>
4.1	传递函数定义 . . . . .	14
4.2	传递函数的性质 . . . . .	14
<b>5</b>	<b>结构图与信号流图</b>	<b>14</b>
5.1	结构图的基本元件 . . . . .	14
5.2	结构图的等效变换 . . . . .	15
5.3	信号流图 . . . . .	15
5.4	具体示例 . . . . .	16



<b>6 梅森公式求传递函数</b>	<b>16</b>
6.1 梅森增益公式 . . . . .	16
6.2 特征式的计算 . . . . .	16
<b>7 时域性能指标</b>	<b>17</b>
7.1 典型输入信号 . . . . .	17
7.2 时域性能指标 . . . . .	17
<b>8 一阶系统时域分析</b>	<b>17</b>
8.1 一阶系统的传递函数 . . . . .	17
8.2 一阶系统的单位阶跃响应 . . . . .	17
8.3 一阶系统的性能指标 . . . . .	17
<b>9 二阶系统时域分析</b>	<b>18</b>
9.1 二阶系统的标准形式 . . . . .	18
9.2 二阶系统的特征根 . . . . .	18
9.3 二阶系统的分类 . . . . .	18
9.4 欠阻尼二阶系统的性能指标 . . . . .	18
9.5 欠阻尼二阶系统的 s 平面分析 . . . . .	19
9.5.1 抽象参数表示 . . . . .	19
9.5.2 具体示例: $G(s) = \frac{25}{s^2 + 5s + 25}$ . . . . .	20
<b>10 稳定性分析及劳斯稳定判据</b>	<b>20</b>
10.1 系统稳定性的定义 . . . . .	20
10.2 劳斯稳定判据 . . . . .	20
10.3 特殊情况的处理 . . . . .	21
10.3.1 情况一: 第一列出现零元素 . . . . .	21
10.3.2 情况二: 某一行全为零 . . . . .	21
<b>11 线性定常系统的稳态误差计算</b>	<b>22</b>
11.1 误差信号和误差传递函数 . . . . .	22
11.2 系统类型 . . . . .	22
11.3 稳态误差系数 . . . . .	22
11.4 稳态误差 . . . . .	22
<b>12 根轨迹基本概念及其绘制 (180°)</b>	<b>23</b>
12.1 根轨迹的定义 . . . . .	23
12.2 根轨迹方程 . . . . .	23
12.3 绘制根轨迹的基本法则 . . . . .	23



12.4 绘制根轨迹 . . . . .	24
12.4.1 例 1: 二阶系统的根轨迹 . . . . .	24
12.4.2 例 2: 三阶系统的根轨迹 . . . . .	25
12.5 绘制根轨迹的步骤总结 . . . . .	25
<b>13 <math>0^\circ</math> 根轨迹</b>	<b>26</b>
13.1 $0^\circ$ 根轨迹的相角条件 . . . . .	26
13.2 $0^\circ$ 根轨迹与 $180^\circ$ 根轨迹的区别 . . . . .	26
<b>14 参数根轨迹</b>	<b>26</b>
14.1 参数根轨迹的定义 . . . . .	26
14.2 参数根轨迹的绘制方法 . . . . .	26
<b>15 频率特性基本概念</b>	<b>27</b>
15.1 频率特性的定义 . . . . .	27
15.2 频率特性的物理意义 . . . . .	27
15.3 频率特性的计算 . . . . .	27
15.3.1 计算步骤 . . . . .	27
15.3.2 例题 . . . . .	28
<b>16 奈奎斯特图绘制</b>	<b>29</b>
16.1 奈奎斯特图的基本概念 . . . . .	29
16.1.1 什么是奈奎斯特图 . . . . .	29
16.1.2 奈奎斯特图的对称性 . . . . .	29
16.2 奈奎斯特图的绘制步骤 . . . . .	29
16.2.1 最小相位系统的绘制流程 . . . . .	29
16.2.2 系统类型对起始点的影响 . . . . .	30
16.2.3 I 型系统的渐近线计算 . . . . .	30
16.3 典型环节的奈奎斯特图 . . . . .	31
16.3.1 积分环节 . . . . .	31
16.3.2 惯性环节 . . . . .	31
16.3.3 微分环节 . . . . .	31
16.3.4 比例环节 . . . . .	32
16.3.5 二阶振荡环节 . . . . .	32
16.4 0 型系统的奈奎斯特图 . . . . .	33
16.4.1 绘制流程 . . . . .	33
16.4.2 例题 . . . . .	33
16.5 I 型系统的奈奎斯特图 . . . . .	34
16.5.1 绘制流程 . . . . .	34



16.5.2 例题 . . . . .	34
16.6 非最小相位系统的奈奎斯特图 . . . . .	35
16.6.1 非最小相位系统的特点 . . . . .	35
16.6.2 相角的特殊处理 . . . . .	35
16.6.3 例题 . . . . .	35
16.7 奈奎斯特稳定性判据 . . . . .	36
16.7.1 基本概念 . . . . .	36
16.7.2 奈奎斯特稳定性判据 . . . . .	36
16.7.3 稳定裕度 . . . . .	37
16.7.4 绘制方法 . . . . .	37
<b>17 伯德图绘制</b>	<b>37</b>
17.1 伯德图的定义 . . . . .	37
17.2 伯德图的基本概念 . . . . .	38
17.2.1 对数幅频图的转折频率 . . . . .	38
17.2.2 系统型别的判断 . . . . .	39
17.2.3 低频段渐近线的确定 . . . . .	41
17.2.4 例题：伯德图绘制示例 . . . . .	42
17.3 典型环节的伯德图 . . . . .	42
17.3.1 比例环节 $K$ . . . . .	42
17.3.2 积分环节 $\frac{1}{s}$ . . . . .	43
17.3.3 微分环节 $s$ . . . . .	44
17.3.4 惯性环节 $\frac{1}{1+Ts}$ . . . . .	44
17.3.5 一阶微分环节 $1+Ts$ . . . . .	45
17.3.6 振荡环节 $\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$ . . . . .	45
17.4 伯德图的绘制方法 . . . . .	48
17.4.1 幅值近似原则（关键技巧）. . . . .	48
17.4.2 伯德图绘制六步法 . . . . .	49
17.4.3 转折频率处的修正 . . . . .	50
17.4.4 六步法综合例题 . . . . .	51
17.4.5 剪切频率的计算 . . . . .	52
17.4.6 绘图示例 . . . . .	53
17.4.7 快速参考 . . . . .	55
17.5 伯德图的应用 . . . . .	57
17.5.1 由伯德图确定传递函数 . . . . .	57
17.5.2 稳定性分析 . . . . .	60
17.5.3 性能指标估算 . . . . .	61



<b>18 控制器设计与校正</b>	<b>63</b>
18.1 概述	63
18.1.1 超前校正	63
18.1.2 滞后校正	65
18.1.3 超前-滞后综合校正	67
<b>II 现代控制理论</b>	<b>69</b>
<b>19 状态空间表达式及其建立</b>	<b>69</b>
19.1 状态空间的基本概念	70
19.1.1 状态的定义与物理意义	70
19.1.2 状态的物理意义：能量存储的视角	71
19.2 状态空间表达式的标准形式	72
19.2.1 线性定常系统的状态空间表达式	72
19.2.2 系统矩阵的作用分解	73
19.3 状态空间表达式的建立方法	73
19.3.1 建立步骤	73
19.3.2 范例 1：RLC 串联电路	74
19.3.3 范例 2：质量-弹簧-阻尼系统	75
19.4 状态选择的非唯一性	76
19.4.1 核心问题	76
19.4.2 范例：同一 RLC 电路的不同状态选择	77
<b>20 状态空间表达式求传递函数</b>	<b>80</b>
20.1 从状态空间到传递函数	81
20.1.1 基本推导	81
20.1.2 公式解读	81
20.1.3 计算方法	81
20.2 单输入单输出（SISO）系统	82
20.2.1 标准形式	82
20.2.2 范例 1：二阶系统	82
20.3 多输入多输出（MIMO）系统	83
20.3.1 传递函数矩阵	83
20.3.2 范例 2：MIMO 系统	83
20.4 MATLAB 实现	84



<b>21 线性变换</b>	<b>87</b>
21.1 线性变换的定义	88
21.2 变换后的状态方程	88
21.3 相似变换的性质	89
21.4 如何选择变换矩阵 $P$ ?	89
21.5 例题 1: 对角化变换	90
21.6 例题 2: 传递函数不变性验证	91
21.7 MATLAB 实现	91
<b>22 线性控制系统状态空间表达式的求解</b>	<b>93</b>
22.1 状态转移矩阵	94
22.2 方法 1: 拉普拉斯变换法	95
22.3 方法 2: 矩阵指数级数展开法	97
22.4 方法 3: 对角化法 (最常用)	98
22.5 非齐次状态方程的完全解	99
22.6 三种方法的对比	99
22.7 MATLAB 实现	99
<b>23 线性控制系统的能控性和能观测性</b>	<b>103</b>
23.1 能控性 (Controllability)	104
23.1.1 能控性定义	104
23.1.2 能控性判据	105
23.2 能观测性 (Observability)	105
23.2.1 能观测性定义	106
23.2.2 能观测性判据	106
23.3 对偶性原理	107
23.4 能控性和能观测性的几何理解	107
23.4.1 能控性的几何意义	107
23.4.2 能观测性的几何意义	108
23.4.3 能控性与能观测性: 对比与联系	108
23.5 实际应用范例	109
23.5.1 范例 1: 能控性和能观测性判断	109
23.5.2 范例 2: 不能控系统的分析	110
<b>24 能控、能观标准型及其实现</b>	<b>116</b>
24.1 能控标准型	117
24.2 能观标准型	118
24.3 对角标准型	118



24.4 例题 1: 转换为能控标准型 . . . . .	119
24.5 例题 2: 三种标准型的对比 . . . . .	120
24.6 MATLAB 实现 . . . . .	121
<b>25 系统的结构分解——能控、能观性分解</b>	<b>124</b>
25.1 术语问题: 能观/能控 vs 可观/可控 . . . . .	125
25.1.1 术语等价性 . . . . .	125
25.2 系统的结构分解 . . . . .	125
25.3 卡尔曼分解 . . . . .	125
25.3.1 标准分解形式 . . . . .	125
25.3.2 物理意义解读 . . . . .	126
25.3.3 四子系统之间的信息流 . . . . .	127
25.4 能观性分解与能控性分解对比 . . . . .	127
25.4.1 统一的解题流程 (以能控分解为例) . . . . .	128
25.5 综合范例 1: 能观性结构分解 . . . . .	130
25.5.1 题目 . . . . .	130
25.5.2 解答 . . . . .	130
25.6 综合范例 2: 能控性结构分解 . . . . .	131
25.6.1 题目 . . . . .	131
25.6.2 解答 . . . . .	132
<b>26 约当型实现</b>	<b>137</b>
26.1 约当块的定义 . . . . .	138
26.2 约当标准型 . . . . .	139
26.3 广义特征向量 . . . . .	139
26.4 例题 1: 简单特征值 (可对角化) . . . . .	140
26.5 例题 2: 重特征值 (不可对角化) . . . . .	140
26.6 约当型与系统动态 . . . . .	142
26.7 MATLAB 实现 . . . . .	142
<b>27 稳定性与李雅普诺夫方法</b>	<b>145</b>
27.1 李雅普诺夫稳定性定义 . . . . .	146
27.2 李雅普诺夫第一方法 (线性化方法) . . . . .	146
27.2.1 基本原理 . . . . .	146
27.3 李雅普诺夫第二方法 (直接方法) . . . . .	147
27.4 李雅普诺夫方法的核心思想 . . . . .	147
27.4.1 直观理解 . . . . .	148
27.4.2 线性系统的二次型李雅普诺夫函数 . . . . .	148



27.4.3 判据总结	148
27.5 线性系统的李雅普诺夫方程	149
27.6 局部稳定性 vs 全局稳定性	149
27.6.1 核心概念辨析	149
27.6.2 全局稳定性的判断条件	150
27.6.3 判断示例：为什么局部 全局	150
27.6.4 关键点总结	151
<b>28 李雅普诺夫稳定性判断——范例</b>	<b>152</b>
28.1 范例 1：临界稳定系统的李雅普诺夫分析	152
28.1.1 题目	152
28.1.2 解答	152
28.1.3 结论汇总	154
28.2 范例 2：非线性系统的线性化分析	154
28.2.1 题目	154
28.2.2 解答思路	154
28.2.3 方法对比与选择	157
28.3 离散系统的李雅普诺夫稳定性分析	158
28.3.1 离散系统稳定性判据的关键差异	158
28.3.2 离散李雅普诺夫方程	159
28.3.3 完整例题：离散系统稳定性分析	161
28.3.4 方法对比与选择建议	162
28.3.5 与连续系统的联系：采样映射关系	162
28.3.6 本节总结	164
<b>29 极点配置——状态反馈</b>	<b>165</b>
29.1 状态反馈	166
29.1.1 状态反馈的基本思想	167
29.1.2 状态反馈控制律	168
29.1.3 闭环系统	168
29.2 极点配置定理	170
29.2.1 定理陈述	170
29.2.2 定理的深刻意义	170
29.2.3 设计步骤概览	171
29.3 极点配置的方法	172
29.3.1 方法概览	172
29.3.2 方法 1：直接方法	173
29.3.3 方法 2：变换方法	174



29.3.4	方法 3: 阿克曼公式 (Ackermann's Formula)	175
29.3.5	三种方法的对比	176
29.4	极点选择的实用准则	176
29.4.1	性能指标与极点位置的关系	176
29.4.2	极点配置的实用原则	178
29.4.3	经验法则	180
29.4.4	极点配置的常见错误	180
29.5	实际应用范例	181
29.5.1	范例: 二阶系统的极点配置	181
<b>30</b>	<b>状态观测器</b>	<b>186</b>
30.1	状态观测器的概念	189
30.1.1	问题的提出	189
30.1.2	观测器的基本结构	190
30.1.3	观测器 vs 传感器	190
30.2	全维状态观测器	191
30.2.1	观测器方程	191
30.2.2	误差动态分析	192
30.2.3	观测器收敛条件	192
30.2.4	观测器增益的物理意义	193
30.2.5	观测器设计定理	194
30.3	观测器的设计	194
30.3.1	设计步骤	195
30.3.2	观测器极点选择准则	195
30.3.3	对偶性的具体应用	197
30.3.4	观测器增益计算范例: 倒立摆系统	198
30.4	降维状态观测器	202
30.4.1	问题的提出	202
30.4.2	状态分块与系统重构	203
30.4.3	降维观测器设计方法	204
30.4.4	降维观测器设计步骤	207
30.4.5	降维观测器设计范例	207
30.4.6	降维 vs 全维观测器: 何时使用?	211
30.5	分离定理	212
30.5.1	基于观测器的状态反馈	212
30.5.2	分离定理 (Separation Principle)	213
30.5.3	分离定理的证明 (思路)	214
30.5.4	分离定理的实际意义	214



30.5.5	完整系统的设计流程	215
30.5.6	分离定理的局限性	216
30.6	综合设计范例：直流电机位置控制	217
30.6.1	问题描述与系统建模	217
30.6.2	系统分析与性能指标	218
30.6.3	控制器设计（基于分离定理的第一步）	219
30.6.4	观测器设计（基于分离定理的第二步）	219
30.6.5	组合系统与最终实现	220
30.6.6	系统整体特性分析	221
30.6.7	设计验证与性能评估	222
30.6.8	实际考虑与改进方向	223

### III 高级主题 232

#### 31 非线性系统 232

31.1	非线性系统概述	232
31.1.1	非线性系统的定义	232
31.1.2	非线性系统的特点	233
31.2	相平面法	234
31.2.1	相平面与相轨迹	234
31.2.2	等倾线法	234
31.3	描述函数法	235
31.3.1	描述函数的定义	235
31.3.2	稳定性分析	236
31.4	Lyapunov 稳定性理论（非线性系统）	237
31.4.1	Lyapunov 稳定性定义	238
31.4.2	Lyapunov 定理	238
31.4.3	范例 2：含高阶非线性项的李雅普诺夫分析	239
31.5	工程中的典型非线性现象	241
31.5.1	摩擦非线性及其影响	241
31.5.2	饱和和非线性的实际影响	242
31.5.3	死区与间隙的影响	243
31.6	总结	245
31.6.1	非线性分析方法对比	245
31.6.2	线性化的适用范围	245
31.6.3	常见误区与正确做法	246
31.6.4	学习要点检查清单	247



31.6.5 扩展阅读与后续学习 . . . . .	247
<b>32 离散系统</b>	<b>248</b>
32.1 离散系统概述 . . . . .	250
32.1.1 离散系统的定义 . . . . .	250
32.1.2 数字控制系统的基本结构 . . . . .	251
32.2 Z 变换 . . . . .	252
32.2.1 Z 变换的定义 . . . . .	252
32.2.2 Z 变换与拉氏变换的关系 . . . . .	252
32.2.3 常用序列的 Z 变换 . . . . .	253
32.2.4 Z 变换的性质 . . . . .	253
32.3 离散系统的建模与分析 . . . . .	253
32.3.1 脉冲传递函数与零阶保持器 . . . . .	254
32.3.2 稳定性分析 . . . . .	256
32.3.3 劳斯判据的应用（双线性变换）. . . . .	257
32.3.4 Jury 稳定性判据 . . . . .	257
32.3.5 动态性能分析 . . . . .	258
32.3.6 瞬态性能指标 . . . . .	258
32.4 数字控制器的设计与实现 . . . . .	259
32.4.1 设计方法一：数字 PID 控制器 . . . . .	260
32.4.2 数字 PID 的改进 . . . . .	260
32.4.3 设计方法二：最少拍控制 . . . . .	261
32.4.4 控制器的软件实现：从传递函数到代码 . . . . .	261



## Part I

# 经典控制理论

## 1 自动控制系统的一般概念

### 1.1 控制系统的基本组成

控制系统一般由以下几个基本组成部分构成：

- 被控对象（控制对象）：需要被控制的系统或装置
- 控制器：对输入信号进行处理，产生控制信号
- 传感器：检测被控量的实际值
- 执行器：接收控制信号，对被控对象施加控制作用

### 1.2 控制系统的基本要求

1. 稳定性：系统在扰动作用下能够恢复到平衡状态
2. 准确性：系统的稳态误差要小
3. 快速性：系统的动态响应要快

## 2 自动控制系统的分类

### 2.1 按输入信号分类

- 恒值控制系统：输入信号为常值
- 随动控制系统：输入信号为时变信号
- 程序控制系统：输入信号按预定程序变化

### 2.2 按系统结构分类

- 开环控制系统：控制装置与被控对象之间没有反馈回路
- 闭环控制系统：控制装置与被控对象之间存在反馈回路



## 2.3 按系统特性分类

- 线性系统与非线性系统
- 定常系统与时变系统
- 连续系统与离散系统
- 单变量系统与多变量系统

## 3 拉普拉斯变换及其性质

### 3.1 拉普拉斯变换定义

函数  $f(t)$  的拉普拉斯变换定义为：

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

其中  $s = \sigma + j\omega$  为复变量。

### 3.2 基本函数的拉普拉斯变换

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1 \quad (1)$$

$$\mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{s} \quad (2)$$

$$\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2} \quad (3)$$

$$\mathcal{L}[e^{-at}] = \frac{1}{s+a} \quad (4)$$

$$\mathcal{L}[\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (5)$$

$$\mathcal{L}[\cos(\omega t)] = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad (6)$$

### 3.3 拉普拉斯变换的性质

- 线性性质： $\mathcal{L}[af_1(t) + bf_2(t)] = aF_1(s) + bF_2(s)$
- 时移性质： $\mathcal{L}[f(t - \tau)] = e^{-s\tau} F(s)$
- 频移性质： $\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = F(s + a)$
- 微分性质： $\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0^-)$



- 积分性质:  $\mathcal{L}[\int_0^t f(\tau)d\tau] = \frac{F(s)}{s}$
- 初值定理:  $f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$
- 终值定理:  $f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$  (当极限存在时)

## 4 微分方程和传递函数

### 4.1 传递函数定义

在零初始条件下, 线性定常系统输出量的拉普拉斯变换与输入量的拉普拉斯变换之比称为传递函数:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{a_ns^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}$$

### 4.2 传递函数的性质

- 传递函数是复变量  $s$  的有理真分式
- 传递函数的系数完全由系统的结构和参数决定
- 传递函数与输入信号无关
- 传递函数可以表征系统的动态特性

## 5 结构图与信号流程图

### 5.1 结构图的基本元件

- 方块: 表示系统或环节的传递函数
- 信号线: 表示信号的传输方向
- 相加点: 表示信号的相加或相减
- 分支点: 表示信号的分叉

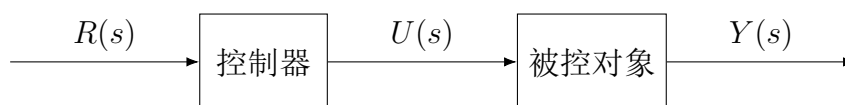


图 1: 开环控制系统示例



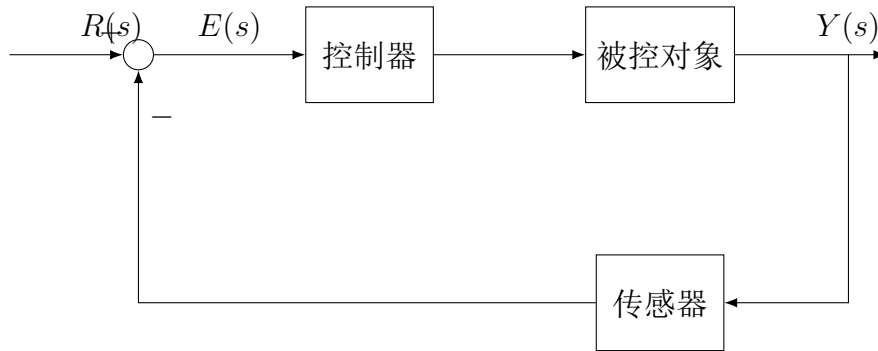


图 2: 闭环（反馈）控制系统示例

## 5.2 结构图的等效变换

- 串联:  $G(s) = G_1(s)G_2(s)$
- 并联:  $G(s) = G_1(s) + G_2(s)$
- 反馈:  $G(s) = \frac{G_1(s)}{1 \pm G_1(s)H(s)}$

## 5.3 信号流图

信号流图是用有向线段和节点组成的图形，用来表示系统各变量之间的关系。

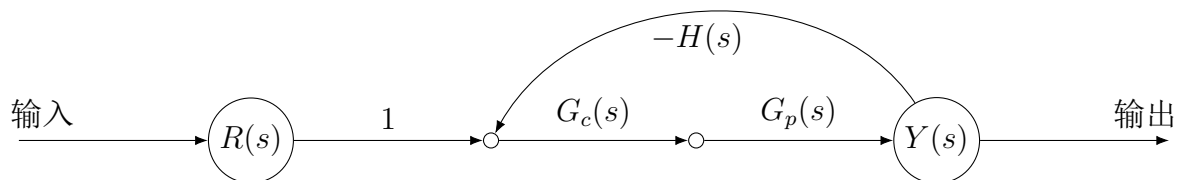


图 3: 包含控制器和传感器的信号流图示例



## 5.4 具体示例

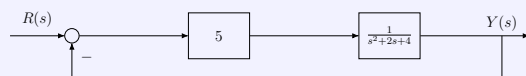
### 具体示例

#### 结构图示例

系统开环传递函数为：

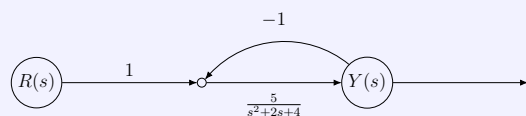
$$G(s) = \frac{5}{s^2 + 2s + 4}$$

反馈为单位负反馈  $H(s) = 1$ 。



#### 信号流图示例

与上方系统等效的信号流图。前向通路增益为  $G(s)$ ，反馈回路增益为  $-H(s)$ 。



$$G(s) = \frac{5}{s^2 + 2s + 4} \quad H(s) = 1$$

## 6 梅森公式求传递函数

### 6.1 梅森增益公式

$$G(s) = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^N P_k \Delta_k$$

其中：

- $P_k$ : 第  $k$  条前向通路的增益
- $\Delta$ : 信号流图的特征式
- $\Delta_k$ : 在信号流图中划去第  $k$  条前向通路后的特征式

### 6.2 特征式的计算

$$\Delta = 1 - \sum L_i + \sum L_i L_j - \sum L_i L_j L_k + \cdots$$

其中  $L_i$  为各个回路的增益，相互接触的回路不能同时出现在同一项中。



## 7 时域性能指标

### 7.1 典型输入信号

- 阶跃输入:  $r(t) = A \cdot 1(t)$
- 斜坡输入:  $r(t) = At$
- 抛物线输入:  $r(t) = \frac{1}{2}At^2$
- 脉冲输入:  $r(t) = A\delta(t)$

### 7.2 时域性能指标

对于单位阶跃响应, 主要性能指标包括:

- 上升时间  $t_r$ : 响应从终值的 10
- 峰值时间  $t_p$ : 响应达到第一个峰值的时间
- 调节时间  $t_s$ : 响应进入并保持在终值  $\pm 2$
- 超调量  $\sigma\% = \frac{h(t_p) - h(\infty)}{h(\infty)} \times 100\%$

## 8 一阶系统时域分析

### 8.1 一阶系统的传递函数

$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1}$$

其中  $K$  为增益,  $T$  为时间常数。

### 8.2 一阶系统的单位阶跃响应

$$h(t) = K(1 - e^{-t/T})$$

### 8.3 一阶系统的性能指标

- 调节时间:  $t_s = 3T$  (2%误差带) 或  $t_s = 4T$  (5%误差带)
- 无超调
- 上升时间:  $t_r = 2.2T$



## 9 二阶系统时域分析

### 9.1 二阶系统的标准形式

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

其中：

- $\omega_n$ ：无阻尼自然频率
- $\zeta$ ：阻尼比

### 9.2 二阶系统的特征根

特征方程：  $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$

特征根：  $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$

### 9.3 二阶系统的分类

- $\zeta > 1$ ：过阻尼系统
- $\zeta = 1$ ：临界阻尼系统
- $0 < \zeta < 1$ ：欠阻尼系统
- $\zeta = 0$ ：无阻尼系统
- $\zeta < 0$ ：负阻尼系统（不稳定）

### 9.4 欠阻尼二阶系统的性能指标

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (7)$$

$$\sigma_{\%} = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\% \quad (8)$$

$$t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n} \text{ (2\%误差带)} \quad (9)$$

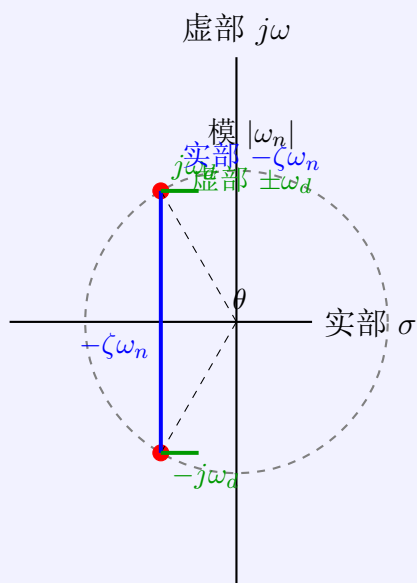


## 9.5 欠阻尼二阶系统的 s 平面分析

### 9.5.1 抽象参数表示

特征根为  $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ ，在 s 平面上的几何意义如下：

欠阻尼二阶系统的特征根分布



参数几何意义：

- 模  $|\omega_n| \Rightarrow$  原点到特征根距离  $\Rightarrow$  自然频率大小
- 实部  $-\zeta\omega_n \Rightarrow$  衰减系数  $\Rightarrow$  衰减快慢
- 虚部  $\pm\omega_d \Rightarrow$  振荡频率  $\Rightarrow$  振荡速度
- 角度  $\theta \Rightarrow \cos \theta = \zeta \Rightarrow$  由阻尼比确定



### 9.5.2 具体示例: $G(s) = \frac{25}{s^2 + 5s + 25}$

具体例: 欠阻尼二阶系统  $G(s) = \frac{25}{s^2 + 5s + 25}$

参数识别:

$\omega_n = 5 \text{ rad/s}$  (自然频率)

$\zeta = 0.5$  (阻尼比)

$\omega_d = 4.33 \text{ rad/s}$  (振荡频率)

性能指标:

$t_p = 0.725 \text{ s}$  (峰值时刻)

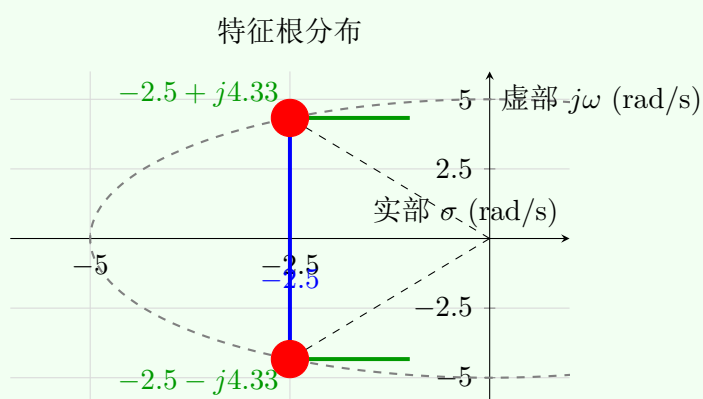
$\sigma\% = 16.3\%$  (超调量)

$t_s = 1.2 \text{ s}$  (稳定时间)

特征根位置:

$s_{1,2} = -2.5 \pm j4.33$

-2.5: 衰减速率    4.33: 振荡速度



## 10 稳定性分析及劳斯稳定判据

### 10.1 系统稳定性的定义

线性系统稳定的充分必要条件是: 系统特征方程的所有根都具有负实部, 即所有特征根都位于  $s$  平面的左半部分。

### 10.2 劳斯稳定判据

对于特征方程:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

构造劳斯表:

$s^n$	$a_n$	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$	$\cdots$
$s^{n-1}$	$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	$a_{n-5}$	$\cdots$
$s^{n-2}$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

其中:  $b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$

劳斯稳定判据: 系统稳定的充分必要条件是劳斯表第一列的元素全部为正。



## 10.3 特殊情况的处理

- 第一列出现零元素：用小正数  $\varepsilon$  代替
- 某一行全为零：用前一行的辅助方程的导数代替

### 10.3.1 情况一：第一列出现零元素

当劳斯表第一列的某个元素为零，但该行其他元素不全为零时，用一个很小的正数  $\varepsilon$  代替该零元素，然后继续计算。最后根据  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  的趋势来判断符号。

示例：系统的特征方程为  $s^4 + s^3 + 2s^2 + 2s + 3 = 0$ 。

劳斯表：

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 2 & 3 \\ s^3 & 1 & 2 & \\ s^2 & 0 \rightarrow \varepsilon & 3 & \\ s^1 & \frac{2\varepsilon-3}{\varepsilon} & & \\ s^0 & 3 & & \end{array}$$

当  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  时，第一列的元素为  $1, 1, \varepsilon, \frac{2\varepsilon-3}{\varepsilon} (\approx -\infty), 3$ 。

由于第一列出现了两次符号变化（从  $\varepsilon$  到负无穷，再从负无穷到 3），因此系统不稳定，且在右半  $s$  平面有两个根。

### 10.3.2 情况二：某一行全为零

当劳斯表中出现某一行所有元素都为零时，表明系统存在关于原点对称的根（如纯虚根、大小相等符号相反的实根等）。

处理方法是：

1. 利用全零行的上一行构造辅助多项式  $A(s)$ 。
2. 对辅助多项式求导， $\frac{dA(s)}{ds}$ 。
3. 用求导后多项式的系数替换全零行，继续计算。

示例：系统的特征方程为  $s^3 + s^2 + s + 1 = 0$ 。

劳斯表：

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 1 \\ s^2 & 1 & 1 \\ s^1 & 0 & 0 \end{array}$$

$s^1$  行为全零行。利用其上一行（ $s^2$  行）构造辅助多项式：

$$A(s) = 1 \cdot s^2 + 1 \cdot s^0 = s^2 + 1$$



求导：

$$\frac{dA(s)}{ds} = 2s$$

用导数的系数  $[2, 0]$  替换  $s^1$  行，得到新的劳斯表：

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 1 \\ s^2 & 1 & 1 \\ s^1 & 2 & 0 \\ s^0 & 1 & \end{array}$$

第一列元素  $[1, 1, 2, 1]$  全部为正，说明在劳斯表剩下的部分没有符号变化，系统没有位于右半平面的根。全零行的出现说明系统存在关于原点对称的根，这些根由辅助方程  $A(s) = s^2 + 1 = 0$  给出，即  $s = \pm j$ 。因此，系统是临界稳定的。

## 11 线性定常系统的稳态误差计算

### 11.1 误差信号和误差传递函数

误差信号： $E(s) = R(s) - H(s)Y(s)$

误差传递函数： $\Phi_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+G(s)H(s)}$

### 11.2 系统类型

根据开环传递函数  $G(s)H(s)$  在原点处的极点个数确定系统类型：

$$G(s)H(s) = \frac{K \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{s^\nu \prod_{j=1}^n (s - p_j)}$$

$\nu$  为系统的型别。

### 11.3 稳态误差系数

- 位置误差系数： $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)$
- 速度误差系数： $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G(s)H(s)$
- 加速度误差系数： $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \cdot G(s)H(s)$

### 11.4 稳态误差

- 单位阶跃输入： $e_{ss} = \frac{1}{1+K_p}$
- 单位斜坡输入： $e_{ss} = \frac{1}{K_v}$
- 单位抛物线输入： $e_{ss} = \frac{1}{K_a}$



## 12 根轨迹基本概念及其绘制 (180°)

### 12.1 根轨迹的定义

当系统中某一参数从零变化到无穷大时，闭环系统特征方程的根在  $s$  平面上的运动轨迹称为根轨迹。

### 12.2 根轨迹方程

闭环特征方程： $1 + KG(s)H(s) = 0$

根轨迹方程的两个条件：

- 幅值条件： $|G(s)H(s)| = \frac{1}{K}$
- 相角条件： $\angle G(s)H(s) = \pm 180^\circ(2k + 1), k = 0, 1, 2, \dots$

### 12.3 绘制根轨迹的基本法则

1. 根轨迹的分支数等于开环极点数  $n$  和开环零点数  $m$  中的较大者
2. 根轨迹起始于开环极点，终止于开环零点（有限零点或无限远零点）
3. 根轨迹关于实轴对称
4. 实轴上的根轨迹：实轴上某点右侧开环实零点和实极点总数为奇数
5. 根轨迹的渐近线：

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n - m} \quad (10)$$

$$\phi_a = \frac{(2k + 1)180^\circ}{n - m}, \quad k = 0, 1, \dots, n - m - 1 \quad (11)$$

6. 分离点的计算： $\frac{d}{ds}[G(s)H(s)] = 0$

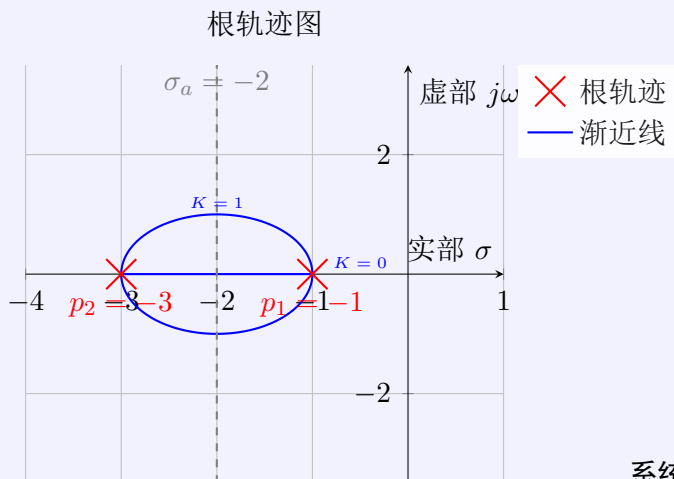
7. 与虚轴的交点：利用劳斯判据



## 12.4 绘制根轨迹

### 12.4.1 例 1：二阶系统的根轨迹

#### 例 1：二阶系统



系统信息：

- 开环传递函数： $G(s)H(s) = \frac{K}{(s+1)(s+3)}$
- 极点： $p_1 = -1$ ,  $p_2 = -3$
- 零点：无

根轨迹特征：

- 渐近线中心： $\sigma_a = \frac{-1 + (-3)}{2} = -2$
- 根轨迹类型：实轴线段 + 圆形轨迹
- 分支数：2

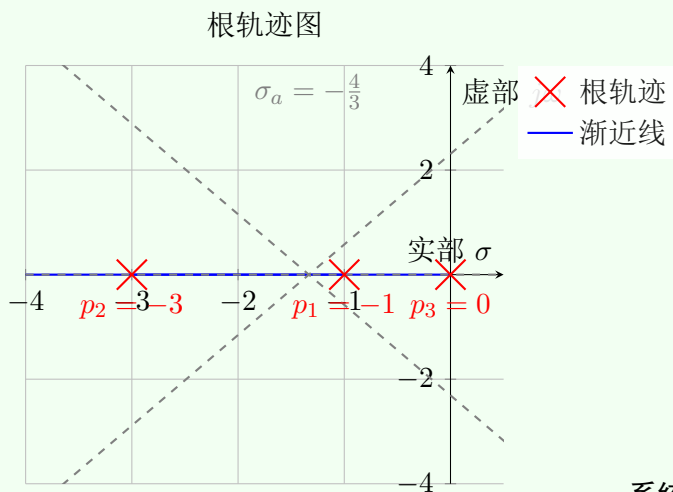
分析：

- $K = 0$  时，根在开环极点处
- 实轴部分： $[-3, -1]$  区间
- 复平面部分形成圆形
- 系统始终稳定



## 12.4.2 例 2：三阶系统的根轨迹

## 例 2：三阶系统



## 系统信息：

- 开环传递函数： $G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+3)}$
- 极点： $p_1 = -1$ ,  $p_2 = -3$ ,  $p_3 = 0$
- 零点：无

## 根轨迹特征：

- 极点数  $n = 3$ , 零点个数  $m = 0$
- 分支数：3
- 渐近线中心： $\sigma_a = -\frac{4}{3}$

## 渐近线角度：

$$\phi_a = \frac{(2k+1) \times 180^\circ}{3}$$

- $60^\circ, 180^\circ, 300^\circ$

## 稳定性：

- 存在从虚轴穿过的点
- 系统有临界增益

## 12.5 绘制根轨迹的步骤总结

1. 确定开环极点和零点：在复平面上标记（极点用  $\times$  表示，零点用  $\circ$  表示）



## 2. 绘制实轴部分：满足 相角条件 的实轴线段

- 实轴上某点右侧的开环零点和极点总数为奇数时，该点在根轨迹上

## 3. 绘制渐近线：

$$\sigma_a = \frac{\sum p_i - \sum z_j}{n - m}$$

$$\phi_a = \frac{(2k + 1) \times 180^\circ}{n - m}, \quad k = 0, 1, \dots, n - m - 1$$

## 4. 计算分离点和汇合点：解方程 $\frac{d}{ds}[G(s)H(s)] = 0$

## 5. 确定与虚轴的交点：使用劳斯判据或代入 $s = j\omega$

## 6. 绘制完整轨迹：连接各部分形成光滑曲线

# 13 $0^\circ$ 根轨迹

## 13.1 $0^\circ$ 根轨迹的相角条件

$$\angle G(s)H(s) = \pm 360^\circ k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

## 13.2 $0^\circ$ 根轨迹与 $180^\circ$ 根轨迹的区别

- 实轴上的根轨迹：实轴上某点右侧开环实零点和实极点总数为偶数
- 渐近线角度： $\phi_a = \frac{360^\circ k}{n - m}$

# 14 参数根轨迹

## 14.1 参数根轨迹的定义

当系统中某一参数变化时，系统特征方程根的变化轨迹。

## 14.2 参数根轨迹的绘制方法

1. 将特征方程整理成  $1 + K_h H(s) = 0$  的形式
2. 将参数  $K_h$  视为可变增益
3. 按照常规根轨迹绘制方法进行



## 15 频率特性基本概念

### 15.1 频率特性的定义

对于一个稳定的线性时不变系统，当输入一个正弦信号  $r(t) = A_{\text{in}} \sin(\omega t)$  时，其稳态输出  $y_{\text{ss}}(t)$  必然是同频率的正弦信号，形式为：

$$y_{\text{ss}}(t) = A_{\text{out}} \sin(\omega t + \phi)$$

线性定常系统的频率特性是指系统稳态输出与输入的复数比：

$$G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega} = |G(j\omega)|e^{j\phi(\omega)}$$

其中：

- 幅频特性  $A(\omega)$ ：输出响应的稳态分量幅值与输入信号幅值之比。

$$A(\omega) = \frac{A_{\text{out}}}{A_{\text{in}}} = |G(j\omega)|$$

- 相频特性  $\phi(\omega)$ ：输出响应的稳态分量与输入信号的相位之差。

$$\phi(\omega) = \angle G(j\omega)$$

幅频特性  $A(\omega)$  和相频特性  $\phi(\omega)$  统称为频率特性。

### 15.2 频率特性的物理意义

- 幅频特性表示不同频率正弦输入信号通过系统后幅值的变化
- 相频特性表示不同频率正弦输入信号通过系统后相位的变化

### 15.3 频率特性的计算

#### 15.3.1 计算步骤

1. 将传递函数  $G(s)$  中的  $s$  替换为  $j\omega$ ，得到  $G(j\omega)$
2. 计算幅频特性： $A(\omega) = |G(j\omega)|$
3. 计算相频特性： $\phi(\omega) = \angle G(j\omega)$



## 15.3.2 例题

例 1: 已知传递函数为  $G(s) = \frac{4(s+1)}{s(s+2)}$ , 写出该传递函数的频率特性。

解:

1. 将  $s$  替换为  $j\omega$ :

$$G(j\omega) = \frac{4(j\omega + 1)}{j\omega(j\omega + 2)}$$

2. 计算幅频特性  $A(\omega)$ :

$$A(\omega) = |G(j\omega)| = \frac{|4(1 + j\omega)|}{|j\omega||2 + j\omega|} = \frac{4\sqrt{1^2 + \omega^2}}{\omega\sqrt{2^2 + \omega^2}} = \frac{4\sqrt{1 + \omega^2}}{\omega\sqrt{4 + \omega^2}}$$

3. 计算相频特性  $\phi(\omega)$ :

$$\begin{aligned}\phi(\omega) &= \angle G(j\omega) = \angle 4 + \angle(1 + j\omega) - \angle(j\omega) - \angle(2 + j\omega) \\ &= 0^\circ + \arctan(\omega) - 90^\circ - \arctan\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ &= \arctan(\omega) - \arctan\left(\frac{\omega}{2}\right) - 90^\circ\end{aligned}$$

例 2: 某单位负反馈的开环传递函数为  $G(s) = \frac{4}{s(s+2)}$ 。若输入信号  $r(t) = 2\sin(2t)$ , 试求系统的稳态输出。

解:

1. 求闭环传递函数  $\Phi(s)$ :

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{\frac{4}{s(s+2)}}{1 + \frac{4}{s(s+2)}} = \frac{4}{s^2 + 2s + 4}$$

2. 分析输入信号: 幅值  $A = 2$ , 角频率  $\omega = 2 \text{ rad/s}$

3. 计算闭环系统在  $\omega = 2$  处的频率响应  $\Phi(j2)$ :

$$\Phi(j2) = \frac{4}{(j2)^2 + 2(j2) + 4} = \frac{4}{-4 + j4 + 4} = \frac{4}{j4} = -j$$

4. 计算幅值和相角:

$$\begin{aligned}|\Phi(j2)| &= |-j| = 1 \\ \angle\Phi(j2) &= \angle(-j) = -90^\circ\end{aligned}$$

5. 写出稳态输出  $c_{ss}(t)$ :

$$\begin{aligned}c_{ss}(t) &= A \cdot |\Phi(j2)| \cdot \sin(\omega t + \angle\Phi(j2)) \\ &= 2 \cdot 1 \cdot \sin(2t - 90^\circ) \\ &= 2\sin(2t - 90^\circ) = -2\cos(2t)\end{aligned}$$



## 16 奈奎斯特图绘制

### 16.1 奈奎斯特图的基本概念

#### 16.1.1 什么是奈奎斯特图

奈奎斯特图 (Nyquist Plot) 是开环频率响应  $G(j\omega)$  在复平面上的图形表示。

- **定义:** 以  $G(j\omega)$  的实部为横坐标, 虚部为纵坐标, 当  $\omega$  从  $-\infty$  到  $+\infty$  变化时  $G(j\omega)$  在复平面上的轨迹
- **向量形式:**  $G(j\omega) = A(\omega)\angle\phi(\omega)$ , 其中  $A(\omega)$  是幅值,  $\phi(\omega)$  是相角
- **复数形式:**  $G(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$ , 其中  $P(\omega)$  是实部,  $Q(\omega)$  是虚部

#### 16.1.2 奈奎斯特图的对称性

- 当  $\omega$  从 0 变化到  $+\infty$  时, 得到的曲线为**实线部分**
- 当  $\omega$  从 0 变化到  $-\infty$  时, 对应的轨迹与实线部分**关于实轴对称**
- 通常只需绘制  $\omega: 0 \rightarrow +\infty$  的部分, 然后关于实轴做镜像

### 16.2 奈奎斯特图的绘制步骤

#### 16.2.1 最小相位系统的绘制流程

最小相位系统是指开环传递函数在  $s$  平面右半部分没有零点和极点的系统。

**通用绘制步骤:**

1. 将  $G(s)$  中的  $s$  全部替换为  $j\omega$ , 得到  $G(j\omega)$
2. 写出幅值表达式  $A(\omega) = |G(j\omega)|$  和相角表达式  $\phi(\omega) = \angle G(j\omega)$
3. 分析关键频率点:
  - $\omega = 0$ : 起点幅值和相角
  - $\omega \rightarrow \infty$ : 终点幅值和相角
4. 计算坐标轴交点 (可选但有助于精确绘图):
  - 令虚部  $\text{Im}[G(j\omega)] = 0$ , 求与实轴交点
  - 令实部  $\text{Re}[G(j\omega)] = 0$ , 求与虚轴交点
  - 或用相角法:  $\phi(\omega) = k \cdot 90^\circ$  ( $k$  为整数)



5. 根据幅值和相角的变化趋势，绘制曲线
6. 对于 I 型及更高型系统，补全虚线部分（无穷大圆弧）
7. 最后做实轴对称，得到完整的奈奎斯特图

### 16.2.2 系统类型对起始点的影响

- 0 型系统：

- 起点：(K, 0)（正实轴）
- 终点：原点 (0, 0)
- 无渐近线

- I 型系统：

- $\omega = 0$ ：幅值  $\infty$ ，相角  $0^\circ$ （仅看非积分项）
- $\omega = 0^+$ ：幅值  $\infty$ ，相角  $-90^\circ$
- 有垂直的低频渐近线
- 终点：原点 (0, 0)

- II 型系统：

- 起点：负实轴无穷远处，相角  $-180^\circ$
- 终点：原点 (0, 0)
- 有无穷大圆弧补全虚线部分

### 16.2.3 I 型系统的渐近线计算

对于标准形式  $G(s) = K \frac{\prod(T_{zi}s+1)}{\prod(T_{pi}s+1) \cdot s}$ ，当  $\omega \rightarrow 0^+$  时，对应的垂直渐近线为：

$$x = K \left( \sum T_{zi} - \sum T_{pi} \right)$$

其中：

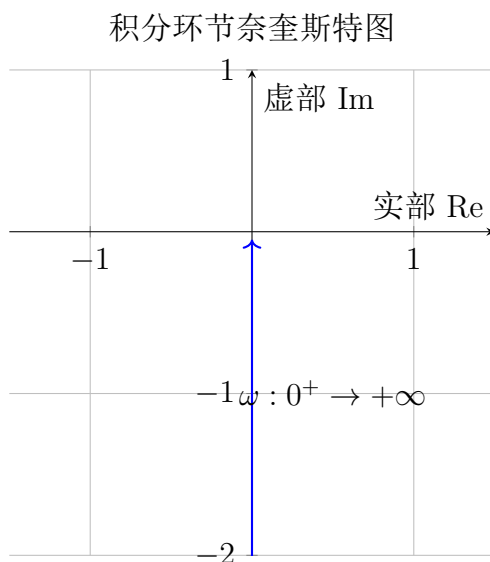
- $\sum T_{zi}$ ：分子所有一阶项的时间常数之和
- $\sum T_{pi}$ ：分母所有一阶项的时间常数之和（不含积分项）



## 16.3 典型环节的奈奎斯特图

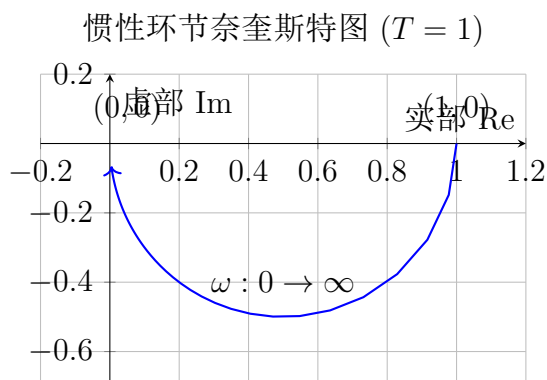
### 16.3.1 积分环节

积分环节的传递函数为  $G(s) = \frac{1}{s}$ ，其频率特性为  $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = -\frac{j}{\omega}$ 。当  $\omega$  从  $0^+$  变化到  $+\infty$  时，奈奎斯特图是沿着负虚轴从  $-\infty$  到原点的一条直线。



### 16.3.2 惯性环节

惯性环节的传递函数为  $G(s) = \frac{1}{Ts+1}$ ，其频率特性为  $G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T}$ 。奈奎斯特图是一个起点为  $(1, 0)$  ( $\omega = 0$ )，终点为原点 ( $\omega = \infty$ ) 的半圆。

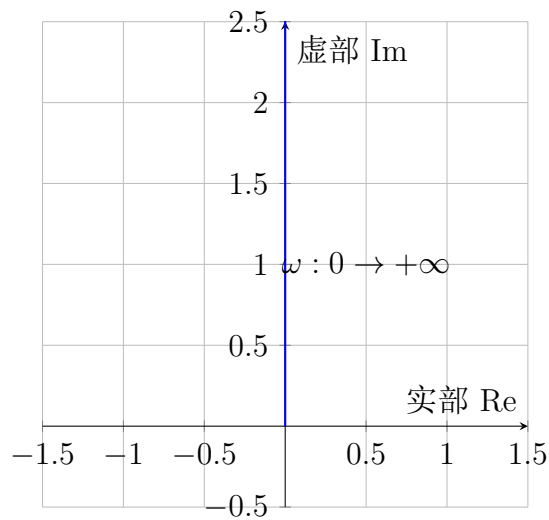


### 16.3.3 微分环节

微分环节的传递函数为  $G(s) = s$ ，其频率特性为  $G(j\omega) = j\omega$ 。奈奎斯特图是沿着正虚轴从原点到  $+\infty$  的一条直线。

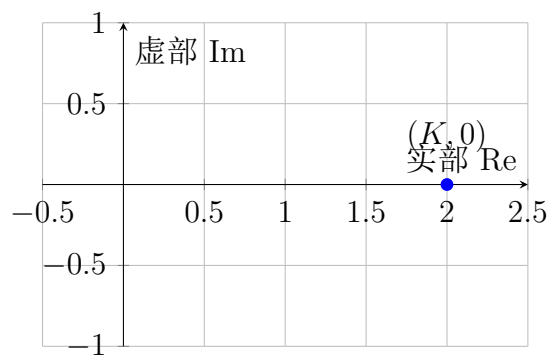


微分环节奈奎斯特图



#### 16.3.4 比例环节

比例环节的传递函数为  $G(s) = K$  ( $K > 0$ )，其频率特性为  $G(j\omega) = K$ 。奈奎斯特图是实轴上从原点到  $K$  的一个点。

比例环节奈奎斯特图 ( $K = 2$ )

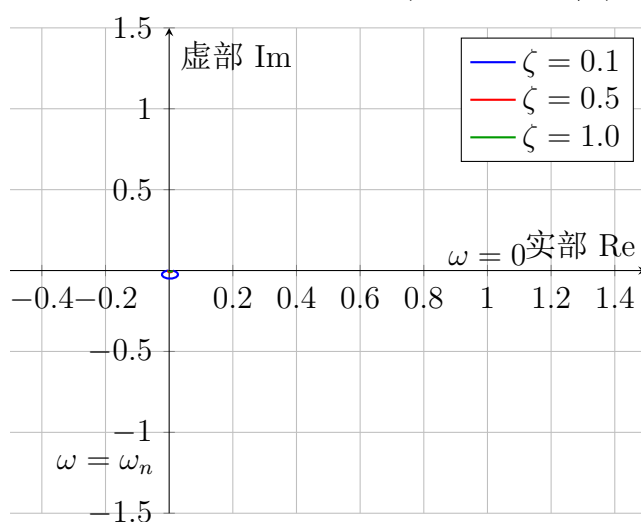
#### 16.3.5 二阶振荡环节

二阶振荡环节的传递函数为  $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$ ，其频率特性为：

$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 - \omega^2 + 2j\omega\zeta\omega_n}$$

奈奎斯特图为一圆弧或更复杂的曲线，形状随阻尼比  $\zeta$  变化。



二阶振荡环节奈奎斯特图 ( $\omega_n = 10 \text{ rad/s}$ )

## 16.4 0 型系统的奈奎斯特图

### 16.4.1 绘制流程

1. 将  $G(s)$  中的  $s$  换成  $j\omega$
2. 写出幅值  $A(\omega)$  和相角  $\phi(\omega)$  表达式
3. 分析起点 ( $\omega = 0$ ) 和终点 ( $\omega = \infty$ )
4. 根据相角变化趋势绘制曲线

### 16.4.2 例题

例：绘制  $G(s)H(s) = \frac{6}{s^2+3s+2}$  的幅相特性曲线。

解：

1. 变换与分解：

$$G(s)H(s) = \frac{6}{(s+1)(s+2)} \Rightarrow G(j\omega)H(j\omega) = \frac{6}{(1+j\omega)(2+j\omega)}$$

2. 幅相表达式：

$$A(\omega) = \frac{6}{\sqrt{1+\omega^2}\sqrt{4+\omega^2}}$$

$$\phi(\omega) = -\arctan(\omega) - \arctan\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

3. 起点/终点分析：

$$\text{起点 } (\omega = 0) : A(0) = \frac{6}{1 \cdot 2} = 3, \quad \phi(0) = 0^\circ$$

$$\text{终点 } (\omega = \infty) : A(\infty) = 0, \quad \phi(\infty) = -90^\circ - 90^\circ = -180^\circ$$



## 4. 趋势与绘制:

- 起点为  $(3, 0)$ , 终点为原点  $(0, 0)$
- 相角从  $0^\circ$  单调减小到  $-180^\circ$
- 曲线从起点出发, 顺时针旋转, 经第四象限, 从负实轴方向趋近于原点

## 16.5 I 型系统的奈奎斯特图

## 16.5.1 绘制流程

1. 将  $G(s)$  中的  $s$  替换为  $j\omega$
2. 写出幅值  $A(\omega)$  和相角  $\phi(\omega)$  表达式
3. 【特殊】分析  $\omega = 0$  和  $\omega = 0^+$  时的幅值和相角
4. 【特殊】计算垂直渐近线 (仅 I 型系统有)
5. 根据趋势绘制实线部分
6. 补全虚线部分 (从  $\omega = 0$  的方向经过无穷大圆弧连到  $\omega = 0^+$  的方向)

## 16.5.2 例题

例: 绘制  $G(s)H(s) = \frac{250}{s(s+5)(s+15)}$  的幅相特性曲线。

解:

## 1. 变换:

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{250}{j\omega(j\omega + 5)(j\omega + 15)}$$

## 2. 幅相表达式:

$$A(\omega) = \frac{250}{\omega\sqrt{\omega^2 + 25}\sqrt{\omega^2 + 225}}$$

$$\phi(\omega) = -90^\circ - \arctan\left(\frac{\omega}{5}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{15}\right)$$

## 3. 关键频率点:

$$\omega = 0: \quad A(0) = \infty, \quad \phi(0) = 0^\circ \text{ (虚线用)}$$

$$\omega = 0^+: \quad A(0^+) = \infty, \quad \phi(0^+) = -90^\circ \text{ (实线起点)}$$

$$\omega = \infty: \quad A(\infty) = 0, \quad \phi(\infty) = -270^\circ \text{ (或 } +90^\circ)$$

## 4. 渐近线计算:



- 化为标准型:  $G(s) = \frac{250}{s \cdot 5(0.2s+1) \cdot 15(s/15+1)}$
- 提取参数:  $K = \frac{10}{3}$ ,  $\sum T_z = 0$ ,  $\sum T_p = 0.2 + \frac{1}{15}$
- 渐近线位置:  $x = \frac{10}{3}(0 - 0.2 - 1/15) = -\frac{8}{9} \approx -0.89$

### 5. 趋势与绘制:

- 实线部分从负虚轴无穷远处开始 ( $\phi = -90^\circ$ )
- 逼近左侧垂直渐近线  $x \approx -0.89$
- 相角持续减小至  $-270^\circ$ , 因此会穿越负实轴
- 终点为原点
- 虚线部分是从  $\phi = 0^\circ$  到  $\phi = -90^\circ$  的无穷大顺时针圆弧, 连接  $\omega = 0$  和  $\omega = 0^+$

## 16.6 非最小相位系统的奈奎斯特图

### 16.6.1 非最小相位系统的特点

非最小相位系统在右半平面有零点或极点 (如  $(s - a)$  或  $(T_z s - 1)$  的项), 这会深刻影响相角计算。

### 16.6.2 相角的特殊处理

对于右半平面的项, 例如  $(s - a)$  ( $a > 0$ ), 其相角为:

$$\angle(j\omega - a) = \angle(-a + j\omega) = 180^\circ - \arctan\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

结论:

- 传递函数中每出现一个分母的非最小相位项, 总相角就要减去  $(180^\circ - \arctan(\dots))$
- 每出现一个分子的非最小相位项, 总相角就要加上  $(180^\circ - \arctan(\dots))$

### 16.6.3 例题

例: 绘制非最小相位 I 型系统  $G(s)H(s) = \frac{10}{s(s-1)}$  的幅相特性曲线。

解:

#### 1. 变换:

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{10}{j\omega(j\omega - 1)}$$



## 2. 幅相表达式:

$$\begin{aligned}
 A(\omega) &= \frac{10}{\omega\sqrt{\omega^2 + 1}} \\
 \phi(\omega) &= -\angle(j\omega) - \angle(j\omega - 1) \\
 &= -90^\circ - (180^\circ - \arctan(\omega)) \\
 &= \arctan(\omega) - 270^\circ
 \end{aligned}$$

## 3. 关键频率点:

$$\begin{aligned}
 \omega = 0: \quad A(0) &= \infty, \quad \phi(0) = -180^\circ \text{ (分母 } s(s-1) \rightarrow s(-1)) \\
 \omega = 0^+: \quad A(0^+) &= \infty, \quad \phi(0^+) = \arctan(0) - 270^\circ = -270^\circ \text{ (或 } +90^\circ) \\
 \omega = \infty: \quad A(\infty) &= 0, \quad \phi(\infty) = 90^\circ - 270^\circ = -180^\circ
 \end{aligned}$$

## 4. 渐近线计算:

- $G(s) = \frac{-10}{s(1-s)}$ , 参数为  $K = -10$ ,  $T_p = -1$
- 渐近线:  $x = (-10)(0 - (-1)) = -10$

## 5. 趋势与绘制:

- 实线起点在正虚轴无穷远处 ( $\phi = -270^\circ$ ), 不同于最小相位系统
- 相角从  $-270^\circ$  增大到  $-180^\circ$
- 终点为原点
- 虚线部分是从  $\phi = -180^\circ$  到  $\phi = -270^\circ$  的无穷大顺时针圆弧

## 16.7 奈奎斯特稳定性判据

## 16.7.1 基本概念

对于开环传递函数  $G(s)H(s)$ , 其中  $H(s)$  通常为反馈传感器传递函数:

- 临界点: 奈奎斯特图中的点  $(-1, 0)$
- 包围: 奈奎斯特曲线绕临界点的圈数

## 16.7.2 奈奎斯特稳定性判据

对于闭环系统, 设开环传递函数为  $G(s)H(s)$ , 其:

- 右半平面极点数为  $P$
- 奈奎斯特曲线逆时针绕  $(-1, 0)$  点的圈数为  $N$



则闭环系统右半平面极点数为：

$$Z = P + N$$

**稳定条件：**系统稳定  $\Leftrightarrow Z = 0$ ，即  $N = -P$

特别地，当开环系统稳定（ $P = 0$ ）时：

- 稳定条件： $N = 0$ ，即奈奎斯特曲线不包围  $(-1, 0)$  点
- 边界稳定：曲线经过  $(-1, 0)$  点
- 不稳定：曲线包围  $(-1, 0)$  点

### 16.7.3 稳定裕度

**增益裕度（Gain Margin, GM）** 从  $(-1, 0)$  点到奈奎斯特曲线与负实轴的交点距离的倒数。若交点坐标为  $(-a, 0)$ ，则  $GM = \frac{1}{a}$  或  $GM(\text{dB}) = 20 \lg \frac{1}{a}$

**相位裕度（Phase Margin, PM）** 奈奎斯特曲线与单位圆的交点对应的相位角与  $-180^\circ$  的夹角。

### 16.7.4 绘制方法

1. 建立  $G(j\omega)$  的实部和虚部表达式
2. 选择足够多的频率点  $\omega$ （从 0 到  $+\infty$ ）
3. 计算每个频率点对应的  $\text{Re}[G(j\omega)]$  和  $\text{Im}[G(j\omega)]$
4. 在复平面上绘制这些点形成的轨迹
5. 检查轨迹是否包围  $(-1, 0)$  点

## 17 伯德图绘制

### 17.1 伯德图的定义

伯德图（Bode Plot）是由亨德里克·韦德·伯德（Hendrik Wade Bode）提出的频率响应图示方法，由两个图组成：

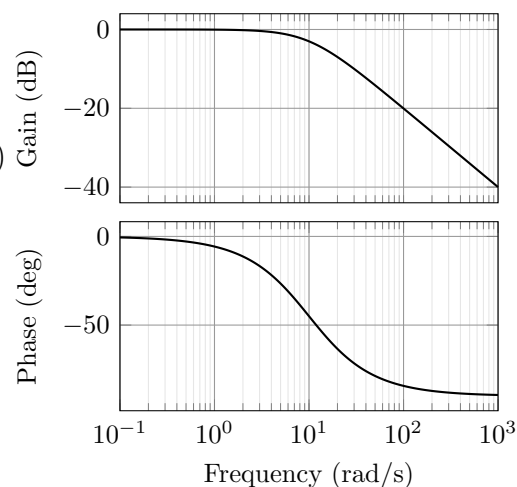


- 幅频特性图 (Magnitude Plot):  $L(\omega) = 20 \lg |G(j\omega)|$  dB vs  $\lg \omega$  典型伯德图示例:

- 纵轴: 对数幅值 (dB)
- 横轴: 对数频率 ( $\lg \omega$ )

- 相频特性图 (Phase Plot):  $\phi(\omega) = \angle G(j\omega)$  vs  $\lg \omega$

- 纵轴: 相位角 (度或弧度)
- 横轴: 对数频率 ( $\lg \omega$ )



图示:  $G(s) = \frac{1}{1+0.1s}$  的伯德图

伯德图的优点:

1. 频率范围广, 可表示从极低频到极高频的特性
2. 不同环节的伯德图可以直接相加 (叠加原理)
3. 可用渐近线逼近, 绘制简便
4. 便于分析系统的稳定性和性能指标

## 17.2 伯德图的基本概念

伯德图由两个图组成, 横坐标都是对数刻度的频率  $\omega$ :

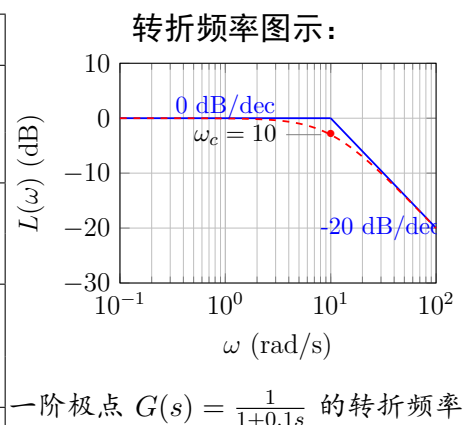
- 对数幅频图: 纵坐标是系统幅值的对数  $L(\omega) = 20 \log_{10} A(\omega)$ , 单位为分贝 (dB)
- 对数相频图: 纵坐标是系统相角  $\phi(\omega)$ , 单位为度 ( $^\circ$ )

### 17.2.1 对数幅频图的转折频率

转折频率 (Corner Frequency / Break Frequency) 是渐近线斜率发生变化的频率点。



典型环节	传递函数	转折频率与斜率
一阶环节	$\frac{1}{Ts + 1}$	$\omega_c = \frac{1}{T}$ 斜率 $-20 \text{ dB/dec}$
	$Ts + 1$	$\omega_c = \frac{1}{T}$ 斜率 $+20 \text{ dB/dec}$
二阶环节	$\frac{1}{(s/\omega_n)^2 + \dots}$	$\omega_c = \omega_n$ 斜率 $-40 \text{ dB/dec}$
	$(s/\omega_n)^2 + \dots$	$\omega_c = \omega_n$ 斜率 $+40 \text{ dB/dec}$



关键概念：

- 渐近线（蓝色实线）：在转折频率处改变斜率
- 精确曲线（红色虚线）：在转折频率处与渐近线有偏差
- 修正值：一阶环节在  $\omega_c$  处偏差  $-3 \text{ dB}$ ，二阶环节偏差  $\pm 6 \text{ dB}$

### 17.2.2 系统型别的判断

系统型别  $v$  是指系统开环传递函数中积分环节  $\frac{1}{s^v}$  的阶数，即分母中因子  $s$  的幂次。



定义：

对于开环传递函数：

$$G(s) = K \frac{s^m (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots}{s^v (T_a s + 1)(T_b s + 1) \cdots}$$

其中  $v$  称为系统型别 (Type Number),  $v$  的值为：

- $v = 0$ : **0 型系统** (无积分环节)
- $v = 1$ : **I 型系统** (1 个积分环节)
- $v = 2$ : **II 型系统** (2 个积分环节)
- $v \geq 3$ : 高阶系统 (较少见)

判断方法：

1. 将传递函数化为尾 1 标准型
2. 统计分母中独立因子  $s$  的个数
3. 该个数即为系统型别  $v$

例题：判断以下系统的型别

例 1:  $G(s) = \frac{5(2s+1)}{s(0.1s+1)(0.5s+1)}$

解：

- 分母中独立因子  $s$  的个数：1 个
- 系统型别： $v = 1$  (I 型系统)

判断示例：

传递函数	型别
$\frac{10}{(s+1)(2s+1)}$	$v = 0$
$\frac{5}{s(s+2)}$	$v = 1$
$\frac{20(s+1)}{s^2(s+5)}$	$v = 2$
$\frac{100}{s^3(s+1)}$	$v = 3$

注意：

- 只计算分母中的  $s$
- 分子中的  $s$  不影响型别
- $(Ts+1)$  中的  $s$  不计入  $v$

例 2:  $G(s) = \frac{100s}{s^2(s+1)(s+10)}$

解：

- 分母中独立因子  $s$  的个数：2 个
- 系统型别： $v = 2$  (II 型系统)
- 注意：分子的  $s$  不影响型别



例 3:  $G(s) = \frac{10}{(s+2)(s+5)}$   
需要先化为标准型（尾 1 形式）:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{10}{(s+2)(s+5)} \\ &= \frac{10/10}{(s/2+1)(s/5+1)} \\ &= \frac{1}{(0.5s+1)(0.2s+1)} \end{aligned}$$

解:

- 分母中独立因子  $s$  的个数: 0 个
- 系统型别:  $v = 0$  (0 型系统)

例 4:  $G(s) = \frac{K}{s(s^2+2s+10)}$   
先分解二阶项（虽然不能分解为实根）:

$$G(s) = \frac{K}{s(s^2+2s+10)}$$

解:

- 分母中独立因子  $s$  的个数: 1 个
- $(s^2+2s+10)$  是二阶振荡环节, 不计入  $v$
- 系统型别:  $v = 1$  (I 型系统)

### 17.2.3 低频段渐近线的确定

低频段渐近线是伯德图绘制的起点, 由系统型别和增益唯一确定。

对于标准型  $G(s) = K \frac{\prod(1+T_i s)}{s^v \prod(1+T_j s)}$ :

- 斜率: 由系统型别  $v$  (积分环节  $s^v$  的个数) 决定

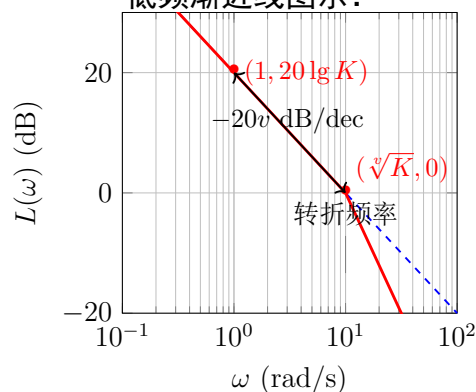
- $v = 0$  (0 型系统): 斜率 0 dB/dec
- $v = 1$  (I 型系统): 斜率  $-20$  dB/dec
- $v = 2$  (II 型系统): 斜率  $-40$  dB/dec

- 定位点 1: 渐近线（或其延长线）必过点  $(1, 20 \lg K)$
- 定位点 2 ( $v \geq 1$  时): 与 0dB 线交于  $(\sqrt[v]{K}, 0)$

例如:  $G(s) = \frac{10}{s(1+0.1s)}$

- $K = 10$ ,  $v = 1$  (I 型系统)
- 低频斜率:  $-20$  dB/dec
- 定位点 1:  $(1, 20 \lg 10) = (1, 20)$  dB
- 定位点 2:  $(\sqrt[1]{10}, 0) = (10, 0)$  dB

低频渐近线图示:



$G(s) = \frac{10}{s(1+0.1s)}$  的低频渐近线



### 17.2.4 例题：伯德图绘制示例

例 1：绘制  $G(s) = \frac{2}{(2s+1)(8s+1)}$  的开环对数幅频特性曲线。

解：

1. 标准型： $G(s) = \frac{2}{(2s+1)(8s+1)}$ 。开环增益  $K = 2$ ，系统为 0 型 ( $v = 0$ )

2. 转折频率：

$$T_1 = 2 \implies \omega_1 = \frac{1}{2} = 0.5 \text{ rad/s}$$

$$T_2 = 8 \implies \omega_2 = \frac{1}{8} = 0.125 \text{ rad/s}$$

按从小到大排列： $\omega_1 = 0.125 \text{ rad/s}$ ， $\omega_2 = 0.5 \text{ rad/s}$

3. 低频段 ( $\omega < 0.125$ ):

- 斜率为  $-20 \times 0 = 0 \text{ dB/dec}$  (水平线)
- 幅值为  $L(\omega) = 20 \lg(2) \approx 6 \text{ dB}$

4. 中频段 1 ( $0.125 < \omega < 0.5$ ):

- 经过第一个转折频率  $\omega_1 = 0.125$  (一阶极点)
- 斜率变为  $0 - 20 = -20 \text{ dB/dec}$

5. 高频段 ( $\omega > 0.5$ ):

- 经过第二个转折频率  $\omega_2 = 0.5$  (一阶极点)
- 斜率变为  $-20 - 20 = -40 \text{ dB/dec}$

## 17.3 典型环节的伯德图

### 17.3.1 比例环节 $K$

传递函数： $G(s) = K$

频率响应： $G(j\omega) = K$

幅频特性：

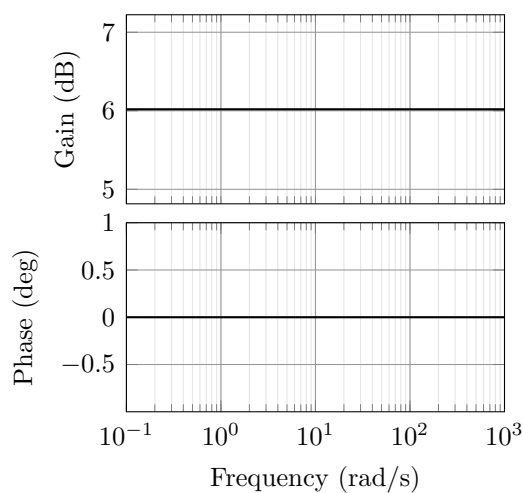
$$L(\omega) = 20 \lg K \text{ dB (水平线)}$$

相频特性：

$$\phi(\omega) = \begin{cases} 0^\circ & K > 0 \\ 180^\circ & K < 0 \end{cases}$$

伯德图示例： $G(s) = 2$





### 17.3.2 积分环节 $\frac{1}{s}$

传递函数:  $G(s) = \frac{1}{s}$

频率响应:  $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$

幅频特性:

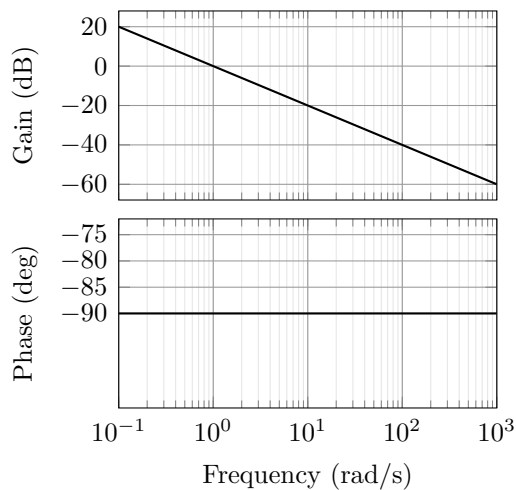
$$L(\omega) = 20 \lg \frac{1}{\omega} = -20 \lg \omega \text{ dB}$$

- 斜率:  $-20 \text{ dB/十倍频 (decade)}$
- 当  $\omega = 1 \text{ rad/s}$  时,  $L(\omega) = 0 \text{ dB}$
- 当  $\omega$  增大 10 倍时,  $L(\omega)$  下降 20 dB

相频特性:

$$\phi(\omega) = -90^\circ (\text{恒定})$$

伯德图示例:  $G(s) = \frac{1}{s}$



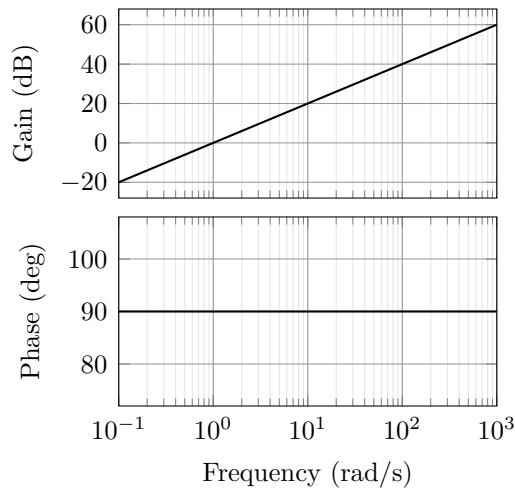


### 17.3.3 微分环节 $s$

与积分环节对称：

- $L(\omega) = 20 \lg \omega \text{ dB}$  (斜率  $+20 \text{ dB/十倍频}$ )
- $\phi(\omega) = 90^\circ$

伯德图示例：  $G(s) = s$



### 17.3.4 惯性环节 $\frac{1}{1+Ts}$

传递函数：  $G(s) = \frac{1}{1+Ts}$

频率响应：  $G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T}$

转折频率 (Corner Frequency):  $\omega_c = \frac{1}{T} \text{ rad/s}$

幅频特性：

$$L(\omega) = 20 \lg |G(j\omega)| = -20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T^2}$$

渐近线：

- 当  $\omega \ll \omega_c$ :  $L(\omega) \approx 0 \text{ dB}$
- 当  $\omega \gg \omega_c$ :  $L(\omega) \approx -20 \lg(\omega T) \text{ dB}$  (斜率  $-20 \text{ dB/十倍频}$ )
- 转折点  $\omega = \omega_c$ : 精确值  $L(\omega_c) = -3 \text{ dB}$

相频特性：

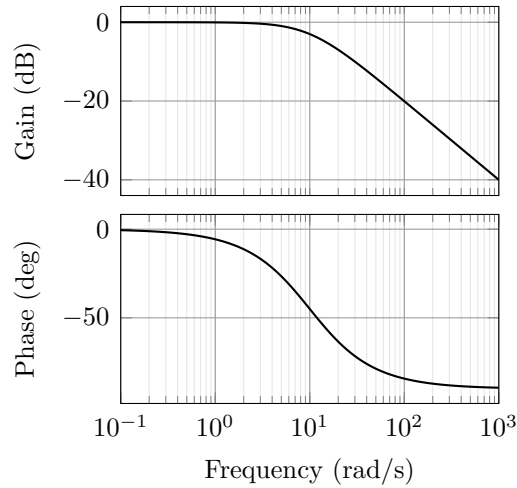
$$\phi(\omega) = -\arctan(\omega T)$$

- $\omega = 0.1\omega_c$ :  $\phi \approx -6^\circ$
- $\omega = \omega_c$ :  $\phi = -45^\circ$



- $\omega = 10\omega_c$ :  $\phi \approx -84^\circ$
- $\omega \rightarrow \infty$ :  $\phi \rightarrow -90^\circ$

伯德图示例:  $G(s) = \frac{1}{1+0.1s}$  ( $\omega_c = 10 \text{ rad/s}$ )

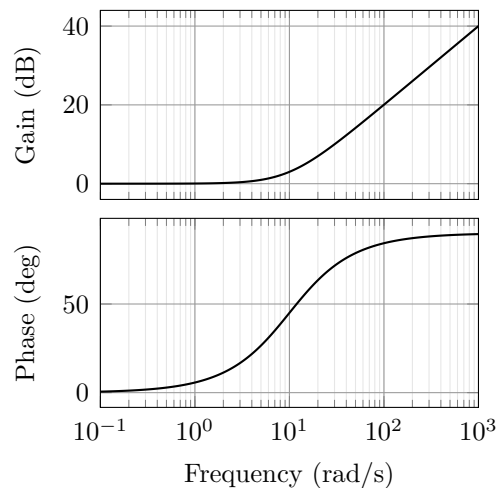


### 17.3.5 一阶微分环节 $1 + Ts$

与惯性环节对称:

- 幅频特性: 低频 0 dB, 高频斜率 +20 dB/十倍频
- 相频特性:  $\phi(\omega) = \arctan(\omega T)$ ,  $\phi(\omega_c) = 45^\circ$

伯德图示例:  $G(s) = 1 + 0.1s$  ( $\omega_c = 10 \text{ rad/s}$ )



### 17.3.6 振荡环节 $\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$

传递函数标准形式:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$



其中:

- $\omega_n$ : 无阻尼自然频率
- $\zeta$ : 阻尼比 ( $0 < \zeta < 1$ )

频率响应:

$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 - \omega^2 + 2j\omega\zeta\omega_n}$$

幅频特性:

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}}$$

渐近线:

- 当  $\omega \ll \omega_n$ :  $L(\omega) \approx 0$  dB
- 当  $\omega \gg \omega_n$ :  $L(\omega) \approx -40 \lg(\omega/\omega_n)$  dB (斜率  $-40$  dB/十倍频)
- 转折频率:  $\omega_c = \omega_n$

谐振峰值 (仅当  $\zeta < 0.707$  时):

- 谐振频率:  $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$
- 谐振峰值:  $M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$
- 当  $\zeta$  很小时, 谐振峰值很大

转折频率处的精确值:

- $L(\omega_n) = -20 \lg(2\zeta)$  dB
- 当  $\zeta = 0.707$  时,  $L(\omega_n) = -3$  dB (无谐振)
- 当  $\zeta < 0.707$  时,  $L(\omega_n) > -3$  dB (有谐振)
- 当  $\zeta > 0.707$  时,  $L(\omega_n) < -3$  dB (过阻尼)

相频特性:

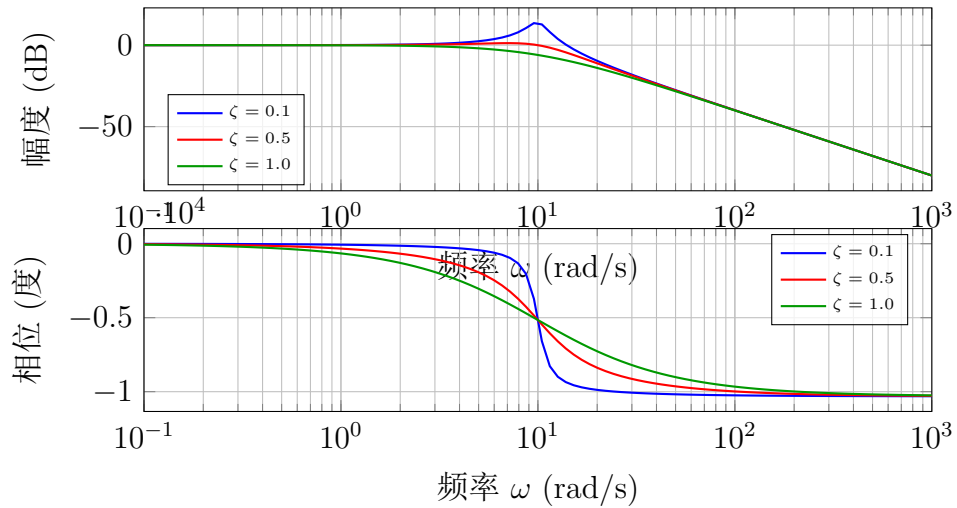
$$\phi(\omega) = -\arctan \frac{2\zeta\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2}$$

- $\omega = \omega_n$ :  $\phi = -90^\circ$  (与  $\zeta$  无关)
- $\omega \rightarrow 0$ :  $\phi \rightarrow 0^\circ$



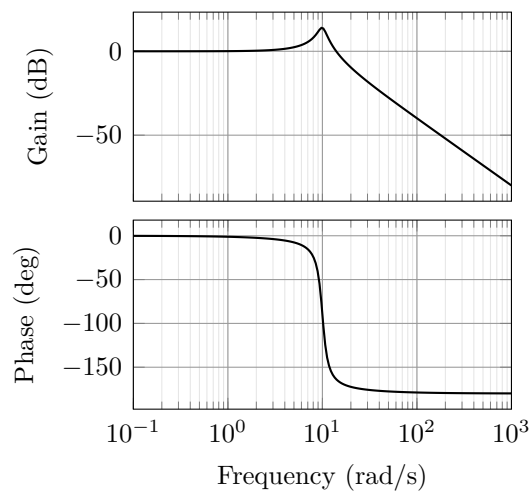
- $\omega \rightarrow \infty: \phi \rightarrow -180^\circ$
- $\zeta$  越小, 相位变化越快

不同阻尼比的伯德图对比:



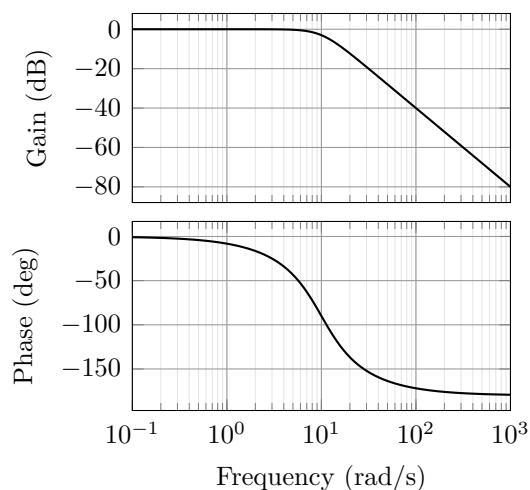
图中所有曲线对应  $\omega_n = 10$  rad/s, 不同阻尼比  $\zeta$ 。

伯德图示例 (欠阻尼, 有谐振):  $G(s) = \frac{100}{s^2 + 2s + 100}$  ( $\omega_n = 10$  rad/s,  $\zeta = 0.1$ )

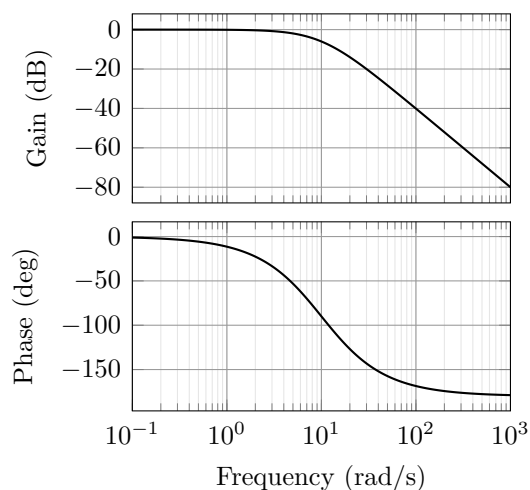


伯德图示例 (临界阻尼):  $G(s) = \frac{100}{s^2 + 14.14s + 100}$  ( $\omega_n = 10$  rad/s,  $\zeta = 0.707$ )





伯德图示例（过阻尼）：  $G(s) = \frac{100}{s^2 + 20s + 100}$  ( $\omega_n = 10 \text{ rad/s}$ ,  $\zeta = 1.0$ )



## 17.4 伯德图的绘制方法

### 17.4.1 幅值近似原则（关键技巧）

在手绘伯德图和计算剪切频率时，使用的是近似幅值而非精确值。这是加快计算的关键：

**一阶环节  $(Ts + 1)$  的近似：**

- 在转折频率前 ( $\omega < 1/T$ )：虚部  $T\omega < 1$ ，**保留常数项 1**。环节幅值近似为 1
- 在转折频率后 ( $\omega > 1/T$ )：虚部  $T\omega > 1$ ，**保留虚部项  $T\omega$** 。环节幅值近似为  $T\omega$

**二阶环节  $((s/\omega_n)^2 + \dots)$  的近似：**

- 在转折频率前 ( $\omega < \omega_n$ )：**保留常数项 1**。环节幅值近似为 1
- 在转折频率后 ( $\omega > \omega_n$ )：**保留平方项  $(s/\omega_n)^2$** 。环节幅值近似为  $(\omega/\omega_n)^2$



### 17.4.2 伯德图绘制六步法

这是一套标准化、模板化的绘制流程，特别适合考试手绘：

#### 第一步：化为「尾 1」标准型

将传递函数中所有的一阶和二阶环节都化为  $(Ts + 1)$  或  $((s/\omega_n)^2 + 2\zeta(s/\omega_n) + 1)$  的形式。这样可以方便地读出开环增益  $K$  和各转折频率。

标准形式为：

$$G(s) = K \frac{\prod(1 + T_{zi}s) \prod((s/\omega_{ni})^2 + 2\zeta_i(s/\omega_{ni}) + 1)}{s^v \prod(1 + T_{pi}s) \prod((s/\omega_{nj})^2 + 2\zeta_j(s/\omega_{nj}) + 1)}$$

#### 第二步：列出系统的转折频率

转折频率（交接频率）是渐近线斜率发生改变的点：

- 一阶环节  $(Ts \pm 1)$ ：转折频率为  $\omega_c = \frac{1}{T}$
- 二阶环节  $((s/\omega_n)^2 + \dots)$ ：转折频率为  $\omega_c = \omega_n$

将所有转折频率从小到大排列。

#### 第三步：确定开环增益 $K$

从「尾 1」标准型中直接读出比例项  $K$ 。

#### 第四步：求与横轴的交点（剪切频率 $\omega_{gc}$ ）

横轴（0dB 线）代表  $|G(j\omega)| = 1$ 。需要求解方程  $|G(j\omega_{gc})| = 1$ ，利用下面的「幅值近似原则」。

#### 第五步：绘制低频段渐近线

低频段渐近线由以下三个性质唯一确定：

1. **斜率**：由系统型别  $v$ （积分环节  $s^v$  的个数）决定，斜率为  $-20v$  dB/dec
2. **定位点 1**：低频段渐近线（或其延长线）**必过点**  $(\omega = 1, 20 \log_{10} K)$
3. **定位点 2**（ $v \geq 1$  时）：低频段渐近线（或其延长线）与 0dB 横轴相交于点  $(\omega = \sqrt[v]{K}, 0 \text{ dB})$

#### 第六步：依次绘制后续曲线

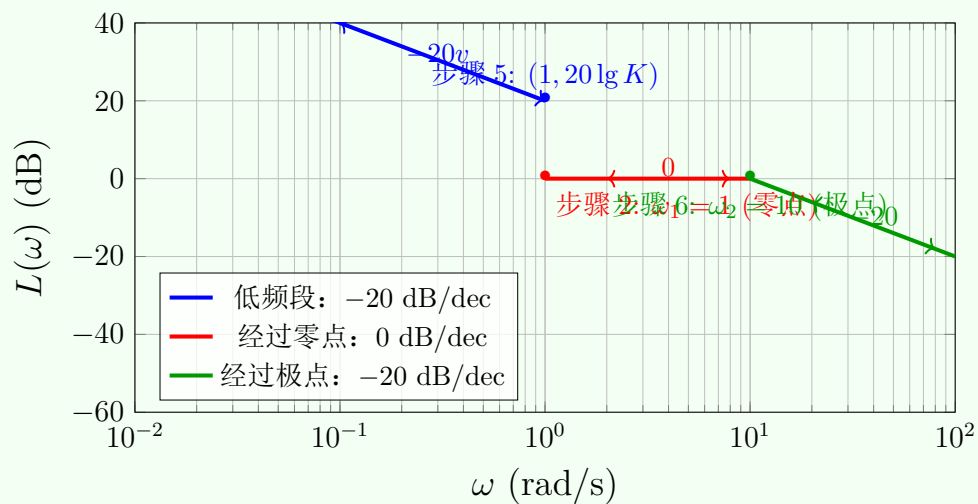
从最低的转折频率开始，每经过一个转折频率，渐近线的斜率发生一次改变：

典型环节	位置	斜率变化
一阶环节	分母	-20 dB/dec
	分子	+20 dB/dec
二阶环节	分母	-40 dB/dec
	分子	+40 dB/dec



【最终验证】：绘制完成后，检查最后一个频段的斜率是否等于  $-20(n-m)$  dB/dec，其中  $n$  是分母阶次， $m$  是分子阶次。

### 六步法绘制流程图示



示例:  $G(s) = \frac{10(s+1)}{s(s+10)}$  的绘制过程: 步骤 1-3:  $K = 10, v = 1$ ; 步骤 2:  $\omega_1 = 1$  (零点),  $\omega_2 = 10$  (极点); 步骤 5: 从  $(1, 20)$  dB 开始, 斜率  $-20$  dB/dec; 步骤 6: 在  $\omega_1 = 1$  处斜率  $+20$ , 变为  $0$  dB/dec; 在  $\omega_2 = 10$  处斜率  $-20$ , 变为  $-20$  dB/dec

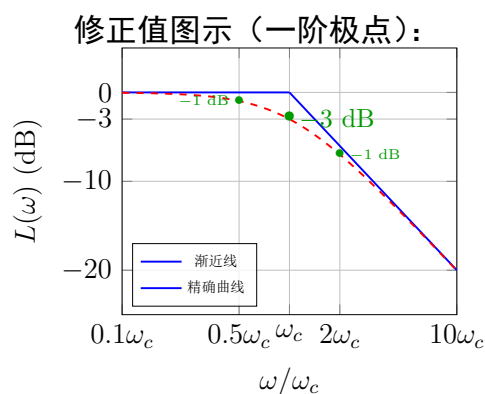
### 17.4.3 转折频率处的修正

渐近线在转折频率附近与精确曲线存在偏差，需要修正以提高精度。



一阶环节  $\frac{1}{1+Ts}$  的修正:

频率	渐近线误差	精确值修正
$0.5\omega_c$	0 dB	-1 dB
$\omega_c$	0 dB	<b>-3 dB</b>
$2\omega_c$	0 dB	-1 dB



二阶环节的修正

取决于阻尼比  $\zeta$ , 在  $\omega = \omega_n$  处:

- $\zeta = 0.1$ : 谐振峰值约 +14 dB
- $\zeta = 0.2$ : 谐振峰值约 +7 dB
- $\zeta = 0.3$ : 谐振峰值约 +3 dB
- $\zeta = 0.5$ : 误差约 -1 dB
- $\zeta = 0.707$ : 误差 **-3 dB** (临界阻尼)
- $\zeta = 1.0$ : 误差 -6 dB (过阻尼)

一阶环节的渐近线与精确曲线对比

#### 17.4.4 六步法综合例题

例 1: 绘制  $G(s) = \frac{8(\frac{s}{0.1}+1)}{s(s^2+s+1)(\frac{s}{2}+1)}$  的开环对数幅频特性曲线。

解:

1. 化为标准型:

$$G(s) = \frac{8(10s+1)}{s(s^2+s+1)(0.5s+1)}$$

2. 转折频率:

- 分子一阶:  $T_z = 10 \Rightarrow \omega_1 = \frac{1}{10} = 0.1 \text{ rad/s}$  (零点, +20 dB/dec)
- 分母二阶: 由  $s^2+s+1=0$  得  $2\zeta\omega_n=1, \omega_n^2=1$ , 所以  $\omega_n=1 \text{ rad/s}$  (极点, -40 dB/dec)
- 分母一阶:  $T_p = 0.5 \Rightarrow \omega_3 = \frac{1}{0.5} = 2 \text{ rad/s}$  (极点, -20 dB/dec)
- 排序: 0.1, 1, 2

3. 开环增益:  $K = 8$

4. 低频段 ( $\omega < 0.1$ ):

- 系统为 I 型 ( $v = 1$ ), 斜率为 -20 dB/dec



- 与 0dB 轴交于  $\omega = \sqrt[4]{K} = 8 \text{ rad/s}$
- 但  $8 > 0.1$ , 说明交点不在低频段
- 可用定位点: 在  $\omega = 1$  处, 幅值为  $L(1) = 20 \lg 8 - 20 \times 1 = 18.06 \text{ dB}$

#### 5. 各频段渐近线:

- $0.1 < \omega < 1$ : 经过  $\omega_1 = 0.1$  (分子一阶零点), 斜率变为  $-20 + 20 = 0 \text{ dB/dec}$
- $1 < \omega < 2$ : 经过  $\omega_2 = 1$  (分母二阶极点), 斜率变为  $0 - 40 = -40 \text{ dB/dec}$
- $\omega > 2$ : 经过  $\omega_3 = 2$  (分母一阶极点), 斜率变为  $-40 - 20 = -60 \text{ dB/dec}$

#### 6. 最终验证:

- 分子阶次  $m = 1$  (一阶零点)
- 分母阶次  $n = 4$  (1 个一阶 + 1 个二阶 + 1 个积分 = 4)
- 最终斜率应为  $-20(n - m) = -20(4 - 1) = -60 \text{ dB/dec}$ , 正确

### 17.4.5 剪切频率的计算

剪切频率 (增益穿越频率  $\omega_{gc}$ ) 是幅值等于 1 (0 dB) 的频率, 通过求解  $|G(j\omega_{gc})| = 1$  得到。

**计算方法:** 利用幅值近似原则

1. 在不同频段, 根据主导环节使用近似幅值
2. 在所有转折频率处分别计算幅值, 判断穿越点在哪一段
3. 在该频段内使用简化的近似幅值公式求解

**典型例子:**  $G(s) = \frac{2}{(2s+1)(8s+1)}$

设  $\omega_1 = 0.125, \omega_2 = 0.5$ , 则:

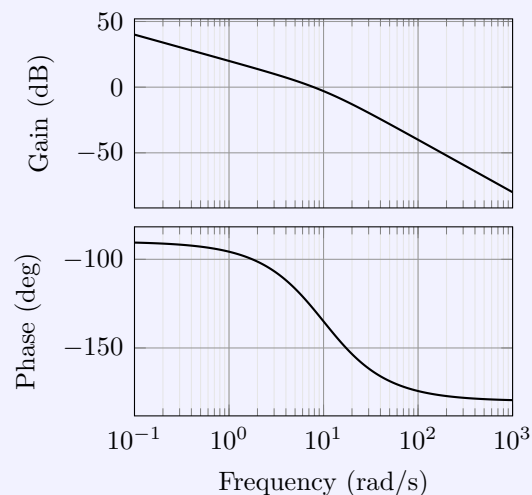
- 低频  $\omega < 0.125$ :  $|G(j\omega)| \approx 2 (>1)$ , 不包含穿越点
- 中频  $0.125 < \omega < 0.5$ :  $|G(j\omega)| \approx \frac{2}{8\omega}$ 
  - 令  $\frac{2}{8\omega} = 1 \implies \omega = 0.25$
  - 由于  $0.125 < 0.25 < 0.5$ , 假设成立, 所以  $\omega_{gc} = 0.25$
- 高频验证: 若需更精确, 可用精确公式验证



## 17.4.6 绘图示例

例 1: 绘制  $G(s) = \frac{10}{s(1+0.1s)}$  的伯德图

## 例 1 求解过程与伯德图



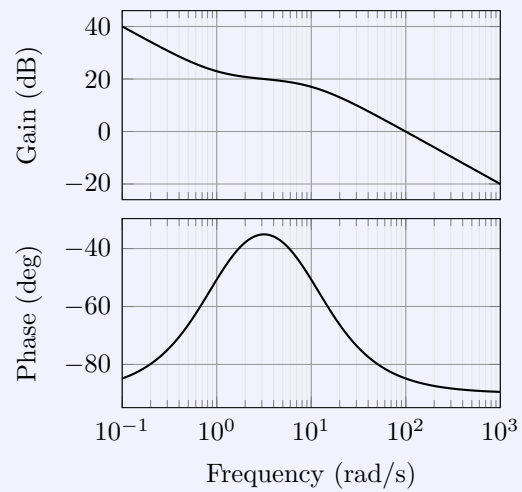
解:

1. 标准形式:  $G(s) = \frac{10}{s(1+0.1s)}$ ,  $K = 10$
2. 环节识别:
  - 积分环节:  $\frac{1}{s}$  ( $v = 1$ )
  - 惯性环节:  $\frac{1}{1+0.1s}$ ,  $T = 0.1$
3. 转折频率:  $\omega_c = \frac{1}{T} = 10 \text{ rad/s}$
4. 幅频特性:
  - 起点:  $L(1) = 20 \text{ dB}$
  - $\omega < 10$ :  $-20 \text{ dB/十倍频}$
  - $\omega > 10$ :  $-40 \text{ dB/十倍频}$
  - 修正:  $-3 \text{ dB @ } \omega = 10$
5. 相频特性:
  - $\phi(\omega) = -90^\circ - \arctan(0.1\omega)$
  - @  $\omega = 10$ :  $\phi = -135^\circ$

例 2: 绘制  $G(s) = \frac{100(s+1)}{s(s+10)}$  的伯德图



## 例 2 求解过程与伯德图



解：

1. 标准形式:  $G(s) = \frac{10(1+s)}{s(1+0.1s)}$ ,  $K = 10$

2. 环节识别:

- 积分环节:  $\frac{1}{s}$
- 一阶零点:  $(1+s)$
- $\omega_{c1} = 1 \text{ rad/s}$
- 一阶极点:  $\frac{1}{1+0.1s}$
- $\omega_{c2} = 10 \text{ rad/s}$

3. 转折频率:  $1 \text{ rad/s}$  (零点),  $10 \text{ rad/s}$  (极点)

4. 幅频特性:

- 低频  $\omega < 1$ :  $-20 \text{ dB/十倍频}$
- 中频  $1 < \omega < 10$ :  $0 \text{ dB/十倍频}$
- 高频  $\omega > 10$ :  $-20 \text{ dB/十倍频}$

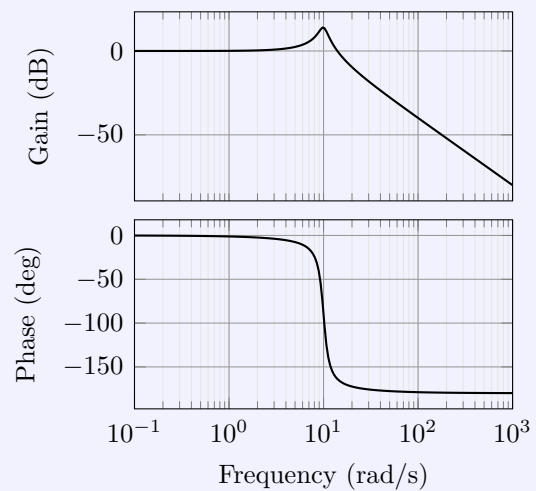
5. 相频特性:

- $\phi(\omega) = -90^\circ + \arctan(\omega)$
- $- \arctan(0.1\omega)$



例 3: 二阶系统  $G(s) = \frac{100}{s^2 + 2s + 100}$

### 例 3 求解过程与伯德图



解:

1. 标准形式:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

2. 参数识别:

- $\omega_n = 10 \text{ rad/s}$
- $\zeta = 0.1$
- 极点:  $-1 \pm 9.95j$

3. 特性分析:

- 转折频率:  $10 \text{ rad/s}$
- $\zeta < 0.707$ , 有谐振
- 谐振频率:  $\approx 9.9 \text{ rad/s}$
- 谐振峰值:  $\approx 5.03$  (14 dB)

#### 17.4.7 快速参考

以下表格是伯德图绘制中各种典型环节的快速参考, 可在考试或实际绘图时查阅。

##### 1. 伯德图绘制规则速查表

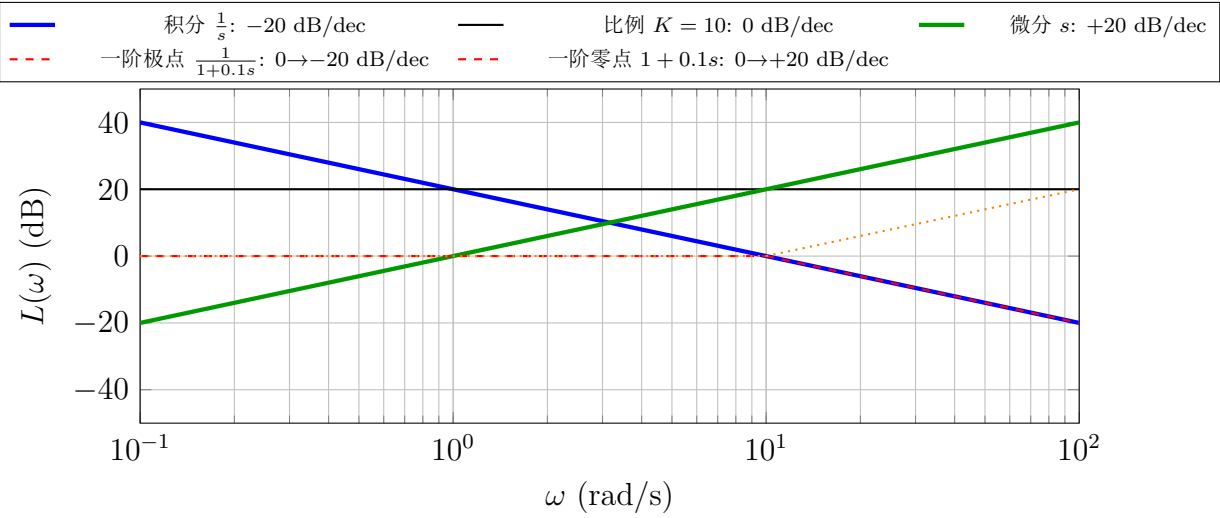


伯德图典型环节速查表				
环节	传递函数	转折频率	幅频斜率	相频
比例	$K$	—	0 dB/dec	$0^\circ/180^\circ$
积分	$\frac{1}{s}$	—	-20 dB/dec	$-90^\circ$
微分	$s$	—	+20 dB/dec	$+90^\circ$
一阶极点	$\frac{1}{1+Ts}$	$\omega_c = \frac{1}{T}$	低频: 0; 高频: -20 dB/dec	$-45^\circ @ \omega_c$
一阶零点	$1 + Ts$	$\omega_c = \frac{1}{T}$	低频: 0; 高频: +20 dB/dec	$+45^\circ @ \omega_c$
二阶极点	$\frac{\omega_n^2}{(s/\omega_n)^2 + 2\zeta(s/\omega_n) + 1}$	$\omega_c = \omega_n$	低频: 0; 高频: -40 dB/dec	$-90^\circ @ \omega_n$
二阶零点	$(s/\omega_n)^2 + 2\zeta(s/\omega_n) + 1$	$\omega_c = \omega_n$	低频: 0; 高频: +40 dB/dec	$+90^\circ @ \omega_n$

快速参考提示：

- 转折点修正：一阶环节修正  $\pm 3$  dB，二阶环节修正  $\pm 6$  dB
- 极点：幅频向下（负斜率），相频向下（变负）
- 零点：幅频向上（正斜率），相频向上（变正）
- 积分/微分：无转折频率，斜率固定

典型环节斜率可视化对比：





2. 修正值详表

极点与零点总是「互为镜像」的，掌握以下规律能加快绘图速度。

特征	一阶/二阶极点	一阶/二阶零点
斜率变化	负值（衰减）	正值（增强）
相位变化方向	向下（越来越负）	向上（越来越正）
在转折点修正	减少 $\pm 3\text{ dB}$ / $\pm 6\text{ dB}$	增加 $\pm 3\text{ dB}$ / $\pm 6\text{ dB}$
谐振特征	可能出现谐振峰	可能出现谷值

一阶环节（极点和零点）修正值参考

环节	频率点	修正值	说明
一阶极点 $\frac{1}{1+Ts}$	$0.5\omega_c$	$-1\text{ dB}$	稍低于渐近线
	$\omega_c$	$-3\text{ dB}$	精确值
	$2\omega_c$	$-1\text{ dB}$	稍低于渐近线
一阶零点 $1+Ts$	$0.5\omega_c$	$+1\text{ dB}$	稍高于渐近线
	$\omega_c$	$+3\text{ dB}$	精确值
	$2\omega_c$	$+1\text{ dB}$	稍高于渐近线

二阶极点 — 不同阻尼比下的谐振特性

阻尼比 $\zeta$	在 $\omega = \omega_n$ 处	幅值 (dB)	特征分类
$0.1 \sim 0.3$	明显谐振峰	$+3$ 到 $+14\text{ dB}$	强谐振
$0.5$	轻微谐振	$\approx -1\text{ dB}$	中等阻尼
$0.707$	临界点	$-3\text{ dB}$	临界阻尼
$1.0$ 以上	过阻尼	$-6\text{ dB}$ 以下	无谐振

提示：当  $\zeta > 0.707$  时，二阶极点的行为接近两个一阶极点，可用叠加法求解。

17.5 伯德图的应用

17.5.1 由伯德图确定传递函数

根据伯德图的幅频特性，可以反推传递函数。这是伯德图绘制的逆过程。

基本步骤：

1. 从低频渐近线确定系统型别  $v$  和增益  $K$ 
  - 低频渐近线斜率  $= -20v\text{ dB/dec}$ ，确定积分环节数  $v$
  - 低频渐近线（或其延长线）过点  $(1, 20\lg K)$ ，确定增益  $K$



## 2. 从转折频率确定各环节的时间常数

- 一阶环节:  $\omega_c = \frac{1}{T} \implies T = \frac{1}{\omega_c}$
- 二阶环节:  $\omega_c = \omega_n$

## 3. 从斜率变化确定零极点类型

- 斜率增加 +20 dB/dec: 分子一阶 (零点)
- 斜率减少 -20 dB/dec: 分母一阶 (极点)
- 斜率增加 +40 dB/dec: 分子二阶 (零点)
- 斜率减少 -40 dB/dec: 分母二阶 (极点)

## 4. 组合得到传递函数

- 将所有环节相乘得到标准型传递函数

例题: 已知系统的伯德图如下, 求其传递函数。



解题分析：

从给定的伯德图观察：

步骤 1：确定型别和增益

- 低频段斜率： $-20 \text{ dB/dec}$
- 系统型别： $v = 1$  (I 型系统)
- 延长低频线过点  $(1, 40) \text{ dB}$
- 增益： $K = 10^{40/20} = 100$

步骤 2-3：识别转折频率和环节

- $\omega_1 = 1 \text{ rad/s}$ : 斜率从  $-20$  变为  $0$ 
  - 变化： $+20 \text{ dB/dec}$
  - 环节：分子一阶零点  $(1 + s)$
- $\omega_2 = 10 \text{ rad/s}$ : 斜率从  $0$  变为  $-20$ 
  - 变化： $-20 \text{ dB/dec}$
  - 环节：分母一阶极点  $\frac{1}{1+0.1s}$

步骤 4：组合传递函数

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{K(1+s)}{s(1+0.1s)} \\ &= \frac{100(s+1)}{s(s+10)} \end{aligned}$$

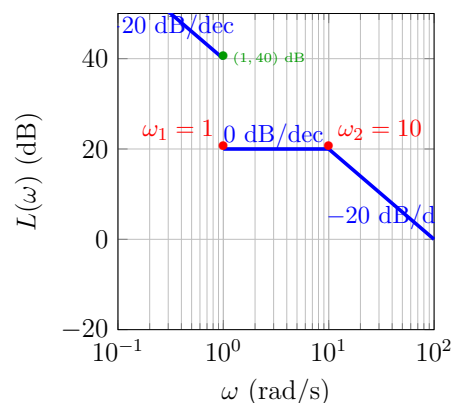
验证：

- 低频段： $L(1) = 20 \lg 100 - 20 = 40 \text{ dB}$
- 转折频率： $1, 10 \text{ rad/s}$
- 最终斜率： $-20(2-1) = -20 \text{ dB/dec}$

关键技巧总结：

- 低频段是关键：从低频渐近线可以确定  $K$  和  $v$
- 转折频率即环节参数：直接读出时间常数或自然频率

伯德图（已知）：





- 斜率变化即环节类型： $\pm 20$  是一阶， $\pm 40$  是二阶；正号是零点，负号是极点
- 最终验证很重要：检查分子分母阶次与最终斜率是否匹配

### 17.5.2 稳定性分析

伯德图可以直观地分析闭环系统的稳定性，通过增益裕度和相位裕度来量化稳定裕量。

增益裕度 (Gain Margin, GM):

$$GM = -L(\omega_g) \text{ dB}$$

其中  $\omega_g$  为相位穿越频率 ( $\phi(\omega_g) = -180^\circ$ )

物理意义：系统增益可以增加多少倍而不失稳

相位裕度 (Phase Margin, PM):

$$PM = 180^\circ + \phi(\omega_c)$$

其中  $\omega_c$  为剪切频率 (增益穿越频率,  $L(\omega_c) = 0$  dB)

物理意义：相位可以再滞后多少度而不失稳

稳定性判据:

- 稳定条件:  $GM > 0 \text{ dB}$  且  $PM > 0^\circ$
- 一般要求:  $GM \geq 6 \text{ dB}$ ,  $PM \geq 30^\circ$
- 良好性能:  $GM \geq 10 \text{ dB}$ ,  $PM \geq 45^\circ$

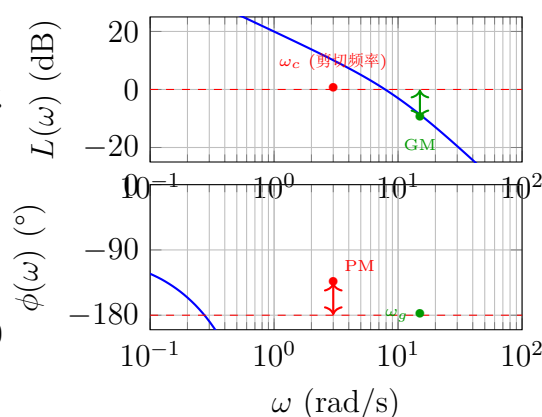
裕度与性能的关系:

- $PM \approx 45^\circ$ : 超调量  $\sigma\% \approx 20\%$
- $PM \approx 60^\circ$ : 超调量  $\sigma\% \approx 10\%$
- $PM$  越大，系统越稳定，但响应越慢
- $GM$  和  $PM$  越大，系统对参数变化越不敏感

例题：求系统  $G(s) = \frac{10}{s(1+0.1s)}$  的增益裕度和相位裕度。

解：

裕度图示:



示例:  $G(s) = \frac{10}{s(1+0.1s)}$  的裕度标注



### 1. 求剪切频率 $\omega_c$ ( $L(\omega_c) = 0$ dB)

$$L(\omega) = 20 \lg 10 - 20 \lg \omega - 20 \lg \sqrt{1 + 0.01\omega^2} = 0$$

$$\text{近似: } \omega < 10 \text{ 时, } L(\omega) \approx 20 - 20 \lg \omega = 0$$

$$\implies \omega_c \approx 10 \text{ rad/s}$$

### 2. 计算相位裕度

$$\phi(\omega_c) = -90^\circ - \arctan(0.1 \times 10) = -90^\circ - 45^\circ = -135^\circ$$

$$\text{PM} = 180^\circ + \phi(\omega_c) = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$$

### 3. 求相位穿越频率 $\omega_g$ ( $\phi(\omega_g) = -180^\circ$ )

$$\phi(\omega_g) = -90^\circ - \arctan(0.1\omega_g) = -180^\circ$$

$$\arctan(0.1\omega_g) = 90^\circ \implies \omega_g \rightarrow \infty$$

该系统相位永远不会达到  $-180^\circ$ ，所以  $\text{GM} = \infty$  dB

结论：PM =  $45^\circ$ （良好），GM =  $\infty$ （极稳定）。系统稳定，性能良好。

### 17.5.3 性能指标估算

频域性能指标与时域性能指标有密切关系，可从伯德图直接估算系统的动态性能。



### 1. 带宽频率 $\omega_b$

闭环幅频特性  $|M(\omega)|$  下降到  $-3$  dB (即 0.707) 时对应的频率。

物理意义：

- 系统能够有效跟踪输入信号的最高频率
- 带宽越大，系统响应越快
- 近似关系：上升时间  $t_r \approx \frac{1.8}{\omega_b}$

估算方法：

- 开环  $\omega_c$  近似等于闭环  $\omega_b$
- 精确计算需用闭环频率响应

### 2. 谐振峰值 $M_r$

闭环幅频特性的最大值  $M_r = \max |M(\omega)|$ 。

物理意义：

- 反映系统的相对稳定性
- $M_r$  越大，系统阻尼越小，超调越大
- 典型关系：
  - $M_r = 1.0$  (0 dB):  $\sigma\% = 0\%$  ( $\zeta = 1$ )
  - $M_r = 1.3$  (2.3 dB):  $\sigma\% \approx 30\%$  ( $\zeta = 0.4$ )
  - $M_r = 1.6$  (4 dB):  $\sigma\% \approx 50\%$  ( $\zeta = 0.3$ )
- 设计要求：一般要求  $M_r \leq 1.3$  (即  $\leq 2.3$  dB)

### 3. 相位裕度与超调量

经验公式 (适用于二阶主导极点系统)：

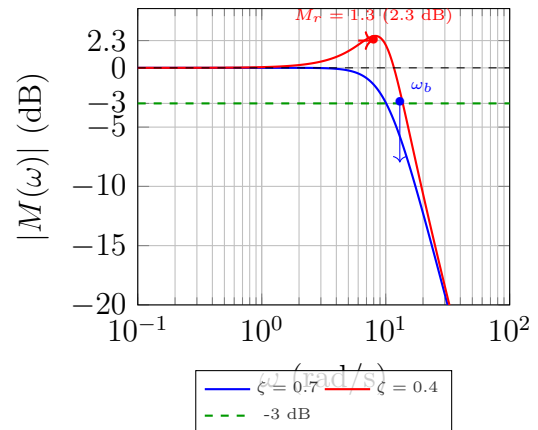
$$\sigma\% \approx 100 \cdot e^{-\frac{\pi PM}{180^\circ \sqrt{1+(PM/180^\circ)^2}}}$$

$$\zeta \approx \frac{PM}{100^\circ}$$

常用对应关系：

- $PM = 30^\circ \Rightarrow \sigma\% \approx 40\%$
- $PM = 45^\circ \Rightarrow \sigma\% \approx 20\%$

性能指标图示：



闭环幅频特性示例 ( $\omega_n = 10$  rad/s)

### 4. 低频增益与稳态精度

低频段幅值反映系统的稳态性能：

- **0 型系统**：低频增益有限，位置误差有限
- **I 型系统**：低频段斜率  $-20$  dB/dec，位置误差为 0
- **II 型系统**：低频段斜率  $-40$  dB/dec，速度误差为 0

### 5. 中频段特性与稳定性

- 斜率  $-20$  dB/dec：系统一般稳定
- 斜率  $-40$  dB/dec：需检查相位裕度
- 斜率  $-60$  dB/dec：通常不稳定

理想中频段特性：

- 斜率： $-20$  dB/dec
- 跨度：1.5-2 个十倍频
- 剪切频率  $\omega_c$  选择合适的 (满足带宽和稳定性要求)



例题：根据开环伯德图估算闭环系统性能指标。

已知单位反馈系统开环传递函数  $G(s) = \frac{100}{s(1+0.1s)}$ ，从伯德图估算闭环性能。

解：

### 1. 求剪切频率（开环）

$$L(\omega) = 40 - 20 \lg \omega - 20 \lg \sqrt{1 + 0.01\omega^2} = 0$$

近似求解： $\omega_c \approx 10 \text{ rad/s}$

### 2. 估算带宽（闭环）

$$\omega_b \approx \omega_c = 10 \text{ rad/s} \implies \text{上升时间 } t_r \approx \frac{1.8}{10} = 0.18 \text{ s}$$

### 3. 计算相位裕度

$$\phi(\omega_c) = -90^\circ - \arctan(1) = -135^\circ \implies \text{PM} = 45^\circ$$

### 4. 估算超调量

由  $\text{PM} = 45^\circ$  查表或用公式： $\sigma\% \approx 20\%$

等效阻尼比： $\zeta \approx 0.45$

### 5. 估算谐振峰值

$$M_r \approx \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{1}{2 \times 0.45 \times 0.89} \approx 1.25 \implies 1.9 \text{ dB}$$

结论： $\omega_b = 10 \text{ rad/s}$ ， $t_r \approx 0.18 \text{ s}$ ， $\sigma\% \approx 20\%$ ， $M_r \approx 1.25$ （性能良好）

## 18 控制器设计与校正

### 18.1 概述

控制器设计（或称系统校正）是指通过设计合适的补偿器（校正器），使闭环系统满足性能指标要求。常见的性能指标包括相位裕度（PM）、增益裕度（GM）、稳态误差、响应速度等。

#### 18.1.1 超前校正

超前校正用于提高系统的相位裕度，改善稳定性和快速性，但不改善稳态精度。

超前校正器传递函数：

$$G_c(s) = K_c \frac{1 + \alpha Ts}{1 + Ts}, \quad \alpha > 1$$

其中： $K_c$  为补偿增益， $\alpha$  为超前比， $T$  为时间常数。



频率特性：

1. 转折频率：

- 低频转折点： $\omega_1 = \frac{1}{\alpha T}$ （零点）
- 高频转折点： $\omega_2 = \frac{1}{T}$ （极点）
- 关系： $\omega_2 = \alpha \omega_1$

2. 最大相位超前角：

$$\phi_m = \arcsin \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$$

$$\text{对应频率：} \omega_m = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}} = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$$

3. 幅值特性：

- 在  $\omega_m$  处增益： $20 \lg \sqrt{\alpha}$  dB
- 高频增益： $20 \lg(\alpha K_c)$  dB

设计步骤：

步骤 1：确定所需相位超前量

$$\phi_m = PM_d - PM_0 + (5^\circ \sim 15^\circ)$$

其中  $PM_d$  为期望相位裕度， $PM_0$  为原系统相位裕度， $5^\circ$ - $15^\circ$  为补偿量。

步骤 2：计算超前比

$$\alpha = \frac{1 + \sin \phi_m}{1 - \sin \phi_m}$$

步骤 3：确定新剪切频率  $\omega'_c$

使原系统在  $\omega'_c$  处的增益为  $-20 \lg \sqrt{\alpha}$  dB。

步骤 4：计算时间常数

$$T = \frac{1}{\omega'_c \sqrt{\alpha}}$$

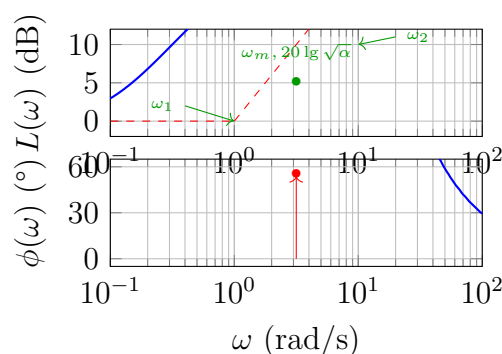
步骤 5：选择补偿增益  $K_c$  使低频增益满足要求。

例题：系统  $G(s) = \frac{4}{s(s+1)(0.5s+1)}$ ，要求  $PM \geq 45^\circ$ ，设计超前校正器。

解：

1. 分析原系统

超前校正器伯德图：



示例： $\alpha = 10$ ， $T = 0.316$ ， $\phi_m \approx 55^\circ$

超前校正的作用：

- 增加相位裕度：提高稳定性
- 提高剪切频率：加快响应速度
- 减小超调量：改善动态性能
- 不改善稳态精度：低频增益不变

注意事项：

- 通常  $\alpha < 20$  ( $\phi_m < 65^\circ$ )
- $\alpha$  过大会导致高频噪声放大
- 需在  $\omega_m$  处补偿增益损失



开环截止频率  $\omega_c \approx 1.6 \text{ rad/s}$ , 相位裕度  $\text{PM}_0 = 180^\circ - 90^\circ - 58^\circ - 38^\circ \approx -6^\circ$  (不稳定)

## 2. 确定所需相位超前量

$$\phi_m = 45^\circ - (-6^\circ) + 10^\circ = 61^\circ \text{ (取补偿量 } 10^\circ \text{)}$$

## 3. 计算超前比

$$\alpha = \frac{1+\sin 61^\circ}{1-\sin 61^\circ} = \frac{1.875}{0.125} = 15$$

## 4. 确定新剪切频率

原系统在  $\omega'_c$  处增益应为  $-20 \lg \sqrt{15} \approx -11.8 \text{ dB}$

从伯德图找到:  $\omega'_c \approx 2.5 \text{ rad/s}$

## 5. 计算时间常数

$$T = \frac{1}{\omega'_c \sqrt{\alpha}} = \frac{1}{2.5 \times \sqrt{15}} \approx 0.103$$

## 6. 校正器传递函数

$$G_c(s) = \frac{1+1.545s}{1+0.103s} \text{ (取 } K_c = 1 \text{)}$$

验证: 校正后  $\text{PM} \approx 45^\circ$ , 满足要求。

### 18.1.2 滞后校正

滞后校正用于提高系统的稳态精度, 同时保持或略微改善稳定性, 但会降低响应速度。

滞后校正器传递函数:

$$G_c(s) = K_c \frac{1+Ts}{1+\beta Ts}, \quad \beta > 1$$

其中:  $K_c$  为补偿增益,  $\beta$  为滞后比,  $T$  为时间常数。



## 频率特性：

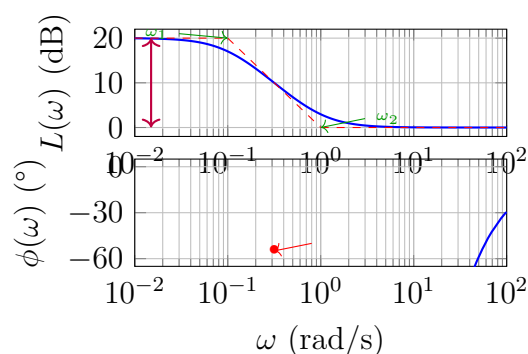
## 1. 转折频率：

- 低频转折点： $\omega_1 = \frac{1}{\beta T}$ （极点）
- 高频转折点： $\omega_2 = \frac{1}{T}$ （零点）
- 关系： $\omega_2 = \beta \omega_1$

## 2. 相位滞后角：

- 最大滞后角： $\phi_{\min} = -\arcsin \frac{\beta-1}{\beta+1}$ （负值）
- 对应频率： $\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{\beta}} = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$
- 特点：相位滞后，但幅值低频增加

## 滞后校正器伯德图：



示例： $\beta = 10, K_c = 10, T = 1$

## 滞后校正的作用：

## 3. 幅值特性：

- 低频增益： $20 \lg(K_c)$  dB（通常取  $K_c = \beta$ ）
- 高频增益： $20 \lg(K_c/\beta)$  dB
- 低频段提升： $20 \lg \beta$  dB

- 提高低频增益：改善稳态精度
- 保持稳定性：相位裕度基本不变或略增
- 降低响应速度：剪切频率降低
- 抑制高频噪声：高频衰减特性

## 设计步骤：

步骤 1：确定所需低频增益提升量

根据稳态误差要求确定  $\beta$ ：

$$20 \lg \beta = \text{所需低频增益提升 (dB)}$$

步骤 2：确定新剪切频率  $\omega'_c$

使新剪切频率满足相位裕度要求（通常比原  $\omega_c$  小）。

步骤 3：选择转折频率

使滞后环节在  $\omega'_c$  处影响很小：

$$\omega_2 = \frac{1}{T} = \frac{\omega'_c}{5 \sim 10}$$

步骤 4：计算时间常数

$$T = \frac{5 \sim 10}{\omega'_c}, \quad \beta = \text{由步骤 1 确定}$$

步骤 5：通常取  $K_c = \beta$  以保持原剪切频率附近增益。

## 注意事项：

- $\omega_2$  应远小于  $\omega'_c$ （通常  $\omega_2 \leq \omega'_c/5$ ）
- 避免在中频段引入过多相位滞后
- 适用于原系统相位裕度已满足要求的情况



**例题：**系统  $G(s) = \frac{K}{s(s+1)(0.2s+1)}$ ， $K = 5$  时  $PM = 50^\circ$ ，要求稳态速度误差系数  $K_v = 50 \text{ s}^{-1}$ ，设计滞后校正器。

解：

### 1. 确定所需增益提升

原系统： $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G(s) = 5$

所需提升： $\beta = \frac{50}{5} = 10 \implies 20 \lg \beta = 20 \text{ dB}$

### 2. 分析原系统

$K = 5$  时， $\omega_c \approx 1.5 \text{ rad/s}$ ， $PM = 50^\circ$ （满足要求）

### 3. 选择新剪切频率

为保持  $PM \approx 50^\circ$ ，希望滞后环节对  $\omega_c$  影响小，选择  $\omega'_c \approx \omega_c = 1.5 \text{ rad/s}$

### 4. 确定转折频率

$\omega_2 = \frac{\omega'_c}{10} = 0.15 \text{ rad/s} \implies T = \frac{1}{\omega_2} = 6.67 \text{ s}$

$\omega_1 = \frac{\omega_2}{\beta} = 0.015 \text{ rad/s}$

### 5. 滞后校正器

$G_c(s) = 10 \cdot \frac{1+6.67s}{1+66.7s}$

### 6. 校正后系统

$G_c(s)G(s) = \frac{50(1+6.67s)}{s(s+1)(0.2s+1)(1+66.7s)}$ ， $K_v = 50 \text{ s}^{-1}$ ， $PM \approx 48^\circ$ （满足）

验证：稳态精度提高 10 倍，稳定性基本保持。

## 18.1.3 超前-滞后综合校正

当系统既需要改善稳态精度，又需要提高稳定性和快速性时，采用超前-滞后综合校正。

综合校正器传递函数：

$$G_c(s) = K_c \cdot \frac{(1 + \alpha T_1 s)(1 + T_2 s)}{(1 + T_1 s)(1 + \beta T_2 s)}, \quad \alpha > 1, \beta > 1$$



**结构分析：**

综合校正器 = 超前部分  $\times$  滞后部分

**1. 超前部分：**  $\frac{1+\alpha T_1 s}{1+T_1 s}$ 

- 转折频率： $\omega'_1 = \frac{1}{\alpha T_1}$ ,  $\omega'_2 = \frac{1}{T_1}$
- 作用：提供相位超前，提高 PM

**2. 滞后部分：**  $K_c \frac{1+T_2 s}{1+\beta T_2 s}$ 

- 转折频率： $\omega''_1 = \frac{1}{\beta T_2}$ ,  $\omega''_2 = \frac{1}{T_2}$
- 作用：提高低频增益，改善稳态精度

**3. 频段分离：**

- 滞后部分在低频段起作用 ( $\omega < \omega_c/10$ )
- 超前部分在中频段起作用 ( $\omega \approx \omega_c$ )
- 两部分互不干扰： $\omega''_2 \ll \omega'_1$

**设计步骤：**

**步骤 1：** 根据稳态误差要求确定  $\beta$

**步骤 2：** 根据动态性能要求确定  $\alpha$  和超前角

$\phi_m$

**步骤 3：** 设计滞后部分

- 确定新剪切频率  $\omega'_c$  (考虑  $\beta$  引起的增益提升)
- 选择  $\omega''_2 = \omega'_c/10$ , 计算  $T_2$

**步骤 4：** 设计超前部分

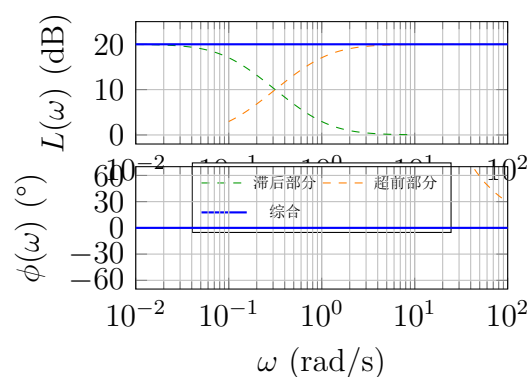
- 在  $\omega'_c$  处提供所需相位超前  $\phi_m$
- 计算  $\alpha$  和  $T_1$

**步骤 5：** 选择  $K_c$  调整总增益

**步骤 6：** 验证校正后系统性能

**例题：** 系统  $G(s) = \frac{K}{s(s+1)(0.5s+1)}$ ,  $K = 4$ , 要求  $K_v = 20 \text{ s}^{-1}$ ,  $\text{PM} \geq 45^\circ$ 。原系统  $\text{PM} \approx 17^\circ$ 。设计综合校正器。

**解：**

**综合校正器伯德图：**

滞后  $\beta = 10$ , 超前  $\alpha = 10$

**综合校正的特点：**

- 兼顾稳态和动态：同时改善精度和稳定性
- 设计灵活：可独立调整两部分参数
- 应用广泛：适用于性能要求全面的系统
- 参数较多：需要仔细设计和调试

**三种校正方式比较：**

校正方式	稳态精度	动态性能	适用场合
超前	不变	改善	PM 不足, 精度满足
滞后	提高	略降	PM 满足, 精度不足
超前-滞后	提高	改善	精度和 PM 均不足



### 1. 确定所需增益提升（滞后部分）

$$\beta = \frac{20}{4} = 5 \implies 20 \lg \beta = 14 \text{ dB}$$

### 2. 确定所需相位超前（超前部分）

$$\text{所需: } \phi_m = 45^\circ - 17^\circ + 10^\circ = 38^\circ \implies \alpha = \frac{1 + \sin 38^\circ}{1 - \sin 38^\circ} \approx 4.2$$

### 3. 设计滞后部分

原  $\omega_c \approx 1.5 \text{ rad/s}$ , 增益提升后新  $\omega'_c \approx 3 \text{ rad/s}$

$$\text{选择: } \omega''_2 = 0.3 \text{ rad/s} \implies T_2 = 3.33 \text{ s}$$

$$\omega'_1 = \omega''_2 / \beta = 0.06 \text{ rad/s}$$

$$\text{滞后部分: } G_{c1}(s) = 5 \cdot \frac{1 + 3.33s}{1 + 16.65s}$$

### 4. 设计超前部分

在  $\omega'_c = 3 \text{ rad/s}$  处提供  $38^\circ$  相位超前

$$T_1 = \frac{1}{\omega'_c \sqrt{\alpha}} = \frac{1}{3 \times 2.05} \approx 0.163 \text{ s}$$

$$\omega'_1 = \frac{1}{\alpha T_1} = 1.46 \text{ rad/s}, \quad \omega'_2 = \frac{1}{T_1} = 6.13 \text{ rad/s}$$

$$\text{超前部分: } G_{c2}(s) = \frac{1 + 0.68s}{1 + 0.163s}$$

### 5. 综合校正器

$$G_c(s) = 5 \cdot \frac{(1 + 0.68s)(1 + 3.33s)}{(1 + 0.163s)(1 + 16.65s)}$$

验证: 校正后  $K_v = 20 \text{ s}^{-1}$ ,  $\text{PM} \approx 45^\circ$ , 满足要求。

## Part II

# 现代控制理论

## 19 状态空间表达式及其建立

### 引言：从输入输出到内部状态

当你使用手机时，你只关心按下按钮后屏幕的响应——这是**输入输出关系**。但手机内部 CPU 有数十亿晶体管，每个晶体管的状态（开或关）共同决定了系统的行为。这些内部状态对用户不可见，却是理解和设计系统的关键。

**经典控制理论的局限：**传统的频域方法（传递函数、频率响应）只关注系统的外部行为——输入如何影响输出。这种方法对于简单的单输入单输出（SISO）系统非常有效，但面对现代工程中的复杂系统时遇到了困难：

- **多变量系统：**飞机有多个控制面（副翼、升降舵、方向舵），如何协调控制？
- **初始条件：**火箭发射时的初始状态（位置、速度）如何影响轨迹？传递函数假设初始条件为零，无法处理这类问题。



- **时变与非线性**：卫星轨道随时间变化，机器人关节有摩擦非线性，传递函数方法难以适用。

**现代控制理论的突破**：20 世纪 60 年代，卡尔曼（Kalman）等学者提出了**状态空间方法**（State Space Approach），将系统的**内部状态**显式地纳入描述。这种方法不仅能处理多变量系统，还为最优控制、自适应控制等高级主题奠定了基础。

**本章的核心目标**：

- **理解状态的概念**：为什么需要它？它代表什么？
- **掌握状态空间表达式**：现代控制理论的标准数学语言
- **学会建立状态空间模型**：从物理系统到数学描述
- **认识状态选择的非唯一性**：同一系统可以有不同的状态描述

**章节路线图**：

1. 状态的基本概念（什么是状态？为什么需要状态？）
2. 状态空间表达式的标准形式（数学框架）
3. 建立方法与实例（从物理规律到状态方程）
4. 状态选择的多样性（同一系统的不同描述）

## 19.1 状态空间的基本概念

**本节目的**

在引入严格的数学定义之前，我们需要建立对「状态」的直观理解：它是什么？为什么需要它？如何选择它？

### 19.1.1 状态的定义与物理意义

**状态的严格定义**：

**状态（State）**是系统在某一时刻的**最少信息集合**，它能够与输入一起，**唯一确定**系统未来的行为。

**通俗解释**：

- **最少信息**：不多不少，恰好够用。比如描述单摆运动，需要角度和角速度两个量，缺一不可。
- **唯一确定未来**：给定当前状态  $x(t_0)$  和未来的输入  $u(t)$ ，就能计算出任意未来时刻  $t > t_0$  的状态  $x(t)$ 。



- 与历史无关：只要知道当前状态，就不需要知道系统过去的轨迹。这是马尔可夫性质。

相关概念：

- 状态变量 (State Variables)：描述系统状态的一组变量，记为  $x_1, x_2, \dots, x_n$ 。
- 状态向量 (State Vector)：由状态变量组成的列向量：

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

- 状态空间 (State Space)：以状态变量为坐标轴的  $n$  维欧几里得空间  $\mathbb{R}^n$ 。系统在某一时刻的状态对应状态空间中的一个点，系统的演化对应状态空间中的一条轨迹。

### 19.1.2 状态的物理意义：能量存储的视角

核心洞察：在物理系统中，状态变量通常与能量存储元件相关。

- 电路系统：
  - 电容电压  $v_C$ ：存储电场能量  $E = \frac{1}{2}CV_C^2$
  - 电感电流  $i_L$ ：存储磁场能量  $E = \frac{1}{2}LI_L^2$
- 机械系统：
  - 位置  $x$ ：存储势能（如弹簧） $E = \frac{1}{2}kx^2$
  - 速度  $v$ ：存储动能  $E = \frac{1}{2}mv^2$
- 热力学系统：温度、压力（存储热能）
- 化学系统：浓度（存储化学能）

为什么能量存储很重要？因为能量不能瞬间改变——电容电压不能突变（需要充电时间），质量速度不能突变（需要加速度）。正是这些能量存储机制使得系统具有动态特性，而状态变量就是描述这些动态的数学工具。

实用原则：

系统的状态变量个数  $n$  = 独立能量存储元件个数

例如，一个包含 2 个电容和 3 个电感的电路，通常有  $n = 5$  个状态变量。



## 19.2 状态空间表达式的标准形式

### 本节目的

建立状态空间方法的数学框架——这是现代控制理论的标准语言。

### 19.2.1 线性定常系统的状态空间表达式

标准形式：

对于线性时不变（LTI, Linear Time-Invariant）系统，状态空间表达式由两个方程组成：

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (\text{状态方程}) \quad (12)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (\text{输出方程}) \quad (13)$$

各变量的含义：

- $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ：状态向量（ $n$  个状态变量）
- $u(t) \in \mathbb{R}^p$ ：输入向量（ $p$  个控制输入）
- $y(t) \in \mathbb{R}^q$ ：输出向量（ $q$  个可测量输出）
- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ：系统矩阵（描述系统自身动态）
- $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ：输入矩阵（描述输入如何影响状态）
- $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$ ：输出矩阵（描述哪些状态可测量）
- $D \in \mathbb{R}^{q \times p}$ ：前馈矩阵（描述输入到输出的直接传递）

方程的物理意义：

- 状态方程 (12)：描述状态如何随时间演化。 $\dot{x}$  是状态的变化率，由当前状态  $x$  和输入  $u$  共同决定。

状态方程回答：「系统下一时刻会变成什么样？」

- 输出方程 (13)：描述哪些量是可观测的。并非所有状态都能直接测量（如电机内部温度），输出方程告诉我们能测到什么。

输出方程回答：「我们能看到什么？」

关键特性：

- 线性：方程右边是  $x$  和  $u$  的线性组合（没有  $x^2$ ,  $\sin(x)$  等非线性项）
- 定常：矩阵  $A, B, C, D$  不随时间变化（系统参数恒定）
- 因果性：当前输出只依赖于当前状态和输入，不依赖未来



### 19.2.2 系统矩阵的作用分解

为了更深入理解，我们可以将状态方程  $\dot{x} = Ax + Bu$  写成分量形式：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix}$$

矩阵元素的物理意义：

- $a_{ij}$ ：状态  $x_j$  对状态  $x_i$  变化率的影响系数（**状态耦合**）
- $b_{ij}$ ：输入  $u_j$  对状态  $x_i$  变化率的影响系数（**控制增益**）
- $c_{ij}$ ：状态  $x_j$  对输出  $y_i$  的贡献系数（**观测增益**）
- $d_{ij}$ ：输入  $u_j$  对输出  $y_i$  的直接影响（**前馈项**，物理系统中常为零）

直观理解：

- $A$  矩阵的对角元  $a_{ii}$  描述状态  $x_i$  自身的衰减或增长
- $A$  矩阵的非对角元  $a_{ij}$  描述状态之间的相互作用
- $B$  矩阵的第  $i$  行描述哪些输入能影响状态  $x_i$
- $C$  矩阵的第  $i$  行描述输出  $y_i$  由哪些状态组成

## 19.3 状态空间表达式的建立方法

本节目的

将物理系统转化为状态空间描述的系统性方法——从牛顿定律、基尔霍夫定律到状态方程。

### 19.3.1 建立步骤

标准流程：

#### 1. 根据物理规律建立系统的微分方程

- 机械系统：牛顿第二定律  $F = ma$
- 电路系统：基尔霍夫电压定律（KVL）、电流定律（KCL）
- 热力学系统：能量守恒定律



## 2. 选择状态变量

- 原则：选择独立能量存储元件的相关变量
- 电路：电容电压、电感电流
- 机械：位置、速度（对于二阶系统）
- 注意：状态变量必须线性独立

## 3. 将高阶微分方程化为一阶微分方程组

- 引入中间变量降阶
- 整理成  $\dot{x} = Ax + Bu$  的形式

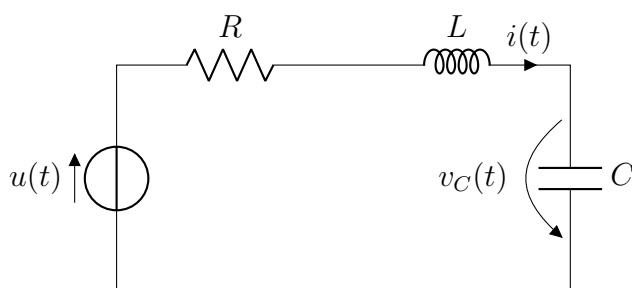
## 4. 写出输出方程

- 确定哪些量是可测量的
- 用状态变量表示输出：  $y = Cx + Du$

### 19.3.2 范例 1：RLC 串联电路

系统描述：

考虑如图所示的 RLC 串联电路，输入为电压源  $u(t)$ ，输出为电容电压  $y(t) = v_C(t)$ 。



#### 步骤 1：建立微分方程

根据基尔霍夫电压定律（KVL）：

$$u(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + v_C(t)$$

根据电容的伏安关系：

$$i(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}$$

#### 步骤 2：选择状态变量

系统有两个能量存储元件（电感和电容），因此选择  $n = 2$  个状态变量：

$$x_1(t) = v_C(t) \quad (\text{电容电压}), \quad x_2(t) = i(t) \quad (\text{电感电流})$$



**步骤 3：建立状态方程**

对电容电压求导：

$$\dot{x}_1 = \frac{dv_C}{dt} = \frac{i}{C} = \frac{1}{C}x_2$$

对电感电流求导，从 KVL 方程得：

$$\dot{x}_2 = \frac{di}{dt} = \frac{1}{L}(u - Ri - v_C) = -\frac{1}{L}x_1 - \frac{R}{L}x_2 + \frac{1}{L}u$$

写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u$$

**步骤 4：输出方程**

输出为电容电压：

$$y = v_C = x_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

最终结果：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

物理意义解读：

- $a_{12} = \frac{1}{C}$ ：电感电流增大使电容电压上升（充电）
- $a_{21} = -\frac{1}{L}$ ：电容电压增大使电感电流减小（反向电动势）
- $a_{22} = -\frac{R}{L}$ ：电阻导致电流自然衰减
- $b_2 = \frac{1}{L}$ ：输入电压直接驱动电感电流变化

**19.3.3 范例 2：质量-弹簧-阻尼系统**

系统描述：

质量  $m$  通过弹簧（刚度  $k$ ）和阻尼器（阻尼系数  $c$ ）连接到固定端，外力  $u(t)$  作用在质量上。

**步骤 1：建立微分方程**

根据牛顿第二定律：

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = u(t)$$

**步骤 2：选择状态变量**

这是二阶系统，选择位置和速度作为状态：

$$x_1 = x \quad (\text{位置}), \quad x_2 = \dot{x} \quad (\text{速度})$$



**步骤 3：降阶为一阶方程组**

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{x} = \frac{1}{m}(u - cx_2 - kx_1) = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 + \frac{1}{m}u \end{cases}$$

矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u$$

**步骤 4：输出方程**

假设输出为位置：

$$y = x_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

观察：二阶系统的标准模式

注意到  $A$  矩阵的结构：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \end{bmatrix}$$

其中  $\omega_n = \sqrt{k/m}$  是固有频率， $\zeta = c/(2\sqrt{km})$  是阻尼比。这是二阶系统的能控标准型。

**19.4 状态选择的非唯一性****本节目的**

认识到同一系统可以有无穷多种状态空间描述——理解这种非唯一性及其影响。

**19.4.1 核心问题**

**关键洞察：**对于同一物理系统，状态变量的选择**不是唯一的**。不同的状态选择会导致不同的矩阵  $(A, B, C, D)$ ，但它们描述的是**同一系统**。

**为什么会有非唯一性？**

状态是描述系统的**坐标系**，就像地理位置可以用经纬度、也可以用直角坐标描述一样。数学上，不同的状态选择通过**线性变换**联系：

$$\bar{x} = Tx, \quad T \text{ 为可逆矩阵}$$

**什么保持不变？**

虽然矩阵  $(A, B, C, D)$  会变，但系统的本质特性不变：

- **特征值（极点）：**决定稳定性和响应速度
- **能控性：**能否通过输入控制所有状态
- **能观性：**能否从输出推断所有状态
- **传递函数：**输入输出关系



### 19.4.2 范例：同一 RLC 电路的不同状态选择

回到前面的 RLC 电路，我们还可以做不同的状态选择。

方案 1（前面已用）： $x_1 = v_C, x_2 = i$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}$$

方案 2：引入电感磁链  $\lambda = Li$  作为状态

选择  $\bar{x}_1 = v_C, \bar{x}_2 = \lambda = Li$ ，则：

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = \frac{i}{C} = \frac{1}{LC}\bar{x}_2 \\ \dot{\bar{x}}_2 = L\dot{i} = u - Ri - v_C = -\bar{x}_1 - \frac{R}{L}\bar{x}_2 + u \end{cases}$$

得到新的系统矩阵：

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{LC} \\ -1 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}$$

方案 3：能量坐标（高级）

选择  $z_1 = \sqrt{\frac{C}{L}}v_C, z_2 = \sqrt{L}i$ ，这是归一化的能量坐标。

三种方案的比较：

特性	方案 1	方案 2	方案 3
物理直观			
数值稳定性	依赖参数	依赖参数	
特征值		相同	
传递函数		相同	

实际选择原则：

- 物理意义清晰：便于理解和调试（工程首选）
- 数值稳定性：矩阵元素量级相近，避免病态问题
- 标准型：便于分析和控制器设计（理论分析首选）
- 测量可行性：选择可直接或间接测量的变量

## 本章总结

### 核心要点

1. 状态的本质：系统在某时刻确定未来行为所需的最少信息，通常与能量存储相关。



## 2. 状态空间表达式：现代控制理论的标准语言

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du$$

## 3. 建立方法：物理规律 $\rightarrow$ 微分方程 $\rightarrow$ 状态选择 $\rightarrow$ 一阶方程组 $\rightarrow$ 输出方程

## 4. 非唯一性：状态选择不唯一，但系统本质特性（特征值、能控性、能观性、传递函数）不变。

### 与其他章节的联系

- **第 20 章**：如何从状态空间表达式求传递函数？两种描述方法如何转换？
- **第 21 章**：线性变换如何联系不同的状态描述？
- **第 22 章**：如何求解状态方程，得到系统的时间响应？
- **第 23 章**：能控性和能观性——系统可控和可观测的充要条件
- **第 29 章**：状态反馈控制——如何设计反馈增益  $K$  使  $u = -Kx$  达到期望性能？

### 常见误区与澄清

1. **误区**：状态就是输出。  
**澄清**：状态是内部变量，输出是可测量的外部变量。例如，电机的内部温度是状态，但不一定是输出。
2. **误区**：状态变量个数等于微分方程阶数。  
**澄清**：通常是这样，但要注意约束条件。如果变量间有代数约束（如  $x_1 + x_2 = 0$ ），实际自由度会减少。
3. **误区**：矩阵  $D$  总是零。  
**澄清**：多数物理系统  $D = 0$ （输入不直接影响输出），但某些系统（如带前馈的控制系统） $D \neq 0$ 。
4. **误区**：不同的状态选择导致不同的系统。  
**澄清**：它们描述的是**同一系统**，只是坐标系不同。就像同一个向量用不同基表示，向量本身没变。

### MATLAB 工具箱



```
1 % 创建状态空间模型
2 A = [0 1; -2 -3];
3 B = [0; 1];
4 C = [1 0];
5 D = 0;
6 sys = ss(A, B, C, D);
7
8 % 查看系统属性
9 pole(sys)           % 系统极点
10 tzero(sys)          % 系统零点
11 dcgain(sys)         % 直流增益
12
13 % 时域仿真
14 t = 0:0.01:10;
15 u = ones(size(t)); % 阶跃输入
16 x0 = [1; 0];       % 初始状态
17 [y, t, x] = lsim(sys, u, t, x0);
18
19 % 绘制状态轨迹
20 figure;
21 plot(x(:,1), x(:,2));
22 xlabel('x_1'); ylabel('x_2');
23 title('State Trajectory');
24 grid on;
```

Listing 1: 状态空间模型的创建与操作

## 学习检查清单

完成本章学习后，你应该能够：

- ☐ 解释状态的概念，并说明为什么需要状态空间方法
- ☐ 写出状态空间表达式的标准形式，并解释各矩阵的物理意义
- ☐ 给定物理系统（电路、机械），能建立其状态空间模型
- ☐ 识别能量存储元件，并合理选择状态变量
- ☐ 理解状态选择的非唯一性，并判断不同描述是否等价
- ☐ 使用 MATLAB 创建和操作状态空间模型



- 区分状态、输入、输出的概念
- 理解状态空间方法相比传递函数的优势

**下一步：**在建立了状态空间模型后，我们需要解决两个核心问题：（1）如何从状态空间得到传递函数？（2）如何求解状态方程？这将在接下来的第 20、22 章中讨论。

## 20 状态空间表达式求传递函数

### 引言：搭建经典与现代的桥梁

你已经掌握了两种系统描述方法：

- **经典方法：**传递函数  $G(s)$ （输入输出关系，代数）
- **现代方法：**状态空间  $(A, B, C, D)$ （内部状态演化，微分方程组）

**现实问题：**

- 已有大量基于传递函数的经典设计工具（根轨迹、频域分析）
- 用状态空间建模后，如何利用这些工具？
- 两种描述能否互相转换？

**本章核心：**从状态空间  $(A, B, C, D)$  推导传递函数  $G(s)$ 。  
**为什么重要？**

1. **工具互通：**用状态空间建模，用传递函数分析
2. **验证模型：**两种方法得到的极点、零点应一致
3. **降维理解：**状态空间是  $n$  维内部结构，传递函数是外部输入输出特性

**本章路线：**

- 单输入单输出（SISO）系统的转换公式
- 多输入多输出（MIMO）系统的传递函数矩阵
- 计算方法与实例
- MATLAB 实现



## 20.1 从状态空间到传递函数

### 20.1.1 基本推导

考虑线性时不变系统：

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

目标：求  $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ （零初始条件）

推导步骤：

对状态方程取拉普拉斯变换（ $x(0) = 0$ ）：

$$sX(s) = AX(s) + BU(s)$$

解出  $X(s)$ ：

$$(sI - A)X(s) = BU(s)$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s)$$

代入输出方程：

$$\begin{aligned} Y(s) &= CX(s) + DU(s) \\ &= C(sI - A)^{-1}BU(s) + DU(s) \\ &= [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s) \end{aligned}$$

传递函数公式：

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

### 20.1.2 公式解读

- $(sI - A)^{-1}$ ：称为解析矩阵或状态转移矩阵（频域）
- $C(sI - A)^{-1}B$ ：状态空间部分的贡献
- $D$ ：直接传输项（输入到输出的直接通路）
- 通常  $D = 0$ （物理系统很少有瞬时响应）

### 20.1.3 计算方法

关键步骤：计算  $(sI - A)^{-1}$

利用矩阵求逆公式：

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)}$$

其中：



- $\det(sI - A)$ : 系统的特征多项式 (传递函数的分母)
- $\text{adj}(sI - A)$ :  $(sI - A)$  的伴随矩阵

## 20.2 单输入单输出 (SISO) 系统

### 20.2.1 标准形式

对于 SISO 系统 ( $u, y$  均为标量):

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{b_ms^m + \cdots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0}$$

关键性质:

- 分母:  $\det(sI - A)$ , 由  $A$  矩阵决定 (系统极点)
- 分子:  $C \cdot \text{adj}(sI - A) \cdot B$ , 由  $A, B, C$  共同决定 (系统零点)
- 阶数: 分母阶数 = 状态维数  $n$ ; 分子阶数  $\leq n - 1$  (真分式)

### 20.2.2 范例 1: 二阶系统

题目: 求传递函数

给定系统:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

解答:

步骤 1: 构造  $sI - A$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s + 3 \end{bmatrix}$$

步骤 2: 计算  $\det(sI - A)$

$$\det(sI - A) = s(s + 3) - (-1)(2) = s^2 + 3s + 2$$

步骤 3: 计算  $(sI - A)^{-1}$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \begin{bmatrix} s + 3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}$$



步骤 4: 计算  $G(s)$

$$\begin{aligned}
 G(s) &= C(sI - A)^{-1}B \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix} \\
 &= \boxed{\frac{1}{s^2 + 3s + 2}}
 \end{aligned}$$

验证: 极点为  $s = -1, -2$  (特征值), 无零点。

## 20.3 多输入多输出 (MIMO) 系统

### 20.3.1 传递函数矩阵

对于  $p$  输出、 $m$  输入系统:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \in \mathbb{R}^{p \times m}(s)$$

矩阵元素:

$$G_{ij}(s) = \left. \frac{Y_i(s)}{U_j(s)} \right|_{\text{其他输入为 } 0}$$

表示第  $j$  个输入到第  $i$  个输出的传递函数。

### 20.3.2 范例 2: MIMO 系统

题目: 双输入双输出系统

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

解答:

步骤 1:  $(sI - A)^{-1}$  对角矩阵

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$



步骤 2: 计算  $G(s)$

$$\begin{aligned} G(s) &= C(sI - A)^{-1}B \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+2} \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

解释:

- $G_{11}(s) = \frac{1}{s+1}$ : 输入 1  $\rightarrow$  输出 1
- $G_{12}(s) = \frac{1}{s+2}$ : 输入 2  $\rightarrow$  输出 1
- $G_{21}(s) = 0$ : 输入 1 对输出 2 无影响
- $G_{22}(s) = \frac{1}{s+2}$ : 输入 2  $\rightarrow$  输出 2

## 20.4 MATLAB 实现

方法 1: 直接使用 `ss2tf`

```
1 % 定义状态空间模型
2 A = [0 1; -2 -3];
3 B = [0; 1];
4 C = [1 0];
5 D = 0;
6
7 % 转换为传递函数
8 [num, den] = ss2tf(A, B, C, D);
9
10 % 显示结果
11 G = tf(num, den)
```

方法 2: 使用系统对象

```
1 % 创建状态空间对象
2 sys_ss = ss(A, B, C, D);
3
4 % 转换为传递函数对象
5 sys_tf = tf(sys_ss);
6
7 % 查看传递函数
8 zpk(sys_tf) % 零极点增益形式
```



### 方法 3: MIMO 系统

```
1 % MIMO 系统
2 A = [-1 0; 0 -2];
3 B = [1 0; 0 1];
4 C = [1 1; 0 1];
5 D = zeros(2,2);
6
7 sys_ss = ss(A, B, C, D);
8 sys_tf = tf(sys_ss);
9
10 % 查看传递函数矩阵
11 sys_tf
```

## 本章小结

### 核心公式

#### 状态空间到传递函数

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

#### 关键步骤:

1. 构造  $sI - A$
2. 计算  $\det(sI - A)$  (特征多项式)
3. 求  $(sI - A)^{-1}$  (伴随矩阵法或直接求逆)
4. 矩阵相乘  $C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B + D$



## 两种描述对比

特性	状态空间	传递函数
描述对象	内部状态演化	输入输出关系
维度	$n$ 维向量微分方程	标量代数方程
适用性	MIMO、时变、非线性	SISO、线性时不变
信息量	完整（状态+输入输出）	部分（仅输入输出）
设计方法	极点配置、观测器	根轨迹、频域

## 实际应用

### 何时需要转换？

- 用状态空间建模后，想用根轨迹/伯德图分析
- 验证模型：两种方法的极点应一致
- 简化管理：传递函数更直观显示输入输出关系

### 注意事项：

- 状态空间非唯一，但传递函数唯一
- 不可控/不可观部分的极点会被约掉（极零对消）
- MIMO 系统：传递函数矩阵有  $p \times m$  个元素

## 与后续章节的联系

- 第 21 章：线性变换改变状态空间表示，但传递函数不变（不变性）
- 第 23 章：能控能观性与传递函数的极零点关系
- 反向转换：传递函数  $\rightarrow$  状态空间（能控/能观标准型）将在第 24 章讨论

**关键启示：**传递函数是状态空间的外部视图，丢失了内部结构信息，但更简洁便于分析。两种描述相辅相成，需要灵活运用。



## 21 线性变换

### 引言：为什么需要更换“坐标系”？

想象你站在一个房间里观察一个旋转的陀螺。如果你从正面看，陀螺的运动可能非常复杂；但如果你沿着陀螺的旋转轴观察，运动就变得简单——只是一个圆周运动。这就是线性变换的核心思想：通过选择合适的“观察角度”（坐标系），让复杂的系统变得简单。

### 为什么状态不唯一？

在 19 节中，我们知道状态空间表达式的形式为  $\dot{x} = Ax + Bu$ 。但问题是：状态变量的选择不是唯一的！

- **物理角度**：描述同一个系统，可以选择不同的物理量作为状态（例如位置-速度 vs 动量-能量）
- **数学角度**：即使选择相同的物理量，也可以用不同的坐标系表示（直角坐标 vs 极坐标）
- **工程角度**：某些坐标系下，系统矩阵  $A$  的结构更简单，便于分析和设计

### 线性变换的作用

线性变换（也称坐标变换或相似变换）允许我们在不改变系统本质特性的前提下，切换到更方便的坐标系。关键性质：

#### 线性变换的不变量

无论如何变换坐标系，以下系统特性保持不变：

- **特征值**（系统的固有频率和稳定性）
- **传递函数**（输入输出关系）
- **能控性和能观性**（系统的结构性性质）

### 本章路线图

1. **数学框架**：线性变换的定义和推导
2. **相似变换性质**：哪些量变、哪些量不变
3. **实用例题**：如何选择变换矩阵  $P$



4. 几何直观：坐标变换的可视化理解
5. 通向标准型：为 24 节的标准型做准备

## 21.1 线性变换的定义

设  $x \in \mathbb{R}^n$  和  $z \in \mathbb{R}^n$  是描述同一系统的两组状态变量。如果存在非奇异矩阵  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  (即  $\det(P) \neq 0$ ,  $P$  可逆), 使得:

$$\boxed{x = Pz} \quad (14)$$

则称此变换为**线性变换** (Linear Transformation) 或**坐标变换** (Coordinate Transformation)。

### 关键理解

- $P$  称为**变换矩阵**, 它的列向量构成新坐标系的基
- $x$  是原坐标系下的状态,  $z$  是新坐标系下的状态
- 非奇异条件  $\det(P) \neq 0$  保证变换可逆:  $z = P^{-1}x$
- 同一个物理系统, 不同坐标下的“坐标值”不同, 但描述的是同一个“点”

## 21.2 变换后的状态方程

原系统的状态空间表达式为:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (15)$$

应用线性变换  $x = Pz$ , 求导得  $\dot{x} = P\dot{z}$ , 代入方程 (15):

$$\begin{aligned} P\dot{z} &= APz + Bu \\ \dot{z} &= P^{-1}APz + P^{-1}Bu \end{aligned}$$

同理, 输出方程变为:

$$y = CPz + Du$$

定义变换后的系统矩阵:

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{A} &= P^{-1}AP \quad (\text{相似变换}) \\ \bar{B} &= P^{-1}B \quad (\text{输入矩阵变换}) \\ \bar{C} &= CP \quad (\text{输出矩阵变换}) \end{aligned}} \quad (16)$$



则变换后的系统为：

$$\dot{z} = \bar{A}z + \bar{B}u \quad (17)$$

$$y = \bar{C}z + Du \quad (18)$$

其中：

$$\bar{A} = P^{-1}AP \quad (19)$$

$$\bar{B} = P^{-1}B \quad (20)$$

$$\bar{C} = CP \quad (21)$$

### 21.3 相似变换的性质

式 (16) 中的  $\bar{A} = P^{-1}AP$  称为矩阵  $A$  的相似变换。相似矩阵具有以下重要性质：

不变量 (Invariants)

1. 特征值不变： $\det(\lambda I - \bar{A}) = \det(\lambda I - A)$ ，因此  $A$  和  $\bar{A}$  有相同的特征值
2. 迹不变： $\text{tr}(\bar{A}) = \text{tr}(A)$ （对角线元素之和）
3. 行列式不变： $\det(\bar{A}) = \det(A)$
4. 秩不变： $\text{rank}(\bar{A}) = \text{rank}(A)$

传递函数不变

根据 20 节的公式，传递函数为：

$$\begin{aligned} G(s) &= C(sI - A)^{-1}B + D \\ \bar{G}(s) &= \bar{C}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{B} + D \\ &= CP(sI - P^{-1}AP)^{-1}P^{-1}B + D \\ &= CP \cdot P^{-1}(sI - A)^{-1}P \cdot P^{-1}B + D \\ &= C(sI - A)^{-1}B + D = G(s) \end{aligned}$$

因此，线性变换不改变系统的输入输出关系。

### 21.4 如何选择变换矩阵 $P$ ？

变换矩阵  $P$  的选择取决于我们想要达到的目标：

下面通过两个例题说明具体应用。



表 1: 常见的变换矩阵选择策略

目标	变换矩阵 $P$	结果 $\bar{A}$
对角化（最简形式）	特征向量矩阵	对角矩阵 $\Lambda$
能控标准型	能控性矩阵的变换	能控标准形式
能观标准型	能观性矩阵的变换	能观标准形式
约当标准型	广义特征向量矩阵	约当矩阵 $J$

## 21.5 例题 1：对角化变换

问题：给定系统矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

将其对角化。

解：

步骤 1：求特征值

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda + 3 \end{bmatrix} = \lambda(\lambda + 3) + 2 = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0$$

特征值： $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -2$

步骤 2：求特征向量

对于  $\lambda_1 = -1$ ：

$$(\lambda_1 I - A)v_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

对于  $\lambda_2 = -2$ ：

$$(\lambda_2 I - A)v_2 = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

步骤 3：构造变换矩阵

$$P = [v_1 \ v_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

步骤 4：验证对角化

$$\bar{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

结果：在新坐标系  $z$  下，系统矩阵变为对角矩阵，两个状态完全解耦！



## 21.6 例题 2：传递函数不变性验证

问题：对于例题 1 的系统，设  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ， $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ ，验证变换前后传递函数相同。

解：

原系统传递函数：

$$\begin{aligned} G(s) &= C(sI - A)^{-1}B \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \end{aligned}$$

变换后的系统：

$$\bar{B} = P^{-1}B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = CP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

新系统传递函数（利用对角矩阵的简单形式）：

$$\begin{aligned} \bar{G}(s) &= \bar{C}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{B} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} = \frac{(s+2) - (s+1)}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \end{aligned}$$

验证： $G(s) = \bar{G}(s)$

## 21.7 MATLAB 实现

```
1 % 定义原系统
2 A = [0 1; -2 -3];
3 B = [0; 1];
4 C = [1 0];
5 D = 0;
6
7 % 方法1：使用特征向量对角化
8 [P, Lambda] = eig(A); % P是特征向量矩阵，Lambda是对角矩阵
```



```
9 A_bar = inv(P) * A * P; % 应该等于Lambda
10 B_bar = inv(P) * B;
11 C_bar = C * P;
12
13 % 方法2: 验证传递函数不变
14 sys_original = ss(A, B, C, D);
15 sys_transformed = ss(A_bar, B_bar, C_bar, D);
16 [num1, den1] = ss2tf(A, B, C, D);
17 [num2, den2] = ss2tf(A_bar, B_bar, C_bar, D);
18 fprintf('原系统传递函数: '); tf(num1, den1)
19 fprintf('变换后传递函数: '); tf(num2, den2)
20
21 % 方法3: 验证特征值不变
22 eig_A = eig(A);
23 eig_A_bar = eig(A_bar);
24 fprintf('特征值对比:\n原矩阵: %.4f, %.4f\n变换后: %.4f, %.4f\n', ...
25         eig_A(1), eig_A(2), eig_A_bar(1), eig_A_bar(2));
```

Listing 2: 线性变换的 MATLAB 实现

## 本章小结

### 核心要点

#### 线性变换的核心公式

变换关系:  $x = Pz$  ( $P$  非奇异)

系统矩阵变换:

$$\bar{A} = P^{-1}AP \quad (\text{相似变换})$$

$$\bar{B} = P^{-1}B, \quad \bar{C} = CP$$

不变量: 特征值、迹、行列式、传递函数、能控性、能观性

### 常见变换类型对比

### 与其他章节的联系

- 向后链接:
  - 19 节: 状态空间表达式的基础
  - 20 节: 传递函数不变性的应用



表 2: 常见线性变换及其应用

变换类型	$P$ 的构成	$\bar{A}$ 的形式	主要用途
对角化	特征向量	对角矩阵	系统解耦、稳定性分析
能控标准型	能控矩阵变换	伴随矩阵	极点配置设计
能观标准型	能观矩阵变换	转置伴随矩阵	状态观测器设计
约当标准型	广义特征向量	约当块	处理重特征值情况

- 向前链接:
  - 24 节: 利用线性变换得到各种标准型
  - 26 节: 重特征值情况下的约当标准型
  - 23 节: 能控性和能观性在变换下的不变性

学习检查清单

- ☐ 理解线性变换的几何意义（坐标系旋转/缩放）
- ☐ 掌握相似变换的计算： $\bar{A} = P^{-1}AP$
- ☐ 能够求解特征向量并构造对角化矩阵
- ☐ 理解哪些量在变换下不变（特征值、传递函数）
- ☐ 知道如何根据目标选择合适的变换矩阵

22 线性控制系统状态空间表达式的求解

引言：从“描述系统”到“预测行为”

想象你是一名航天工程师，面对火箭发射的状态方程  $\dot{x} = Ax + Bu$ 。仅仅知道这个方程是不够的——你需要知道：给定初始状态  $x(0)$  和控制输入  $u(t)$ ，未来任意时刻  $t$  的状态  $x(t)$  是什么？这就是本章的核心任务。

为什么要求解状态方程？

在 19 节中，我们学会了建立状态空间模型；现在我们要学会求解它。求解的目的：

- 时域响应预测：已知初始状态和输入，计算系统的完整轨迹  $x(t)$
- 稳定性分析：观察状态是否随时间收敛到零（或有界）
- 性能评估：计算超调量、调节时间等指标



- 控制器设计验证：检验设计的控制律是否达到期望效果

## 求解的挑战

状态方程  $\dot{x} = Ax + Bu$  看似简单，但实际求解有两大难点：

1. 矩阵指数  $e^{At}$ ：不是简单的标量指数，而是矩阵的无穷级数
2. 时变积分：输入项  $\int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$  涉及矩阵和时间的耦合

好在我们有三种强大的方法来应对这些挑战。

## 本章路线图

1. 状态转移矩阵：核心概念  $\Phi(t) = e^{At}$  及其性质
2. 求解方法对比：拉普拉斯变换法 vs 矩阵指数法 vs 对角化法
3. 齐次方程求解：初始状态响应（自由运动）
4. 非齐次方程求解：完全响应（自由运动+强迫运动）
5. MATLAB 实现：三种方法的代码实现和效率对比

## 22.1 状态转移矩阵

### 核心概念

对于齐次状态方程（无外部输入）：

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0 \quad (22)$$

其解为：

$$x(t) = e^{At} x_0 = \Phi(t) x_0 \quad (23)$$

其中  $\Phi(t) = e^{At}$  称为**状态转移矩阵**（State Transition Matrix）。

### 物理意义

状态转移矩阵  $\Phi(t)$  描述了系统从  $t = 0$  时刻的状态如何演化到  $t$  时刻。可以理解为：



### 状态转移矩阵的直观理解

$\Phi(t)$  是一个“时间旅行算子”：

- 输入：初始状态  $x(0)$ （现在）
- 输出：未来状态  $x(t)$ （ $t$  秒后）
- 作用： $x(t) = \Phi(t) \cdot x(0)$

例如， $\Phi(2)$  告诉你：“2 秒后的状态是初始状态的什么变换”。

### 状态转移矩阵的性质

$\Phi(t)$  具有以下重要性质（证明略）：

1. 初始条件： $\Phi(0) = I$ （零时刻无变化）
2. 半群性质： $\Phi(t_1 + t_2) = \Phi(t_1)\Phi(t_2)$ （时间可叠加）
3. 可逆性： $\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t)$ （时间可逆转）
4. 微分性质： $\frac{d\Phi(t)}{dt} = A\Phi(t) = \Phi(t)A$ （满足原方程）

## 22.2 方法 1：拉普拉斯变换法

### 基本思路

将时域的微分方程转换到复频域（ $s$  域），利用代数方法求解，再反变换回时域。

### 求解步骤

对  $\dot{x} = Ax$  两边做拉普拉斯变换：

$$\begin{aligned} sX(s) - x(0) &= AX(s) \\ (sI - A)X(s) &= x(0) \\ X(s) &= (sI - A)^{-1}x(0) \end{aligned}$$

反变换得时域解：

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]x(0) \quad (24)$$

因此，状态转移矩阵为：

$$\Phi(t) = e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}] \quad (25)$$



**例题 1：拉普拉斯法求解  $2 \times 2$  系统**

问题：求解系统  $\dot{x} = Ax$ ，其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

解：

步骤 1：计算  $(sI - A)$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}$$

步骤 2：求逆矩阵

$$\begin{aligned} (sI - A)^{-1} &= \frac{1}{\det(sI - A)} \text{adj}(sI - A) \\ &= \frac{1}{s(s+3) + 2} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \end{aligned}$$

步骤 3：部分分式展开（以第一行第一列元素为例）

$$\frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}$$

求解得  $A = 2$ ， $B = -1$ ，因此：

$$\frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

对所有元素类似处理后：

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \\ \frac{-2}{s+1} + \frac{2}{s+2} & \frac{-1}{s+1} + \frac{2}{s+2} \end{bmatrix}$$

步骤 4：反拉普拉斯变换

$$\Phi(t) = e^{At} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

步骤 5：计算状态响应

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi(t)x(0) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$



## 22.3 方法 2：矩阵指数级数展开法

### 基本思路

类比标量指数函数的泰勒展开  $e^{at} = 1 + at + \frac{a^2 t^2}{2!} + \dots$ ，定义矩阵指数：

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \frac{A^3 t^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} \quad (26)$$

### 适用场景

当  $A$  的幂次有规律（例如幂零矩阵、 $A^n = 0$ ）时，级数会在有限项截断，计算简便。

### 例题 2：幂零矩阵的矩阵指数

问题：求解  $e^{At}$ ，其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

解：

步骤 1：计算  $A$  的幂次

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^3 = 0$$

步骤 2：级数截断由于  $A^3 = 0$ ，级数只有前三项：

$$\begin{aligned} e^{At} &= I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**物理意义：**这是一个三重积分器系统（如位置、速度、加速度），状态转移矩阵恰好对应运动学方程！



## 22.4 方法 3：对角化法（最常用）

### 基本思路

利用 21 节的线性变换，将  $A$  对角化为  $\Lambda = P^{-1}AP$ ，则：

$$\boxed{e^{At} = Pe^{\Lambda t}P^{-1}} \quad (27)$$

其中对角矩阵的指数非常简单：

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

### 例题 3：对角化法求解（延续例题 1）

问题：用对角化法重新求解例题 1 的  $e^{At}$ 。

解：

步骤 1：对角化（参考 21 节例题 1）

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = P\Lambda P^{-1}$$

其中：

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

步骤 2：计算对角矩阵的指数

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

步骤 3：合成状态转移矩阵

$$\begin{aligned} e^{At} &= Pe^{\Lambda t}P^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-2t} \\ -e^{-t} & -2e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

验证：与例题 1 拉普拉斯法的结果完全一致！



## 22.5 非齐次状态方程的完全解

对于完整的状态方程（含输入）：

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0 \quad (28)$$

其完全解由两部分组成：

$$x(t) = \underbrace{e^{At}x_0}_{\text{自由响应}} + \underbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau}_{\text{强迫响应}} \quad (29)$$

物理解释

- 自由响应（零输入响应）：系统在无外部输入时，仅由初始状态引起的运动
- 强迫响应（零状态响应）：系统在零初始状态下，由外部输入  $u(t)$  驱动的运动

### 例题 4：单位阶跃输入的完全响应

问题：对于系统  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ , 输入  $u(t) = 1$ （单位阶跃），求  $x(t)$ 。

解：

由于  $x(0) = 0$ ，只需计算强迫响应：

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \cdot 1 d\tau \\ &= \int_0^t \begin{bmatrix} 2e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} \\ -2e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} & -e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau \end{aligned}$$

积分后（过程略）：

$$x(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - 2e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2t} \\ -1 + 2e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$\text{稳态值：} x(\infty) = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

## 22.6 三种方法的对比

## 22.7 MATLAB 实现



表 3: 状态转移矩阵计算方法对比

方法	适用条件	计算复杂度	优缺点
拉普拉斯变换法	通用	中等（需要部分分式）	系统化，适合手算
级数展开法	$A$ 幂零或低阶	低（有限项）	简单但适用范围窄
对角化法	$A$ 可对角化	低（利用特征值）	<b>最常用</b> ，效率高
约当标准型法	$A$ 不可对角化	高（需求广义特征向量）	处理重特征值

```

1 % 定义系统矩阵
2 A = [0 1; -2 -3];
3 B = [0; 1];
4 x0 = [1; 0];
5 t = 0:0.01:5; % 时间向量
6
7 % 方法1: MATLAB内置函数 expm (最精确)
8 Phi_expm = @(t) expm(A*t);
9 x_expm = zeros(2, length(t));
10 for i = 1:length(t)
11     x_expm(:,i) = Phi_expm(t(i)) * x0;
12 end
13
14 % 方法2: 对角化法 (手动实现)
15 [P, Lambda] = eig(A);
16 Phi_diag = @(t) P * diag(exp(diag(Lambda)*t)) * inv(P);
17 x_diag = zeros(2, length(t));
18 for i = 1:length(t)
19     x_diag(:,i) = Phi_diag(t(i)) * x0;
20 end
21
22 % 方法3: 使用initial函数 (最方便)
23 sys = ss(A, B, eye(2), zeros(2,1));
24 [y_initial, t_initial, x_initial] = initial(sys, x0, t);
25
26 % 绘图对比
27 figure;
28 subplot(2,1,1);
29 plot(t, x_expm(1,:), 'r-', t, x_diag(1,:), 'b--', t_initial,
30     x_initial(:,1), 'go');
31 legend('expm法', '对角化法', 'initial函数');

```



```
31 ylabel('x_1(t)');
32 title('状态响应对比');
33
34 subplot(2,1,2);
35 plot(t, x_exp(2,:), 'r-', t, x_diag(2,:), 'b--', t_initial,
      x_initial(:,2), 'go');
36 legend('expm法', '对角化法', 'initial函数');
37 ylabel('x_2(t)');
38 xlabel('时间 (s)');
39
40 % 验证状态转移矩阵在t=1时刻
41 fprintf('t=1时的状态转移矩阵:\n');
42 Phi_1 = expm(A*1)
```

Listing 3: 状态转移矩阵的三种计算方法

```
1 % 阶跃响应（零初始状态）
2 sys = ss(A, B, [1 0], 0); % 观测x1
3 [y_step, t_step, x_step] = step(sys, t);
4
5 % 绘制阶跃响应
6 figure;
7 subplot(2,1,1);
8 plot(t_step, x_step(:,1), 'b-', 'LineWidth', 1.5);
9 ylabel('x_1(t)');
10 title('单位阶跃响应（零初始状态）');
11 grid on;
12
13 subplot(2,1,2);
14 plot(t_step, x_step(:,2), 'r-', 'LineWidth', 1.5);
15 ylabel('x_2(t)');
16 xlabel('时间 (s)');
17 grid on;
18
19 % 输出稳态值
20 fprintf('稳态值: x1_ss = %.4f, x2_ss = %.4f\n', x_step(end,1), x_step
      (end,2));
```

Listing 4: 非齐次方程求解（阶跃输入）



## 本章小结

### 核心公式

#### 状态方程求解的核心公式

状态转移矩阵:  $\Phi(t) = e^{At}$

计算方法:

- 拉普拉斯法:  $e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]$
- 级数法:  $e^{At} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots$
- 对角化法:  $e^{At} = P e^{\Lambda t} P^{-1}$  (最常用)

完全解:

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

### 方法选择指南

- 手算简单系统: 拉普拉斯变换法 (系统化, 步骤清晰)
- 特殊结构矩阵: 级数展开法 (如幂零矩阵、上三角矩阵)
- 一般系统: 对角化法 (效率高, 适合编程)
- 重特征值: 约当标准型法 (参考 26 节)
- MATLAB 仿真: 直接使用 `expm()`、`initial()`、`step()` 函数

### 常见误区

- 误区 1:  $e^{At} \neq \begin{bmatrix} e^{a_{11}t} & e^{a_{12}t} \\ e^{a_{21}t} & e^{a_{22}t} \end{bmatrix}$  (矩阵指数不是元素指数)
- 误区 2: 忘记对角化的前提条件 ( $A$  必须有  $n$  个线性无关的特征向量)
- 误区 3: 积分上下限错误 (强迫响应从 0 到  $t$  积分, 不是从  $-\infty$ )

### 与其他章节的联系

- 向后链接:
  - 19 节: 状态空间表达式的建立
  - 21 节: 对角化法的理论基础



– 20 节:  $(sI - A)^{-1}$  的应用

• 向前链接:

– 27 节:  $e^{At} \rightarrow 0$  判定稳定性

– 29 节: 通过  $x(t)$  验证极点配置效果

– 26 节: 不可对角化时的求解方法

## 学习检查清单

- ☐ 理解状态转移矩阵的物理意义（时间演化算子）
- ☐ 掌握拉普拉斯变换法的完整步骤（ $(sI - A)^{-1}$ 、部分分式、反变换）
- ☐ 会用对角化法快速计算  $e^{At}$ （特征值、特征向量、 $Pe^{At}P^{-1}$ ）
- ☐ 理解完全解的两部分（自由响应+强迫响应）
- ☐ 能够使用 MATLAB 的 `expm()`、`initial()`、`step()` 函数
- ☐ 知道三种方法的适用场景和计算复杂度对比

## 23 线性控制系统的能控性和能观测性

### 引言：控制系统设计的两个基本问题

想象你正在设计一个火箭姿态控制系统。你面临两个最基本的问题：

**问题 1：我能控制它吗？** 如果火箭的某些状态（如角速度）完全不受控制输入影响，那么无论你设计多么精妙的控制算法，都无法让火箭按预期运动。这就是**能控性**（Controllability）问题。

**问题 2：我能观测它吗？** 如果火箭的某些状态（如姿态角）无法从传感器输出中推断出来，那么你根本不知道当前状态，又如何实施状态反馈控制？这就是**能观测性**（Observability）问题。

这两个概念是现代控制理论的基石，由匈牙利数学家卡尔曼（Kalman）在 1960 年提出。它们回答了控制系统设计中最根本的问题：

- **能控性：** 系统的哪些状态可以通过控制输入改变？
- **能观测性：** 系统的哪些状态可以从输出测量中推断？

为什么这些概念重要？

- **控制器设计的前提：** 只有完全能控的系统，才能任意配置极点（后续章节）



- 观测器设计的前提：只有完全能观的系统，才能设计状态观测器
- 最小实现：判断系统描述是否冗余，能否简化
- 系统分析：识别系统中不可控或不可观的死角

实际应用场景：

- 航天器姿态控制：判断推进器配置能否控制所有姿态自由度
- 电力系统：判断传感器布置能否观测到所有关键状态
- 机器人控制：设计执行器和传感器的最优配置
- 化工过程：判断测量点能否监测整个反应过程

本章将系统介绍：

- 能控性和能观测性的严格定义
- 简单实用的判据（秩判据）
- 直观理解：几何意义和物理意义
- 两者之间的对偶关系
- 实际应用范例

## 23.1 能控性（Controllability）

本节目的

回答问题：给定控制输入，我们能把系统状态驱动到任意期望位置吗？

### 23.1.1 能控性定义

**直观理解：**想象一辆只能前进不能后退的汽车。虽然你可以通过转弯到达很多位置，但有些位置（如正后方）永远无法到达。这辆车的位置就**不是完全能控的**。

**严格定义：**

系统  $(A, B)$  在时刻  $t_0$  是**状态能控的**，如果存在有限时间  $t_1 > t_0$  和控制输入  $u(t)$ ，使得系统能从任意初态  $x(t_0)$  转移到任意终态  $x(t_1)$ 。

**数学表述：**对于系统  $\dot{x} = Ax + Bu$ ，如果

$$\forall x(t_0), x(t_1) \in \mathbb{R}^n, \exists u(t), t \in [t_0, t_1] \text{ 使得 } x(t_1) = e^{A(t_1-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

则称系统完全能控。

**通俗解释：**



- **完全能控**：控制输入能影响所有状态变量，状态空间中任何点都可达
- **不完全能控**：存在某些状态分量，无论如何施加控制都无法改变
- **物理意义**：执行器（控制输入）的配置能否覆盖所有自由度

### 23.1.2 能控性判据

好消息：虽然定义涉及复杂的积分，但判断能控性非常简单！

卡尔曼秩判据：

系统  $(A, B)$  完全能控的充要条件是能控性矩阵：

$$W_c = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

满足  $\text{rank}(W_c) = n$ 。

判据解读：

- $W_c$  的列数为  $n \times p$  ( $p$  为输入个数)
- 如果  $\text{rank}(W_c) = n$ ，说明这些列张成整个  $n$  维状态空间
- 物理意义： $B$  是输入的直接作用， $AB$  是经过一步传递的作用， $A^2B$  是两步传递...
- 如果这些作用能覆盖整个状态空间，系统就完全能控

为什么只需要  $n$  项？根据凯莱-哈密顿定理， $A^n$  可以表示为  $A^0, A^1, \dots, A^{n-1}$  的线性组合，所以更高次项不提供新信息。

计算步骤：

1. 构造能控性矩阵  $W_c$  (计算  $B, AB, A^2B, \dots$ )
2. 计算  $W_c$  的秩 (用行阶梯形或行列式)
3. 判断： $\text{rank}(W_c) = n \Rightarrow$  完全能控；否则不完全能控

## 23.2 能观测性 (Observability)

本节目的

回答问题：通过观测输出，我们能推断出所有内部状态吗？



### 23.2.1 能观测性定义

**直观理解：**想象一个黑盒子里有三个齿轮，但你只能看到最外层齿轮的转动。如果三个齿轮通过固定传动比连接，你可以从外层推断内层的状态——这是**能观的**。但如果某个内层齿轮是独立的（不传动到外层），你永远无法知道它的状态——这个状态就**不能观**。

**严格定义：**

系统  $(A, C)$  在时刻  $t_0$  是**状态能观测的**，如果能够根据有限时间区间  $[t_0, t_1]$  内的输出  $y(t)$  和输入  $u(t)$  唯一地确定初始状态  $x(t_0)$ 。

**通俗解释：**

- **完全能观：**所有状态变量都能从输出中推断出来
- **不完全能观：**存在某些**隐藏**状态，无论观测多久都无法确定
- **物理意义：**传感器（输出测量）的配置能否**看到**所有内部状态

### 23.2.2 能观测性判据

**对偶判据：**

系统  $(A, C)$  完全能观测的充要条件是**能观测性矩阵**：

$$W_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

满足  $\text{rank}(W_o) = n$ 。

**判据解读：**

- $W_o$  的行数为  $n \times q$  ( $q$  为输出个数)
- 如果  $\text{rank}(W_o) = n$ ，说明这些行能区分所有状态
- 物理意义： $C$  是输出对状态的直接观测， $CA$  是观测经过一步传递的效果， $CA^2$  是两步传递...
- 如果这些观测能覆盖整个状态空间，系统就完全能观

**计算步骤：**

1. 构造能观测性矩阵  $W_o$ （计算  $C, CA, CA^2, \dots$ ）
2. 计算  $W_o$  的秩
3. 判断： $\text{rank}(W_o) = n \Rightarrow$  完全能观；否则不完全能观



## 23.3 对偶性原理

### 本节目的

能控性和能观测性不是孤立的概念，它们之间存在深刻的**对偶关系**（Duality）。这个关系不仅优美，而且实用——关于能控性的结论可以**翻译**成能观测性的结论。

**对偶定理：**

系统  $(A, B, C)$  能控  $\Leftrightarrow$  对偶系统  $(A^T, C^T, B^T)$  能观

**数学表达：**

- 原系统的能控性矩阵：  $W_c = [B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B]$
- 对偶系统的能观测性矩阵：  $W_o^T = [C^T \quad A^T C^T \quad \cdots \quad (A^T)^{n-1} C^T]$
- 注意：  $W_o^T$  与  $W_c$  具有相同的秩（只是  $A \rightarrow A^T, B \rightarrow C^T$ ）

**实用价值：**

- 能控性的定理、算法可直接用于能观测性（只需转置矩阵）
- 简化证明：证明一个性质即可，另一个由对偶性自动得到
- 对称美：输入和输出在数学上是对称的

## 23.4 能控性和能观测性的几何理解

### 23.4.1 能控性的几何意义

**可达子空间：**能控性矩阵  $W_c$  的列空间称为**可达子空间**（Reachable Subspace），记为  $\mathcal{R}$ 。

$$\mathcal{R} = \text{span}\{B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B\}$$

**物理意义：**

- $\mathcal{R}$  中的任意状态都可以从原点通过适当的控制输入到达
- $\dim(\mathcal{R}) = \text{rank}(W_c)$  是可控状态的维数
- 如果  $\dim(\mathcal{R}) = n$ ，则整个状态空间可达，系统完全能控
- 如果  $\dim(\mathcal{R}) < n$ ，存在不可达的**禁区**

**例子：**对于二阶系统，如果  $\text{rank}(W_c) = 1$ ，可达子空间是一条直线——你只能在这条线上移动，无法到达平面上的其他点。



### 23.4.2 能观测性的几何意义

**不可观子空间：**能观测性矩阵  $W_o$  的零空间称为**不可观子空间**（Unobservable Subspace），记为  $\mathcal{N}$ 。

$$\mathcal{N} = \ker(W_o) = \{x : W_o x = 0\}$$

**物理意义：**

- $\mathcal{N}$  中的状态对输出没有任何影响（ $Cx = 0, CAx = 0, \dots$ ）
- 这些状态是**隐藏**的，无法从输出中观测到
- $\dim(\mathcal{N}) = n - \text{rank}(W_o)$  是不可观状态的维数
- 如果  $\dim(\mathcal{N}) = 0$ ，没有隐藏状态，系统完全能观

**例子：**对于二阶系统，如果  $\text{rank}(W_o) = 1$ ，不可观子空间是一条直线——沿着这条直线的任何状态变化，输出都看不到。

### 23.4.3 能控性与能观测性：对比与联系

为了更好地理解这两个对偶概念，下表总结了它们的对比关系：

表 4: 能控性与能观测性对比

特性	能控性（Controllability）	能观测性（Observability）
核心问题	我能控制它吗？	我能观测它吗？
涉及矩阵	$(A, B)$	$(A, C)$
判据矩阵	$W_c = [B \ AB \ \cdots \ A^{n-1}B]$	$W_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$
判据条件	$\text{rank}(W_c) = n$	$\text{rank}(W_o) = n$
几何子空间	可达子空间 $\mathcal{R} = \text{span}(W_c)$	不可观子空间 $\mathcal{N} = \ker(W_o)$
物理意义	输入能否影响所有状态？	输出能否反映所有状态？
不满足后果	无法任意配置极点	无法设计状态观测器
对偶关系	$(A, B)$ 能控 $\Leftrightarrow (A^T, C^T)$ 能观	$(A, C)$ 能观 $\Leftrightarrow (A^T, B^T)$ 能控
应用场景	控制器设计、极点配置	观测器设计、状态估计
硬件对应	执行器配置	传感器配置

**关键洞察：**



- **独立性：**能控和能观是独立的，一个系统可能：
  - 能控但不能观（有执行器但传感器不足）
  - 能观但不能控（有传感器但执行器不足）
  - 既能控又能观（理想情况）
  - 既不能控也不能观（最糟糕）
- **对偶性：**数学结构完全对称，转置即可互换
- **系统性：**两者都满足才能实现完整的状态反馈控制

## 23.5 实际应用范例

### 范例说明

以下两个范例展示：

- **范例 1：**判断系统的能控性和能观测性
- **范例 2：**不能控/不能观对系统的影响

### 23.5.1 范例 1：能控性和能观测性判断

**题目：**判断以下系统的能控性和能观测性

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x\end{aligned}$$

**解答：**

#### 1. 判断能控性 构造能控性矩阵：

$$W_c = [B \quad AB]$$

计算  $AB$ ：

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

因此：

$$W_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

计算行列式：

$$\det(W_c) = 0 \times (-3) - 1 \times 1 = -1 \neq 0$$

$\text{rank}(W_c) = 2 = n$ ，系统完全能控。



## 2. 判断能观测性 构造能观测性矩阵:

$$W_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}$$

计算  $CA$ :

$$CA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

因此:

$$W_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

显然  $\text{rank}(W_o) = 2 = n$ , 系统完全能观。

**结论** 这是一个完全能控且完全能观的系统, 可以:

- 通过控制输入任意配置闭环极点
- 设计状态观测器估计所有状态
- 实现基于观测器的状态反馈控制

### 23.5.2 范例 2: 不能控系统的分析

题目: 分析系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

解答:

#### 1. 能控性判断

$$W_c = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\text{rank}(W_c) = 1 < 2$ , 系统不完全能控。

#### 2. 物理解释 系统方程可以写成:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + u \\ \dot{x}_2 &= 2x_2 \end{aligned}$$

关键观察:



- $x_1$  受控制输入  $u$  影响——能控
- $x_2$  完全独立于  $u$ ，自己演化 ( $\dot{x}_2 = 2x_2$ ) ——不能控
- $x_2$  会指数发散 ( $x_2(t) = e^{2t}x_2(0)$ )，无法通过控制阻止！

### 3. 能观测性判断

$$W_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\det(W_o) = 2 - 1 = 1 \neq 0$ ,  $\text{rank}(W_o) = 2$ ，系统完全能观。

### 4. 实际意义

- 虽然能观测到所有状态（包括  $x_2$ ），但无法控制  $x_2$
- 这个系统是不稳定且不能稳定化的
- 在实际设计中，必须重新配置执行器（修改  $B$  矩阵）

### 范例总结

#### 范例 1 的启示：

- 完全能控+完全能观 = 理想情况，可以实现任何控制目标
- 实际系统设计应尽量满足这两个条件

#### 范例 2 的警示：

- 不能控意味着存在失控的状态分量
- 即使能观测到问题，也无法通过控制解决
- 系统设计阶段必须保证能控性（合理配置执行器）

## 本章总结

### Kalman 秩判据：核心工具

能控性和能观测性的判定都归结为矩阵的秩计算。下表总结了两个判据的详细信息：



表 5: Kalman 秩判据详解

判据要素	能控性判据	能观测性判据
判据矩阵构造	$W_c = [B \ AB \ A^2B \ \cdots \ A^{n-1}B]$ 维度: $n \times (n \cdot p)$ ( $p$ 为输入数)	$W_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$ 维度: $(n \cdot q) \times n$ ( $q$ 为输出数)
判据条件	$\text{rank}(W_c) = n$	$\text{rank}(W_o) = n$
秩计算方法	<ul style="list-style-type: none"> <li>行阶梯形 (推荐)</li> <li>Gram 矩阵: <math>\det(W_c W_c^T) \neq 0</math></li> <li>MATLAB: <math>\text{rank}(\text{ctrb}(A, B))</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>行阶梯形 (推荐)</li> <li>Gram 矩阵: <math>\det(W_o^T W_o) \neq 0</math></li> <li>MATLAB: <math>\text{rank}(\text{obsv}(A, C))</math></li> </ul>
物理意义	输入通过系统传递 ( $B \rightarrow AB \rightarrow A^2B \rightarrow \cdots$ ) 能否覆盖整个状态空间	状态通过输出映射 ( $C \rightarrow CA \rightarrow CA^2 \rightarrow \cdots$ ) 能否区分所有初始状态
不满足时的维数	$\text{rank}(W_c) = r < n$ 意味着只有 $r$ 维可控	$\text{rank}(W_o) = s < n$ 意味着有 $n - s$ 维不可观
简化技巧 (对角系统)	若 $A$ 对角化: 检查 $B$ 的哪些行非零 (非零行对应能控模态)	若 $A$ 对角化: 检查 $C$ 的哪些列非零 (非零列对应能观模态)



## 核心要点回顾

### 1. 两个基本概念

- 能控性：控制输入能否驱动所有状态？（执行器够不够？）
- 能观测性：输出测量能否推断所有状态？（传感器够不够？）

### 2. 判据（最重要）

- 能控性： $\text{rank}[B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B] = n$

- 能观测性： $\text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n$

### 3. 对偶性

- $(A, B)$  能控  $\Leftrightarrow (A^T, C^T)$  能观  $(B \leftrightarrow C^T)$
- 能控性和能观测性在数学上是对称的

### 4. 实际意义

- 能控性是极点配置的前提条件
- 能观测性是状态观测器的前提条件
- 两者都满足才能实现完整的状态反馈控制

## 学习清单（掌握程度自检）

### 基础理解：

- ☐ 能用直观语言解释能控性和能观测性（不看书）
- ☐ 理解为什么需要  $n$  项  $(B, AB, \dots, A^{n-1}B)$
- ☐ 知道对偶性的含义  $(A \rightarrow A^T, B \rightarrow C^T)$
- ☐ 理解可达子空间和不可观子空间的几何意义

### 计算能力：

- ☐ 给定  $(A, B)$ ，能快速构造  $W_c$  并计算秩
- ☐ 给定  $(A, C)$ ，能快速构造  $W_o$  并计算秩



- ☐ 会用行阶梯形方法计算秩（手算）
- ☐ 会用 MATLAB 的 `ctrb()` 和 `obsv()` 函数
- ☐ 对于对角系统，能直接观察  $B$  和  $C$  判断能控/能观

#### 深入应用：

- ☐ 能分析不完全能控/能观系统的物理原因（哪个状态失控/隐藏）
- ☐ 理解能控性如何影响极点配置（后续章节）
- ☐ 理解能观测性如何影响观测器设计（后续章节）
- ☐ 能设计执行器/传感器配置使系统满足能控/能观性
- ☐ 理解结构分解中的四个子系统（可控可观、可控不可观等）

### 学习建议

#### 判断流程：

1. 写出系统矩阵  $A, B, C$
2. 构造  $W_c$  和  $W_o$  矩阵（计算  $AB, A^2B, \dots$  和  $CA, CA^2, \dots$ ）
3. 计算秩（行阶梯形或行列式）
4. 根据秩判断能控性和能观测性

#### 物理直觉：

- 看到对角化的  $A$  矩阵：检查  $B$  的哪些行非零（对应能控的模式）
- 看到对角化的  $A$  矩阵：检查  $C$  的哪些列非零（对应能观的模式）
- 如果某个特征值对应的模式既不能控也不能观，可以简化系统（最小实现）

### 常见误区与易错点

#### 概念误区：

- 误区 1：认为能控就一定能观（两者独立，需分别判断！）
- 正确：能控/能观是两个独立性质，四种组合都可能出现
- 误区 2：认为  $\text{rank}(B) = n$  就是能控
- 正确：必须计算  $\text{rank}(W_c) = \text{rank}[B \ AB \ \dots]$



- **误区 3:** 认为能控/能观与控制器设计有关
- **正确:** 这是系统固有性质, 与控制器无关 (只与  $A, B, C$  有关)
- **误区 4:** 认为不能控的系统一定不稳定
- **正确:** 不能控但稳定的系统可以正常工作 (只是无法任意配置极点)

计算易错点:

- 计算  $A^2B$  时误算成  $A^2 \cdot B^2$  (矩阵幂运算顺序)
- **正确:**  $A^2B = A \cdot A \cdot B$  (先算  $A^2$ , 再右乘  $B$ )
- 构造  $W_o$  时写成  $[C \ C A \ C A^2]$  (应该是行排列)
- **正确:**  $W_o = \begin{bmatrix} C \\ C A \\ C A^2 \end{bmatrix}$  (竖着排)
- 秩计算时只看行列式 ( $W_c$  可能不是方阵)
- **正确:** 用行阶梯形或 Gram 矩阵  $W_c W_c^T$  的行列式
- 对角系统忘记检查  $B$  的行 (误看成列)
- **正确:** 对角  $A$  时,  $B$  的第  $i$  行非零  $\Rightarrow$  第  $i$  个模态能控

物理理解易错点:

- 把不能控理解成“控制效果不好”
- **正确:** 不能控意味着**根本无法**通过控制改变某些状态 (结构问题)
- 把不能观理解成“测量误差大”
- **正确:** 不能观意味着**根本无法**从输出推断某些状态 (结构问题)

后续章节预告:

- **第 25 章 (结构分解):** 将系统分解为能控/不能控、能观/不能观的四个子系统, 理解不可控/不可观部分对传递函数的影响
- **第 29 章 (极点配置):** 利用能控性任意配置闭环极点, 设计期望的动态响应
- **第 30 章 (状态观测器):** 利用能观测性从输出估计不可测状态, 实现基于观测器的状态反馈



### 实践建议：

- 在系统设计阶段就考虑能控性和能观测性（执行器和传感器配置）
- 对于大型系统，先检查能控/能观性，避免设计不可实现的控制器
- 如果系统不满足能控/能观性，考虑：
  - 增加执行器或传感器（改变  $B$  或  $C$ ）
  - 重新建模（可能遗漏了物理耦合）
  - 放弃某些控制目标（只控制可控部分）

能控性和能观测性是现代控制理论的**门槛概念**——只有真正理解它们，才能深入理解后续的控制器的设计方法。它们回答了最基本但最关键的问题：**我能控制吗？我能观测吗？**

## 24 能控、能观标准型及其实现

### 引言：为系统选择“最佳姿态”

想象你要搬运一个大箱子。如果箱子是竖着的，搬起来很困难；但如果把它放平，就容易多了。这就是标准型的作用：通过线性变换，将系统矩阵转换为结构简单、便于分析和设计的“标准姿态”。

### 为什么需要标准型？

在 21 节中，我们学会了线性变换  $x = Pz$ 。但问题是：如何选择变换矩阵  $P$ ，才能让新系统矩阵  $\bar{A}$  的结构最简单？标准型就是答案。

- 分析便利：标准型矩阵结构清晰，系统性质一目了然
- 设计便利：极点配置、观测器设计等算法在标准型下最简单
- 计算便利：标准型可直接从传递函数或能控/能观矩阵获得
- 理论价值：不同标准型揭示了系统的本质特性

### 三种主要标准型

#### 本章路线图

1. 能控标准型：定义、矩阵结构、变换方法、极点配置应用
2. 能观标准型：定义、对偶关系、观测器设计应用



标准型	关键特征	主要用途
能控标准型	$\bar{B} = [0, 0, \dots, 1]^T$	极点配置设计
能观标准型	$\bar{C} = [0, 0, \dots, 1]$	状态观测器设计
对角标准型	$\bar{A} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$	系统解耦、稳定性分析

3. 对角标准型：条件、实现步骤、与 21 节的联系

4. 标准型对比：如何根据任务选择合适的标准型

5. 通向结构分解：为 25 节的 Kalman 分解做准备

## 24.1 能控标准型

### 定义与矩阵结构

对于单输入系统  $\dot{x} = Ax + Bu$ ，如果系统完全能控，则存在线性变换使其化为能控标准型：

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (30)$$

### 关键特性

1. 矩阵结构： $\bar{A}$  是伴随矩阵（Companion Matrix），最后一行为特征多项式系数的负值
2. 输入矩阵： $\bar{B}$  的最后一个元素为 1，其余为 0（输入直接作用在最后一个状态）
3. 能控性：能控矩阵  $\bar{Q}_c = [\bar{B}, \bar{A}\bar{B}, \dots, \bar{A}^{n-1}\bar{B}]$  自动满秩
4. 特征多项式： $\det(\lambda I - \bar{A}) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$

### 变换矩阵的构造

设原系统的能控矩阵为  $Q_c = [B, AB, \dots, A^{n-1}B]$ ，则变换矩阵为：

$$P = Q_c \cdot T \quad (31)$$

其中  $T$  是特定的变换矩阵（与特征多项式系数有关，推导见教材）。



## 物理意义

能控标准型将系统表示为**串联积分器链**：

### 能控标准型的物理结构

输入  $u \rightarrow$  积分器 1 ( $\dot{z}_n$ )  $\rightarrow$  积分器 2 ( $\dot{z}_{n-1}$ )  $\rightarrow \cdots \rightarrow$  积分器  $n$  ( $\dot{z}_1$ )

最后一个状态  $z_n$  受输入和所有状态的反馈控制：

$$\dot{z}_n = -a_0 z_1 - a_1 z_2 - \cdots - a_{n-1} z_n + u$$

## 24.2 能观标准型

### 定义与矩阵结构

对于单输出系统  $\dot{x} = Ax + Bu$ ,  $y = Cx$ , 如果系统**完全能观**, 则存在线性变换使其化为能观标准型：

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (32)$$

### 与能控标准型的对偶关系

能观标准型是能控标准型的**转置**：

$$\begin{aligned} \bar{A}_{\text{能观}} &= \bar{A}_{\text{能控}}^T \\ \bar{C}_{\text{能观}} &= \bar{B}_{\text{能控}}^T \end{aligned}$$

这种对偶性反映了能控性和能观性的对称关系。

## 24.3 对角标准型

### 定义

当系统矩阵  $A$  有  $n$  个互不相同的特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  时, 可化为**对角标准型** (即 21 节中的对角化)：



$$\bar{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = \Lambda \quad (33)$$

其中  $P = [v_1, v_2, \dots, v_n]$  是特征向量矩阵。

### 优势

- 完全解耦：每个状态独立演化， $\dot{z}_i = \lambda_i z_i$
- 稳定性判定：直接观察特征值（实部 $<0$  则稳定）
- 求解简便： $e^{\bar{A}t} = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t})$ （参考 22 节）

## 24.4 例题 1：转换为能控标准型

问题：将系统转换为能控标准型

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

解：

步骤 1：验证能控性

$$Q_c = [B, AB] = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \det(Q_c) = 1 \neq 0 \quad \checkmark$$

系统完全能控。

步骤 2：求特征多项式

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda + 2 & 3 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 3$$

因此  $a_0 = 3$ ,  $a_1 = 2$ 。

步骤 3：构造能控标准型

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

步骤 4：求变换矩阵（利用  $Q_c$  和能控标准型的能控矩阵）

$$\bar{Q}_c = [\bar{B}, \bar{A}\bar{B}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$



变换矩阵:

$$P = Q_c \bar{Q}_c^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

步骤 5: 验证

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \quad \checkmark$$

$$P^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \checkmark$$

## 24.5 例题 2: 三种标准型的对比

问题: 对于系统  $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ , 分别求能控标准型、能观标准型和对角标准型。

解:

### 1. 能控标准型

特征多项式:  $\det(\lambda I - A) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$

因此:

$$\bar{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

### 2. 能观标准型

$$\bar{A}_o = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad \bar{C}_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 3. 对角标准型

特征值:  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -2$

对于  $\lambda_1 = -1$ :  $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

对于  $\lambda_2 = -2$ :  $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

因此:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_d = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

对比: 三种标准型的特征值完全相同 (-1 和 -2), 这是相似变换的不变性。



## 24.6 MATLAB 实现

```
1 % 定义原系统
2 A = [-2 -3; 1 0];
3 B = [1; 0];
4 C = [1 0];
5 D = 0;
6 sys = ss(A, B, C, D);
7
8 % 方法1: 使用canon函数转换为能控标准型
9 sys_ctrbf = canon(sys, 'companion');
10 [A_c, B_c, C_c, D_c] = ssdata(sys_ctrbf);
11 fprintf('能控标准型:\n');
12 A_c, B_c
13
14 % 方法2: 使用canon函数转换为能观标准型
15 sys_obsvf = canon(sys, 'modal'); % modal是对角型的近似
16 [A_o, B_o, C_o, D_o] = ssdata(sys_obsvf);
17 fprintf('模态标准型 (对角化):\n');
18 A_o, B_o
19
20 % 方法3: 手动对角化
21 [V, Lambda] = eig(A); % V是特征向量矩阵
22 A_diag = inv(V) * A * V;
23 B_diag = inv(V) * B;
24 C_diag = C * V;
25 fprintf('对角标准型:\n');
26 Lambda, B_diag
27
28 % 验证传递函数不变
29 [num, den] = ss2tf(A, B, C, D);
30 [num_c, den_c] = ss2tf(A_c, B_c, C_c, D_c);
31 fprintf('传递函数对比:\n');
32 tf_original = tf(num, den)
33 tf_canonical = tf(num_c, den_c)
```

Listing 5: 标准型转换的 MATLAB 实现



本章小结

核心要点

三种标准型的核心特征

能控标准型：

- 矩阵：伴随矩阵（最后一行为  $-a_0, -a_1, \dots, -a_{n-1}$ ）
- 条件：系统完全能控
- 应用：极点配置设计（29 节）

能观标准型：

- 矩阵：能控标准型的转置
- 条件：系统完全能观
- 应用：状态观测器设计（30 节）

对角标准型：

- 矩阵：对角矩阵  $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$
- 条件：特征值互不相同
- 应用：系统解耦、稳定性分析

标准型选择指南

表 6: 标准型选择对比

任务	推荐标准型	原因	前提条件
极点配置	能控标准型	状态反馈增益计算简单	完全能控
观测器设计	能观标准型	观测器增益计算简单	完全能观
稳定性分析	对角标准型	直接读取特征值	无重特征值
系统解耦	对角标准型	状态独立演化	无重特征值
时域响应计算	对角标准型	$e^{\Lambda t}$ 计算简便	无重特征值
重特征值系统	约当标准型	处理不可对角化情况	见 26 节



## 常见误区

- 误区 1: 任何系统都能对角化（错！重特征值且线性无关特征向量不足时不能对角化）
- 误区 2: 能控标准型和能观标准型是同一个（错！它们是转置关系）
- 误区 3: 标准型改变了系统的特征值（错！特征值是相似变换的不变量）

## 与其他章节的联系

- 向后链接：
  - 21 节：对角标准型就是对角化
  - 23 节：能控/能观性是标准型存在的前提
  - 20 节：能控标准型直接对应传递函数形式
- 向前链接：
  - 25 节：标准型是 Kalman 分解的基础
  - 26 节：约当型处理不可对角化情况
  - 29 节：极点配置在能控标准型下最简单
  - 30 节：观测器设计在能观标准型下最简单

## 学习检查清单

- ☐ 理解三种标准型的矩阵结构（能控、能观、对角）
- ☐ 掌握能控标准型的构造步骤（能控矩阵、特征多项式）
- ☐ 理解能控型和能观型的对偶关系（转置）
- ☐ 会判断系统能否对角化（特征值是否互不相同）
- ☐ 知道如何根据任务选择合适的标准型
- ☐ 能够使用 MATLAB 的 `canon()` 函数进行标准型转换



## 25 系统的结构分解——能控、能观性分解

### 引言：找到系统中的“盲区”

一个令人不安的发现：在上一章（第 23 章）我们学习了能控性和能观测性的判据。当你计算出某个系统  $\text{rank}(W_c) = 2 < 3$  时，你知道系统**不完全能控**——但这个结论太粗糙了！你不知道：

- 哪个状态是不能控的？（第一个？第二个？还是它们的某种组合？）
- 不能控状态对系统有什么影响？（会影响传递函数吗？会导致不稳定吗？）
- 如果我只想控制能控部分，该怎么设计控制器？

#### 类比：探测盲区

想象你在一个黑暗的房间拿着手电筒。手电筒能照亮一部分空间（**能控子空间**），但总有一些角落你照不到（**不能控子空间**）。如果你不知道盲区在哪里，你可能：

- 浪费精力试图控制根本无法控制的状态
- 忽略盲区中的不稳定动态，导致系统崩溃
- 设计过于复杂的控制器，却没有实际效果

**结构分解的目的：**精确定位系统中的能控/不能控、能观/不能观部分，将复杂系统拆解成四个清晰的子系统。

#### 为什么要分解系统？

1. **识别隐藏动态：**不能控且不能观的状态在传递函数中不出现，但可能影响稳定性！
2. **简化控制器设计：**只需关注能控且能观的部分（**最小实现**）
3. **理论分析：**解释为什么有些系统降阶后传递函数不变
4. **故障诊断：**某个传感器或执行器失效时，快速判断影响范围

#### 不可控/不可观部分的危害：

- **不能控但能观：**能看到问题，但无能为力（如看着火箭偏离轨道却无法纠正）
- **能控但不能观：**瞎子开车，输入在起作用但不知道效果
- **既不能控也不能观：**最危险！完全隐藏，可能包含不稳定极点

#### 本章路线图：



- **Kalman 分解**：将系统分解为四个子系统（可控可观、可控不可观、不可控可观、不可控不可观）
- **能控性分解 vs 能观性分解**：两种分解方法的对偶关系
- **实际范例**：手把手分解一个三阶系统，看清楚“盲区”在哪里
- **最小实现**：如何提取传递函数的最简模型

## 25.1 术语问题：能观/能控 vs 可观/可控

### 25.1.1 术语等价性

**能控性 (Controllability)** 和 **可控性** 是同义词；**能观性 (Observability)** 和 **可观性** 是同义词。在国内的控制理论教材和学术文献中，这两种说法都在广泛使用，可以互换。在严谨的定义和数学含义上，它们没有任何区别。

## 25.2 系统的结构分解

一般线性系统可分解为四个子系统：

- 能控且能观测部分
- 能控但不能观测部分
- 不能控但能观测部分
- 不能控且不能观测部分

## 25.3 卡尔曼分解

### 25.3.1 标准分解形式

通过适当的线性变换，可将系统分解为：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & 0 \\ 0 & 0 & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

其中四个子系统对应：



- $x_1$ : 能控且能观 ( $B_1 \neq 0, C_1 \neq 0$ )
- $x_2$ : 能控但不能观 ( $B_2 \neq 0, C_2 = 0$ )
- $x_3$ : 不能控但能观 ( $B_3 = 0, C_3 \neq 0$ )
- $x_4$ : 不能控且不能观 ( $B_4 = 0, C_4 = 0$ )

### 25.3.2 物理意义解读

矩阵结构的含义：观察上述分解中的零块（用粗体 0 表示），它们不是偶然的，而是有深刻物理意义的：

#### 1. $B$ 矩阵的零块 ( $B_3 = 0, B_4 = 0$ )

- 含义：输入  $u$  无法直接作用于  $x_3$  和  $x_4$ （不能控状态）
- 推论：无论如何设计控制律，都无法改变这些状态的初值

#### 2. $C$ 矩阵的零块 ( $C_2 = 0, C_4 = 0$ )

- 含义： $x_2$  和  $x_4$  对输出  $y$  无贡献（不能观状态）
- 推论：这些状态的变化在输出中完全隐藏，无法从测量中反推

#### 3. $A$ 矩阵的零块（特定位置）

- $A_{12} = 0$ ：不能观部分  $x_2$  不影响能观部分  $x_1$
- $A_{14} = 0$ ：完全隐藏部分  $x_4$  不影响能观部分  $x_1$
- $A_{31} = 0, A_{32} = 0$ ：不能控部分  $x_3$  不受能控部分影响（自己演化）
- $A_{34} = 0$ ：不能控但能观  $x_3$  与完全隐藏  $x_4$  解耦
- $A_{41} = 0, A_{42} = 0$ ：完全隐藏部分  $x_4$  不受能控部分影响

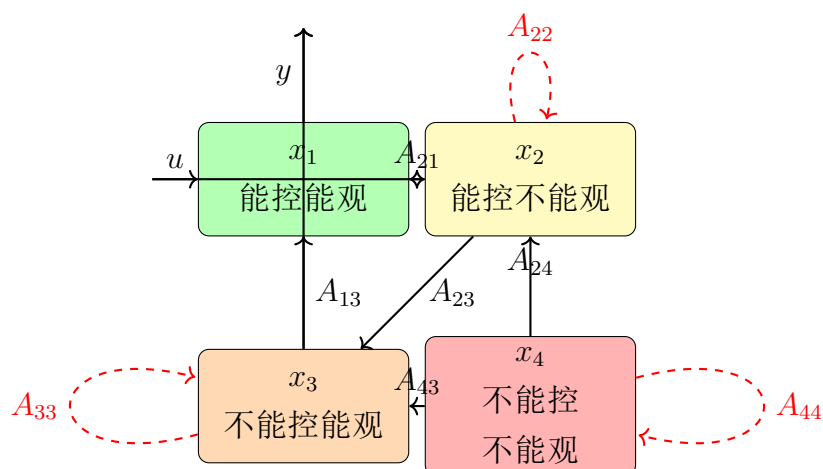
关键洞察：

- 传递函数  $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$  只与  $x_1$ （能控且能观）有关！
- $x_2$ （能控不能观）：输入能影响它，但输出看不到  $\Rightarrow$  不出现在  $G(s)$
- $x_3$ （不能控但能观）：输出能看到它，但输入无法改变  $\Rightarrow$  不出现在  $G(s)$
- $x_4$ （既不能控也不能观）：完全隐藏，最危险！可能包含不稳定极点却无法从  $G(s)$  中发现



### 25.3.3 四子系统之间的信息流

下图展示了四个子系统之间的动态耦合关系（箭头表示“影响”）：



图解说明：

- 实线箭头：存在耦合（矩阵元素非零）
- 虚线箭头：子系统内部动态（对角块  $A_{ii}$ ）
- 缺失箭头：零块，表示解耦
- 关键观察：只有  $x_1$  同时接收输入  $u$  和贡献输出  $y$

例子：三阶系统分解假设某飞机模型分解后：

- $x_1$ （升降舵 → 俯仰角，可测可控）：可以通过升降舵控制，且能从传感器测量 ⇒ 正常工作
- $x_2$ （副翼 → 滚转角，可控但传感器失效）：能控制但看不到效果 ⇒ 瞎子控制
- $x_3$ （发动机温度，传感器正常但无控制输入）：能监测但无法主动调节 ⇒ 旁观者
- $x_4$ （某内部振动模态，无传感器无执行器）：完全隐藏，可能不稳定但从外部无法察觉！

### 25.4 能观性分解与能控性分解对比

两大分解题型在思想上是对偶的，解题步骤高度相似，但目标和细节有所不同。下表进行并排对比：



对比维度	能控性分解	能观性分解
核心目的	将状态空间分为「能被输入影响」和「完全不受输入影响」两部分	将状态空间分为「能从输出观测」和「完全无法观测」两部分
前提条件	$\text{rank}(Q_c) < n$ (不完全能控)	$\text{rank}(Q_o) < n$ (不完全能观)
关键矩阵	能控性矩阵 $Q_c = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$	能观性矩阵 $Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$
子空间	能控: $Q_c$ 的列空间 不能控: $Q_c^T$ 的零空间	能观: $Q_o^T$ 的列空间 不能观: $Q_o$ 的零空间
变换矩阵 $P^{-1}$	列向量顺序: [能控基向量... 不能控基向量]	列向量顺序: [能观基向量... 不能观基向量]
分解标准形	$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_c & A_{12} \\ \mathbf{0} & A_{uc} \end{bmatrix}$ $\bar{B} = \begin{bmatrix} B_c \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$ $\bar{C} = \begin{bmatrix} C_c & C_{uc} \end{bmatrix}$	$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_o & \mathbf{0} \\ A_{21} & A_{uo} \end{bmatrix}$ $\bar{B} = \begin{bmatrix} B_o \\ B_{uo} \end{bmatrix}$ $\bar{C} = \begin{bmatrix} C_o & \mathbf{0} \end{bmatrix}$
零块含义	$\bar{B}$ 零块: 输入无法作用于不能控状态 $\bar{A}$ 零块: 不能控动态不受能控状态影响	$\bar{C}$ 零块: 不能观状态对输出无贡献 $\bar{A}$ 零块: 能观动态不受不能观状态影响

### 25.4.1 统一的解题流程（以能控分解为例）

#### 1. 判断性质:

- 计算能控性矩阵  $Q_c$



- 计算  $Q_c$  的秩  $r_c = \text{rank}(Q_c)$
- 若  $r_c < n$ , 则系统不完全能控, 需要进行分解

## 2. 寻找基向量:

- 能控子空间: 求出  $Q_c$  的列空间的一组基 (通常取  $Q_c$  中  $r_c$  个线性无关的列向量)
- 不能控子空间: 求出  $Q_c^T$  的零空间 (解方程  $Q_c^T v = 0$ ) 的一组基 (共  $n - r_c$  个向量)

## 3. 构造变换矩阵:

- 构造  $P^{-1}$  矩阵, 将上一步求出的基向量作为其列向量
- 顺序至关重要: 必须把能控子空间的基放在前面, 不能控子空间的基放在后面
- 通过求逆得到  $P = (P^{-1})^{-1}$

## 4. 进行坐标变换:

- $\bar{A} = PAP^{-1}$
- $\bar{B} = PB$
- $\bar{C} = CP^{-1}$

## 5. 验证与解读:

- 检查变换后的  $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$  是否呈现出标准分解形式 (特别是关键的零块位置)
- 根据分解后的形式, 写出能控子系统和不能控子系统的状态方程, 并进行解释

### 核心记忆点:

- 能控分解看  $Q_c$ , 能观分解看  $Q_o$
- 构造变换矩阵  $P^{-1}$  时, 列向量的顺序是「好的」部分在前 (能控/能观), 「坏的」部分在后 (不能控/不能观)
- 记住分解后的标准形式, 特别是零块的位置, 这是最终的检验标准



## 25.5 综合范例 1：能观性结构分解

### 25.5.1 题目

已知系统：

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} x\end{aligned}$$

求：

1. 判断系统的能观性
2. 进行能观性分解

### 25.5.2 解答

#### (1) 判断系统的能观性

1. 识别矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix}$$

系统阶数  $n = 2$ 。

2. 构造能观性矩阵  $Q_o$ ：

$$Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$$

3. 判断秩：第二行为第一行的  $-2$  倍，故  $\text{rank}(Q_o) = 1$ 。

4. 结论：由于  $\text{rank}(Q_o) = 1 < n = 2$ ，该系统不是完全能观的。

#### (2) 进行能观性分解

1. 寻找能观与不能观子空间：

- 不能观子空间 ( $N_o$ )：求解  $Q_o v = 0$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} v = 0 \implies 2v_1 + 2v_2 = 0 \implies v_1 = -v_2$$

$$\text{基向量： } q_{uo} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$



- 能观子空间 ( $R_o$ ):  $Q_o^T$  的列空间

$$Q_o^T = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\text{基向量: } q_o = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. 构造变换矩阵: 将能观基向量放前面, 不能观基向量放后面:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

求逆得:

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

3. 应用坐标变换:

$$\bar{A} = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = PB = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = CP^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \end{bmatrix}$$

4. 分解结果: 系统的能观性分解为:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 4 & 0 \end{bmatrix} \bar{x} \end{aligned}$$

其中  $\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_o \\ \bar{x}_{uo} \end{bmatrix}$ 。  $\bar{x}_o$  是能观状态,  $\bar{x}_{uo}$  是不能观状态。  $\bar{C}$  矩阵中对应  $\bar{x}_{uo}$  的元素为 0, 表明该状态对输出没有贡献, 故不可见。

## 25.6 综合范例 2: 能控性结构分解

### 25.6.1 题目

已知系统状态方程:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

求: 判断能控性, 进行能控性分解。



## 25.6.2 解答

## (1) 判断系统的能控性

1. 识别矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

系统阶数  $n = 3$ 。

2. 构造能控性矩阵  $Q_c$ : 计算  $AB$  和  $A^2B$ :

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$Q_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

3. 判断秩: 对  $Q_c$  进行行初等变换:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因此  $\text{rank}(Q_c) = 2$ 。

4. 结论: 由于  $\text{rank}(Q_c) = 2 < n = 3$ , 该系统不是完全能控的。

## (2) 进行能控性分解

1. 寻找能控与不能控子空间:

- 能控子空间 ( $R_c$ ):  $Q_c$  的列空间。秩为 2, 可选前两列作为基:

$$q_{c1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad q_{c2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



- 不能控子空间：求解  $Q_c^T v = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} v = 0$$

从第一个方程：  $v_1 + v_2 = 0 \implies v_1 = -v_2$

从第二个方程：  $v_2 + v_3 = 0 \implies v_3 = -v_2$

基向量：  $q_{uc} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

2. 构造变换矩阵：将能控基向量放前面，不能控基向量放后面：

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

求逆（使用行列式和伴随矩阵）：

$$\det(P^{-1}) = 1(1+1) - 0 + 1(1-0) = 3$$

$$P = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

3. 应用坐标变换：

$$\bar{A} = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = PB = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = CP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

4. 分解结果：系统的能控性分解为：

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \bar{x} \end{aligned}$$



其中  $\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_c \\ \bar{x}_{uc} \end{bmatrix}$ 。前 2 个状态  $\bar{x}_c$  是能控状态，第 3 个状态  $\bar{x}_{uc}$  是不能控状态。 $\bar{B}$  矩阵中对应  $\bar{x}_{uc}$  的元素为 0，表明输入  $u$  无法影响该状态。同时， $\bar{A}$  的左下角为零块，说明不能控状态的演化不受能控状态的影响（但能控状态可能受其影响）。

本章总结

四子系统特性对比表

Kalman 分解将任意系统分解为四个子系统，下表总结它们的特性和设计意义：

表 7: 四子系统特性与设计意义对比

特性	$x_1$ 能控能观	$x_2$ 能控不能观	$x_3$ 不能控能观	$x_4$ 不能控不能观
输入影响	✓ 能控制	✓ 能控制	× 无法控制	× 无法控制
输出可见	✓ 可观测	× 隐藏	✓ 可观测	× 不可观测
$B$ 矩阵	$B_1 \neq 0$	$B_2 \neq 0$	$B_3 = 0$	$B_4 = 0$
$C$ 矩阵	$C_1 \neq 0$	$C_2 = 0$	$C_3 \neq 0$	$C_4 = 0$
传函贡献	✓ 唯一	× 不出现	× 不出现	× 不出现
极点配置	✓ 可任意配置	✓ 可配置	× 无法配置	× 无法配置
状态估计	✓ 可设计观测器	× 无法估计	✓ 可估计	× 无法估计
稳定性	需保证稳定	需保证稳定 (虽隐藏)	必须稳定 (无法控制!)	必须稳定 (无法控制!)
设计策略	正常设计: 控制器+观测器	开环控制 (无反馈)	被动监测 (无法干预)	系统重设计 (增加冗余)
类比	可见可控: 驾驶员控方向	瞎子控制: 踩油门看不到	旁观者: 看温度无法调	盲区炸弹: 无法感知
危险等级	安全	中等	中高	极高

核心要点回顾

1. 结构分解的目的
- 精确定位系统中的能控/不能控、能观/不能观部分
  - 识别隐藏动态（不能控不能观部分可能包含不稳定极点）
  - 简化控制器设计（最小实现理论基础）
2. Kalman 分解的关键结论
- 传递函数  $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$  只与  $x_1$ （能控且能观）有关
  - $x_2, x_3, x_4$  的极点在  $G(s)$  中不出现（零极点相消）
  - $x_3, x_4$ （不能控部分）的稳定性无法通过控制改善



### 3. 分解方法对偶性

- 能控性分解:  $(A, B) \rightarrow (\bar{A}, \bar{B})$ ,  $\bar{B}$  出现零块
- 能观性分解:  $(A, C) \rightarrow (\bar{A}, \bar{C})$ ,  $\bar{C}$  出现零块
- 数学结构完全对称, 掌握一种即可类推另一种

### 4. 实际设计意义

- 最小实现: 提取  $x_1$  子系统, 得到最简状态空间模型
- 执行器/传感器配置: 保证系统至少完全能控或完全能观
- 故障分析: 某个执行器/传感器失效  $\Rightarrow$  快速判断影响范围
- 降阶设计: 对高阶系统, 只设计  $x_1$  子系统的控制器

### 常见误区与易错点

#### 概念误区:

- 误区 1: 认为不能控/不能观部分可以忽略
- 正确:  $x_3, x_4$  必须稳定! 否则系统会崩溃 (即使  $G(s)$  看起来稳定)
- 误区 2: 认为传递函数能完全描述系统
- 正确: 传递函数只反映  $x_1$ , 丢失了  $x_2, x_3, x_4$  的信息
- 误区 3: 认为能控但不能观的状态无关紧要
- 正确:  $x_2$  虽然隐藏, 但其极点必须稳定 (可能导致不稳定但无法观测)

#### 计算易错点:

- 构造  $P^{-1}$  时搞混顺序 (“好的在前还是在后?”)
- 正确: 能控/能观基向量在前, 不能控/不能观基向量在后
- 误以为  $\bar{A}$  一定是块对角矩阵
- 正确:  $\bar{A}$  有特定零块, 但不是完全对角 ( $A_{21}, A_{13}$  等可能非零)
- 忘记验证分解结果 (零块位置错误但未发现)
- 正确: 检查  $\bar{B}, \bar{C}$  的零块位置, 以及  $\bar{A}$  的特定零块 (如  $A_{31} = A_{32} = 0$ )

#### 物理理解易错点:



- 认为  $x_4$  (不能控不能观) “无害” 因为传递函数中看不到
- 正确:  $x_4$  是最危险的! 如果包含不稳定极点, 系统会崩溃但无法从  $G(s)$  预测
- 把 “不能观” 理解成 “测量误差大”
- 正确: “不能观” 是结构性问题, 无论测量多精确都无法推断这些状态

### 学习清单 (掌握程度自检)

#### 基础理解:

- ☐ 理解结构分解的动机 (为什么要拆成四部分?)
- ☐ 能画出 Kalman 分解的矩阵结构 (哪些是零块?)
- ☐ 理解四子系统的物理意义 (可见性+可控性组合)
- ☐ 知道传递函数只与  $x_1$  有关

#### 计算能力:

- ☐ 给定  $(A, B)$ , 能完整执行能控性分解 (找基、构造  $P^{-1}$ 、变换)
- ☐ 给定  $(A, C)$ , 能完整执行能观性分解
- ☐ 会求  $Q_c$  的列空间基向量和  $Q_c^T$  的零空间基向量
- ☐ 能验证分解结果 (检查零块位置)

#### 深入应用:

- ☐ 能从分解结果判断系统的传递函数形式 (极零点相消)
- ☐ 理解最小实现的含义 (提取  $x_1$  子系统)
- ☐ 能分析不能控/不能观部分对稳定性的影响
- ☐ 能设计执行器/传感器配置避免完全不可控/不可观子系统

### 后续章节预告与衔接

#### 与前章 (第 23 章) 的关系:

- 前章: 判断系统是否完全能控/能观 ( $\text{rank}(W_c) = n?$ )
- 本章: 精确定位不能控/不能观的部分 (哪些状态有问题?)
- 前章是诊断, 本章是解剖



与后章的关系：

- 第 27 章 (Lyapunov 稳定性)：分析  $x_3, x_4$  (不能控部分) 的稳定性是否满足要求，这是系统可用的前提
- 第 29 章 (极点配置)：只能配置  $x_1, x_2$  (能控部分) 的极点， $x_3, x_4$  无法改变
- 第 30 章 (状态观测器)：只能估计  $x_1, x_3$  (能观部分)， $x_2, x_4$  无法观测

实践建议：

- 在系统建模阶段，检查是否存在  $x_4$  (完全隐藏) 子系统
- 如果  $x_3$  或  $x_4$  不稳定，**必须**重新设计系统 (增加执行器/传感器)
- 对于高阶系统，优先进行结构分解，然后只对  $x_1$  子系统设计控制器 (降阶设计)
- 理解“传递函数不是全部”——状态空间描述包含更多信息

理论价值：

- 最小实现理论：任何传递函数的最简状态空间实现就是  $x_1$  子系统
- 系统等价性：不同状态空间模型可能有相同传递函数 ( $x_2, x_3, x_4$  不同)
- 极零点相消：数学解释了为什么某些极点在传递函数中“消失”

结构分解是现代控制理论的**透视工具**——它让你看透系统内部的**盲区**，避免设计出表面稳定但实际危险的控制系统。记住：**传递函数只是冰山一角，状态空间才是全貌！**

## 26 约当型实现

引言：当对角化失败时的“备用方案”

在 21 节中，我们学会了对角化：将系统矩阵  $A$  转换为对角矩阵  $\Lambda$ 。但是，**并非所有矩阵都能对角化！**当系统有**重特征值**且线性无关的特征向量不足时，对角化就会失败。

为什么需要约当型？

考虑一个简单的例子：

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

它有重特征值  $\lambda = 2$  (重数为 2)，但只有一个线性无关的特征向量  $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 。无法

构造  $2 \times 2$  的特征向量矩阵来对角化！

这时就需要**约当标准型** (Jordan Canonical Form) ——它是对角化的推广，能够处理所有矩阵。



## 约当型 vs 对角型

	对角型	约当型
矩阵形式	$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$	对角线+主对角线上方的 1
适用条件	特征值互不相同	所有矩阵
特征向量	$n$ 个线性无关特征向量	可能需要广义特征向量
系统解耦	完全解耦	部分耦合（约当块内）

## 本章路线图

1. 约当块：基本单元的定义和性质
2. 约当矩阵：由约当块组成的分块对角矩阵
3. 广义特征向量：构造变换矩阵的关键
4. 例题：简单特征值和重特征值的两个例子
5. MATLAB 实现：jordan() 函数的使用

## 26.1 约当块的定义

## 基本约当块

与特征值  $\lambda$  对应的  $k$  阶约当块（Jordan Block）定义为：

$$J_k(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}_{k \times k} \quad (34)$$

## 约当块的特点

- 对角线：全部为特征值  $\lambda$
- 超对角线：主对角线正上方全部为 1
- 其余元素：全部为 0
- 阶数： $k$  表示该特征值的几何重数（有几个线性无关的特征向量）



## 特殊情况

当  $k = 1$  时，约当块退化为标量：

$$J_1(\lambda) = [\lambda]$$

这就是对角矩阵的元素！因此，**对角矩阵是约当矩阵的特殊情况。**

## 26.2 约当标准型

### 定义

任意  $n \times n$  矩阵  $A$  都可以通过相似变换化为约当标准型：

$$J = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_r \end{bmatrix} \quad (35)$$

其中  $J_1, J_2, \dots, J_r$  是约当块。

### 约当块的个数与大小

- 如果特征值  $\lambda_i$  的**代数重数**为  $m_i$ （特征多项式中的重数）
- 几何重数为  $g_i$ （线性无关特征向量的个数）
- 则对应  $g_i$  个约当块，总大小为  $m_i$

**关键关系：**  $g_i \leq m_i$ ，当  $g_i = m_i$  时可对角化。

## 26.3 广义特征向量

### 定义

对于特征值  $\lambda$  和阶数为  $k$  的约当块，需要构造  $k$  个向量：

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)v_1 &= 0 \quad (\text{特征向量}) \\ (A - \lambda I)v_2 &= v_1 \\ (A - \lambda I)v_3 &= v_2 \\ &\vdots \\ (A - \lambda I)v_k &= v_{k-1} \end{aligned}$$

向量  $v_1, v_2, \dots, v_k$  称为**广义特征向量链**。



## 物理意义

广义特征向量  $v_2, v_3, \dots$  可以理解为“次优的特征向量”——虽然不满足  $(A - \lambda I)v = 0$ ，但能逐步逼近特征向量。

## 26.4 例题 1：简单特征值（可对角化）

问题：求矩阵的约当标准型

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

解：

步骤 1：求特征值

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -3 & \lambda - 2 \end{bmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda - 4)(\lambda + 1)$$

特征值： $\lambda_1 = 4$ ,  $\lambda_2 = -1$ （互不相同）

步骤 2：求特征向量

对于  $\lambda_1 = 4$ ：

$$(A - 4I)v_1 = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

对于  $\lambda_2 = -1$ ：

$$(A + I)v_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

步骤 3：构造约当型

由于两个特征值互不相同，约当型就是对角矩阵：

$$J = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

验证：

$$P^{-1}AP = \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \checkmark$$

## 26.5 例题 2：重特征值（不可对角化）

问题：求矩阵的约当标准型

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$



解:

步骤 1: 求特征值

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 3)$$

特征值:  $\lambda_1 = 2$  (重数 2),  $\lambda_2 = 3$  (重数 1)

步骤 2: 求  $\lambda_1 = 2$  的特征向量

$$(A - 2I) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{rank}(A - 2I) = 2$$

零空间维数 =  $3 - 2 = 1$ , 只有一个线性无关的特征向量:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

步骤 3: 求广义特征向量

由于只有一个特征向量但重数为 2, 需要一个广义特征向量  $v_2$  满足:

$$(A - 2I)v_2 = v_1$$

解方程:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \\ v_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

得  $v_{22} = 1$ , 其余自由, 取:

$$v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

步骤 4: 求  $\lambda_2 = 3$  的特征向量

$$v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

步骤 5: 构造约当型

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

注意: 前两列对应  $\lambda_1 = 2$  的 2 阶约当块, 第三列对应  $\lambda_2 = 3$  的 1 阶约当块。



## 26.6 约当型与系统动态

### 约当块的矩阵指数

对于约当块  $J_k(\lambda)$ ，其矩阵指数为：

$$e^{J_k(\lambda)t} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \frac{t^{k-3}}{(k-3)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (36)$$

### 稳定性影响

- 如果  $\text{Re}(\lambda) < 0$ ，则  $e^{\lambda t} \rightarrow 0$ ，约当块对应的状态收敛
- 如果  $\text{Re}(\lambda) > 0$ ，则  $e^{\lambda t} \rightarrow \infty$ ，系统不稳定
- 如果  $\text{Re}(\lambda) = 0$ :
  - 1 阶约当块:  $e^{J_1(0)t} = 1$ （临界稳定）
  - $k > 1$  阶约当块: 包含  $t, t^2, \dots$ （不稳定!）

**关键结论：**纯虚特征值的重根会导致不稳定（即使特征值在虚轴上）。

## 26.7 MATLAB 实现

```

1 % 例题1：简单特征值
2 A1 = [1 2; 3 2];
3 [P1, J1] = jordan(A1);
4 fprintf('例题1 - 约当型（对角）:\n');
5 J1
6 P1
7
8 % 例题2：重特征值
9 A2 = [2 1 0; 0 2 0; 0 0 3];
10 [P2, J2] = jordan(A2);
11 fprintf('例题2 - 约当型（有约当块）:\n');
12 J2
13 P2
14
15 % 验证变换

```



```

16 A2_reconstructed = P2 * J2 * inv(P2);
17 fprintf('验证: P*J*P^{-1} =\n');
18 A2_reconstructed
19
20 % 可视化约当块结构
21 figure;
22 spy(J2);
23 title('约当矩阵的稀疏结构');
24 xlabel('列');
25 ylabel('行');
26
27 % 方法2: 使用eig检查对角化可能性
28 [V, D] = eig(A2);
29 fprintf('特征值:\n');
30 diag(D)
31 fprintf('特征向量矩阵的秩: %d (应为 %d 才能对角化)\n', rank(V), size(
    A2,1));

```

Listing 6: 约当标准型的 MATLAB 实现

## 本章小结

### 核心公式

#### 约当标准型的核心概念

约当块:

$$J_k(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}_{k \times k}$$

约当矩阵:

$$J = \text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_r)$$

变换矩阵:  $P$  的列由特征向量和广义特征向量组成

矩阵指数:

$$e^{J_k(\lambda)t} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots \\ & 1 & t & \cdots \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$



## 约当型 vs 对角型对比

表 8: 约当标准型与对角标准型对比

特性	对角型	约当型
适用范围	特征值互不相同	所有矩阵
矩阵形式	纯对角矩阵	对角+超对角线的 1
系统解耦	完全解耦	约当块内部耦合
特征向量	$n$ 个线性无关	可能需要广义特征向量
计算复杂度	低	中等
稳定性判定	直接看特征值	需考虑约当块大小

## 应用场景

- 不可对角化系统：处理重特征值且几何重数<代数重数的情况
- 状态方程求解：计算  $e^{At}$  时，约当型比原矩阵简单（参考 22 节）
- 稳定性分析：判断纯虚特征值重根的稳定性（参考 27 节）
- 理论研究：约当型是矩阵相似理论的基石

## 常见误区

- 误区 1：所有矩阵都能对角化（错！重特征值可能无法对角化）
- 误区 2：约当块的大小等于特征值的重数（错！可能有多个小约当块）
- 误区 3：纯虚特征值重根是临界稳定（错！若约当块阶数>1 则不稳定）

## 与其他章节的联系

- 向后链接：
  - 21 节：约当型是对角化失败时的替代方案
  - 22 节：约当型简化  $e^{At}$  的计算
  - 24 节：约当型是另一种重要的标准型
- 向前链接：
  - 27 节：约当块影响稳定性判定
  - 高级课程：约当型在泛函分析、矩阵理论中的应用



## 学习检查清单

- ☐ 理解约当块的定义（对角线+超对角线的1）
- ☐ 知道什么时候需要约当型（重特征值且不可对角化）
- ☐ 掌握广义特征向量的求解方法（ $(A - \lambda I)v_k = v_{k-1}$ ）
- ☐ 能够判断约当块的个数和大小（几何重数 vs 代数重数）
- ☐ 理解约当型对系统稳定性的影响（纯虚重根的危险）
- ☐ 能够使用 MATLAB 的 `jordan()` 函数

## 27 稳定性与李雅普诺夫方法

### 引言：为什么研究稳定性？

在控制系统设计中，我们最关心的问题之一就是：**系统受到扰动后，能否恢复到期望的工作状态？**

想象一个简单的场景：一个倒立摆系统在竖直位置保持平衡。如果轻轻推它一下，它会倒下还是回到竖直位置？这就是**稳定性**问题的核心。对于飞机、火箭、机器人等复杂系统，稳定性更是关系到安全和性能的关键指标。

传统的频域方法（如奈奎斯特判据、伯德图）虽然强大，但**仅适用于线性系统**。面对实际工程中大量存在的**非线性系统**——如饱和、死区、摩擦等非线性特性，我们需要更通用的工具。

19 世纪末，俄国数学家**李雅普诺夫（Lyapunov）**提出了一套革命性的稳定性分析方法，**无需求解微分方程**，仅通过构造一个「能量函数」就能判断系统稳定性。这套方法不仅适用于线性系统，更能处理复杂的非线性系统，成为现代控制理论的基石。

本章将系统介绍李雅普诺夫稳定性理论，包括：

- 稳定性的严格数学定义（什么是稳定、渐近稳定、全局稳定）
- 李雅普诺夫第一方法（线性化方法：简单但有局限）
- 李雅普诺夫第二方法（直接方法：强大但需要技巧）
- 如何区分局部稳定与全局稳定（这是非线性系统的关键）
- 实际应用范例（从理论到实践）



## 27.1 李雅普诺夫稳定性定义

### 本节目的

在开始分析方法之前，我们需要严格定义「稳定」的含义。日常语言中的「稳定」过于模糊，数学上需要精确的量化标准。

考虑自治系统  $\dot{x} = f(x)$ ，设  $x_e$  为平衡点：

- **稳定**：对任意  $\varepsilon > 0$ ，存在  $\delta > 0$ ，当  $\|x(0) - x_e\| < \delta$  时，有  $\|x(t) - x_e\| < \varepsilon$ ， $\forall t \geq 0$
- **渐近稳定**：稳定且  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_e$
- **大范围渐近稳定**：渐近稳定且吸引域为整个状态空间

直观理解：

- 稳定意味着「小的扰动只产生小的偏差」——系统不会失控，但也不一定回到原点
- 渐近稳定更强，不仅不失控，而且「最终会回到平衡点」
- 大范围渐近稳定最强，「无论初始扰动多大，都能回到平衡点」

这三个层次的区别非常重要，后续分析会频繁用到。

## 27.2 李雅普诺夫第一方法（线性化方法）

### 本节目的

对于非线性系统，直接分析往往很困难。李雅普诺夫第一方法提供了一个**捷径**：在平衡点附近用线性系统近似，然后利用我们熟悉的线性系统理论来判断稳定性。

### 27.2.1 基本原理

对于非线性系统  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ，在平衡点  $\mathbf{x}_e$  附近，可以用线性系统近似：

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z}$$

其中  $\mathbf{A}$  是雅可比矩阵（Jacobian Matrix）：

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_e}$$

稳定性判据：

- 如果  $\mathbf{A}$  的所有特征值实部都严格小于零，则平衡点局部渐近稳定



- 如果  $A$  至少有一个特征值实部大于零，则平衡点不稳定
- 如果  $A$  有特征值实部等于零（且无实部大于零的特征值），则方法失效，无法判断

对于线性系统  $\dot{x} = Ax$ ，系统渐近稳定的充要条件是矩阵  $A$  的所有特征值都具有负实部。

第一方法的优缺点总结：

- 优点：计算简单，步骤明确（求雅可比矩阵  $\rightarrow$  算特征值  $\rightarrow$  判断符号）
- 缺点：只能得到局部稳定性结论；特征值实部为零时方法失效
- 适用场景：作为初步快速判断，或者局部稳定性分析已经足够的情况

## 27.3 李雅普诺夫第二方法（直接方法）

本节目的

李雅普诺夫第二方法是更强大、更通用的工具。它的核心思想是：借鉴物理学中的能量概念——如果能证明系统的「能量」总是递减，系统必然稳定。

李雅普诺夫定理：如果存在标量函数  $V(x)$  满足：

1.  $V(x)$  连续且有连续的一阶偏导数
2.  $V(x_e) = 0$ ，当  $x \neq x_e$  时  $V(x) > 0$ （正定）
3.  $\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) \leq 0$ （半负定）

则平衡点  $x_e$  稳定。

若进一步有  $\dot{V}(x) < 0$ （负定），则平衡点渐近稳定。

定理的直观意义：这个定理告诉我们，不要求解微分方程，只要能找到一个满足条件的函数  $V(x)$ （称为李雅普诺夫函数），就能判断稳定性。这就像物理学家通过能量守恒定律判断运动趋势，而不必求解复杂的运动方程。

## 27.4 李雅普诺夫方法的核心思想

本节目的

上一节给出了定理，但可能让人感到抽象。本节将深入解释为什么这个方法有效，以及如何在实际问题中应用它。



### 27.4.1 直观理解

李雅普诺夫方法的思想非常直观：如果能为系统找到一个类似于「能量」的函数  $V(x)$ ，并且证明这个「能量」总是随时间减少（或至少不增加），那么系统最终必然会稳定下来。

- 这个函数  $V(x)$  称为李雅普诺夫函数
- $V(x)$  必须是正定的（类似能量总是正的）
- $V(x)$  的导数  $\dot{V}(x)$  必须是负定的或半负定的（能量随时间衰减或保持不变）

### 27.4.2 线性系统的二次型李雅普诺夫函数

对于线性系统  $\dot{x} = Ax$ ，我们选择二次型的李雅普诺夫函数  $V(x) = x^T Px$ ，其中  $P$  是对称正定矩阵。

对  $V(x)$  求导：

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= \frac{d}{dt}(x^T Px) \\ &= \dot{x}^T Px + x^T P \dot{x} \\ &= (Ax)^T Px + x^T P(Ax) \\ &= x^T A^T Px + x^T PAx \\ &= x^T (A^T P + PA)x\end{aligned}$$

为了让  $\dot{V}(x)$  是负定的，通常令  $\dot{V}(x) = -x^T Qx$ ，其中  $Q$  是我们选择的对称正定矩阵。因此得到：

$$\boxed{A^T P + PA = -Q}$$

这就是著名的李雅普诺夫方程。

### 27.4.3 判据总结

对于给定的系统矩阵  $A$ ：

- 如果对任意正定矩阵  $Q$ ，李雅普诺夫方程都有唯一的正定解  $P$ ，则系统渐近稳定
- 如果对某个正定矩阵  $Q$ ，方程无解或解不是正定的，则系统不是渐近稳定的
- 如果能找到半正定的  $Q$  使得存在正定的  $P$ ，但对所有正定  $Q$  都无解，则系统可能是李雅普诺夫稳定（临界稳定）



## 27.5 线性系统的李雅普诺夫方程

### 本节目的

对于线性系统，我们有特别简洁的方法：选择**二次型**李雅普诺夫函数。这不仅计算方便，而且给出了稳定性的**充要条件**。

对于线性系统  $\dot{x} = Ax$ ，选择二次型李雅普诺夫函数：

$$V(x) = x^T P x$$

其中  $P$  为正定矩阵。稳定的充要条件是李雅普诺夫方程：

$$A^T P + P A = -Q$$

对于给定的正定矩阵  $Q$ ，存在唯一的正定解  $P$ 。

**实用价值：**这个方程将稳定性判断转化为求解线性矩阵方程的问题。在 MATLAB 等软件中，可以直接调用 `lyap` 函数求解。如果解  $P$  是正定的，系统就是渐近稳定的。

## 27.6 局部稳定性 vs 全局稳定性

### 本节目的

这是非线性系统分析中**最容易混淆的概念**。很多初学者证明了系统在平衡点附近稳定，就错误地声称系统「稳定」。实际上，**局部稳定**和**全局稳定**是完全不同的性质。本节将彻底澄清这个问题。

### 27.6.1 核心概念辨析

在李雅普诺夫理论中，**局部渐近稳定**和**全局渐近稳定**（又称**大范围渐近稳定**）是两个截然不同的概念。区分它们对于理解非线性系统的稳定性至关重要。

**1. 局部渐近稳定 (Local Asymptotic Stability)** 直观比喻：想象一个放在巨大桌子中央的小碗。

含义：

- 只要初始状态在平衡点的**某个邻域内**（碗里面），系统最终会收敛到平衡点
- 但如果初始状态在这个邻域之外（碗外面的桌子上），系统行为无法保证
- 这个邻域称为**吸引域 (Domain of Attraction)** 或**稳定域**

**数学定义：**存在  $\delta > 0$ ，当  $\|x(0) - x_e\| < \delta$  时，有  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_e$ 。



**2. 全局渐近稳定 (Global Asymptotic Stability)** 直观比喻：想象整个地球就是一个巨大的碗，只有一个最低点。

含义：

- 无论初始状态在状态空间的任何位置，系统最终都会收敛到平衡点
- 吸引域是整个状态空间
- 这是一个非常强的性质，在实际系统中并不常见

数学定义：对于任意初始状态  $x(0)$ ，都有  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_e$ 。

### 27.6.2 全局稳定性的判断条件

要证明全局渐近稳定，李雅普诺夫函数必须满足更严格的条件：

1.  $V(x)$  在整个状态空间都是正定的
2.  $\dot{V}(x)$  在整个状态空间都是负定的（除平衡点外）
3.  $V(x)$  是径向无界的 (Radially Unbounded):

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$$

为什么需要「径向无界」条件？ 比喻：这个条件确保「碗壁是无限高的」。

原因：

- 如果  $V(x)$  在远处趋向某个有限值，可能存在「平坦的高原」
- 系统状态可能停留在这个高原上，永远无法回到平衡点
- 无限高的碗壁保证了状态总是处于向平衡点倾斜的「斜坡」上

对于常用的二次型函数  $V(x) = x^T P x$  ( $P$  正定)，它天然满足径向无界条件。因此，关键是判断  $\dot{V}(x)$  是否在整个空间都是负定的。

### 27.6.3 判断示例：为什么局部 全局

考虑系统：

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + 2x_2^4$$

$$\dot{x}_2 = -x_2$$

选择李雅普诺夫函数  $V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2$ ，计算得：

$$\dot{V}(x) = -2x_1^2 + 2x_1x_2^4 - 2x_2^2$$



**局部分析（原点附近）** 当  $x_1, x_2$  很小时，二次项  $-2x_1^2 - 2x_2^2$  占主导，高阶项  $2x_1x_2^4$  可忽略，因此  $\dot{V}(x) < 0$ 。

**结论：**系统在原点附近是**局部渐近稳定**的。

**全局分析（远离原点）** 取  $x_2 = 2, x_1 = 10$ ：

$$\dot{V}(10, 2) = -2(100) + 2(10)(16) - 2(4) = -200 + 320 - 8 = 112 > 0$$

在点  $(10, 2)$  处， $\dot{V}(x) > 0$ ，能量正在增加！

**结论：** $\dot{V}(x)$  不是全局负定的，系统不是全局渐近稳定的。

#### 27.6.4 关键要点总结

对比维度	局部渐近稳定	全局渐近稳定
吸引域	平衡点的某个邻域	整个状态空间
初始条件要求	必须在稳定域内	任意初始状态
$V(x)$ 正定性	在邻域内正定	在整个空间正定
$\dot{V}(x)$ 负定性	在邻域内负定	在整个空间负定
径向无界条件	不要求	必须满足
证明难度	相对容易	通常很困难
实际意义	小扰动下稳定	任何扰动下都稳定

**重要提醒：**

- 对于**线性系统**，局部渐近稳定等价于全局渐近稳定
- 对于**非线性系统**，局部稳定**不能**推出全局稳定
- 在解题时，如果只证明了  $\dot{V}(x)$  在邻域内负定，结论应是「局部渐近稳定」
- 声称「全局稳定」需要更严格的证明

#### 本节小结

局部稳定性与全局稳定性的区别是理解非线性系统的关键。记住：

- 局部稳定只保证「小扰动下」系统安全



- 全局稳定保证「任意扰动下」系统都安全
- 证明全局稳定需要验证  $\dot{V}(x)$  在整个状态空间都负定，并且  $V(x)$  径向无界

至此，我们已经掌握了李雅普诺夫稳定性理论的核心内容。接下来通过两个典型范例，展示如何将理论应用于实际问题。

## 28 李雅普诺夫稳定性判断——范例

### 范例说明

以下两个范例分别展示：

- **范例 1：**线性系统的李雅普诺夫方程求解（临界稳定情况）
- **范例 2：**非线性系统的线性化分析（第一方法应用）

通过这些例子，你将看到理论如何转化为具体的计算步骤。

### 28.1 范例 1：临界稳定系统的李雅普诺夫分析

#### 28.1.1 题目

判断系统稳定性：

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x\end{aligned}$$

其中  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

#### 28.1.2 解答

判断稳定性时，我们只关心**零输入响应**（令  $u = 0$ ），因此只分析系统矩阵  $A$ 。

**方法一：特征值法（快速验证）** 这是最直接的方法，用于判断系统的稳定性。

计算特征值，解  $\det(\lambda I - A) = 0$ ：

$$\det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

解得特征值为  $\lambda = \pm i$ 。

**结论：**特征值的实部为 0，因此系统是李雅普诺夫稳定的（也称临界稳定），但不是渐进稳定。系统受扰动后会产生等幅振荡。



## 方法二：李雅普诺夫第二方法（题目要求）

1. 选择对称正定矩阵  $Q$ ：

最简单的选择是单位矩阵：

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. 设定待求的对称矩阵  $P$ ：

$$\text{令 } P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$$

3. 构建李雅普诺夫方程  $A^T P + P A = -Q$ ：

首先计算各项：

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^T P = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_{12} & -p_{22} \\ p_{11} & p_{12} \end{bmatrix}$$

$$P A = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_{12} & p_{11} \\ -p_{22} & p_{12} \end{bmatrix}$$

$$A^T P + P A = \begin{bmatrix} -2p_{12} & p_{11} - p_{22} \\ p_{11} - p_{22} & 2p_{12} \end{bmatrix}$$

$$\text{令其等于 } -Q = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}:$$

$$\begin{bmatrix} -2p_{12} & p_{11} - p_{22} \\ p_{11} - p_{22} & 2p_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

## 4. 分析方程组：

由上式可得：

$$-2p_{12} = -1 \implies p_{12} = \frac{1}{2} \quad (\text{第 (1,1) 元素})$$

$$p_{11} - p_{22} = 0 \implies p_{11} = p_{22} \quad (\text{第 (1,2) 元素})$$

$$2p_{12} = -1 \implies p_{12} = -\frac{1}{2} \quad (\text{第 (2,2) 元素})$$

**出现矛盾！** 从第 (1,1) 元素得  $p_{12} = \frac{1}{2}$ ，而从第 (2,2) 元素得  $p_{12} = -\frac{1}{2}$ 。

这意味着对于正定矩阵  $Q = I$ ，李雅普诺夫方程无解。



5. 得出结论：

根据李雅普诺夫稳定性判据，如果系统是渐进稳定的，那么对于任意正定  $Q$ ，都必须能解出唯一的正定  $P$ 。

现在我们发现，对于最简单的正定  $Q = I$ ，方程都无解，这直接说明了系统不是渐进稳定的。

28.1.3 结论汇总

判断方法	结论
特征值法	特征值 $\lambda = \pm i$ ，实部为 0，系统李雅普诺夫稳定但不渐近稳定
李雅普诺夫第二方法	对正定 $Q = I$ ，方程无正定解 $P$ ，系统不渐近稳定
最终结论	系统临界稳定（李雅普诺夫稳定），受扰动后产生等幅振荡

范例 1 总结

这个例子展示了**临界稳定系统**的特点：

- 特征值实部为零，系统处于稳定与不稳定的边界
- 李雅普诺夫方程无解，证明系统不是渐近稳定
- 实际表现为等幅振荡——既不收敛也不发散

**关键经验：**遇到方程矛盾（无解）时，不要怀疑计算错误，这恰恰说明系统不满足渐近稳定条件！

28.2 范例 2：非线性系统的线性化分析

28.2.1 题目

使用李雅普诺夫第一方法（线性化方法）分析系统的稳定性：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -6x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 &= -2x_1 - 6x_2 - 2x_2^3\end{aligned}$$

28.2.2 解答思路

对于非线性系统，直接寻找合适的李雅普诺夫函数（第二方法）往往非常困难。李雅普诺夫第一方法（也称间接法）提供了一条捷径：在平衡点附近对系统进行线性化，然后分析线性化系统的稳定性。



**第一步：寻找平衡点** 令  $\dot{x}_1 = 0$  和  $\dot{x}_2 = 0$ ：

$$-6x_1 - x_2 = 0 \implies x_2 = -6x_1 \quad (1)$$

$$-2x_1 - 6x_2 - 2x_2^3 = 0 \quad (2)$$

将 (1) 式代入 (2) 式：

$$-2x_1 - 6(-6x_1) - 2(-6x_1)^3 = 0$$

$$-2x_1 + 36x_1 - 2(-216x_1^3) = 0$$

$$34x_1 + 432x_1^3 = 0$$

$$x_1(34 + 432x_1^2) = 0$$

由于  $34 + 432x_1^2 > 0$  对所有实数  $x_1$  成立，因此  $x_1 = 0$ ，进而  $x_2 = 0$ 。

**结论：**系统有唯一平衡点  $(0, 0)$ 。

**第二步：在平衡点处线性化系统** 对于非线性系统  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ，在平衡点  $\mathbf{x}_e$  附近的线性化系统为：

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z}$$

其中  $\mathbf{A}$  是雅可比矩阵 (Jacobian Matrix)：

$$\mathbf{A} = J(\mathbf{x}_e) = \left. \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_e}$$

### 1. 定义非线性函数

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6x_1 - x_2 \\ -2x_1 - 6x_2 - 2x_2^3 \end{bmatrix}$$

### 2. 计算偏导数

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} &= -6, & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} &= -1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} &= -2, & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} &= -6 - 6x_2^2 \end{aligned}$$

### 3. 构造雅可比矩阵

$$J(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -6 & -1 \\ -2 & -6 - 6x_2^2 \end{bmatrix}$$

### 4. 在平衡点 $(0, 0)$ 处计算

$$\mathbf{A} = J(0, 0) = \begin{bmatrix} -6 & -1 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$$



第三步：分析线性化系统的特征值 求解特征方程  $\det(\lambda I - A) = 0$ :

$$\begin{aligned}\det \begin{bmatrix} \lambda + 6 & 1 \\ 2 & \lambda + 6 \end{bmatrix} &= 0 \\ (\lambda + 6)^2 - 2 &= 0 \\ \lambda^2 + 12\lambda + 36 - 2 &= 0 \\ \lambda^2 + 12\lambda + 34 &= 0\end{aligned}$$

使用求根公式:

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 136}}{2} = \frac{-12 \pm \sqrt{8}}{2} \\ &= \frac{-12 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -6 \pm \sqrt{2}\end{aligned}$$

两个特征值为:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -6 + \sqrt{2} \approx -4.586 \\ \lambda_2 &= -6 - \sqrt{2} \approx -7.414\end{aligned}$$

第四步：根据李雅普诺夫第一方法下结论 李雅普诺夫第一方法判据:

- 如果线性化系统的所有特征值**实部都严格小于零**，则原非线性系统在该平衡点**局部渐近稳定**
- 如果至少有一个特征值实部大于零，则原系统**不稳定**
- 如果存在实部为零的特征值，则该方法**失效**，无法判断

分析：两个特征值都是负实数，实部均严格小于零。

**最终结论：**根据李雅普诺夫第一方法，原非线性系统在平衡点  $(0, 0)$  处是**局部渐近稳定**的。



28.2.3 方法对比与选择

方法	李雅普诺夫第一方法	李雅普诺夫第二方法
别名	间接法、线性化方法	直接法
核心思想	在平衡点附近线性化，分析线性系统特征值	构造能量函数 $V(x)$ ，验证其沿轨迹递减
优点	计算简单、步骤明确 只需计算雅可比矩阵和特征值	适用于所有非线性系统 可能得到全局稳定性结论
缺点	只能判断局部稳定性 特征值实部为零时失效	构造李雅普诺夫函数困难 没有通用方法
适用场景	平衡点附近稳定性分析 作为初步快速判断	需要全局稳定性分析 线性化方法失效时

解题建议：

- 对于非线性系统，**优先尝试第一方法**（线性化），因为计算简单
- 如果线性化后特征值实部为零，或需要全局稳定性结论，再考虑第二方法
- 第二方法需要灵活性和经验，往往需要多次尝试不同的候选函数

范例 2 总结

这个例子展示了李雅普诺夫第一方法的标准流程：

1. 求平衡点（令  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ ）
2. 计算雅可比矩阵（在平衡点处求偏导）
3. 求特征值（解特征方程）
4. 根据特征值实部判断稳定性

关键经验：

- 第一方法计算量小，适合作为初步分析
- 结论仅限于**局部稳定性**——记住这个限制！
- 如果特征值恰好在虚轴上（实部为零），方法失效，需改用第二方法



## 28.3 离散系统的李雅普诺夫稳定性分析

为什么需要离散版本的李雅普诺夫方法？

在现代控制工程中，几乎所有的控制器都是**数字实现**的——无论是无人机、工业机器人还是电力系统，控制决策都在**离散的时刻**进行计算。这意味着我们处理的实际上是**离散时间系统**：

$$x(k+1) = Ax(k) \quad (\text{离散状态方程})$$

而前面介绍的李雅普诺夫方法都是针对**连续时间系统**：

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad (\text{连续状态方程})$$

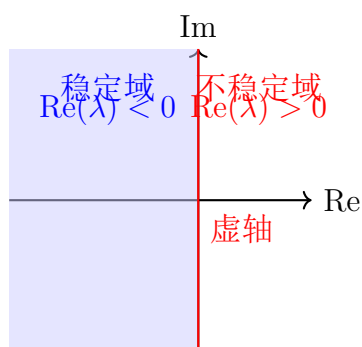
这两者的稳定性判据有**本质区别**，必须使用不同的数学工具。

### 28.3.1 离散系统稳定性判据的关键差异

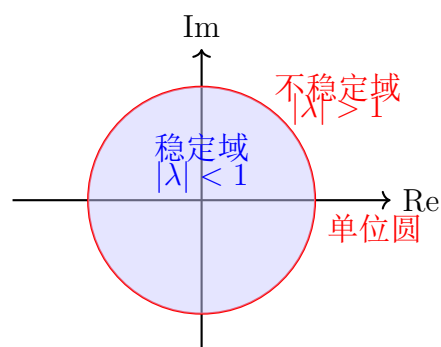
核心思想相同（能量递减），但**数学形式**完全不同：

为什么稳定域不同？

- 连续系统：解为  $x(t) \approx e^{\lambda t}x(0)$ 
  - 若  $\text{Re}(\lambda) < 0$ ，则  $e^{\lambda t} \rightarrow 0$ （如  $e^{-0.5t} \rightarrow 0$ ）
  - 稳定域：复平面**左半平面**
- 离散系统：解为  $x(k) \approx \lambda^k x(0)$ 
  - 若  $|\lambda| < 1$ ，则  $\lambda^k \rightarrow 0$ （如  $0.8^k \rightarrow 0$ ）
  - 若  $|\lambda| > 1$ ，则  $\lambda^k \rightarrow \infty$ （如  $1.2^k \rightarrow \infty$ ）
  - 稳定域：复平面**单位圆内**



连续系统 (s 平面)



离散系统 (z 平面)



### 28.3.2 离散李雅普诺夫方程

对于离散线性系统  $x(k+1) = Ax(k)$ ，李雅普诺夫第二方法的核心步骤如下：

#### 1. 选择李雅普诺夫函数

与连续系统类似，选择二次型：

$$V(k) = x(k)^T P x(k) \quad \text{其中 } P = P^T > 0$$

#### 2. 计算能量变化（差分而非导数）

离散系统中，我们不再看导数  $\dot{V}$ ，而是看相邻两个时刻的能量差：

$$\begin{aligned} \Delta V(k) &= V(k+1) - V(k) \\ &= x(k+1)^T P x(k+1) - x(k)^T P x(k) \end{aligned}$$

代入  $x(k+1) = Ax(k)$ ：

$$\begin{aligned} \Delta V(k) &= (Ax(k))^T P (Ax(k)) - x(k)^T P x(k) \\ &= x(k)^T A^T P A x(k) - x(k)^T P x(k) \\ &= x(k)^T (A^T P A - P) x(k) \end{aligned}$$

#### 3. 要求能量递减

为使系统稳定，要求每一步能量都减少：

$$\Delta V(k) < 0 \quad \Rightarrow \quad A^T P A - P < 0$$

令  $\Delta V(k) = -x(k)^T Q x(k)$ ，其中  $Q = Q^T > 0$  是我们选择的正定矩阵，得到离散李雅普诺夫方程：

#### 离散李雅普诺夫方程

$$A^T P A - P = -Q$$

**稳定性判据：**对于给定的系统矩阵  $A$ ，如果任意选择一个对称正定矩阵  $Q$ ，能够解出上述方程，且解  $P$  也是对称正定矩阵，则系统渐近稳定。

与连续李雅普诺夫方程的对比：

关键区别：

- 连续：  $A^T P + P A$ （对称形式，矩阵加法）
- 离散：  $A^T P A - P$ （二次形式，矩阵乘法）







## 28.3.3 完整例题：离散系统稳定性分析

## 例题：离散系统的李雅普诺夫稳定性判断

题目：已知离散系统

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} x(k)$$

其中  $a \neq 1$ 。用李雅普诺夫第二法判断系统在原点的稳定性。

解法一：特征值法（快速判断）

矩阵  $A$  是分块下三角形式：

$$A = \begin{bmatrix} a & \mathbf{0}_{1 \times 2} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}, \quad M_{22} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

特征值包括：

- $\lambda_1 = a$ （第一个对角元素）
- $M_{22}$  的特征值：

$$\det(\lambda I - M_{22}) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ -2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 1) + 2 = \lambda^2 - \lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{1-8}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}$$

计算特征值的模：

$$|\lambda_1| = |a|$$

$$|\lambda_{2,3}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1+7}{4}} = \sqrt{2} \approx 1.414$$

结论：

- $|\lambda_{2,3}| = \sqrt{2} > 1 \implies$  有特征值在单位圆外
- 无论参数  $a$  取何值，系统都是不稳定的

解法二：离散李雅普诺夫方程法（理论验证）

根据离散李雅普诺夫判据，如果系统稳定，则对任意  $Q > 0$ ，应能解出  $P > 0$  满足：

$$A^T P A - P = -Q$$

选择最简单的  $Q = I_{3 \times 3}$ （单位矩阵）。方程变为：



### 28.3.4 方法对比与选择建议

实际工程中的选择策略：

1. 首选特征值法：MATLAB/Python 一行代码 `eig(A)`，立即得到结果
2. 理论分析时用李雅普诺夫方程：
  - 需要构造李雅普诺夫函数时
  - 分析鲁棒稳定性时
  - 研究参数摄动影响时
3. 传递函数形式时用劳斯/Jury 判据： $z$  域多项式直接判断

### 28.3.5 与连续系统的联系：采样映射关系

离散系统往往来源于连续系统的采样。稳定域的映射关系为：

$$z = e^{sT}$$

其中  $T$  是采样周期。

映射性质：

- $s$  平面虚轴 ( $\text{Re}(s) = 0$ )  $\rightarrow$   $z$  平面单位圆 ( $|z| = 1$ )
- $s$  平面左半平面 ( $\text{Re}(s) < 0$ )  $\rightarrow$   $z$  平面单位圆内 ( $|z| < 1$ )
- $s$  平面右半平面 ( $\text{Re}(s) > 0$ )  $\rightarrow$   $z$  平面单位圆外 ( $|z| > 1$ )

例：连续系统极点  $s = -1$ ，采样周期  $T = 0.1$  s

$$z = e^{-1 \times 0.1} = e^{-0.1} = 0.9048 \quad (|z| = 0.9048 < 1, \text{ 稳定})$$

与其他章节的联系：

- **第 32 章（离散系统）**：详细介绍采样过程、Z 变换、脉冲传递函数等离散系统建模方法
- 本节的李雅普诺夫方法是离散系统稳定性分析的**理论基础**
- Ch13 着重于离散系统的**工程应用**：数字控制器设计、代码实现等
- 建议学习顺序：先掌握本节的理论判据，再学习 Ch13 的实际应用



表 9: 连续系统 vs 离散系统的稳定性判据对比

对比项	连续系统	离散系统	物理意义
状态方程	$\dot{x} = Ax$	$x(k+1) = Ax(k)$	微分 vs 差分
解的形式	$x(t) = e^{At}x(0)$	$x(k) = A^kx(0)$	指数 vs 幂次
稳定域	<b>s 平面左半平面</b> $\text{Re}(\lambda) < 0$	<b>z 平面单位圆内</b> $ \lambda  < 1$	指数衰减条件
临界情况	$\text{Re}(\lambda) = 0$	$ \lambda  = 1$	临界稳定
不稳定域	$\text{Re}(\lambda) > 0$	$ \lambda  > 1$	发散
能量变化	导数 $\dot{V}(t)$	差分 $\Delta V(k)$	连续 vs 离散
李雅普诺夫方程	$A^TP + PA = -Q$ (连续方程)	$A^TPA - P = -Q$ (离散方程)	判定工具

项目	连续系统	离散系统
状态方程	$\dot{x} = Ax$	$x(k+1) = Ax(k)$
能量变化	$\dot{V} = x^T(A^TP + PA)x$	$\Delta V = x^T(A^TPA - P)x$
李雅普诺夫方程	$A^TP + PA = -Q$	$A^TPA - P = -Q$
判据	$Q > 0$ 任意给定, 解出 $P > 0 \implies$ 渐近稳定	

表 10: 离散系统稳定性判断方法对比

方法	计算难度	理论深度	适用场景	推荐度
特征值法 $ \lambda_i  < 1$	最简单 求根即可	低 直接判据	快速判断 线性系统	首选
李雅普诺夫方程 $A^TPA - P = -Q$	较复杂 解线性方程组	高 能量方法	理论分析 需要深入理解	考试/研究
劳斯判据 (双线性变换)	中等 变换+列表	中 经典方法	传递函数形式 z 域多项式	常用
Jury 判据 (直接判据)	中等 构造判定表	中 z 域专用	直接 z 域判断 低阶系统	了解即可



### 28.3.6 本节总结

关键点：

- 离散系统稳定域是**单位圆内**，而非左半平面
- 离散李雅普诺夫方程： $A^T P A - P = -Q$ （注意是二次形式）
- 实际工程中，**特征值法**最简单高效（求模判断  $|\lambda| < 1$ ）
- 李雅普诺夫方程法适用于理论分析和鲁棒性研究

常见误区：

- 将连续系统判据直接用于离散系统（稳定域完全不同！）
- 混淆“实部小于零”和“模小于一”
- 忽视离散李雅普诺夫方程与连续版本的区别（ $A^T P A - P$  vs  $A^T P + P A$ ）
- 记住：离散=单位圆，连续=左半平面

## 本章总结

核心要点回顾

### 1. 三个稳定性层次

- 稳定：扰动有界
- 渐近稳定：扰动有界且最终消失
- 全局渐近稳定：任意大的扰动都能消失

### 2. 两种李雅普诺夫方法

- **第一方法（线性化）**：简单快速，但仅得局部结论，特征值为零时失效
- **第二方法（直接法）**：强大通用，可得全局结论，但构造李雅普诺夫函数困难

### 3. 局部 vs 全局

- 线性系统：局部稳定    全局稳定
- 非线性系统：局部稳定    全局稳定
- 全局稳定要求： $V(x)$  径向无界， $\dot{V}(x)$  在整个空间负定



## 学习建议

### 解题策略：

1. 先判断系统类型（线性/非线性）
2. 非线性系统优先尝试第一方法（线性化）
3. 如果第一方法失效或需要全局结论，使用第二方法
4. 对于线性系统，直接用李雅普诺夫方程或特征值法

### 常见误区：

- 混淆「稳定」与「渐近稳定」
- 将局部稳定的结论推广为全局稳定
- 遇到李雅普诺夫方程无解就认为计算错误
- 仔细区分稳定性的层次和适用范围

李雅普诺夫稳定性理论是现代控制理论的基石，掌握它不仅能分析系统稳定性，更为后续的控制设计（极点配置、状态观测器等）奠定了基础。

## 29 极点配置——状态反馈

### 引言：为什么我们需要极点配置？

想象你正在驾驶一辆汽车。如果车辆的动力学特性很差——转向反应迟钝、加速太慢、或者容易失控，你会怎么办？理想情况下，你希望改造这辆车，让它响应更快、更稳定、更好操控。

在控制系统中，我们面临同样的问题：

- 原始系统可能**不稳定**（极点在右半平面）
- 即使稳定，响应可能**太慢**（极点太靠近虚轴）
- 或者**振荡太大**（极点的阻尼比太小）

我们能改变系统的动态特性吗？答案是：**能！**通过**状态反馈**，我们可以任意配置闭环系统的极点（前提是系统能控）。

### 极点配置的核心思想：

通过反馈控制，将不满意的开环极点搬到我们期望的位置，从而获得理想的动态性能。



这有多强大？

- 不稳定系统 → 可以变成稳定的
- 慢系统 → 可以变得快速响应
- 振荡系统 → 可以变得平稳
- 你可以**精确指定**系统的超调量、调节时间等性能指标

但有一个重要前提：系统必须**完全能控**！这就是为什么我们在上一章花大量篇幅讨论能控性——它是极点配置的**充要条件**。

实际应用场景：

- **航天器姿态控制**：配置极点以获得快速无超调的姿态调整
- **机器人关节控制**：通过极点配置实现精确的轨迹跟踪
- **电力系统稳定器**：将不稳定的电力系统稳定化
- **汽车主动悬架**：改善舒适性和操控性

本章将介绍：

- 状态反馈的基本原理
- 极点配置定理（为什么能控性是关键）
- 三种极点配置方法（直接法、变换法、阿克曼公式）
- 实际设计范例
- 极点选择的实用准则

## 29.1 状态反馈

本节目的

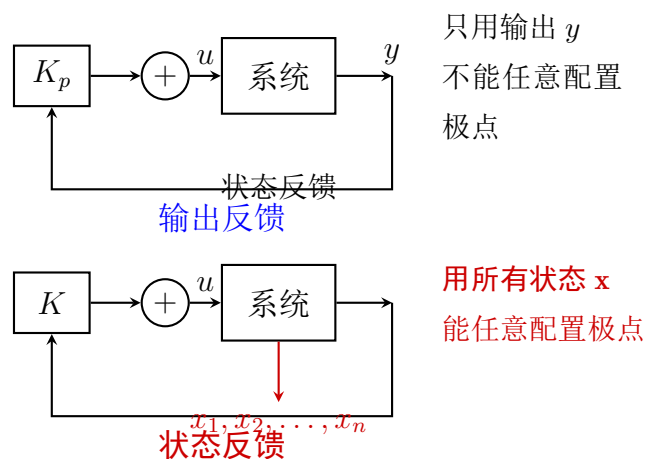
在讨论如何配置极点之前，我们需要理解**状态反馈**的概念——这是极点配置的基本工具。



### 29.1.1 状态反馈的基本思想

经典反馈 vs 状态反馈对比：

经典输出反馈（PID）



为什么需要状态反馈？

- 经典输出反馈：  $u = -K_p y$  → 只利用部分信息 ( $y = Cx$ )
- **状态反馈**：  $u = -Kx$  → 利用完整系统信息
- **关键优势**： 只有状态反馈才能任意配置极点（前提：系统能控）



## 29.1.2 状态反馈控制律

## 状态反馈控制律——基本形式

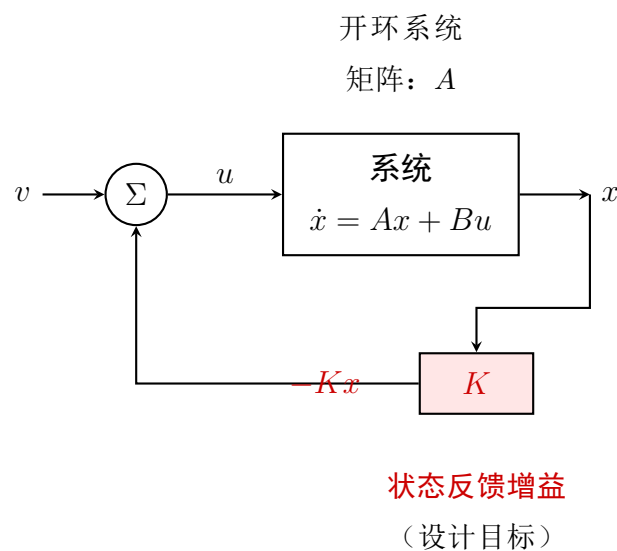
$$u = -Kx + v$$

参数含义：

- $x \in \mathbb{R}^n$  状态向量（需全部可测或通过观测器估计）
- $K \in \mathbb{R}^{p \times n}$  **反馈增益矩阵**（待设计的关键参数）
- $v \in \mathbb{R}^p$  参考输入（期望的目标值）
- 负号 表示**负反馈**（稳定控制的标准配置）

直观理解：

- $-Kx$  校正项：根据当前状态偏差进行调整
- $v$  目标项：驱动系统到期望状态
- $K$  的每个元素 决定对应状态变量的权重



## 29.1.3 闭环系统

闭环系统的推导：

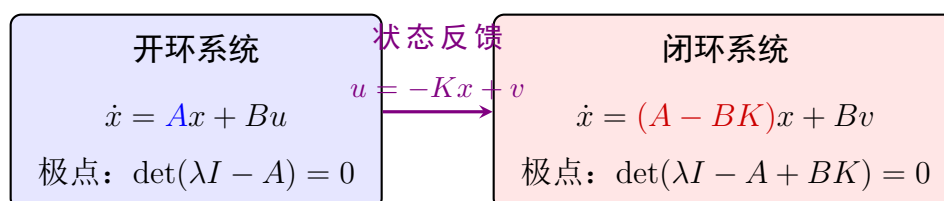


将  $u = -Kx + v$  代入开环系统  $\dot{x} = Ax + Bu$ :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B(-Kx + v) \\ &= Ax - BKx + Bv \\ &= (A - BK)x + Bv\end{aligned}$$

### 闭环系统方程

$$\dot{x} = \underbrace{(A - BK)}_{A_{cl}} x + Bv$$



系统矩阵:  $A$

系统矩阵:

$A - BK$

**核心思想:** 通过选择  $K$ , 改变系统矩阵, 从而改变极点位置!

### 极点的变化规律

- 开环极点:  $\det(\lambda I - A) = 0$  的根 (原始系统固有特性)
- 闭环极点:  $\det(\lambda I - A + BK) = 0$  的根 (通过  $K$  可调节)
- $K$  是我们的"旋钮", 可以精确控制极点位置

### ! 重要提醒

- 状态反馈不改变系统的能控性和能观测性
- 状态反馈不改变系统的零点 (只改变极点)
- 状态反馈要求状态可测或可估计 (需要观测器辅助)



## 29.2 极点配置定理

### 本节目的

这是本章的**核心定理**，它回答了一个关键问题：我们能把极点配置到任意位置吗？  
答案是：能控就能配！

### 29.2.1 定理陈述

#### ★ 极点配置定理 (Pole Placement Theorem)

对于单输入系统  $(A, B)$ ，若系统**完全能控**，则对于任意给定的  $n$  个复数

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$$

(复数必须成对共轭出现)，**存在**反馈增益矩阵  $K$ ，使得闭环系统矩阵  $A - BK$  的特征值恰好为  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 。

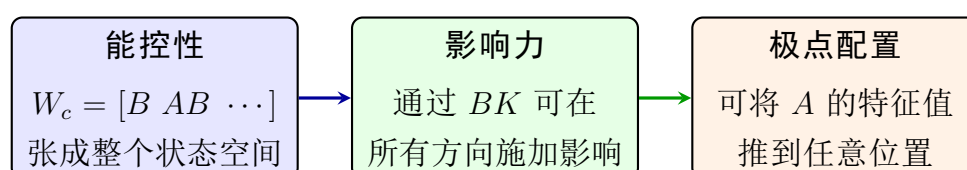


定理的核心含义：

- **充要条件**：完全能控  $\Leftrightarrow$  可任意配置极点
- **任意性**：极点位置完全由你决定（只要满足共轭对要求）
- **构造性**：不仅说存在，还有具体的计算方法

### 29.2.2 定理的深刻意义

#### 1. 能控性是充要条件





- 充分性：能控  $\Rightarrow$  可任意配置极点（定理保证）
- 必要性：可任意配置极点  $\Rightarrow$  能控  
（反证：不能控意味着某些模态不受控制影响，无法移动）

## 2. 复数共轭对要求

由于系统矩阵  $A, B, K$  都是实矩阵，闭环矩阵  $A - BK$  的特征多项式系数也是实数。因此：

- **实数极点**：可以单独指定（如  $s = -3$ ）
- **复数极点**：必须成对共轭出现（如  $s = -2 \pm 3j$ ）

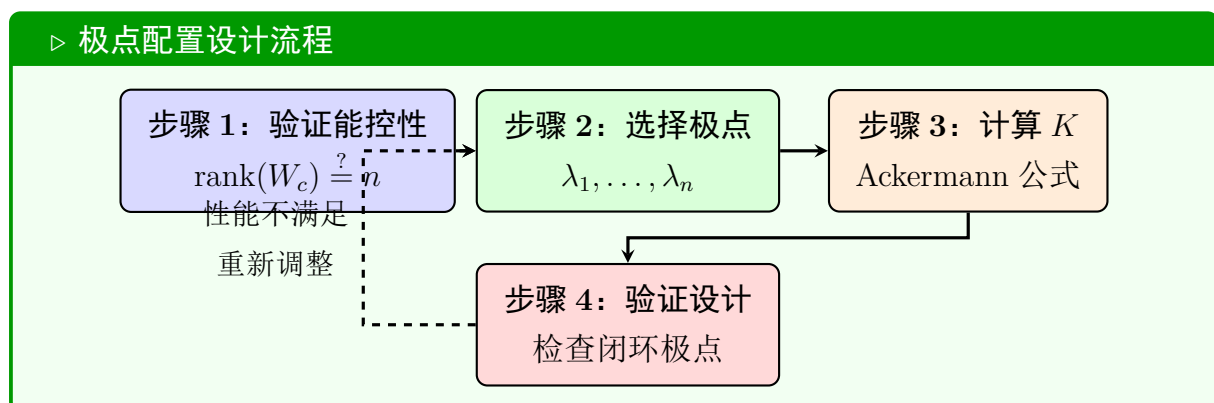
物理意义：实系统不能产生单个复数极点，这会导致非物理的复数状态轨迹。

## 3. 多输入系统的推广

定理对多输入系统（ $p > 1$ ）也成立，但特点是：

- $K$  不是唯一的（有更多自由度）
- 可利用额外自由度优化其他性能指标：
  - 鲁棒性（对参数摄动的敏感度）
  - 输入能量（控制成本）
  - 传递函数零点位置
- 这是**最优控制**理论（如 LQR）的起点

### 29.2.3 设计步骤概览





### ！定理的局限性

- 只适用于**能控**系统（这是硬性要求）
- 没有告诉你**如何选择**期望极点（需要经验和性能分析）
- 假设状态**完全可测**（实际中可能需要观测器）
- 可能导致很大的控制输入（**饱和问题**）

## 29.3 极点配置的方法

### 本节目的

定理告诉我们极点可以任意配置，但**怎么**计算反馈增益矩阵  $K$  呢？本节介绍三种实用方法。

#### 29.3.1 方法概览

##### 方法 1：直接法

$$\det(sI - A + BK) = 0$$

适合  $n \leq 3$   
直观但繁琐

##### 方法 2：变换法

能控标准型  
适合任意阶次  
需要变换矩阵

##### 方法 推荐 Ack- ermann

$$K = [\cdots 1] W_c^{-1} \alpha_c(A)$$

**最简洁**  
单输入系统



## 29.3.2 方法 1：直接方法

## 方法 1：直接方法

基本思路：直接让闭环特征多项式等于期望特征多项式



计算步骤：

1. 期望多项式：  $\alpha_d(s) = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \cdots (s - \lambda_n) = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n$
2. 闭环多项式：  $\det(sI - A + BK) = s^n + b_1(K) s^{n-1} + \cdots + b_n(K)$
3. 系数匹配：  $b_i(K) = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$
4. 解方程组得  $K$

✓ 优点：概念直接，适合手算低阶系统 ( $n \leq 3$ )

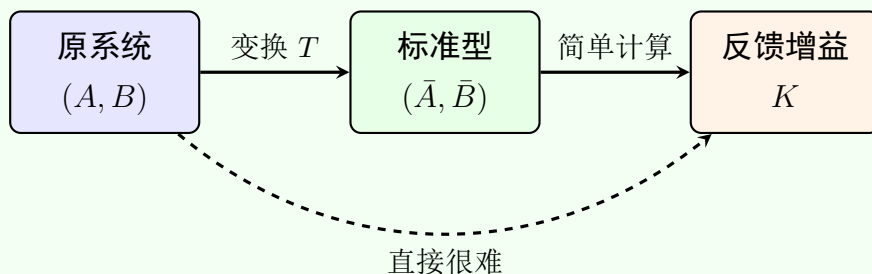
✗ 缺点：高阶系统计算量大，展开  $\det$  繁琐



## 29.3.3 方法 2：变换方法

## 方法 2：变换方法（能控标准型）

核心思想：在能控标准型下，极点配置变得非常简单！



能控标准型的神奇性质：

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

特征多项式直接从最后一行读出：

$$\det(sI - \bar{A}) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0$$

设计步骤：

1. 找变换矩阵  $T$ ，使  $\bar{A} = TAT^{-1}, \bar{B} = TB$
2. 在标准型下设计（超级简单）：

$$\bar{K} = [\alpha_0 - a_0 \quad \alpha_1 - a_1 \quad \cdots \quad \alpha_{n-1} - a_{n-1}]$$

其中  $\alpha_i$  是期望特征多项式的系数

3. 变换回原坐标：  $K = \bar{K}T$

✓ 优点：计算规范，适用任意阶次，不易出错

✗ 缺点：需要计算  $T$ ，当系统接近不能控时数值不稳定



## 29.3.4 方法 3: 阿克曼公式 (Ackermann's Formula)

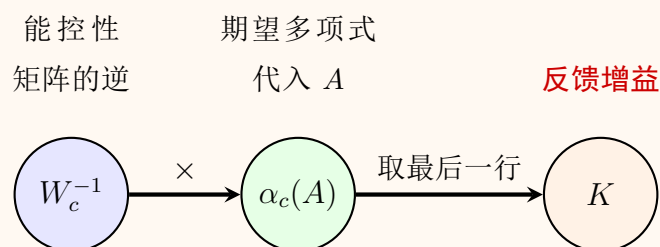
## ★ 方法 3: Ackermann 公式 (最简洁!)

单输入系统的显式公式:

$$K = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1] W_c^{-1} \alpha_c(A)$$

符号说明:

- $W_c = [B \quad AB \quad A^2B \quad \cdots \quad A^{n-1}B]$  能控性矩阵
- $\alpha_c(s) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_n$  期望特征多项式
- $\alpha_c(A) = A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \cdots + \alpha_n I$  矩阵多项式



关键提醒:  $\alpha_c(A)$  是将多项式中的  $s$  替换为矩阵  $A$ !

## ✓ 优点:

- 最简洁——一个公式搞定
- 易于编程实现 (MATLAB: `acker(A,B,poles)`)
- 不需要坐标变换

## ✗ 缺点:

- 仅适用于单输入系统
- 需要求逆  $W_c^{-1}$  (能控时必可逆)
- 数值稳定性依赖于  $W_c$  的条件数

MATLAB 实现:

```
K = acker(A, B, desired_poles)
```



29.3.5 三种方法的对比

特性	直接方法	变换方法	Ackermann 公式
适用范围	低阶 ( $n \leq 3$ )	任意阶次	单输入系统
计算复杂度	中等	较高	低
直观性	高	中等	低
数值稳定性	好	取决于 $T$	取决于 $W_c$
推荐场景	手算	理论分析	程序实现

详细说明	
直接方法	展开行列式 $\det(sI - A + BK)$ 并与期望多项式系数匹配，适合手算低阶系统
变换方法	先变换到能控标准型，在标准型下设计 $\bar{K}$ ，再变换回原坐标 $K = \bar{K}T$
Ackermann	直接公式 $K = [0 \cdots 0 \quad 1]W_c^{-1}\alpha_c(A)$ ，最简洁实用

实用建议：

• 课堂作业：直接方法（便于理解原理）

• 理论推导：变换方法（揭示结构特性）

• 工程应用：Ackermann 公式（快速准确）

29.4 极点选择的实用准则

本节目的

理论上可以任意配置极点，但实际中如何选择期望极点？这需要平衡性能、鲁棒性和实现成本。

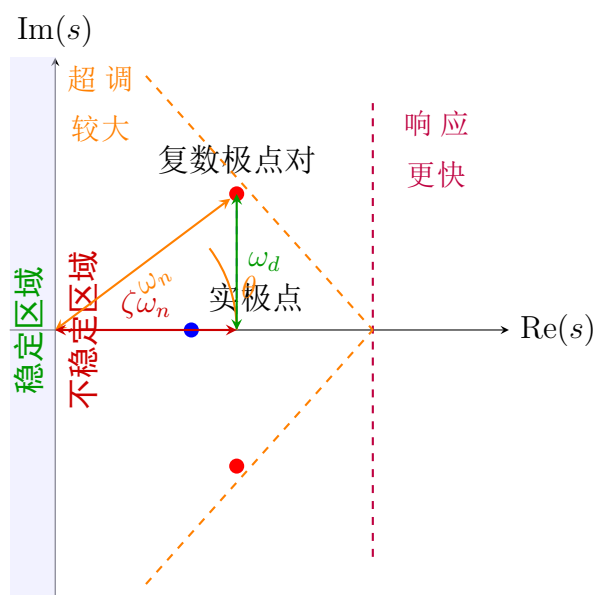
29.4.1 性能指标与极点位置的关系

二阶系统的标准形式：

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

极点位置：  $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$





$$\zeta = \cos \theta, \quad \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

### 关键参数

- $\omega_n$  自然频率——影响响应速度（越大越快）
- $\zeta$  阻尼比——影响超调量和振荡（越大越平稳）
- $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$  阻尼自然频率（虚部大小）

性能指标与极点位置的关系：

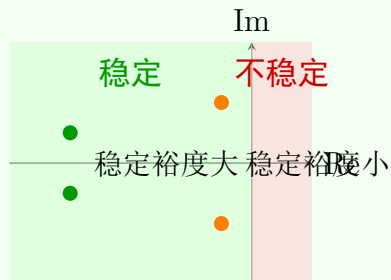
性能指标	公式	极点参数
调节时间	$t_s \approx \frac{4}{\zeta \omega_n}$	实部越大越小
超调量	$M_p \approx e^{-\pi \zeta / \sqrt{1 - \zeta^2}}$	$\zeta$ 越大越小
峰值时间	$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$	虚部越大越小



## 29.4.2 极点配置的实用原则

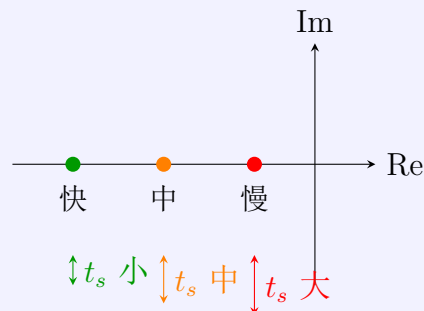
## ○ 原则 1：稳定性要求（基本要求）

- 所有极点必须在左半平面 ( $\text{Re}(s_i) < 0$ )
- 距离虚轴越远，稳定裕度越大



## ● 原则 2：响应速度要求

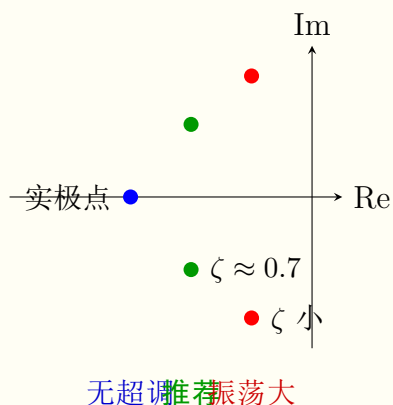
- 主导极点的实部决定响应速度： $t_s \approx \frac{4}{|\text{Re}(s)|}$
- 更快响应 → 极点更靠左（但需要更大的控制能量）





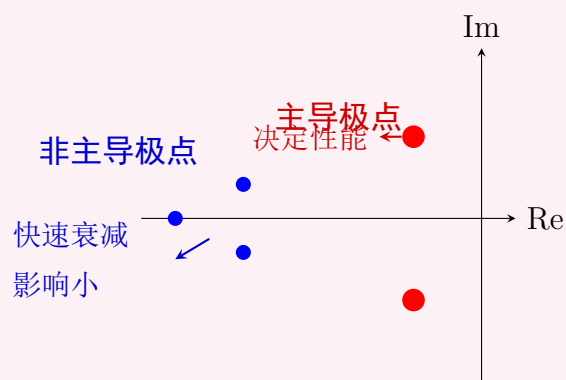
### ~ 原则 3：超调和振荡要求

- **实极点**：无超调，单调响应
- **复数极点**：有超调和振荡
- 常用选择： $\zeta = 0.5 \sim 0.707$ （适度阻尼）



### ▷ 原则 4：高阶系统的极点配置

- **主导极点**：最靠近虚轴的极点对（决定主要动态特性）
- **非主导极点**：远离虚轴（衰减快，影响小）
- 典型配置：2 个主导极点 +  $(n - 2)$  个快衰减极点





**！原则 5：实际限制**

- **控制饱和**：极点太左 → 控制信号过大（执行器限制）
- **测量噪声**：极点太左 → 对噪声敏感（高增益放大噪声）
- **模型误差**：极点太精确 → 鲁棒性差（对参数变化敏感）

设计平衡：性能 ↔ 稳定性 ↔ 实现成本

**29.4.3 经验法则**

**巴特沃斯配置 (Butterworth Pattern)：**

将极点均匀分布在以原点为中心的圆弧上，角度为：

$$\theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

半径选择为  $r = \omega_n$ （期望的响应速度）。

**贝塞尔配置 (Bessel Pattern)：**

- 优化阶跃响应的延迟时间
- 极点分布更集中
- 适合对延迟敏感的应用

**ITAE 最优配置 (Integral of Time-weighted Absolute Error)：**

- 最小化  $\int_0^\infty t|e(t)|dt$
- 有标准的极点位置表（查表即可）

**29.4.4 极点配置的常见错误**

- × 极点配置过于激进（远离虚轴）→ 控制饱和
- × 忽略零点的影响（系统零点不变，可能抵消部分极点效果）
- × 所有极点聚在同一位置 → 数值不稳定
- ✓ 平衡性能和实现成本
- ✓ 验证闭环系统对参数变化的鲁棒性



## 29.5 实际应用范例

### 范例说明

通过具体例子展示：

- 如何使用阿克曼公式设计控制器
- 如何选择期望极点
- 如何验证设计结果

### 29.5.1 范例：二阶系统的极点配置

**题目：**设计状态反馈控制器，使系统具有快速无超调响应  
**系统描述：**

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x\end{aligned}$$

**性能要求：**

- 调节时间  $t_s < 2s$
- 无超调（实极点）

**解答：**

#### 第一步：验证能控性

$$W_c = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$\det(W_c) = -1 \neq 0$ ，系统完全能控，可以任意配置极点。

#### 第二步：选择期望极点 要求无超调 → 选择实极点

要求  $t_s < 2s$ ，由  $t_s \approx \frac{4}{|\operatorname{Re}(s)|}$  得：

$$|\operatorname{Re}(s)| > \frac{4}{2} = 2$$

选择两个快速实极点： $s_1 = -3, s_2 = -4$

期望特征多项式：

$$\alpha_d(s) = (s+3)(s+4) = s^2 + 7s + 12$$



第三步：使用阿克曼公式 计算  $\alpha_d(A)$ ：

$$\begin{aligned}\alpha_d(A) &= A^2 + 7A + 12I \\ &= \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} + 12 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ -14 & -21 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ -8 & -2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

计算  $W_c^{-1}$ ：

$$W_c^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

应用阿克曼公式：

$$\begin{aligned}K &= [0 \quad 1]W_c^{-1}\alpha_d(A) \\ &= [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ -8 & -2 \end{bmatrix} \\ &= [1 \quad 0] \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ -8 & -2 \end{bmatrix} \\ &= [10 \quad 4]\end{aligned}$$

因此，反馈增益： $K = [10 \quad 4]$

第四步：验证设计 闭环系统矩阵：

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [10 \quad 4] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -12 & -7 \end{bmatrix}$$

特征方程：

$$\det(sI - (A - BK)) = s^2 + 7s + 12 = (s + 3)(s + 4)$$

极点确实为  $-3, -4$ ，设计成功！

性能分析

- 调节时间： $t_s \approx \frac{4}{3} \approx 1.33\text{s}$ （满足  $< 2\text{s}$ ）
- 无超调（实极点）
- 控制律： $u = -10x_1 - 4x_2 + v$



## 范例总结

### 关键步骤回顾：

1. 验证能控性（必须满足）
2. 根据性能要求选择极点（平衡速度和成本）
3. 计算反馈增益（阿克曼公式最简洁）
4. 验证闭环极点（检查计算正确性）

### 实际考虑：

- 如果状态不可测，需要设计观测器（下一章）
- 极点位置影响控制能量（ $K$  越大， $u$  越大）
- 实际系统需要考虑执行器饱和和限制

## 本章总结

### 核心要点回顾

#### 1. 极点配置的本质

- 通过状态反馈  $u = -Kx + v$  改变系统矩阵
- 开环  $A \rightarrow$  闭环  $A - BK$
- 从而改变系统的动态特性（极点位置）

#### 2. 极点配置定理（核心）

- 完全能控  $\Leftrightarrow$  可任意配置极点
- 这是能控性概念的直接应用
- 复数极点必须成对共轭出现

#### 3. 三种计算方法

- 直接法：展开特征方程，适合低阶手算
- 变换法：转为能控标准型，适合理论分析
- 阿克曼公式：  $K = [0 \cdots 0 \quad 1]W_c^{-1}\alpha_d(A)$ ，最实用

#### 4. 极点选择原则



- 所有极点在左半平面（稳定性）
- 实部大小决定响应速度 ( $t_s \approx 4/|\operatorname{Re}(s)|$ )
- 虚部/实部比决定超调量 ( $\zeta$ )
- 平衡性能、鲁棒性和实现成本

## 设计流程总结

### 标准极点配置流程：

#### 1. 系统分析

- 写出系统方程  $\dot{x} = Ax + Bu$
- 计算开环极点（了解原始特性）
- 验证能控性  $\operatorname{rank}(W_c) = n$

#### 2. 性能要求转化

- 调节时间  $t_s \rightarrow$  极点实部
- 超调量  $M_p \rightarrow$  阻尼比  $\zeta$
- 确定期望极点  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

#### 3. 控制器计算

- 选择计算方法（推荐阿克曼公式）
- 计算反馈增益  $K$
- 控制律  $u = -Kx + v$

#### 4. 验证与调整

- 验证闭环极点位置
- 仿真闭环响应
- 检查控制信号幅值（是否饱和）
- 必要时调整极点位置



## 重要概念辨析

### 极点配置 vs 最优控制：

- 极点配置：直接指定极点位置（设计者经验）
- 最优控制（LQR）：优化性能指标得到极点（自动平衡）
- 极点配置更直观，LQR 更系统化

### 状态反馈 vs 输出反馈：

- 状态反馈需要所有状态（可能需要观测器）
- 输出反馈只用输出（但不能任意配置极点）
- 实际常用：状态观测器 + 状态反馈

## 常见误区

- × 认为能控性不重要（能控性是极点配置的充要条件）
- × 极点配置得越快越好（要考虑控制饱和和噪声）
- × 忽略系统零点（零点不变，会影响实际响应）
- × 期望所有极点重合（数值不稳定）
- ✓ 仔细选择极点位置，平衡性能和鲁棒性
- ✓ 验证闭环系统对参数摄动的敏感性

## 实际应用建议

### 工程实践：

- 从保守的极点位置开始（不要过于激进）
- 逐步调整，观察实际系统响应
- 考虑测量噪声对高增益的放大效应
- 使用仿真验证非线性因素（饱和、死区等）

### MATLAB 工具：

- `ctrb(A,B)`：计算能控性矩阵
- `acker(A,B,p)`：阿克曼公式（单输入）
- `place(A,B,p)`：极点配置（多输入）
- `step(sys)`：阶跃响应仿真



## 后续章节预告

极点配置解决了**控制器设计**问题，但实际中常面临：

- **状态不可测** → 需要状态观测器（第 30 章）
- **性能指标优化** → 最优控制理论（LQR）
- **鲁棒性要求** → 鲁棒控制方法

极点配置是现代控制理论的**第一个综合性设计方法**。它将前面学习的能控性概念转化为实际的控制器，体现了从理论到实践的完整链条：

能控性 → 极点配置 → 性能实现

掌握极点配置，就掌握了状态反馈控制的核心技术！

## 30 状态观测器

### 引言：看不见的状态，如何控制？

想象你站在一个密闭房间外，房间里有一个人在活动。你**看不见**房间内部（状态不可测），但你可以：

- 听见声音从门缝传出（输出  $y$ ）
- 敲门与里面的人互动（输入  $u$ ）

你能推断出房间里那个人的位置和动作吗？答案是：**可以！**通过声音的方向、强度、时间，结合你的敲门动作，你可以**估计**他的状态。

这正是**状态观测器**（State Observer）要做的事情：

当系统的内部状态无法直接测量时，利用可测的输入和输出信息，动态地估计出系统的状态。

### 为什么需要状态观测器？

在上一章（极点配置），我们学会了通过状态反馈  $u = -Kx$  任意配置极点。但有一个**关键前提**：

所有状态变量  $x$  都必须是可测的！

实际问题：

- **传感器成本高**：为每个状态变量安装传感器不现实



- 物理上不可测：某些状态本质上无法直接测量

- 电机内部的磁通量
- 飞行器的侧滑角
- 化学反应的中间浓度

- 测量噪声大：某些传感器信号质量差
- 维护困难：传感器可能失效或精度下降

具体例子：

考虑一个二阶机械系统（如倒立摆）：

$$x = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

- $\theta$ （角度）：容易测量（编码器）
- $\dot{\theta}$ （角速度）：直接测量需要昂贵的陀螺仪，或者对角度数值微分（噪声放大严重）

观测器的解决方案：只测量  $\theta$ ，通过观测器估计  $\dot{\theta}$ ！

### 观测器的核心理念

状态观测器是一个动态系统，它：

1. 模拟真实系统的动态： $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu$ （与真实系统相同的模型）
2. 校正估计误差：利用输出误差  $y - \hat{y} = y - C\hat{x}$  进行反馈校正
3. 收敛到真实状态：通过设计增益  $L$ ，使估计误差  $e = x - \hat{x} \rightarrow 0$

直观类比：

- 真实系统：房间里的人（看不见）
- 观测器：你的大脑中的心理模型（模拟他的行为）
- 输出误差：你预测的声音 vs 实际听到的声音
- 校正增益  $L$ ：你根据误差调整心理模型的速度



## 观测器与极点配置的对偶性

极点配置（上一章）：

- 控制律：  $u = -Kx$
- 目标：通过反馈改变系统矩阵  $A \rightarrow A - BK$
- 前提：系统能控
- 设计：配置闭环极点

状态观测器（本章）：

- 观测器：  $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})$
- 目标：通过校正改变误差动态  $A \rightarrow A - LC$
- 前提：系统能观测
- 设计：配置观测器极点

两者是对偶的！能控性  $\leftrightarrow$  能观测性，  $K \leftrightarrow L$ ，  $B \leftrightarrow C^T$ 。

## 实际应用场景

- 航天器姿态控制：只测量姿态角，估计角速度和角加速度
- 电机控制：测量转速，估计负载转矩和磁通量
- 机器人：测量关节位置，估计速度和加速度
- 自动驾驶：传感器融合，估计车辆的侧向速度
- 电力系统：测量电压电流，估计系统内部状态

## 本章内容路线图

1. 观测器的概念：观测器的数学形式和工作原理
2. 全维状态观测器设计：如何选择增益  $L$  配置观测器极点
3. 观测器极点选择：多快才合适？平衡收敛速度与噪声敏感性
4. 分离定理：控制器和观测器可以独立设计！
5. 基于观测器的控制：  $u = -K\hat{x}$  的完整设计
6. 设计范例：从头到尾的实际例子



学习目标：

- 理解观测器的必要性和工作原理
- 掌握观测器增益矩阵  $L$  的设计方法
- 理解分离定理，学会设计完整的控制系统
- 能够解决实际的状态估计问题

让我们开始探索状态估计的奇妙世界！

## 30.1 状态观测器的概念

本节目的

建立观测器的数学模型，理解观测器的基本结构和工作原理。

### 30.1.1 问题的提出

考虑线性时不变系统：

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

已知信息：

- 系统矩阵  $A, B, C$ （系统模型）
- 输入  $u(t)$ （我们施加的控制）
- 输出  $y(t)$ （传感器测量值）

未知信息：

- 状态  $x(t)$ （部分或全部不可测）

目标：构造一个估计器，输出状态的估计值  $\hat{x}(t)$ ，使得：

$$\hat{x}(t) \rightarrow x(t) \quad \text{as } t \rightarrow \infty$$



### 30.1.2 观测器的基本结构

朴素想法（开环观测器）：

既然我们知道系统模型，为什么不直接模拟它？

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu$$

问题：

- 初值误差： $\hat{x}(0) \neq x(0)$  会永远存在
- 模型误差： $A, B$  不准确会导致估计偏差累积
- 没有利用输出信息  $y$ ！

改进想法（闭环观测器）：

利用输出误差  $y - \hat{y}$  进行校正：

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y})$$

其中  $\hat{y} = C\hat{x}$  是估计输出。

最终形式：

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})$$

各项的物理意义：

- $A\hat{x} + Bu$ ：预测项（根据模型预测下一状态）
- $y - C\hat{x}$ ：创新（innovation）或输出误差（实际与预测的差异）
- $L$ ：观测器增益矩阵（校正力度，类似控制器的  $K$ ）

直观理解：

- 如果  $y > C\hat{x}$ （实际输出大于估计）：说明我们低估了状态，应该上调  $\hat{x}$
- $L$  决定调整的速度： $L$  大  $\rightarrow$  快速校正， $L$  小  $\rightarrow$  缓慢校正

### 30.1.3 观测器 vs 传感器

观测器不是传感器！



	传感器	观测器
本质	物理设备	算法/软件
输入	物理信号（温度、位移等）	$u, y$ （数据）
输出	测量值（可能有噪声）	状态估计 $\hat{x}$
成本	硬件成本	计算成本
优势	直接测量	减少传感器数量，滤波效果
劣势	昂贵，可能失效	依赖模型准确性

实际应用中：

- 少量传感器（测量部分状态）+ 观测器（估计其余状态）
- 传感器提供  $y$ ，观测器利用  $y$  和模型重构完整的  $x$

## 30.2 全维状态观测器

本节目的

深入理解观测器的数学原理：误差动态、收敛条件、极点配置方法。

### 30.2.1 观测器方程

全维状态观测器的标准形式：

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})$$

改写为：

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly$$

方程结构分析：

- 输入： $u$ （控制输入）和  $y$ （系统输出）
- 输出： $\hat{x}$ （状态估计）
- 观测器矩阵： $A - LC$ （类比闭环控制中的  $A - BK$ ）
- 待设计参数： $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$

为什么叫全维？



- 全维观测器：估计所有  $n$  个状态变量
- 降维观测器：只估计不可测的状态（利用  $y$  已包含部分状态信息）
- 全维观测器更简单，是入门的首选

### 30.2.2 误差动态分析

定义估计误差：

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

目标：设计  $L$  使  $e(t) \rightarrow 0$ 。

推导误差动态方程：

真实系统：

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

观测器：

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}) = A\hat{x} + Bu + LC(x - \hat{x})$$

两式相减：

$$\begin{aligned}\dot{e} &= \dot{x} - \dot{\hat{x}} \\ &= Ax + Bu - [A\hat{x} + Bu + LC(x - \hat{x})] \\ &= Ax - A\hat{x} - LCx + LC\hat{x} \\ &= A(x - \hat{x}) - LC(x - \hat{x}) \\ &= (A - LC)e\end{aligned}$$

关键结果：

$$\boxed{\dot{e} = (A - LC)e}$$

重要观察：

- 误差动态与输入  $u$  无关！（控制不影响估计误差）
- 误差是齐次方程，只依赖于初始误差  $e(0) = x(0) - \hat{x}(0)$
- 收敛性完全由  $A - LC$  的特征值决定

### 30.2.3 观测器收敛条件

要使  $e(t) \rightarrow 0$ ，需要  $A - LC$  的所有特征值在左半平面。

如何选择  $L$ ？

这与极点配置完全类似：

- 极点配置：选择  $K$  使  $A - BK$  的特征值在期望位置



- 观测器设计：选择  $L$  使  $A - LC$  的特征值在期望位置

对偶性 (Duality):

	控制器设计	观测器设计
目标	配置 $A - BK$ 的极点	配置 $A - LC$ 的极点
前提条件	$(A, B)$ 能控	$(A, C)$ 能观测
对偶变换	—	$(A, C) \leftrightarrow (A^T, C^T)$
增益计算	$K$ 通过阿克曼公式	$L^T$ 通过对偶系统

利用对偶性设计  $L$ :

1. 检查  $(A, C)$  的能观测性
2. 将问题转化为对偶系统  $(A^T, C^T)$  的能控性问题
3. 为对偶系统设计  $K^T$  (使  $A^T - C^T K^T$  有期望极点)
4. 取  $L = K^T$  (或直接  $L^T = K$ )

实际计算 (MATLAB):

```
% 方法1: 直接使用place函数
L = place(A', C', desired_poles)';

% 方法2: 利用对偶性
K_dual = acker(A', C', desired_poles);
L = K_dual';
```

### 30.2.4 观测器增益的物理意义

$L$  是  $n \times p$  矩阵, 其中:

- $n$ : 状态变量个数
- $p$ : 输出变量个数

增益元素的含义:

$L_{ij}$ : 当第  $j$  个输出有单位误差时, 对第  $i$  个状态估计的校正强度。

极端情况分析:



- $L = 0$ : 开环观测器
  - 完全忽略输出误差
  - 误差动态:  $\dot{e} = Ae$  (不稳定或缓慢收敛)
  - 适用场景: 模型极其准确, 无需校正
- $L$  很大: 高增益观测器
  - 强烈依赖输出信息
  - 误差快速收敛
  - 代价: 对测量噪声极度敏感
- $L$  适中: 平衡设计
  - 收敛速度与噪声抑制的折中
  - 实际工程的典型选择

### 30.2.5 观测器设计定理

**全维状态观测器设计定理:**

若系统  $(A, C)$  完全能观测, 则对于任意给定的  $n$  个复数  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  (复数成对共轭), 存在观测器增益矩阵  $L$ , 使得误差矩阵  $A - LC$  的特征值恰好为  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ 。

**定理的意义:**

- 能观测性是任意配置观测器极点的充要条件
- 这与极点配置定理完全对偶
- 设计方法可以直接套用极点配置的算法

**与极点配置的对比:**

	极点配置	观测器设计
系统	$\dot{x} = Ax + Bu$	$\dot{e} = (A - LC)e$
配置目标	$A - BK$ 的极点	$A - LC$ 的极点
条件	$(A, B)$ 能控	$(A, C)$ 能观测
增益	$K$	$L$
对偶关系	$B \leftrightarrow C^T$	$K \leftrightarrow L^T$

## 30.3 观测器的设计

本节目的

掌握观测器增益  $L$  的具体计算步骤, 以及观测器极点的选择原则。



### 30.3.1 设计步骤

观测器设计标准流程：

#### 1. 验证能观测性

- 计算能观测性矩阵： $W_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$
- 检查： $\text{rank}(W_o) = n$
- 若不能观测，则无法任意配置观测器极点

#### 2. 选择观测器极点 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$

- 必须在左半平面（保证误差收敛）
- 通常比控制器极点更靠左（收敛更快）
- 经验法则：观测器极点实部 = 控制器极点实部的 2 ~ 5 倍

#### 3. 计算观测器增益 $L$

- 方法 1：直接使用 MATLAB `place(A', C', poles)'`
- 方法 2：利用对偶性，设计  $(A^T, C^T)$  的控制器增益
- 方法 3：手算低阶系统 ( $n \leq 3$ )

#### 4. 验证设计

- 检查  $A - LC$  的特征值是否为期望值
- 仿真误差动态  $\dot{e} = (A - LC)e$
- 评估对测量噪声的敏感性

### 30.3.2 观测器极点选择准则

#### 1. 为什么观测器极点要比控制器极点快？

原因：

- 控制器需要真实状态  $x$  才能发挥作用
- 如果估计误差  $e$  收敛太慢，控制器会误用错误的状态信息
- 让观测器先收敛，控制器才能基于准确的  $\hat{x}$  工作



经验法则：

设控制器主导极点为  $s_c = -\sigma_c \pm j\omega_c$ ，则观测器极点选择为：

$$s_o = -(2 \sim 5)\sigma_c \pm j\omega_o$$

典型选择：

- 保守设计：观测器极点 = 2 倍控制器极点
- 中等设计：3-4 倍
- 激进设计：5 倍（快速收敛，但噪声敏感）

## 2. 观测器极点配置的实际限制

- 测量噪声
  - 观测器极点越靠左，增益  $L$  越大
  - $L$  大  $\rightarrow$  对  $y$  的噪声放大严重
  - 平衡：收敛速度 vs 噪声抑制
- 计算负担
  - 观测器需要实时运行
  - 极点太快  $\rightarrow$  需要更小的采样周期（数字实现时）
  - 嵌入式系统可能无法承受
- 模型误差
  - 观测器依赖准确的  $A, B, C$  矩阵
  - 高增益观测器对模型误差**不鲁棒**
  - 实际系统建模总有偏差
- 执行器饱和
  - 观测器初始误差大时，可能导致  $\hat{x}$  剧烈变化
  - 基于  $\hat{x}$  的控制律  $u = -K\hat{x}$  可能饱和
  - 需要考虑抗饱和设计

## 3. 观测器极点的典型配置模式

实极点配置（无超调）：

- 适用于噪声较大的系统



- 避免振荡放大噪声
- 例：控制器极点  $-3, -4$ ，观测器极点  $-10, -12$

**Bessel 型配置（最优延迟）：**

- 最小化估计延迟
- 适合快速跟踪应用

**经验公式（二阶系统）：**

控制器：  $s_c = -\zeta_c \omega_{nc} \pm j \omega_{nc} \sqrt{1 - \zeta_c^2}$

观测器：  $s_o = -\alpha \zeta_c \omega_{nc} \pm j \alpha \omega_{nc} \sqrt{1 - \zeta_c^2}$

其中  $\alpha = 3 \sim 5$ （加速因子）。

### 30.3.3 对偶性的具体应用

**利用极点配置工具设计观测器：**

**步骤：**

1. 构造对偶系统：  $(A^T, C^T, B^T)$
2. 用极点配置方法（如阿克曼公式）为对偶系统设计控制器增益：

$$K_{\text{dual}} = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1] W_o^{-1} \alpha_o(A^T)$$

其中  $W_o = [C^T \quad A^T C^T \quad \cdots \quad (A^T)^{n-1} C^T]$

3. 转换回观测器增益：

$$L = K_{\text{dual}}^T$$

**MATLAB 实现：**

% 方法1：直接设计观测器

```
L = place(A', C', observer_poles)';
```

% 方法2：利用对偶性

```
K_dual = acker(A', C', observer_poles);
```

```
L = K_dual';
```

% 验证

```
eig(A - L*C) % 应等于 observer_poles
```

**为什么对偶性如此重要？**



- 所有极点配置的算法（直接法、变换法、阿克曼公式）都可以**直接用于**观测器设计
- 理论统一：能控性理论  $\leftrightarrow$  能观测性理论
- 工具复用：同一套代码，只需转置矩阵

### 30.3.4 观测器增益计算范例：倒立摆系统

**范例说明** 通过一个经典的倒立摆系统，详细展示观测器增益  $L$  的计算步骤，并深入分析其物理意义及对实际问题的考量。

#### 1. 问题背景与系统模型 考虑一个线性化的倒立摆系统：

- 状态变量：  $x_1 = \theta$ （摆角），  $x_2 = \dot{\theta}$ （角速度）
- 控制输入：  $u$ （施加在底座上的水平力）
- 测量输出：  $y = \theta$ （只能通过编码器测量摆角）

系统模型如下：

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x\end{aligned}$$

系统特性分析：

计算开环极点：

$$\det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ -2 & s \end{bmatrix} = s^2 - 2 = 0$$

极点：  $s = \pm\sqrt{2} \approx \pm 1.414$

关键观察：

- 存在一个**正实部极点**  $+\sqrt{2}$ ，说明系统开环**不稳定**
- 物理意义：倒立摆在没有控制时会倾倒
- 角速度  $\dot{\theta}$  无法直接测量（需要昂贵的陀螺仪或噪声敏感的数值微分）



**2. 设计任务与系统分析** 任务：设计一个状态观测器，用于估计不可直接测量的角速度  $x_2 = \dot{\theta}$ 。

能观测性检查：

$$W_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det(W_o) = 1 \neq 0$ ，系统完全能观测，因此可以任意配置观测器极点。

能观测性的物理意义：

- 从摆角  $\theta$  的测量值可以推断角速度  $\dot{\theta}$
- 第一个状态直接可测：  $y = x_1$
- 第二个状态可从  $y$  的变化率推断：  $\dot{y} = Cx_2$

**3. 选择观测器极点** 设计考虑：

- 由于原系统不稳定（极点  $+\sqrt{2}$ ），估计误差必须快速收敛
- 观测器要为控制器提供可靠的状态估计
- 同时要避免增益过大，以抑制测量噪声

极点选择策略：

我们选择一对位于实轴上且比系统不稳定极点快得多的极点：

$$\mu_1 = -6, \quad \mu_2 = -8$$

选择理由：

- 实极点：避免振荡，减少噪声放大
- 足够快：  $|-6| \gg |\sqrt{2}|$ ，保证估计误差快速收敛
- 不过度激进：不是 -20, -30 这样的极端值，平衡收敛速度与噪声抑制

收敛时间估算：

$$t_s \approx \frac{4}{|\operatorname{Re}(\mu_{\min})|} = \frac{4}{6} \approx 0.67 \text{ 秒}$$

误差在不到 1 秒内收敛到 2% 以内。

期望特征多项式：

$$\alpha_o(s) = (s + 6)(s + 8) = s^2 + 14s + 48$$



4. 计算观测器增益  $L$  方法：直接法

设  $L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}$ ，计算误差动态矩阵  $A - LC$ ：

$$\begin{aligned} A - LC &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 & 0 \\ l_2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -l_1 & 1 \\ 2 - l_2 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

其特征方程为：

$$\begin{aligned} \det(sI - (A - LC)) &= \det \begin{bmatrix} s + l_1 & -1 \\ l_2 - 2 & s \end{bmatrix} \\ &= (s + l_1) \cdot s - (-1) \cdot (l_2 - 2) \\ &= s^2 + l_1 s + l_2 - 2 \end{aligned}$$

将此多项式与期望的  $\alpha_o(s)$  进行系数匹配：

$$s^2 + l_1 s + l_2 - 2 = s^2 + 14s + 48$$

比较系数可得：

$$\begin{aligned} l_1 &= 14 \\ l_2 - 2 &= 48 \quad \Rightarrow \quad l_2 = 50 \end{aligned}$$

结果：

$$L = \begin{bmatrix} 14 \\ 50 \end{bmatrix}$$

## 5. 验证设计 检查闭环极点：

$$A - LC = \begin{bmatrix} -14 & 1 \\ -48 & 0 \end{bmatrix}$$

特征值计算：

$$\det(sI - (A - LC)) = s^2 + 14s + 48 = (s + 6)(s + 8)$$

极点： $s = -6, -8$  （与设计目标一致）



## 6. 结果分析与讨论 观测器增益的物理意义：

观测器方程为：

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})$$

展开为：

$$\dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + 14(y - \hat{x}_1)$$

$$\dot{\hat{x}}_2 = 2\hat{x}_1 + u + 50(y - \hat{x}_1)$$

增益  $L = [14, 50]^T$  的含义：

- $l_1 = 14$ ：当测量角度  $y$  与估计角度  $\hat{x}_1$  存在误差时，该误差会以 **14 倍** 的增益来校正角度估计的变化率  $\dot{\hat{x}}_1$
- $l_2 = 50$ ：同时，该角度误差会以 **50 倍** 的更大增益来校正角速度估计的变化率  $\dot{\hat{x}}_2$
- **角速度估计更依赖校正**：因为  $x_2$  不可测，需要更强的校正力度

噪声敏感性分析：

假设测量值  $y$  存在一个幅值为  $w$  的高频噪声： $y = \theta + w$ 。

这个噪声会通过增益  $L$  被放大并影响状态估计：

- 对  $\dot{\hat{x}}_1$  的影响： $14w$
- 对  $\dot{\hat{x}}_2$  的影响： $50w$ （**放大 50 倍!**）

实际权衡：

如果测量噪声  $w$  的标准差为 0.01 弧度（约  $0.57^\circ$ ），则：

- 角速度估计的噪声： $50 \times 0.01 = 0.5 \text{ rad/s}$
- 这可能导致控制输入抖动

调整策略：

如果实际噪声过大，可以考虑：

1. **放慢观测器极点**：如选择  $-4, -5$ （代价：收敛变慢）
2. **增加滤波器**：对测量信号  $y$  预先滤波
3. **使用卡尔曼滤波器**：在随机噪声存在时的最优观测器

对比不同极点选择：



观测器极点	$L$	收敛时间	噪声放大
$-4, -5$	$[9, 17]^T$	1.0 s	低
$-6, -8$	$[14, 50]^T$	0.67 s	中等
$-10, -12$	$[22, 118]^T$	0.4 s	高

范例总结：

这个倒立摆例子展示了：

- 观测器设计的**完整流程**：能观测性检查 → 极点选择 → 增益计算 → 验证
- 增益矩阵的**物理意义**：校正力度与状态的可测性相关
- **实际权衡**：收敛速度 vs 噪声敏感性
- 不同极点选择的**对比分析**

## 30.4 降维状态观测器

本节目的

当输出  $y = Cx$  中已经直接包含部分状态信息时，我们**不需要估计所有状态**，只需估计不可测的状态，从而构造计算量更小的**降维观测器**。

### 30.4.1 问题的提出

全维观测器的”浪费”：

考虑一个简单例子：

- 系统状态：  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$
- 输出：  $y = x_1$  （ $x_1$  可以直接测量！）
- 全维观测器：估计  $\hat{x}_1$  和  $\hat{x}_2$ （2 个状态）

**问题**：既然  $x_1$  已知，为什么还要”估计”它？这不是浪费计算资源吗？



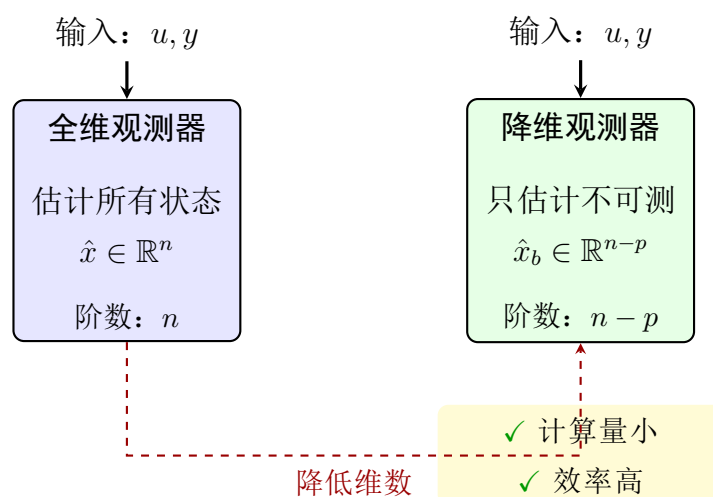
## 降维观测器的核心思想

只估计不可测的状态，直接使用可测的状态

- 全维观测器：估计  $n$  个状态（阶数  $n$ ）
- **降维观测器**：只估计  $(n - p)$  个不可测状态（阶数  $n - p$ ）
- 其中  $p$  是输出维数（可测状态数量）

优势：

- 计算量减少（低阶微分方程）
- 避免对已知状态的”重复估计”
- 特别适合传感器部分失效的情况



## 30.4.2 状态分块与系统重构

基本假设：系统  $(A, B, C)$  完全能观测，输出方程为  $y = Cx$ 。

状态划分：

将状态向量  $x$  划分为两部分：

- $x_a \in \mathbb{R}^p$ ：可测状态（从输出  $y$  可以直接获得）
- $x_b \in \mathbb{R}^{n-p}$ ：不可测状态（需要估计）

$$x = \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix}, \quad x_a \in \mathbb{R}^p, \quad x_b \in \mathbb{R}^{n-p}$$



**简化假设：**为了简化推导，不失一般性地假设：

$$y = \begin{bmatrix} I_p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix} = x_a$$

这意味着输出**直接等于**可测状态（通过坐标变换总能实现）。

**系统矩阵分块：**

相应地，将系统矩阵分块：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{x}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{aa} & A_{ab} \\ A_{ba} & A_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_a \\ B_b \end{bmatrix} u$$

其中：

- $A_{aa} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ：可测状态之间的耦合
- $A_{ab} \in \mathbb{R}^{p \times (n-p)}$ ：不可测对可测的影响
- $A_{ba} \in \mathbb{R}^{(n-p) \times p}$ ：可测对不可测的影响
- $A_{bb} \in \mathbb{R}^{(n-p) \times (n-p)}$ ：不可测状态之间的耦合
- $B_a \in \mathbb{R}^p$ ,  $B_b \in \mathbb{R}^{n-p}$ ：输入对各部分的作用

### 30.4.3 降维观测器设计方法

**核心思路：**从不可测状态的动态方程出发。

从分块方程的第二行：

$$\dot{x}_b = A_{ba}x_a + A_{bb}x_b + B_b u$$

这个方程告诉我们  $x_b$  如何演化，但它依赖于未知的  $x_b$ 。

**巧妙的辅助变量法：**

引入辅助变量  $z \in \mathbb{R}^{n-p}$ ：

$$\boxed{z = \hat{x}_b - Lx_a}$$

其中：

- $\hat{x}_b$ ：对不可测状态的估计
- $L \in \mathbb{R}^{(n-p) \times p}$ ：**降维观测器增益**（待设计）
- $x_a = y$ ：可测状态（已知）



为什么要引入  $z$ ?

1. 避免直接微分  $y = x_a$  (微分会放大测量噪声)
2. 将问题转化为设计  $z$  的动态方程
3.  $z$  包含了历史信息的“滤波积累”

推导  $z$  的动态方程:对  $z$  求导:

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \dot{\hat{x}}_b - L\dot{x}_a \\ &= \dot{\hat{x}}_b - L(A_{aa}x_a + A_{ab}x_b + B_a u)\end{aligned}$$

我们希望  $\dot{z}$  的方程不依赖于未知的  $x_b$ , 因此设计:

$$\dot{\hat{x}}_b = A_{ba}x_a + A_{bb}\hat{x}_b + B_b u + L\dot{x}_a$$

代入后:

$$\begin{aligned}\dot{z} &= A_{ba}x_a + A_{bb}\hat{x}_b + B_b u + L\dot{x}_a - L\dot{x}_a \\ &= A_{ba}x_a + A_{bb}\underbrace{(\hat{x}_b - Lx_a)}_{x_b} + B_b u \\ &= A_{ba}x_a + A_{bb}z + A_{bb}Lx_a + B_b u \\ &= A_{bb}z + (A_{ba} + A_{bb}L)x_a + B_b u\end{aligned}$$

但我们还要利用  $\dot{x}_a = A_{aa}x_a + A_{ab}x_b + B_a u$ , 消去其中的  $x_b$ 。

最终形式: 经过精心设计, 降维观测器动态方程为:

## 降维观测器标准形式

辅助变量动态方程:

$$\dot{z} = (A_{bb} - LA_{ab})z + (A_{ba} - LA_{aa})x_a + (B_b - LB_a)u$$

不可测状态估计:

$$\hat{x}_b = z + Lx_a$$

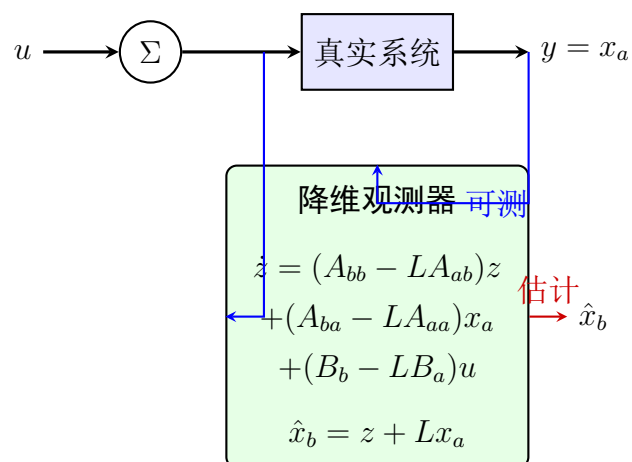
增益设计准则:

选择  $L$  使得矩阵  $(A_{bb} - LA_{ab})$  的特征值为期望的观测器极点。

关键观察:

- 这是一个  $(n - p)$  阶系统 (比全维的  $n$  阶小!)
- $x_a = y$  是可测的, 可以直接使用
- 增益  $L$  的设计类似于全维观测器的极点配置







## 30.4.4 降维观测器设计步骤

## 降维观测器设计流程

## 步骤 1：状态分块

- 确定可测状态  $x_a$  和不可测状态  $x_b$
- 对系统矩阵进行分块： $A \rightarrow \begin{bmatrix} A_{aa} & A_{ab} \\ A_{ba} & A_{bb} \end{bmatrix}$
- 对输入矩阵分块： $B \rightarrow \begin{bmatrix} B_a \\ B_b \end{bmatrix}$

## 步骤 2：选择观测器极点

- 根据性能要求选择  $(n-p)$  个期望极点  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-p}$
- 通常选择比系统极点快 2-5 倍

步骤 3：计算增益  $L$ 

- 设计  $L$  使  $\det(sI - (A_{bb} - LA_{ab}))$  的根为期望极点
- 等价于为系统  $(A_{bb}, A_{ab})$  设计观测器增益
- 可以用对偶性：转化为极点配置问题

## 步骤 4：构造观测器方程

- $\dot{z} = (A_{bb} - LA_{ab})z + (A_{ba} - LA_{aa})x_a + (B_b - LB_a)u$
- $\hat{x}_b = z + Lx_a$

## 步骤 5：验证设计

- 检查  $(A_{bb} - LA_{ab})$  的特征值
- 仿真验证估计误差收敛性

## 30.4.5 降维观测器设计范例

问题：设计降维状态观测器，使其极点为 -10。

系统描述：

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 100 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$



其中  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ ,  $x_1$  可测,  $x_2$  不可测。

解答:

### 步骤 1: 状态分块

- 可测:  $x_a = [x_1]$  (1 维)
- 不可测:  $x_b = [x_2]$  (1 维)
- 输出:  $y = x_1 = x_a$

系统矩阵分块:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 100 \end{bmatrix} u$$

得到:

$$A_{aa} = [0], \quad A_{ab} = [1]$$

$$A_{ba} = [0], \quad A_{bb} = [-5]$$

$$B_a = [0], \quad B_b = [100]$$

**步骤 2: 设计增益  $L$**  降维观测器是 1 阶系统 (只估计  $x_2$ ), 增益  $L$  是标量  $l$ 。

期望极点为 -10, 因此:

$$\det(sI - (A_{bb} - lA_{ab})) = s - (-5 - l \cdot 1) = s + 5 + l$$

令  $s + 5 + l = s + 10$ , 得:

$$\boxed{l = 5}$$

**步骤 3: 构造观测器方程** 代入各分块矩阵:

$$A_{bb} - LA_{ab} = -5 - 5 \cdot 1 = -10$$

$$A_{ba} - LA_{aa} = 0 - 5 \cdot 0 = 0$$

$$B_b - LB_a = 100 - 5 \cdot 0 = 100$$

降维观测器动态方程:

$$\boxed{\dot{z} = -10z + 100u}$$

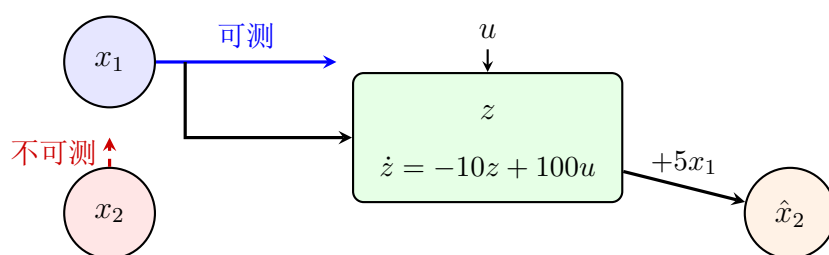
状态估计方程:

$$\boxed{\hat{x}_2 = z + 5x_1}$$

其中  $x_1$  是可直接测量的 ( $x_1 = y$ )。



## 步骤 4：物理意义解释



## 工作原理：

1. 传感器测量  $x_1$
2. 观测器用  $u$  和  $x_1$  更新内部状态  $z$
3. 通过  $\hat{x}_2 = z + 5x_1$  重构不可测状态

## 极点-10 的意义：

- 估计误差以  $e^{-10t}$  速度衰减
- 比系统自身极点 -5 快一倍，能及时跟踪状态变化
- 时间常数： $\tau = 0.1\text{s}$ （0.1 秒内误差减少到  $1/e \approx 37\%$ ）

## 与全维观测器对比：

特性	全维观测器	降维观测器
估计状态数	2 个 ( $x_1, x_2$ )	1 个 ( $x_2$ )
观测器阶数	2 阶	1 阶
微分方程数	2 个	1 个
增益矩阵	$L \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$	$l \in \mathbb{R}$
计算复杂度	较高	低

## 步骤 5：MATLAB 实现

```
1 % 系统参数
2 A = [0 1; 0 -5];
3 B = [0; 100];
4 C = [1 0];
5
6 % 状态分块
7 A_aa = 0; A_ab = 1;
```



```
8 A_ba = 0; A_bb = -5;
9 B_a = 0; B_b = 100;
10
11 % 降维观测器增益 (极点-10)
12 L = 5;
13
14 % 观测器矩阵
15 A_obs = A_bb - L*A_ab; % = -10
16 B_obs_u = B_b - L*B_a; % = 100
17 B_obs_y = A_ba - L*A_aa; % = 0
18
19 % 仿真
20 t = 0:0.01:2;
21 u = ones(size(t)); % 阶跃输入
22
23 % 真实系统
24 sys_real = ss(A, B, C, 0);
25 [y_real, ~, x_real] = lsim(sys_real, u, t);
26
27 % 降维观测器
28 sys_obs = ss(A_obs, [B_obs_u B_obs_y], 1, 0);
29 [z, ~] = lsim(sys_obs, [u; y_real'], t);
30
31 % 重构估计状态
32 x2_hat = z + L*y_real;
33
34 % 绘图对比
35 figure;
36 plot(t, x_real(:,2), 'b-', 'LineWidth', 2); hold on;
37 plot(t, x2_hat, 'r--', 'LineWidth', 1.5);
38 legend('真实 x_2', '估计 \hat{x}_2');
39 title('降维观测器估计效果');
40 xlabel('时间 (s)'); ylabel('状态 x_2');
41 grid on;
```

Listing 7: 降维观测器仿真

预期结果：估计值  $\hat{x}_2$  快速收敛到真实值  $x_2$ ，收敛速度由极点 -10 决定。



### 30.4.6 降维 vs 全维观测器：何时使用？

#### 选择指南

##### 使用降维观测器的场景：

- ✓ 部分状态可以直接且准确地测量
- ✓ 计算资源有限（嵌入式系统、实时控制）
- ✓ 传感器数量有限，但足够覆盖关键状态
- ✓ 系统阶数较高，降维效果显著

##### 使用全维观测器的场景：

- ✓ 设计简单，易于实现和调试
- ✓ 所有状态都存在测量噪声（需要统一滤波）
- ✓ 计算资源充足，不在意额外开销
- ✓ 系统阶数本身就很低（ $n \leq 3$ ）

##### 实际工程建议：

- 原型设计阶段：先用全维观测器（快速验证）
- 优化阶段：根据性能瓶颈考虑降维
- 生产部署：平衡计算量、精度、可维护性

#### 降维观测器小结

核心思想：



- 只估计不可测的  $(n - p)$  个状态，避免浪费计算资源
- 通过辅助变量  $z$  构造低阶观测器
- 增益设计等价于  $(A_{bb}, A_{ab})$  系统的观测器问题

设计要点：

- 状态分块：明确可测  $x_a$  和不可测  $x_b$
- 矩阵分块： $A, B$  按维度正确划分
- 增益计算：配置  $(A_{bb} - LA_{ab})$  的极点
- 方程构造： $\dot{z}$  和  $\hat{x}_b$  的标准形式

实际优势：

- 计算量： $(n - p)$  vs  $n$ （降维显著）
- 实时性：低阶微分方程求解更快
- 灵活性：适应传感器配置变化

降维观测器是现代控制工程中的重要工具，特别是在资源受限的嵌入式系统中！

## 30.5 分离定理

本节目的

理解现代控制理论的核心定理之一：控制器和观测器可以独立设计，且联合系统的性能可以预测。

### 30.5.1 基于观测器的状态反馈

问题背景：

- 极点配置需要： $u = -Kx$ （需要完整状态  $x$ ）
- 实际情况： $x$  不可测，只有估计值  $\hat{x}$

实际控制律：

$$u = -K\hat{x} + v$$

用估计状态代替真实状态！

直观担忧：



- 用  $\hat{x}$  代替  $x$  会破坏闭环极点吗？
- 控制器和观测器的极点会相互干扰吗？
- 我们需要重新设计  $K$  和  $L$  吗？

分离定理的答案：

不用担心！控制器和观测器可以完全独立设计，就像  $x$  真的可测一样。

### 30.5.2 分离定理 (Separation Principle)

定理陈述：

对于系统：

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

采用基于观测器的状态反馈：

$$u = -K\hat{x} + v$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})$$

闭环系统的特征多项式等于：

$$\det(sI - A + BK) \cdot \det(sI - A + LC)$$

即：控制器特征多项式  $\times$  观测器特征多项式

定理的深刻含义：

1. 极点分离：闭环系统的极点 = 控制器极点 + 观测器极点
  - 控制器极点：由  $K$  单独决定（如上一章设计）
  - 观测器极点：由  $L$  单独决定（本章设计）
  - 两者不相互影响
2. 独立设计：可以分两步设计
  - 步骤 1：假设  $x$  可测，设计  $K$ （极点配置）
  - 步骤 2：设计观测器，配置  $L$ （观测器设计）
  - 无需迭代或联合优化
3. 性能保证：闭环稳定性由两者的最慢极点决定
  - 若控制器和观测器都稳定  $\rightarrow$  整体系统稳定
  - 响应速度由两者的瓶颈决定



### 30.5.3 分离定理的证明（思路）

定义增广状态向量：

$$\xi = \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}, \quad e = x - \hat{x}$$

推导增广系统：

真实系统：

$$\dot{x} = Ax + Bu = Ax + B(-K\hat{x}) = Ax - BK(x - e) = (A - BK)x + BKe$$

误差动态（与  $u$  无关）：

$$\dot{e} = (A - LC)e$$

增广形式：

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}$$

关键观察：矩阵是块上三角形式！

特征多项式：

$$\det(sI - \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix}) = \det(sI - A + BK) \cdot \det(sI - A + LC)$$

□（证毕）

块上三角的意义：

- $e$  的动态不依赖  $x$ （误差自己演化）
- $x$  的动态受  $e$  影响（但不改变极点位置）
- 极点 = 对角块的极点之并集

### 30.5.4 分离定理的实际意义

#### 1. 简化设计流程

无需分离定理的情况：

- 联合设计  $K$  和  $L$
- 求解耦合的非线性方程
- 计算量巨大，难以直观理解

有分离定理：

- 步骤 1：设计  $K$ （假设状态可测）



- 步骤 2: 设计  $L$  (配置观测器极点)
- 两步独立, 清晰明了

## 2. 设计自由度

- $K$ : 根据性能要求选择 (响应速度、超调量)
- $L$ : 根据估计需求选择 (收敛速度、噪声抑制)
- 两者有不同的设计准则, 互不干扰

## 3. 鲁棒性考虑

理想情况:

- 模型准确:  $A, B, C$  完全已知
- 无噪声: 测量  $y$  无误差
- 分离定理严格成立

实际情况:

- 模型误差:  $\Delta A, \Delta B$
- 测量噪声:  $y = Cx + w$
- 分离定理近似成立 (鲁棒性分析需要额外工具)

启示:

- 观测器极点不宜过快 (对模型误差敏感)
- 需要在收敛速度与鲁棒性间折中
- 可能需要鲁棒观测器设计 (如  $H_\infty$  观测器)

### 30.5.5 完整系统的设计流程

标准设计程序:

#### 1. 系统分析

- 建立状态空间模型  $(A, B, C)$
- 验证能控性:  $\text{rank}([B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B]) = n$



$$\bullet \text{ 验证能观测性: } \text{rank}\left(\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}\right) = n$$

## 2. 控制器设计

- 根据性能要求选择期望闭环极点  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$
- 使用极点配置方法计算  $K$
- 验证:  $\det(sI - A + BK) = \prod (s - \lambda_i)$

## 3. 观测器设计

- 选择观测器极点  $\mu_1, \dots, \mu_n$  (通常比  $\lambda_i$  快 2-5 倍)
- 利用对偶性计算  $L$
- 验证:  $\det(sI - A + LC) = \prod (s - \mu_i)$

## 4. 实现控制律

- 观测器:  $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})$
- 控制律:  $u = -K\hat{x} + v$
- 数字实现时需要离散化

## 5. 验证与调试

- 仿真增广系统:  $2n$  个状态 ( $x$  和  $e$ )
- 检查瞬态响应 (初始误差、阶跃输入)
- 评估对噪声和扰动的敏感性
- 必要时调整极点位置

### 30.5.6 分离定理的局限性

定理成立的前提:

- 线性系统 (非线性系统不适用)
- 确定性系统 (无随机干扰)
- 模型准确 ( $A, B, C$  已知且精确)

实际中的挑战:



- 模型误差导致性能下降
- 测量噪声被高增益观测器放大
- 非线性和饱和效应
- 计算延迟（数字实现）

扩展方向：

- 卡尔曼滤波器（随机噪声情况）
- 鲁棒观测器（模型不确定性）
- 非线性观测器（扩展卡尔曼滤波、UKF）
- 自适应观测器（在线参数估计）

## 30.6 综合设计范例：直流电机位置控制

本节目的

将本章所学的所有概念——控制器设计、观测器设计、分离定理——应用于一个具体的物理系统，完整地走一遍从问题分析到系统验证的全过程。

### 30.6.1 问题描述与系统建模

场景：为一个直流电机设计高精度位置控制器。

控制目标：

- 使电机角度  $\theta(t)$  快速、准确地跟踪参考角度  $\theta_{\text{ref}}$
- 调节时间  $T_s \approx 1.5$  秒
- 超调量  $M_p \leq 5\%$

系统变量：

- 输入  $u(t)$ ：电枢电压 (V)
- 状态变量  $x(t)$ ：  $x_1 = \theta(t)$  (角度, rad),  $x_2 = \dot{\theta}(t)$  (角速度, rad/s)
- 输出  $y(t)$ ：  $y = \theta(t)$  (仅能测量角度)

关键约束：

角速度  $\dot{\theta}(t)$  无法直接测量（传感器成本高或不可用）



状态空间模型（参数已简化）：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

物理意义：

- $\dot{x}_1 = x_2$ ：角度的变化率是角速度（运动学）
- $\dot{x}_2 = -x_2 + u$ ：角速度受摩擦阻尼（ $-x_2$ ）和电压驱动（ $u$ ）影响
- $y = x_1$ ：只测量角度

### 30.6.2 系统分析与性能指标

开环特性分析：

特征方程：

$$\det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s + 1 \end{bmatrix} = s(s + 1) = 0$$

开环极点： $s = 0, -1$

系统特性：

- 极点  $s = 0$ ：临界稳定（积分器特性）
- 极点  $s = -1$ ：稳定的阻尼项
- 开环系统无法自动回到期望位置，需要闭环控制

能控性检查：

$$W_c = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$\det(W_c) = -1 \neq 0$ ，系统完全能控

能观测性检查：

$$W_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det(W_o) = 1 \neq 0$ ，系统完全能观测

结论：可以独立设计控制器和观测器！

性能指标转化为极点位置：

根据二阶系统理论，要求  $T_s \approx 1.5s$ ， $M_p \leq 5\%$ ：

- 超调量  $M_p = 5\% \Rightarrow$  阻尼比  $\zeta \approx 0.69$
- 调节时间  $T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 1.5 \Rightarrow \omega_n \approx 3.86 \text{ rad/s}$



期望的控制器主导极点：

$$\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \approx -2.67 \pm j2.77$$

为了计算简便，我们选择接近的极点：

$$\lambda_{1,2} = -2.5 \pm j2.5$$

### 30.6.3 控制器设计（基于分离定理的第一步）

我们首先假设所有状态均可测量，设计状态反馈增益  $K$ 。

控制律： $u = -Kx + v = -[k_1 \quad k_2]x + v$

目标：使  $A - BK$  的特征值为  $-2.5 \pm j2.5$ 。

期望特征多项式：

$$\alpha_c(s) = (s + 2.5 - j2.5)(s + 2.5 + j2.5) = s^2 + 5s + 12.5$$

计算  $K$ （直接法）：

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [k_1 \quad k_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -1 - k_2 \end{bmatrix}$$

特征方程：

$$\det(sI - (A - BK)) = s(s + 1 + k_2) + k_1 = s^2 + (1 + k_2)s + k_1$$

令其等于  $s^2 + 5s + 12.5$ ：

$$1 + k_2 = 5 \quad \Rightarrow \quad k_2 = 4$$

$$k_1 = 12.5$$

结果：

$$K = \begin{bmatrix} 12.5 & 4 \end{bmatrix}$$

理想控制律： $u = -12.5\theta - 4\dot{\theta} + v$

问题： $\dot{\theta}$  是未知的！这就是为什么我们需要观测器。

### 30.6.4 观测器设计（基于分离定理的第二步）

为解决  $\dot{\theta}$  不可测的问题，我们设计一个观测器来提供状态估计  $\hat{x}$ 。

选择观测器极点：

原则：观测器的收敛速度必须比控制器快，以保证估计误差  $e(t)$  能迅速衰减。

经验法则：观测器极点的实部应为控制器极点实部的 2.5 倍。

控制器极点实部为  $-2.5$ ，我们选择 4 倍： $-10$ 。



为避免振荡（减少噪声放大），选择两个实极点：

$$\mu_1 = -10, \quad \mu_2 = -12$$

收敛时间：

$$t_s \approx \frac{4}{10} = 0.4 \text{ 秒}$$

观测器误差在 0.4 秒内收敛，远快于控制器的 1.5 秒响应时间

期望误差动态特征多项式：

$$\alpha_o(s) = (s + 10)(s + 12) = s^2 + 22s + 120$$

计算观测器增益  $L$ （直接法）：

设  $L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}$ ：

$$A - LC = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 & 1 \\ -l_2 & -1 \end{bmatrix}$$

特征方程：

$$\det(sI - (A - LC)) = (s + l_1)(s + 1) + l_2 = s^2 + (1 + l_1)s + (l_1 + l_2)$$

令其等于  $s^2 + 22s + 120$ ：

$$1 + l_1 = 22 \quad \Rightarrow \quad l_1 = 21$$

$$l_1 + l_2 = 120 \quad \Rightarrow \quad l_2 = 120 - 21 = 99$$

结果：

$$L = \begin{bmatrix} 21 \\ 99 \end{bmatrix}$$

### 30.6.5 组合系统与最终实现

根据分离定理，我们可以将上述独立设计的控制器和观测器安全地组合起来。

观测器方程（实现）：

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})$$

展开为：

$$\dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + 21(y - \hat{x}_1)$$

$$\dot{\hat{x}}_2 = -\hat{x}_2 + u + 99(y - \hat{x}_1)$$

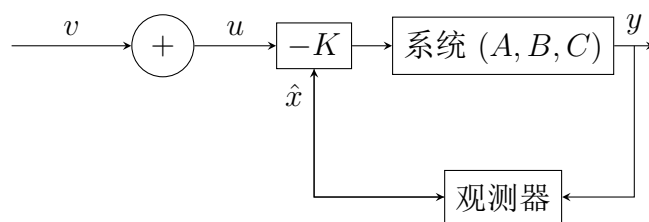
实际控制律（实现）：

$$u = -K\hat{x} + v = -12.5\hat{x}_1 - 4\hat{x}_2 + v$$

其中  $v = 12.5\theta_{\text{ref}}$  是参考输入（使稳态误差为零）。

完整控制系统框图：





### 30.6.6 系统整体特性分析

系统阶数：

最终的闭环系统是一个 **4 阶系统**（2 个物理状态 + 2 个观测器状态）。

系统总极点（根据分离定理）：

$$\text{极点} = \left\{ \underbrace{-2.5 \pm j2.5}_{\text{控制器极点, 决定系统响应}}, \underbrace{-10, -12}_{\text{观测器极点, 决定估计误差收敛}} \right\}$$

定性分析：

#### 1. 初始阶段 ( $t < 0.4\text{s}$ ):

- 观测器快速收敛（由  $-10, -12$  决定）
- 估计状态  $\hat{x}$  迅速逼近真实状态  $x$
- 此时控制效果还未完全发挥

#### 2. 主导阶段 ( $t > 0.4\text{s}$ ):

- 观测器误差  $e \approx 0$ ，即  $\hat{x} \approx x$
- 系统动态主要由控制器极点 ( $-2.5 \pm j2.5$ ) 主导
- 展现设计的响应性能：  $T_s \approx 1.5\text{s}$ ,  $M_p \leq 5\%$

稳定性分析：

所有极点均在左半平面  $\Rightarrow$  系统渐近稳定！

响应速度：

- 观测器误差收敛：  $t_s^{(o)} \approx 0.4\text{s}$ （非常快）
- 系统输出响应：  $t_s^{(c)} \approx 1.5\text{s}$ （符合设计目标）

由于观测器远快于控制器，系统整体响应由控制器主导



### 30.6.7 设计验证与性能评估

验证步骤：

#### 1. 极点验证

- 控制器闭环极点： $\det(sI - A + BK) = s^2 + 5s + 12.5$
- 观测器极点： $\det(sI - A + LC) = s^2 + 22s + 120$

#### 2. 仿真测试

- 初始条件： $x(0) = [0, 0]^T$ ,  $\hat{x}(0) = [0.5, 0]^T$ （初始估计误差）
- 参考输入： $\theta_{\text{ref}} = 1 \text{ rad}$ （阶跃信号）
- 观察：估计误差  $e(t)$ 、系统输出  $\theta(t)$ 、控制输入  $u(t)$

预期结果：

- 估计误差  $e(t)$  在 0.4s 内衰减到零
- 系统输出  $\theta(t)$  在 1.5s 内到达 1 rad，超调量  $< 5\%$
- 控制输入  $u(t)$  无剧烈抖动（观测器增益适中）

MATLAB 实现代码：

```
% 系统矩阵
```

```
A = [0 1; 0 -1]; B = [0; 1]; C = [1 0];
```

```
% 控制器设计
```

```
K = [12.5 4];
```

```
eig(A - B*K) % 验证：-2.5±2.5j
```

```
% 观测器设计
```

```
L = [21; 99];
```

```
eig(A - L*C) % 验证：-10, -12
```

```
% 增广系统仿真（4阶）
```

```
A_aug = [A-B*K, B*K; zeros(2), A-L*C];
```

```
B_aug = [B; zeros(2,1)];
```

```
C_aug = [C, zeros(1,2)];
```

```
sys = ss(A_aug, B_aug, C_aug, 0);
```

```
step(sys * 12.5); % 阶跃响应
```



### 30.6.8 实际考虑与改进方向

实际问题：

#### 1. 测量噪声

- 编码器可能有噪声 ( $\pm 0.01$  rad)
- 观测器增益  $L = [21, 99]^T$  会放大噪声
- 角速度估计可能抖动

解决：增加低通滤波器或使用卡尔曼滤波器

#### 2. 执行器饱和

- 电压限制： $|u| \leq u_{\max}$
- 初始阶段控制输入可能饱和

解决：抗饱和设计，限制参考输入变化率

#### 3. 模型误差

- 实际摩擦系数可能不是精确的  $-1$
- 可能存在未建模动态

解决：鲁棒控制方法，增加积分项消除稳态误差

改进方向：

- **LQR 控制**：用最优控制理论自动选择  $K$
- **卡尔曼滤波器**：在噪声环境下的最优观测器
- **降维观测器**：只估计  $\dot{\theta}$ ，减少计算量
- **自适应控制**：在线估计参数变化

### 范例总结

这个直流电机例子完美展示了**分离定理**的威力：

#### 1. 模块化设计：

- 步骤 1：独立设计控制器  $K$ （假设状态可测）
- 步骤 2：独立设计观测器  $L$ （配置快速极点）



- 步骤 3: 直接组合, 无需重新设计

## 2. 性能可预测:

- 系统极点 = 控制器极点 + 观测器极点
- 响应特性由控制器主导 (观测器足够快)

## 3. 实际可行:

- 减少了传感器需求 (只测角度)
- 降低了硬件成本
- 通过软件实现状态估计

### 关键经验:

- 观测器极点选择为控制器的 3-5 倍, 平衡收敛与噪声
- 验证能控性和能观测性是设计的前提
- 实际系统需要考虑噪声、饱和等非理想因素
- 分离定理简化了复杂控制系统的设计流程

这个例子从问题分析到系统建模, 从独立设计到系统集成, 从理论验证到实际考虑, 完整展示了现代控制理论在实际工程中的应用!

## 本章总结

### 核心要点回顾

#### 1. 状态观测器的本质

- 观测器是一个**动态系统**, 通过模拟真实系统并利用输出误差校正来估计状态
- 观测器方程:  $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})$
- 关键创新: 利用**创新** (innovation)  $y - C\hat{x}$  进行闭环校正
- 与传感器的区别: 算法/软件 vs 物理设备

#### 2. 误差动态与收敛

- 估计误差:  $e = x - \hat{x}$
- 误差动态:  $\dot{e} = (A - LC)e$  (与控制输入  $u$  无关)



- 收敛条件： $A - LC$  的所有特征值在左半平面
- 设计目标：选择  $L$  配置观测器极点

3. 对偶性 (Duality)

	极点配置	观测器设计
目标矩阵	$A - BK$	$A - LC$
前提条件	$(A, B)$ 能控	$(A, C)$ 能观测
增益设计	$K$	$L$
对偶关系	—	$(A, C) \leftrightarrow (A^T, C^T)$

利用对偶性：所有极点配置算法（直接法、变换法、阿克曼公式）都可直接用于观测器设计！

4. 降维观测器 (Reduced-Order Observer)

- 核心思想：只估计不可测的  $(n - p)$  个状态，避免浪费计算资源
- 状态划分： $x_a$ （可测，维数  $p$ ）+  $x_b$ （不可测，维数  $n - p$ ）
- 辅助变量： $z = \hat{x}_b - Lx_a$ （避免直接微分输出）
- 降维观测器方程：

$$\dot{z} = (A_{bb} - LA_{ab})z + (A_{ba} - LA_{aa})x_a + (B_b - LB_a)u$$
$$\hat{x}_b = z + Lx_a$$

- 优势：计算量小（ $(n - p)$  vs  $n$ ），实时性好，适合嵌入式系统
- 应用场景：部分状态可直接准确测量，计算资源受限

特性	全维观测器	降维观测器
估计状态数	$n$ 个（所有状态）	$(n - p)$ 个（仅不可测）
观测器阶数	$n$ 阶	$(n - p)$ 阶
设计复杂度	简单直观	需要矩阵分块
计算效率	一般	高
适用场景	通用	部分状态可测



## 5. 分离定理 (Separation Principle)

定理陈述:

基于观测器的状态反馈系统特征多项式 = 控制器特征多项式  $\times$  观测器特征多项式

$$\det(sI - A + BK) \cdot \det(sI - A + LC)$$

定理意义:

- 控制器和观测器可以**完全独立**设计
- 闭环极点 = 控制器极点 + 观测器极点
- 无需联合优化, 大大简化设计流程

### 设计流程总结

完整的基于观测器的控制系统设计:

#### 1. 系统分析

- 建立状态空间模型  $(A, B, C)$
- 验证能控性:  $\text{rank}(W_c) = n$
- 验证能观测性:  $\text{rank}(W_o) = n$

#### 2. 控制器设计 (假设状态可测)

- 根据性能要求选择期望极点  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$
- 计算反馈增益  $K$  (如阿克曼公式)
- 验证闭环极点

#### 3. 观测器设计

- 选择观测器极点  $\mu_1, \dots, \mu_n$  (通常比控制器快 2-5 倍)
- 利用对偶性计算  $L$
- 验证观测器极点

#### 4. 系统实现

- 观测器:  $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})$
- 控制律:  $u = -K\hat{x} + v$
- 数字实现时需要离散化

#### 5. 验证与调试



- 仿真增广系统 ( $2n$  阶)
- 检查瞬态响应和稳态性能
- 评估噪声敏感性
- 必要时调整极点位置

### 观测器极点选择准则

经验法则：

$$\text{观测器极点实部} = (2 \sim 5) \times \text{控制器极点实部}$$

选择考虑：

因素	快速极点 (5 倍)	保守极点 (2 倍)
收敛速度	非常快	较慢
噪声敏感性	高 (大增益)	低 (小增益)
计算负担	高 (小采样周期)	低
鲁棒性	对模型误差敏感	较鲁棒
适用场景	低噪声、准确模型	高噪声、模型不确定

实用建议：

- 初次设计：选择 3-4 倍 (中庸之道)
- 实际调试：根据噪声水平和响应速度权衡调整
- 实极点：适合噪声环境 (避免振荡)
- 复数极点：适合快速跟踪应用

### 重要概念辨析

#### 1. 观测器 vs 滤波器

- 观测器：基于系统模型的状态估计 (需要知道  $A, B, C$ )
- 卡尔曼滤波器：在随机噪声环境下的最优观测器 (需要噪声统计特性)
- 低通滤波器：简单的信号平滑 (不利用系统模型)



## 2. 全维观测器 vs 降维观测器

- 全维：估计所有  $n$  个状态（简单，本章重点）
- 降维：只估计不可测的  $(n - p)$  个状态（计算量更小）
- 当  $y = Cx$  中部分状态直接可测时，降维观测器更高效

## 3. 确定性观测器 vs 随机观测器

- 确定性（本章）：无随机噪声，极点配置方法
- 随机（卡尔曼滤波）：考虑过程噪声和测量噪声，最小化估计方差

### 常见误区与正确做法

- 观测器极点配置过快
  - 后果：对噪声极度敏感，控制输入抖动
  - 正确：平衡收敛速度与噪声抑制，选择 2-5 倍控制器极点
- 忽略能观测性检查
  - 后果：无法任意配置极点，观测器可能发散
  - 正确：设计前必须验证  $\text{rank}(W_o) = n$
- 认为分离定理对非线性系统成立
  - 后果：非线性系统中分离定理不成立，需要联合设计
  - 正确：线性系统才能独立设计控制器和观测器
- 用数值微分代替观测器
  - 后果：噪声严重放大（如  $\dot{\theta}$  从  $\theta$  微分）
  - 正确：使用观测器估计导数，自带滤波效果
- 观测器初值随意设置
  - 后果：初始误差过大可能导致控制饱和
  - 正确：尽量根据先验知识设置接近真实值的初值



## MATLAB 工具箱

能观测性检查：

```
Wo = obsv(A, C);  
rank(Wo) % 应等于 n
```

观测器设计：

```
% 方法1: 直接设计  
L = place(A', C', poles)';  
  
% 方法2: 利用对偶性  
L = acker(A', C', poles)';  
  
% 验证  
eig(A - L*C) % 应等于期望极点
```

基于观测器的控制系统仿真：

```
% 增广系统 [x; e]  
A_aug = [A-B*K, B*K; zeros(n), A-L*C];  
B_aug = [B; zeros(n,1)];  
C_aug = [C, zeros(1,n)];  
  
sys = ss(A_aug, B_aug, C_aug, 0);  
step(sys);
```

## 与前后章节的联系

与第 23 章（能控性和能观测性）：

- 第 23 章：定义能观测性，判别准则
- 本章：应用能观测性——观测器设计
- 能观测性是任意配置观测器极点的充要条件

与第 29 章（极点配置）：

- 第 29 章：状态反馈  $u = -Kx$ （假设状态可测）
- 本章：解决状态不可测问题——用  $\hat{x}$  代替  $x$
- 分离定理：两者可以独立设计



### 与后续章节（最优控制和卡尔曼滤波）：

- 本章：极点配置方法设计观测器（设计者指定极点）
- 最优控制：LQR + 卡尔曼滤波器（自动优化极点）
- 线性二次高斯（LQG）：随机环境下的最优设计

### 实际应用场景

#### 1. 航空航天

- 飞行器姿态控制：测量姿态角，估计角速度
- 火箭导航：GPS + 惯性测量单元（IMU）融合

#### 2. 机器人

- 关节控制：编码器测位置，观测器估计速度和加速度
- 减少陀螺仪和加速度计数量

#### 3. 电机驱动

- 无传感器控制：只测电流和电压，估计转速和转矩
- 降低成本，提高可靠性

#### 4. 自动驾驶

- 车辆状态估计：GPS + 轮速传感器 + 观测器
- 估计侧向速度、横摆角速度等难以直接测量的状态

### 学习检查清单

#### 理论理解：

- 能解释观测器的工作原理和校正机制
- 能推导误差动态方程  $\dot{e} = (A - LC)e$
- 理解对偶性： $(A, C)$  能观测  $\leftrightarrow (A^T, C^T)$  能控
- 理解分离定理及其适用条件

#### 设计能力：

- 能验证系统的能观测性



- 能根据性能要求选择观测器极点
- 能计算观测器增益矩阵  $L$
- 能设计完整的控制器+观测器系统

#### 实践技能：

- 会使用 MATLAB 的 `place`, `acker` 设计观测器
- 能仿真和验证观测器性能
- 能分析噪声对观测器的影响
- 能调试和优化实际系统

#### 延伸阅读

- 卡尔曼滤波：随机环境下的最优观测器
- 滑模观测器：对模型不确定性鲁棒的观测器
- 高增益观测器：非线性系统的观测器设计
- 扩展卡尔曼滤波（EKF）：非线性系统的状态估计
- 无迹卡尔曼滤波（UKF）：更精确的非线性状态估计

#### 本章核心公式

##### 状态观测器核心公式

观测器方程：

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})$$

误差动态：

$$\dot{e} = (A - LC)e, \quad e = x - \hat{x}$$

观测器设计定理：

$(A, C)$  完全能观测  $\Leftrightarrow$  可任意配置  $A - LC$  的极点

分离定理：

闭环特征多项式 =  $\det(sI - A + BK) \cdot \det(sI - A + LC)$

基于观测器的控制：

$$u = -K\hat{x} + v$$

结语：



状态观测器是现代控制理论的**基石之一**。它将第 23 章的能观测性理论转化为实际的估计算法，与第 29 章的极点配置方法结合，通过分离定理构成了完整的状态反馈控制系统。

观测器的核心思想——**利用输出误差动态校正模型估计**——不仅在控制理论中至关重要，在信号处理、机器学习、导航定位等众多领域也有广泛应用。

掌握观测器设计，就掌握了从**部分信息重构完整状态**的强大工具！

## Part III

# 高级主题

## 31 非线性系统

### 31.1 非线性系统概述

#### 31.1.1 非线性系统的定义

非线性系统是指不满足叠加原理的系统，其数学模型为非线性微分方程。



## 线性系统 vs 非线性系统：

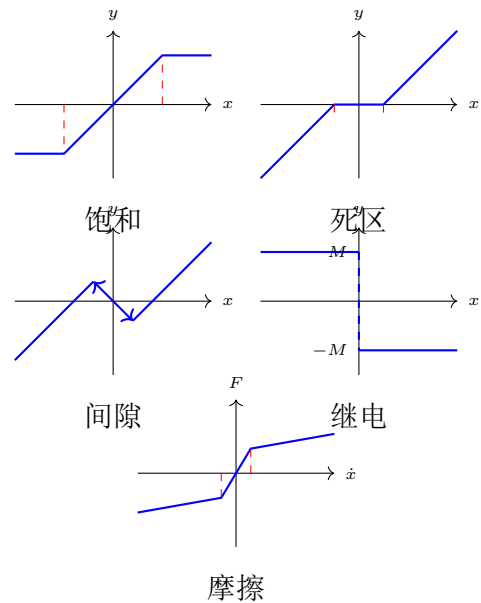
## 线性系统：

- 满足叠加原理（齐次性和可加性）
- 数学模型：线性微分方程
- 解法：拉普拉斯变换、传递函数等
- 频率响应：可用频域方法分析

## 非线性系统：

- 不满足叠加原理
- 数学模型：非线性微分方程
- 解法：相平面法、描述函数法等
- 响应：依赖于输入幅值和初始条件

## 典型非线性环节图示：



## 典型非线性特性：

1. 饱和特性：放大器、执行机构的幅值限制
2. 死区特性：齿轮间隙、阈值检测
3. 间隙特性：机械传动中的空程
4. 继电特性：开关、继电器
5. 摩擦特性：库伦摩擦、粘性摩擦

## 31.1.2 非线性系统的特点

1. 不满足叠加原理：输出不与输入成线性关系
2. 稳定性复杂：可能存在多个平衡点，稳定性依赖于初始条件
3. 极限环：自激振荡，振幅和频率由系统参数决定
4. 跳变现象：参数变化时系统响应突变
5. 分岔现象：系统行为质的变化
6. 混沌：对初始条件极度敏感的复杂运动



## 31.2 相平面法

相平面法是分析二阶非线性系统的图解方法，通过绘制相轨迹来研究系统的动态行为。

### 31.2.1 相平面与相轨迹

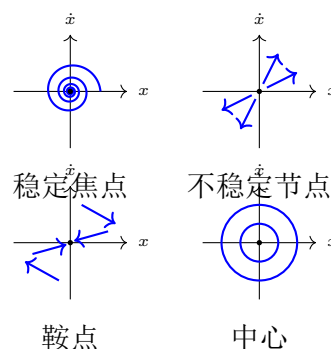
基本概念：

#### 1. 状态空间表示

二阶系统：

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= f(x, \dot{x}) \\ \text{令: } x_1 &= x, \quad x_2 = \dot{x} \\ \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= f(x_1, x_2)\end{aligned}$$

典型奇点的相轨迹：



#### 2. 相平面

以  $x$  为横轴， $\dot{x}$  为纵轴构成的平面。

#### 3. 相轨迹

系统在相平面上的运动轨迹，表示系统状态随时间的变化。

#### 4. 奇点（平衡点）

满足  $\dot{x} = 0$  和  $\ddot{x} = 0$  的点。

奇点分类：

- 稳定焦点：螺旋收敛到奇点
- 不稳定焦点：螺旋发散
- 稳定节点：直接收敛到奇点
- 不稳定节点：直接发散
- 鞍点：沿某方向稳定，沿另一方向不稳定
- 中心：封闭的椭圆轨迹（等幅振荡）

相轨迹的性质：

- 不同轨迹不相交（除奇点外）
- 轨迹方向由  $\dot{x}$  的符号决定
- 封闭轨迹对应周期运动
- 螺旋轨迹对应振荡运动

### 31.2.2 等倾线法

等倾线是相平面上相轨迹斜率相等的点的轨迹。

方法：



1. 计算相轨迹斜率:

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = \frac{\ddot{x}}{\dot{x}} = \frac{f(x, \dot{x})}{\dot{x}}$$

2. 令斜率为常数  $\alpha$ , 得等倾线方程:

$$\frac{f(x, \dot{x})}{\dot{x}} = \alpha \implies f(x, \dot{x}) = \alpha \dot{x}$$

3. 绘制不同  $\alpha$  值对应的等倾线

4. 从初始点开始, 沿等倾线指示的方向绘制相轨迹

**例题:** 二阶线性系统  $\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = 0$ ,  $\omega_n = 1$ ,  $\zeta = 0.5$ , 用相平面法分析。

解:

1. 建立相平面方程

$$\dot{x}_2 = -\omega_n^2x_1 - 2\zeta\omega_nx_2 = -x_1 - x_2$$

2. 奇点

$(0, 0)$  是唯一的奇点。

3. 判断奇点类型

特征方程:  $\lambda^2 + 2\zeta\omega_n\lambda + \omega_n^2 = 0$

$\lambda = -0.5 \pm 0.866j$  (共轭复根, 实部为负)

结论: 稳定焦点

4. 相轨迹

螺旋收敛到原点, 表示系统稳定且有振荡。

### 31.3 描述函数法

描述函数法是分析含有非线性环节的闭环系统的近似频域方法。

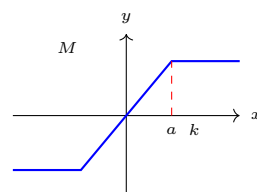
#### 31.3.1 描述函数的定义

对于非线性环节, 当输入为正弦信号  $x = A \sin \omega t$  时, 输出一般为非正弦周期信号。



**基本假设：**

1. 非线性环节的输出可以用傅里叶级数展开
2. 线性部分对高次谐波有足够的衰减（低通滤波特性）
3. 只考虑基波分量的作用

**典型非线性环节的描述函数：****描述函数定义：**

非线性环节输出的基波分量与输入振幅的复数比：

$$N(A) = \frac{Y_1(A)}{A}$$

其中  $Y_1(A)$  是输出的基波复数幅值。

$$N(A) = \begin{cases} k & A \leq a \\ \frac{2k}{\pi} \left[ \arcsin \frac{a}{A} + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2} \right] & A > a \end{cases}$$

其中  $a = M/k$ （饱和阈值）

**计算方法：**

输出  $y(t)$  的傅里叶展开：

$$y(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \cos n\omega t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \sin n\omega t dt$$

基波分量：  $Y_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$

相位：  $\phi_1 = \arctan(a_1/b_1)$

描述函数：

$$N(A) = \frac{Y_1}{A} e^{j\phi_1}$$

**2. 死区特性**

$$N(A) = \begin{cases} 0 & A \leq a \\ \frac{k}{\pi} \left[ \pi - 2 \arcsin \frac{a}{A} - \frac{2a}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2} \right] & A > a \end{cases}$$

**3. 继电特性**

$$N(A) = \frac{4M}{\pi A}$$

$M$  为继电器输出幅值

**31.3.2 稳定性分析****闭环系统结构：**

非线性环节  $N(A)$  串联线性部分  $G(j\omega)$  构成单位负反馈系统。

稳定性判据（类似奈奎斯特判据）：

系统稳定的条件：

$$G(j\omega) \text{ 曲线不包围点 } \left( -\frac{1}{N(A)} \right)$$

极限环判断：



极限环存在的条件：

$$G(j\omega_0) = -\frac{1}{N(A_0)}$$

此时系统产生频率为  $\omega_0$ 、幅值为  $A_0$  的自激振荡。

稳定性判断：

- 若  $-1/N(A)$  曲线在  $G(j\omega)$  外侧：稳定
- 若相交：存在极限环
- 极限环稳定性：由交点处曲线的相对位置决定

**例题：**系统含继电特性  $M = 1$ ，线性部分  $G(s) = \frac{K}{s(s+1)}$ ， $K = 2$ ，判断是否存在极限环。

解：

### 1. 继电特性的描述函数

$$N(A) = \frac{4M}{\pi A} = \frac{4}{\pi A}$$

### 2. $-1/N(A)$ 曲线

$$-\frac{1}{N(A)} = -\frac{\pi A}{4}$$

这是实轴上的负半轴， $A$  从 0 到  $\infty$  变化时，点从 0 到  $-\infty$  移动。

### 3. $G(j\omega)$ 曲线

$$G(j\omega) = \frac{2}{j\omega(1+j\omega)} = \frac{2(1-j\omega)}{\omega^2(1+\omega^2)}$$

### 4. 交点判断

令  $\text{Im}[G(j\omega)] = 0$ ： $-2/[\omega^2(1+\omega^2)] = 0$  无解

$G(j\omega)$  曲线不与实轴负半轴相交  $\Rightarrow$  不存在极限环。

结论：系统不会产生自激振荡。

## 31.4 Lyapunov 稳定性理论（非线性系统）

Lyapunov 第二方法（直接法）适用于非线性系统的稳定性分析，无需求解微分方程。



### 31.4.1 Lyapunov 稳定性定义

考虑非线性系统：

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$$

假设  $\mathbf{x}_e$  是平衡点 ( $\mathbf{f}(\mathbf{x}_e, t) = 0$ )。

稳定性定义：

- **稳定：** 对任意  $\epsilon > 0$ ，存在  $\delta > 0$ ，使得当  $\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_e\| < \delta$  时，有  $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_e\| < \epsilon$  ( $t \geq 0$ )
- **渐近稳定：** 稳定且  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_e$
- **全局渐近稳定：** 对任意初始条件都渐近稳定

### 31.4.2 Lyapunov 定理

**定理 (Lyapunov 稳定性定理)：**

如果存在标量函数  $V(\mathbf{x})$  (Lyapunov 函数) 满足：

1.  $V(\mathbf{x})$  连续可微
2.  $V(\mathbf{x}_e) = 0$  且在  $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_e$  时  $V(\mathbf{x}) > 0$  (正定)
3.  $\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \leq 0$  (半负定)

则平衡点  $\mathbf{x}_e$  是稳定的。

如果进一步满足：

4.  $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$  ( $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_e$ ，负定)

则平衡点  $\mathbf{x}_e$  是渐近稳定的。

**Lyapunov 函数的构造：**

常用形式 (二次型)：

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$$

其中  $\mathbf{P}$  是正定对称矩阵。

**例题：** 分析系统  $\dot{x}_1 = x_2$ ,  $\dot{x}_2 = -x_1 - x_2$  的稳定性。

解：

#### 1. 确定平衡点

令  $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ :  $x_1 = x_2 = 0$



## 2. 构造 Lyapunov 函数

选择:  $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

## 3. 验证正定性

$V(0, 0) = 0$  且  $V(x_1, x_2) > 0$  ( $x_1, x_2$  不全为零)  $\implies$  正定

## 4. 计算 $\dot{V}$

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_2 \\ &= 2x_1 \cdot x_2 + 2x_2 \cdot (-x_1 - x_2) \\ &= 2x_1x_2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2 \\ &= -2x_2^2 \leq 0\end{aligned}$$

$\dot{V} < 0$  (除原点外)  $\implies$  负定

结论: 原点是渐近稳定的平衡点。

### 31.4.3 范例 2: 含高阶非线性项的李雅普诺夫分析

题目: 分析系统的稳定性:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -2x_1 + 2x_2^4 \\ \dot{x}_2 &= -x_2\end{aligned}$$

解:

## 1. 确定平衡点

令  $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ :

$$\begin{aligned}-x_2 &= 0 \implies x_2 = 0 \\ -2x_1 + 2(0)^4 &= 0 \implies x_1 = 0\end{aligned}$$

原点  $(0, 0)$  是唯一的平衡点。

## 2. 尝试最简单的李雅普诺夫函数

首次尝试:  $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$  (正定)

计算其导数:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 \\ &= 2x_1(-2x_1 + 2x_2^4) + 2x_2(-x_2) \\ &= -4x_1^2 + 4x_1x_2^4 - 2x_2^2\end{aligned}$$

问题: 交叉项  $4x_1x_2^4$  的符号不确定, 破坏了  $\dot{V}$  的负定性。

## 3. 修改李雅普诺夫函数



基于交叉项的形式，我们调整系数，选择：

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2$$

验证正定性：显然  $V(0, 0) = 0$  且  $V(x_1, x_2) > 0$  ( $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ )。

#### 4. 计算新的 $\dot{V}$

$$\begin{aligned}\dot{V} &= x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 \\ &= x_1(-2x_1 + 2x_2^4) + 2x_2(-x_2) \\ &= -2x_1^2 + 2x_1x_2^4 - 2x_2^2\end{aligned}$$

#### 5. 分析 $\dot{V}$ 的定号性（配方法）

对含  $x_1$  的项进行配方：

$$\begin{aligned}-2x_1^2 + 2x_1x_2^4 &= -2\left(x_1^2 - x_1x_2^4\right) \\ &= -2\left[\left(x_1 - \frac{1}{2}x_2^4\right)^2 - \frac{1}{4}x_2^8\right] \\ &= -2\left(x_1 - \frac{1}{2}x_2^4\right)^2 + \frac{1}{2}x_2^8\end{aligned}$$

因此：

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -2\left(x_1 - \frac{1}{2}x_2^4\right)^2 + \frac{1}{2}x_2^8 - 2x_2^2 \\ &= -2\left(x_1 - \frac{1}{2}x_2^4\right)^2 - 2x_2^2\left(1 - \frac{1}{4}x_2^6\right)\end{aligned}$$

#### 6. 确定稳定域

分析  $\dot{V}$  的符号：

• 第一项  $-2\left(x_1 - \frac{1}{2}x_2^4\right)^2 \leq 0$  总是非正的

• 第二项  $-2x_2^2\left(1 - \frac{1}{4}x_2^6\right)$ ：

$$-x_2^2 \geq 0$$

$$- \text{括号项 } \left(1 - \frac{1}{4}x_2^6\right) > 0 \text{ 当 } x_2^6 < 4, \text{ 即 } |x_2| < \sqrt[6]{4} \approx 1.26$$

$$- \text{因此在此区域内, 第二项 } \leq 0$$

在区域  $\{(x_1, x_2) : |x_2| < 1\}$  内， $\dot{V}$  是两个非正项之和。

#### 7. 验证负定性



$\dot{V} = 0$  当且仅当:

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{2}x_2^4 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

因此在区域  $|x_2| < 1$  内, 除原点外  $\dot{V} < 0$  (严格负定)。

## 8. 结论

原点  $(0,0)$  是系统的局部渐近稳定平衡点, 其稳定域 (吸引域) 至少包含区域  $\{(x_1, x_2) : |x_2| < 1\}$ 。

关键技巧总结:

1. 配方法: 将含交叉项的表达式转化为标准形式
2. 系数调整: 根据  $\dot{V}$  的结构选择合适的  $V(x)$  系数
3. 局部分析: 对于非线性系统, 稳定性通常是局部的, 需要明确稳定域
4. 尝试与验证: 构造李雅普诺夫函数需要尝试, 没有通用公式

## 31.5 工程中的典型非线性现象

工程实践中, 非线性现象无处不在。理解这些非线性特性对控制系统设计至关重要。

### 31.5.1 摩擦非线性及其影响

#### DC 电机中的摩擦现象

直流伺服电机广泛用于机器人关节、数控机床等精密定位系统。然而, 摩擦力会严重影响其低速性能。

摩擦模型:

实际摩擦力  $F_f$  可表示为:

$$F_f = \begin{cases} F_c \cdot \text{sign}(\dot{x}) + b\dot{x} & |\dot{x}| > \epsilon \\ F_s \cdot \text{sign}(F_{ext}) & |\dot{x}| \leq \epsilon, |F_{ext}| < F_s \\ F_{ext} & |\dot{x}| \leq \epsilon, |F_{ext}| \geq F_s \end{cases}$$

其中:

- $F_c$ : 库伦摩擦力 (约 0.5-2N, 与速度无关)
- $F_s$ : 静摩擦力 (通常  $F_s = 1.2F_c$ )
- $b$ : 粘性摩擦系数 ( $b\dot{x}$  与速度成正比)



- $\epsilon$ : 低速阈值 (通常 0.01 rad/s)

### Stick-Slip (黏滑) 现象:

当电机以极低速运行时 (如 0.1 rpm), 摩擦力会导致:

1. **Stick 阶段**: 静摩擦力  $F_s$  超过驱动力, 电机停止
2. **Slip 阶段**: 驱动力累积超过  $F_s$ , 电机突然跳跃
3. **周期重复**: 导致爬行、振荡, 无法平稳定位

### 真实响应 vs 线性化模型:

假设电机参数:  $J = 0.01 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ,  $b_{nominal} = 0.02 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s/rad}$ ,  $F_c = 0.5 \text{ N} \cdot \text{m}$

- **线性模型预测**: 平滑的指数曲线, 稳态误差约 2%
- **实际测量**: 低速段出现明显振荡, 峰峰值达 10%, 稳态时仍有 0.5% 的周期性抖动

### 工程对策:

- **摩擦补偿**: 根据速度方向施加反向补偿力矩
- **Dither 信号**: 叠加小幅高频信号 (50-100 Hz), 使系统始终处于 Slip 状态
- **速度前馈**: 避免系统长时间停留在低速区域

## 31.5.2 饱和和非线性的实际影响

### 运算放大器的饱和

运放输出电压受电源限制:  $V_{out} \in [-V_{sat}, +V_{sat}]$  (典型值  $\pm 12 \text{ V}$  或  $\pm 15 \text{ V}$ )

### 饱和曲线 (实测数据):

某型运放 (TL082) 在  $V_{CC} = \pm 15 \text{ V}$  时的实际特性:

$$V_{out} \approx \begin{cases} -13.5 \text{ V} & V_{in} < -1.5 \text{ mV} \\ 9000 \cdot V_{in} & -1.5 \text{ mV} \leq V_{in} \leq 1.5 \text{ mV} \\ +13.5 \text{ V} & V_{in} > 1.5 \text{ mV} \end{cases}$$

线性区范围仅  $\pm 1.5 \text{ mV}$ , 非常窄!

### PID 控制器的积分饱和 (Integral Windup):

当执行器饱和时, PID 控制器的积分项会持续累积误差:

### 机理:

1. 大的设定值阶跃导致误差  $e(t)$  很大



2. 积分项  $\int e(\tau)d\tau$  快速累积到很大的值
3. 输出饱和后, 实际输出无法继续增大
4. 即使误差减小甚至变负, 积分项仍需很长时间才能“放电”
5. 导致严重的超调和长时间的稳定过程

#### 数值示例:

考虑温度控制系统, 设定值从  $20^{\circ}\text{C}$  突跳到  $80^{\circ}\text{C}$ , PID 参数  $K_p = 5$ ,  $K_i = 0.2$ ,  $K_d = 1$ , 加热器输出限幅  $[0, 100]\%$ :

- 无抗饱和措施:
  - 上升时间: 180 s
  - 超调量: 25% (达到  $100^{\circ}\text{C}!$ )
  - 调节时间: 480 s
  - 积分项峰值: 450 (远超合理范围)
- 带积分限幅 (Clamping): 限制积分项  $\in [-50, 50]$ 
  - 上升时间: 185 s (略慢)
  - 超调量: 8% (改善 67%)
  - 调节时间: 240 s (改善 50%)
- 带 Back-calculation: 饱和时积分项回退
  - 上升时间: 180 s
  - 超调量: 5% (改善 80%)
  - 调节时间: 210 s (改善 56%)

结论: 忽视饱和和非线性会导致性能严重恶化, 必须采取抗积分饱和措施。

### 31.5.3 死区与间隙的影响

#### 齿轮传动中的间隙 (Backlash)

减速器齿轮副之间通常有 0.1-0.5 mm 的间隙, 避免卡死。但这会导致:

#### 迟滞回环 (Hysteresis Loop):

输入轴转角  $\theta_{in}$  与输出轴转角  $\theta_{out}$  的关系:

$$\theta_{out} = \begin{cases} k(\theta_{in} - \Delta/2) & \text{正向转动} \\ k(\theta_{in} + \Delta/2) & \text{反向转动} \end{cases}$$



其中  $\Delta$  是间隙大小（等效到输入轴）， $k$  是减速比。

实际影响（机器人关节案例）：

六自由度机械臂末端定位精度测试：

- 理论精度： $\pm 0.05 \text{ mm}$ （根据编码器分辨率）
- 单向重复精度： $\pm 0.08 \text{ mm}$ （较好）
- 双向重复精度： $\pm 0.35 \text{ mm}$ （恶化 4 倍！）
- 主要原因：6 个关节的间隙累积，每个关节间隙约  $0.2 \text{ mm}$

对控制系统的影响：

1. 定位误差：方向反转时出现“失控”阶段，跟踪误差突增
2. 振荡加剧：间隙相当于相位滞后，降低相位裕度
3. 极限环：某些参数下会产生持续振荡，幅值约为间隙大小的 2-3 倍

补偿策略：

- 机械改进：预紧弹簧、双齿轮消除机构（成本高）
- 反向间隙补偿：检测方向反转，立即施加补偿转矩
- 自适应控制：在线估计间隙大小并动态调整控制器
- 轨迹规划：尽量避免频繁换向，采用单向逼近策略



31.6 总结

31.6.1 非线性分析方法对比

方法	适用范围	优点	局限性
相平面法	二阶自治系统	直观、图形化、易于理解系统全局行为、可预测极限环	仅限二阶、难以量化、绘制费时
描述函数法	含单一非线性环节的闭环系统	频域分析、可预测极限环的频率和幅值、工程实用	近似方法、忽略高次谐波、多非线性环节时失效
Lyapunov 法	任意阶非线性系统	严格的数学证明、不需求解微分方程、可处理时变系统	构造 Lyapunov 函数困难、保守性（稳定域估计偏小）
线性化法	平衡点邻域小范围	简单、可用线性理论全套工具	仅局部有效、无法预测大信号行为、可能掩盖非线性本质

31.6.2 线性化的适用范围

线性化是分析非线性系统最常用的近似方法，但必须明确其适用条件：

数学条件：

对于系统  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ，在平衡点  $\mathbf{x}_e$  处线性化：

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{x}, \quad \mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_e}$$

线性化有效的充分条件：

- 1.  $\|\Delta \mathbf{x}\|$  足够小（通常要求  $< 10\%$  额定值）
- 2. 雅可比矩阵  $\mathbf{A}$  的特征值远离虚轴（ $|\text{Re}(\lambda_i)| \gg 0$ ）
- 3. 高阶项  $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{A} \Delta \mathbf{x}\| / \|\Delta \mathbf{x}\|$  足够小

工程判断准则：

- 幅值准则：偏离平衡点的幅值应  $< 15\%$  工作范围
- 速度准则：状态变化率应在系统带宽内（避免快速大幅变化）
- 频率准则：激励频率应远低于非线性特征频率



### 线性化失效的典型情况：

1. 大角度摆动的倒立摆 ( $\theta > 30^\circ$  时  $\sin \theta \neq \theta$ , 误差  $> 5\%$ )
2. 饱和后的放大器 (输出被限幅, 增益突降为零)
3. 跨越多个平衡点的运动 (相平面上的鞍点穿越)
4. 存在滑动摩擦时的静止状态 ( $\dot{x} = 0$  处不可微)

### 31.6.3 常见误区与正确做法

#### 1. 误区：认为线性化总是有效的

正确做法：始终检查工作点偏离范围，必要时进行非线性仿真验证。

#### 2. 误区：忽视执行器饱和的影响

正确做法：在控制器设计中必须考虑饱和约束，采用抗饱和措施（如积分限幅、back-calculation）。

#### 3. 误区：将极限环视为系统故障

正确做法：极限环有时是设计的一部分（如自激振荡器），关键是判断其稳定性和是否符合设计要求。

#### 4. 误区：Lyapunov 函数找不到就说明系统不稳定

正确做法：找不到 Lyapunov 函数只能说明无法用此方法证明稳定性，系统仍可能稳定。应尝试其他方法或不同的候选函数。

#### 5. 误区：相平面法只能分析二阶系统，因此实用性差

正确做法：许多高阶系统可简化为二阶主导模态，相平面法仍能提供重要洞察。

#### 6. 误区：描述函数法给出精确的极限环预测

正确做法：描述函数法基于基波近似，预测值通常有 5-15% 误差，应作为初步估计，需仿真或实验验证。

#### 7. 误区：非线性系统必须用非线性控制方法

正确做法：若工作范围小、非线性弱，线性控制器配合适当限幅保护往往已足够且更简单。

#### 8. 误区：死区、间隙只影响稳态精度

正确做法：死区和间隙会显著降低相位裕度，可能导致系统不稳定或产生极限环，必须在动态设计中考虑。



### 31.6.4 学习要点检查清单

#### 理论理解（5 项）：

- ☐ 理解非线性系统与线性系统的本质区别（叠加原理失效）
- ☐ 掌握五种典型非线性特性（饱和、死区、间隙、继电、摩擦）及其数学描述
- ☐ 理解极限环的物理意义及其与线性系统稳定性的区别
- ☐ 掌握 Lyapunov 稳定性的定义（稳定、渐近稳定、全局稳定）
- ☐ 理解描述函数法的基本假设和适用条件

#### 分析计算（5 项）：

- ☐ 能绘制给定二阶非线性系统的相轨迹，判断奇点类型
- ☐ 能推导典型非线性环节（饱和、死区、继电）的描述函数
- ☐ 能用描述函数法判断闭环系统是否存在极限环，并计算其幅值和频率
- ☐ 能为给定的二阶非线性系统构造二次型 Lyapunov 函数并判断稳定性
- ☐ 能用雅可比矩阵线性化非线性系统，并分析线性化的有效范围

#### 工程应用（4 项）：

- ☐ 能识别实际系统中的非线性环节（如电机摩擦、放大器饱和）
- ☐ 能分析非线性对控制性能的具体影响（超调、振荡、稳态误差）
- ☐ 能提出针对性的补偿策略（摩擦补偿、抗饱和、死区补偿）
- ☐ 能判断何时必须采用非线性控制方法，何时线性方法已足够

### 31.6.5 扩展阅读与后续学习

#### 深入学习方向：

- **滑模控制（Sliding Mode Control）：**

针对不确定性和扰动的鲁棒非线性控制方法，广泛用于机器人、航空航天。参考：Utkin 《Sliding Mode Control》

- **反馈线性化（Feedback Linearization）：**

通过非线性状态变换和反馈将非线性系统精确线性化，是现代非线性控制的核心方法之一。参考：Isidori 《Nonlinear Control Systems》



- **自适应控制 (Adaptive Control):**

处理参数不确定的非线性系统，参数在线估计与控制器同步调整。参考：Slotine  
《Applied Nonlinear Control》

- **非线性  $H_\infty$  控制:**

非线性系统的鲁棒优化控制，基于 Hamilton-Jacobi 不等式。

- **Backstepping 设计:**

递推设计方法，适用于严格反馈型非线性系统。

与其他章节的联系：

- 与第 22 章（状态空间求解）：线性化后可用状态空间方法分析
- 与第 27 章（Lyapunov 稳定性）：非线性系统的稳定性严格证明
- 与第 29 章（极点配置）：局部线性化后可用极点配置设计
- 与第 32 章（离散系统）：数字控制中的非线性现象（如量化、饱和）

工程资源：

- MATLAB/Simulink 的 pplane 工具：交互式相平面绘制
- Control System Toolbox: linsim 与 nlsim 对比
- 开源库 python-control: 支持非线性仿真和描述函数计算

结语：

“线性化是近似，非线性才是真实。”工程师必须在简化模型与精确描述之间找到平衡。理解非线性系统的本质，既不能被其复杂性吓倒而盲目线性化，也不能过度追求非线性方法而忽视工程实用性。正如控制大师 Åström 所言：“好的控制工程师知道什么时候该简化，什么时候不能简化。”

## 32 离散系统

### 引言：从连续到数字的控制革命

一个真实的世界：你的手机、工业机器人、飞机自动驾驶仪、医疗呼吸机——它们都在进行数字控制。没有一个现代控制系统运行在“连续”的世界里；所有的控制决策都是在离散的时刻（通常每毫秒或每微秒）计算一次。这引发了一个根本性的问题：

为什么要从连续系统转向离散系统？



1. 现实：所有实际的控制器都是数字计算机（CPU 执行代码是离散的）

2. 好处：

- 便宜：通用芯片（ARM、DSP）比模拟电路便宜得多
- 灵活：可编程，容易修改控制算法
- 精确：不受模拟元器件偏差影响
- 集成：易于实现复杂的多变量控制
- 鲁棒：数字信号处理的抗干扰能力强

3. 代价：离散化带来新的问题（采样失真、量化误差、计算延迟）

关键概念的转变：

- 连续  $\rightarrow$  离散：函数  $f(t) \rightarrow$  序列  $f(kT)$ （采样）
- 拉普拉斯变换  $\rightarrow$  Z 变换（分析工具）
- 传递函数  $G(s) \rightarrow$  脉冲传递函数  $G(z)$ （系统模型）
- 极点在左半平面  $\rightarrow$  极点在单位圆内（稳定域）
- 连续 PID  $\rightarrow$  数字 PID（实现方式）

本章的重点：

这一章不是简单地把连续理论“翻译”成离散版本——那样太无聊了。而是要理解：

- 采样过程如何影响系统行为（采样定理、信息丢失）
- Z 变换如何像拉普拉斯变换一样工作（从信号处理视角）
- 零阶保持器如何改变系统特性（离散  $\rightarrow$  连续的桥梁）
- 稳定性判据为何改变（z 平面的特殊形状）
- 数字控制器如何实现（从传递函数到差分方程到代码）
- 采样周期的选择如何影响整个设计（实时性 vs 精度的权衡）

实际应用预告：

- 无人机姿态控制：每 10ms 更新一次控制命令
- 电动车动力管理：每 1ms 采样一次电流和温度
- 工业机器人：伺服循环周期通常 1-10ms



- 电力系统频率调整：采样周期从毫秒到秒级

警告：常见误区

- 认为离散系统就是“连续系统采样一下”（事实：有本质区别）
- 忽视采样定理（后果：信号失真、控制失效）
- 采用太小的采样周期（后果：计算负担重、成本高）
- 采用太大的采样周期（后果：控制性能差、可能不稳定）

## 32.1 离散系统概述

### 32.1.1 离散系统的定义

**离散系统**（数字控制系统）是指信号在时间上离散，通常涉及采样、数字处理和保持等环节。

连续系统 vs 离散系统：

连续系统：

- 信号连续变化
- 微分方程描述
- 拉普拉斯变换分析

离散系统：

- 信号在采样时刻定义
- 差分方程描述
- Z 变换分析

离散系统的组成：

1. **采样器**：将连续信号转换为离散序列
2. **数字控制器**：对离散信号进行数字处理
3. **保持器**：将离散信号还原为连续信号
4. **被控对象**：连续系统

**采样定理（Nyquist-Shannon 定理）：**

为无失真恢复连续信号，采样频率必须：

$$f_s \geq 2f_{\max} \quad \text{或采样周期: } T \leq \frac{\pi}{\omega_{\max}}$$

其中  $f_{\max}$  是信号的最高频率分量。

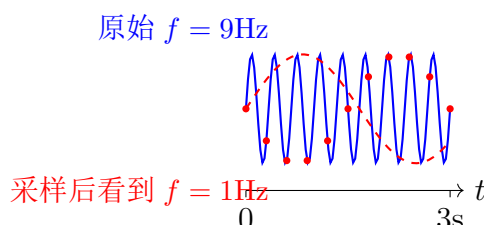
**工程实践：**一般取  $f_s = (6 \sim 10)f_{\max}$ ，或采样周期  $T = (0.1 \sim 0.5)\tau$ （ $\tau$  为系统时间常数）



**频谱混叠 (Aliasing) 警告：**

当采样频率不满足采样定理时，高频信号会“伪装”成低频信号，导致不可恢复的信息丢失。

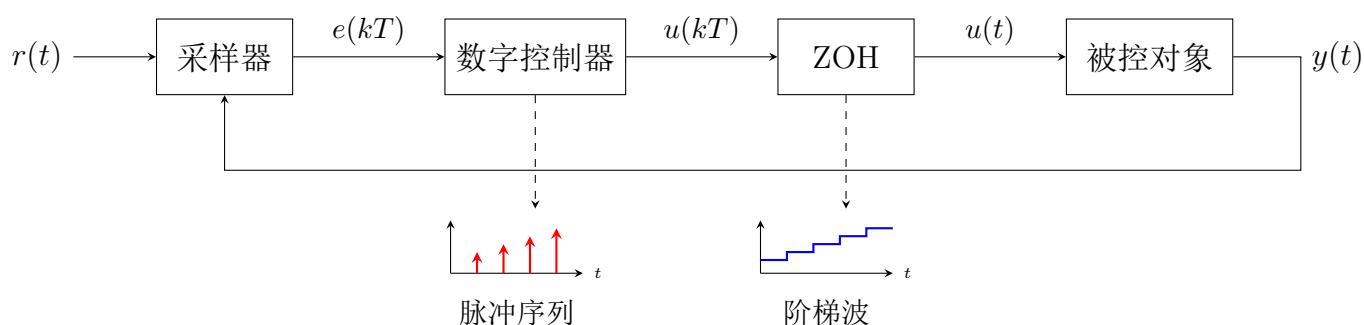
**例子：**信号频率  $f = 9\text{Hz}$ ，采样频率  $f_s = 10\text{Hz}$ （违反定理）。采样后看到的频率是  $|f - f_s| = 1\text{Hz}$ ——高频信号被误认为低频！

**频谱混叠示意图：**

**结论：**采样定理不是“理论建议”，而是**物理约束**——违反它，控制系统会看到错误的世界！

**32.1.2 数字控制系统的基本结构**

**核心问题：**计算机无法输出“真正的连续信号”——它只能在每个采样周期“刷新”一次输出值并保持。

**零阶保持器 (ZOH) 的关键作用：****1. 物理意义：ZOH 是连接数字世界和物理世界的桥梁**

- 数字控制器输出：一串数字  $u(0), u(T), u(2T), \dots$ （离散脉冲）
- 被控对象需要：连续信号  $u(t)$ （物理世界没有“脉冲”）
- ZOH 的工作：在每个周期  $[kT, (k+1)T)$  内保持  $u(kT)$  不变

**2. 数学模型：ZOH 不是“透明”的！它有自己的传递函数**

$$G_h(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$



### 3. 关键洞察：ZOH 引入相位滞后，改变系统动态特性

- 这就是为什么离散系统不是“连续系统简单采样”
- 计算离散模型时必须包含 ZOH（否则模型完全错误）

贯穿全章的示例系统：

考虑一个简单的一阶连续系统（RC 电路、温度控制等）：

$$G_p(s) = \frac{1}{s+1}$$

时间常数  $\tau = 1$  秒。选择采样周期  $T = 0.1$  秒（ $T = 0.1\tau$ ，符合工程实践）。

**问题：**这个系统在离散化后会变成什么样子？稳定性如何？如何设计控制器？

我们将在后续章节逐步回答这些问题。

## 32.2 Z 变换

Z 变换是分析离散系统的数学工具，类似于连续系统中的拉普拉斯变换。

### 32.2.1 Z 变换的定义

对于离散序列  $\{f(kT)\}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ )，其 Z 变换定义为：

$$F(z) = \mathcal{Z}\{f(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k}$$

其中  $z$  是复变量。

### 32.2.2 Z 变换与拉氏变换的关系

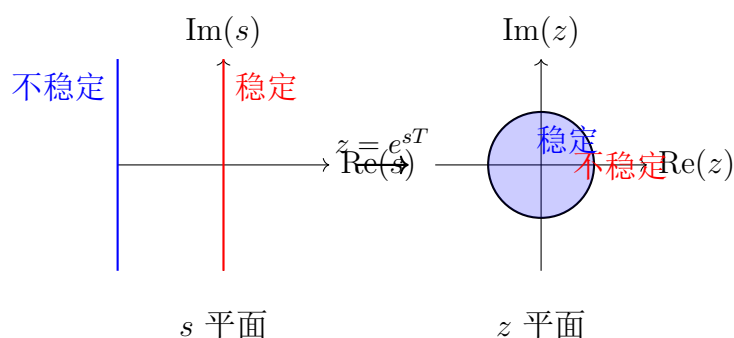
对于采样信号  $f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\delta(t - kT)$ ，其拉氏变换为：

$$F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-skT}$$

令  $z = e^{sT}$ ，则：

$$F(z) = F^*(s) \Big|_{z=e^{sT}}$$

$s$  平面与  $z$  平面的映射：





关键对应关系：

- $s$  平面左半平面  $\leftrightarrow z$  平面单位圆内
- $s$  平面虚轴  $\leftrightarrow z$  平面单位圆上
- $s$  平面右半平面  $\leftrightarrow z$  平面单位圆外

### 32.2.3 常用序列的 Z 变换

序列 $f(kT)$	Z 变换 $F(z)$	收敛域
$\delta(kT)$ (单位脉冲)	1	全平面
$1(kT)$ (单位阶跃)	$\frac{z}{z-1}$	$ z  > 1$
$kT$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$	$ z  > 1$
$e^{-akT}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$	$ z  > e^{-aT}$
$\sin(\omega kT)$	$\frac{z \sin(\omega T)}{z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1}$	$ z  > 1$
$\cos(\omega kT)$	$\frac{z[z - \cos(\omega T)]}{z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1}$	$ z  > 1$
$a^k$	$\frac{z}{z-a}$	$ z  >  a $
$ka^k$	$\frac{az}{(z-a)^2}$	$ z  >  a $

### 32.2.4 Z 变换的性质

性质	时域	Z 域
线性	$af_1(kT) + bf_2(kT)$	$aF_1(z) + bF_2(z)$
右移	$f(kT - nT)$	$z^{-n}F(z)$
左移	$f(kT + nT)$	$z^n[F(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f(kT)z^{-k}]$
初值定理	$f(0)$	$\lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$
终值定理	$\lim_{k \rightarrow \infty} f(kT)$	$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z)$
卷积	$\sum_{i=0}^k f_1(iT)f_2(kT - iT)$	$F_1(z) \cdot F_2(z)$

## 32.3 离散系统的建模与分析

**核心问题：**如何像分析连续系统一样分析离散系统？

连续系统分析的“三部曲”：

1. **建模：**获得传递函数  $G(s)$  (系统输入输出关系)
2. **稳定性：**判断极点位置 (左半平面 vs 右半平面)
3. **性能：**计算瞬态 (超调、调节时间) 和稳态 (误差) 指标

离散系统完全类似，但工具和判据不同：



1. 建模：脉冲传递函数  $G(z)$ （必须考虑 ZOH!）
2. 稳定性：极点在单位圆内（不是左半平面）
3. 性能：Z 反变换+终值定理

继续我们的示例： $G_p(s) = \frac{1}{s+1}$ ,  $T = 0.1\text{s}$

### 32.3.1 脉冲传递函数与零阶保持器

核心步骤：从连续模型  $G_p(s)$  到离散模型  $G(z)$

#### 1. 脉冲传递函数定义

脉冲传递函数是离散系统的输出 Z 变换与输入 Z 变换之比（零初始条件）：

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

#### 2. 零阶保持器（ZOH）的数学处理

零阶保持器在采样周期内保持采样值不变。



零阶保持器的传递函数：

$$G_h(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

含零阶保持器的系统：

采样器 + ZOH + 连续对象  $G(s)$

等效脉冲传递函数：

$$G(z) = \mathcal{Z} \left\{ \frac{1 - e^{-Ts}}{s} G(s) \right\} = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\}$$

常用公式：

对于  $G(s) = \frac{1}{s+a}$ ：

$$\begin{aligned} G(z) &= (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{s(s+a)} \right\} \\ &= \frac{1 - e^{-aT}}{z - e^{-aT}} \end{aligned}$$

对于  $G(s) = \frac{1}{s(s+a)}$ ：

$$\begin{aligned} G(z) &= (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{s^2(s+a)} \right\} \\ &= \frac{T - \frac{1 - e^{-aT}}{a}}{(z - 1)(z - e^{-aT})} \end{aligned}$$

零阶保持器输出示意：

零阶保持器 (Zero-Order Hold, ZOH) 在每个采样周期内保持采样值不变，将离散信号转换为阶梯波形式的连续信号。

输出特点：

- 在每个采样周期  $[kT, (k+1)T)$  内，输出保持为  $y(kT)$
- 在采样时刻发生跳变
- 形成阶梯波形

**例题：**求含 ZOH 和对象  $G(s) = \frac{1}{s+2}$  的脉冲传递函数， $T = 0.1$  s。

解：

**方法 1：查表法**

$$\begin{aligned} G(z) &= (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{s(s+2)} \right\} \\ &= \frac{1 - e^{-2T}}{z - e^{-2T}} \\ &= \frac{1 - e^{-0.2}}{z - e^{-0.2}} \\ &= \frac{0.1813}{z - 0.8187} \end{aligned}$$

**方法 2：部分分式法**

$$\begin{aligned} \frac{G(s)}{s} &= \frac{1}{s(s+2)} = \frac{0.5}{s} - \frac{0.5}{s+2} \\ \mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{s(s+2)} \right\} &= 0.5 \frac{z}{z-1} - 0.5 \frac{z}{z - e^{-2T}} \\ G(z) &= (1 - z^{-1}) \times \text{上式} \\ &= \frac{0.1813}{z - 0.8187} \end{aligned}$$

**【贯穿例子】**我们的示例系统： $G_p(s) = \frac{1}{s+1}$ ， $T = 0.1$  s

使用公式 ( $a = 1$ ):

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{1 - e^{-aT}}{z - e^{-aT}} = \frac{1 - e^{-0.1}}{z - e^{-0.1}} \\ &= \frac{0.0952}{z - 0.9048} \quad (\text{这是离散化后的系统模型}) \end{aligned}$$



观察:

- 连续系统极点:  $s = -1$  (左半平面, 稳定)
- 离散系统极点:  $z = e^{-0.1} = 0.9048$  ( $|z| = 0.9048 < 1$ , 单位圆内, 稳定)
- 映射关系验证:  $z = e^{sT} = e^{-1 \times 0.1} = 0.9048$

### 32.3.2 稳定性分析

稳定性判据

离散系统稳定的充要条件: 闭环脉冲传递函数  $\Phi(z)$  的所有极点都在  $z$  平面单位圆内, 即:

$$|z_i| < 1, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

多种判定方法:

1. **特征值法**: 直接求特征值, 判断模是否小于 1 (最简单, 首选)
2. **劳斯判据**: 通过双线性变换转换到  $w$  平面 (下文详述, 适用于多项式形式)
3. **Jury 判据**: 直接在  $z$  域判断 (下文详述, 直接但较繁琐)
4. **李雅普诺夫方法**: 能量递减法, 适用于状态空间形式
  - 理论基础见第 27 章第 28.3 节
  - 包含离散李雅普诺夫方程  $A^T P A - P = -Q$  的详细推导
  - 提供完整的  $3 \times 3$  矩阵稳定性分析例题
  - 给出特征值法与李雅普诺夫法的对比

重要提醒:

- 离散系统的稳定域是**单位圆内** ( $|z| < 1$ ), 与连续系统的左半平面 ( $\text{Re}(s) < 0$ ) 完全不同!
- **实际工程推荐**: 对于状态空间形式, 优先用特征值法 (MATLAB/Python 一行代码)
- **理论分析推荐**: 需要深入理解或鲁棒性分析时, 使用李雅普诺夫方法 (详见第 28.3 节)
- 本节后续的劳斯/Jury 判据主要用于传递函数形式的快速判断



### 32.3.3 劳斯判据的应用（双线性变换）

通过双线性变换  $z = \frac{1+w}{1-w}$ ，将  $z$  平面单位圆内映射到  $w$  平面左半平面，然后应用劳斯判据。

步骤：

1. 求闭环特征方程  $D(z) = 0$
2. 进行双线性变换： $z = \frac{1+w}{1-w}$ ，得  $D(w) = 0$
3. 对  $D(w) = 0$  应用劳斯判据

例题：判断系统  $\Phi(z) = \frac{K}{z^2 - 1.5z + 0.5}$  的稳定性， $K = 1$ 。

解：

#### 1. 特征方程

$$D(z) = z^2 - 1.5z + 0.5 + K = z^2 - 1.5z + 1.5 = 0$$

#### 2. 双线性变换

令  $z = \frac{1+w}{1-w}$ ：

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+w}{1-w}\right)^2 - 1.5\frac{1+w}{1-w} + 1.5 &= 0 \\ (1+w)^2 - 1.5(1+w)(1-w) + 1.5(1-w)^2 &= 0 \\ 1 + 2w + w^2 - 1.5(1-w^2) + 1.5(1-2w+w^2) &= 0 \\ 1 + 2w + w^2 - 1.5 + 1.5w^2 + 1.5 - 3w + 1.5w^2 &= 0 \\ 4w^2 - w + 1 &= 0 \end{aligned}$$

#### 3. 劳斯表

$$\begin{array}{c|cc} w^2 & 4 & 1 \\ w^1 & -1 & 0 \\ w^0 & 1 & \end{array}$$

第一列有符号变化（+，-，+） $\Rightarrow$  不稳定

验证：直接求根： $z = \frac{1.5 \pm \sqrt{2.25-6}}{2} = 0.75 \pm 0.968j$ ， $|z| = 1.22 > 1$

### 32.3.4 Jury 稳定性判据

Jury 判据直接在  $z$  域判断稳定性，无需变换。

设特征方程：

$$D(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

稳定的必要条件：

$$D(1) > 0, \quad (-1)^n D(-1) > 0$$



**充要条件：**构造 Jury 表，所有行的首元素满足特定符号条件。

（详细方法略，工程中常用数值计算求根判断）

**【贯穿例子】我们的系统稳定性：**

假设单位负反馈，闭环传递函数：

$$\Phi(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)} = \frac{0.0952/(z - 0.9048)}{1 + 0.0952/(z - 0.9048)} = \frac{0.0952}{z - 0.81}$$

闭环极点： $z = 0.81$ ， $|z| = 0.81 < 1 \implies$  **稳定**

### 32.3.5 动态性能分析

#### 1. 稳态误差

终值定理：

$$e_{ss} = \lim_{k \rightarrow \infty} e(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)E(z)$$

单位阶跃输入： $R(z) = \frac{z}{z-1}$

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \frac{R(z)}{1 + G(z)} = \frac{1}{1 + \lim_{z \rightarrow 1} G(z)}$$

单位斜坡输入： $R(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2}$

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \frac{Tz}{(z - 1)^2 [1 + G(z)]} = \frac{T}{\lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)G(z)/T}$$

### 32.3.6 瞬态性能指标

离散系统的时域响应可以通过 Z 反变换求得：

$$y(kT) = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\}$$

常用方法：

- 长除法：直接展开为序列
- 部分分式法：分解后查表反变换
- 留数法：复变函数理论

性能指标：

- 上升时间  $t_r$
- 超调量  $\sigma\%$
- 调节时间  $t_s$



- 振荡次数

【贯穿例子】我们的系统阶跃响应：

单位阶跃输入  $R(z) = \frac{z}{z-1}$ ，闭环输出：

$$Y(z) = \Phi(z)R(z) = \frac{0.0952}{z-0.81} \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{0.0952z}{(z-0.81)(z-1)}$$

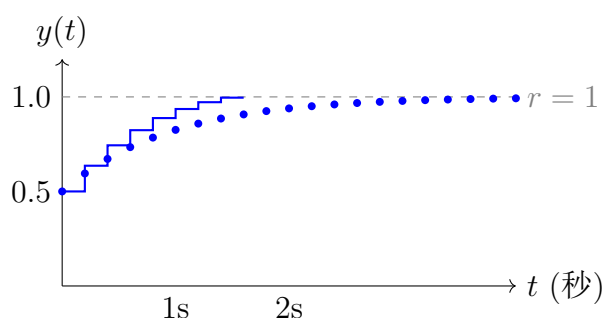
部分分式： $Y(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{0.5z}{z-0.81}$

Z 反变换： $y(kT) = 1 - 0.5 \times 0.81^k$

典型值：

- $y(0) = 0.5$ （初值）
- $y(10T) = 1 - 0.5 \times 0.81^{10} = 0.94$ （1 秒后）
- $y(\infty) = 1$ （终值，稳态误差为 0）
- 无超调（一阶系统）

离散阶跃响应示意：



## 32.4 数字控制器的设计与实现

设计目标：为离散系统设计控制器  $D(z)$ ，使闭环系统满足性能指标。

常用方法：

1. 数字 PID：最常用，从连续 PID 离散化或直接设计（经验调参）
2. 最少拍：理论最优，在最少采样周期内达到期望输出（设计复杂）
3. 数字串行校正：类似连续系统超前/滞后校正
4. 状态反馈：现代控制方法（需要状态观测器）

实现方式：差分方程  $\rightarrow$  C/Python 代码  $\rightarrow$  嵌入式系统运行



### 32.4.1 设计方法一：数字 PID 控制器

#### 1. 连续 PID 的离散化

连续 PID 控制器：

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{de(t)}{dt}$$

位置式数字 PID：

$$u(k) = K_p e(k) + K_i T \sum_{j=0}^k e(j) + K_d \frac{e(k) - e(k-1)}{T}$$

速度式数字 PID：

$$\begin{aligned} \Delta u(k) = u(k) - u(k-1) &= K_p [e(k) - e(k-1)] \\ &\quad + K_i T e(k) \\ &\quad + K_d \frac{e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)}{T} \end{aligned}$$

### 32.4.2 数字 PID 的改进

1. 积分分离：误差大时不积分，避免积分饱和

$$u(k) = K_p e(k) + K_i T \sum_{j=k_0}^k e(j) + K_d \frac{e(k) - e(k-1)}{T}$$

2. 微分先行：仅对输出微分，避免对设定值突变响应过大

$$u(k) = K_p e(k) + K_i T \sum_{j=0}^k e(j) - K_d \frac{y(k) - y(k-1)}{T}$$

3. 不完全微分：加入滤波环节，减小噪声影响

$$u_d(k) = \alpha u_d(k-1) + K_d (1 - \alpha) \frac{e(k) - e(k-1)}{T}$$

其中  $\alpha = \frac{T}{T + \tau_d}$ ， $\tau_d$  为滤波时间常数。

**【贯穿例子】**为我们的系统设计数字 PI 控制器：

目标：提高响应速度（减小调节时间）。使用位置式 PI：

$$u(k) = K_p e(k) + K_i T \sum_{j=0}^k e(j)$$

取  $K_p = 2$ ， $K_i = 5$ （经验值，实际需调试）， $T = 0.1$ ：

$$D(z) = K_p + K_i T \frac{z}{z-1} = 2 + 0.5 \frac{z}{z-1} = \frac{2.5z - 2}{z-1}$$

闭环传递函数（需验证稳定性）：极点需满足  $|z_i| < 1$



### 32.4.3 设计方法二：最少拍控制

设计目标：在最少的采样周期内使系统输出达到并保持在期望值。

设计步骤：

1. 确定期望闭环传递函数  $\Phi^*(z)$
2. 计算控制器传递函数：

$$D(z) = \frac{\Phi^*(z)}{G(z)[1 - \Phi^*(z)]}$$

3. 验证物理可实现性和稳定性

常用期望响应：

- 单拍系统： $\Phi^*(z) = z^{-1}$
- 有纹波最少拍： $\Phi^*(z) = \frac{(1-a)z^{-1}}{1-az^{-1}}$
- 无纹波最少拍（I 型系统）： $\Phi^*(z) = z^{-1}(2 - z^{-1})$

### 32.4.4 控制器的软件实现：从传递函数到代码

核心步骤：传递函数  $D(z) \rightarrow$  差分方程  $\rightarrow$  可执行代码

方法 1：直接从传递函数推导差分方程

设控制器传递函数：

$$D(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}$$

交叉相乘：

$$U(z)[1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}] = E(z)[b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}]$$

$$U(z) + a_1z^{-1}U(z) + a_2z^{-2}U(z) = b_0E(z) + b_1z^{-1}E(z) + b_2z^{-2}E(z)$$

Z 反变换得差分方程：

$$u(k) = -a_1u(k-1) - a_2u(k-2) + b_0e(k) + b_1e(k-1) + b_2e(k-2)$$

方法 2：位置式 PID 的直接实现

位置式 PID：

$$u(k) = K_p e(k) + K_i T \sum_{j=0}^k e(j) + K_d \frac{e(k) - e(k-1)}{T}$$

递推形式（避免每次累加）：

$$\text{sum} = \text{sum} + e(k)$$

$$u(k) = K_p e(k) + K_i T \cdot \text{sum} + K_d [e(k) - e(k-1)]/T$$

C 语言实现示例（位置式 PID）：



```
// 全局变量
float Kp = 2.0, Ki = 5.0, Kd = 0.0; // PID参数
float T = 0.1; // 采样周期(秒)
float sum = 0.0; // 积分累积
float e_prev = 0.0; // 上一次误差

// 每个采样周期调用一次
float PID_Controller(float setpoint, float measurement) {
    float e = setpoint - measurement; // 当前误差

    // 积分项累加
    sum += e;

    // PID计算
    float u = Kp * e + Ki * T * sum + Kd * (e - e_prev) / T;

    // 积分饱和限制 (可选)
    if (sum > 100.0) sum = 100.0;
    if (sum < -100.0) sum = -100.0;

    // 输出限幅 (可选)
    if (u > 10.0) u = 10.0;
    if (u < -10.0) u = -10.0;

    e_prev = e; // 保存当前误差
    return u;
}
```

### Python 实现示例 (更简洁):

```
import numpy as np

class DigitalPID:
    def __init__(self, Kp, Ki, Kd, T):
        self.Kp, self.Ki, self.Kd, self.T = Kp, Ki, Kd, T
        self.sum = 0.0
        self.e_prev = 0.0

    def update(self, setpoint, measurement):
        e = setpoint - measurement
        self.sum += e
```



```

    u = self.Kp * e + self.Ki * self.T * self.sum + \
        self.Kd * (e - self.e_prev) / self.T
    self.e_prev = e
    return np.clip(u, -10, 10) # 输出限幅

# 使用
pid = DigitalPID(Kp=2.0, Ki=5.0, Kd=0.0, T=0.1)
control_signal = pid.update(setpoint=1.0, measurement=0.5)

```

【贯穿例子】我们的 PI 控制器实现：

$D(z) = \frac{2.5z-2}{z-1}$  转差分方程：

$$U(z)(z-1) = E(z)(2.5z-2)$$

$$zU(z) - U(z) = 2.5zE(z) - 2E(z)$$

$$u(k+1) - u(k) = 2.5e(k+1) - 2e(k)$$

递推形式： $u(k) = u(k-1) + 2.5e(k) - 2e(k-1)$

```

float u_prev = 0.0, e_prev = 0.0;

float PI_Controller(float e) {
    float u = u_prev + 2.5*e - 2.0*e_prev;
    u_prev = u;
    e_prev = e;
    return u;
}

```

实际嵌入式系统集成：

```

// 主循环（每10ms执行一次，定时器中断触发）
void Timer_ISR(void) {
    float setpoint = 1.0;
    float measurement = ADC_Read(); // 从ADC读取传感器值

    float control = PID_Controller(setpoint, measurement);

    PWM_Set(control); // 设置PWM占空比
}

```

关键实现要点：

- 定时精度：必须严格按  $T$  周期执行（用硬件定时器，不要用软件延迟）
- 数值精度：用 float（32 位）通常够用，高精度系统用 double



- 初始化：所有历史变量（sum, e\_prev）初始化为 0
- 抗饱和：积分项和输出都需要限幅

## 本章总结

### 核心主题重申（Restated Thesis）

离散系统理论不是连续系统理论的”，而是一次**范式转变**：从物理世界的连续变化到数字计算机的离散采样。这一转变带来了工程实现的革命性优势（低成本、灵活、可编程），但也引入了新的理论挑战（采样失真、稳定域变化、量化误差）。

#### 本章的核心洞察：

理解离散系统 = 理解三个映射关系

- 时域映射：连续信号  $f(t) \rightarrow$  离散序列  $f(kT)$ （采样定理约束）
- 变换映射：拉普拉斯  $s$  域  $\rightarrow$  Z 变换  $z$  域（ $z = e^{sT}$ ，非线性！）
- 稳定域映射：左半平面  $\rightarrow$  单位圆内（极点位置判据改变）

掌握这三个映射，就掌握了连续理论到离散实现的桥梁。

### 要点总结（Summary of Key Concepts）

#### 1. 理论基础（Foundation）

表 11: 连续 vs 离散：核心对应关系

特性	连续系统	离散系统
时间描述	$t \in \mathbb{R}^+$ （连续） 信号在所有时刻定义	$k \in \mathbb{N}$ （离散） 信号仅在 $t = kT$ 时刻定义
数学模型	微分方程 $\dot{x} = Ax + Bu$	差分方程 $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$
变换工具	拉普拉斯变换 $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$	Z 变换 $F(z) = \sum_{k=0}^\infty f(k)z^{-k}$
传递函数	$G(s)$ （s 域） 极点零点在 s 平面	$G(z)$ （z 域） 极点零点在 z 平面
稳定域	左半平面 $\text{Re}(s) < 0$	单位圆内 $ z  < 1$
稳定判据	劳斯、奈奎斯特	双线性+劳斯、Jury
控制器实现	模拟电路（RC、运放）	数字代码（差分方程）

#### 2. 关键技术要素（Key Technical Elements）



### 采样定理 (Nyquist-Shannon Theorem)

- 理论要求:  $f_s \geq 2f_{\max}$  (防止走样 aliasing)
- 工程实践:  $f_s = (6 \sim 10)f_{\max}$  (留有余量)
- 采样周期选择:  $T = (0.1 \sim 0.5)\tau$  ( $\tau$  为系统时间常数)
- 物理意义: 采样频率过低  $\rightarrow$  信息永久丢失; 过高  $\rightarrow$  计算负担、成本增加

### 零阶保持器 (Zero-Order Hold, ZOH)

- 作用: 将离散控制信号转换为阶梯波连续信号
- 传递函数:  $G_h(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s}$
- 影响: 引入相位滞后, 改变系统动态特性
- 设计意义: 计算离散模型时必须考虑 ZOH (不能直接采样!)

### Z 变换与 s-z 映射

- 映射公式:  $z = e^{sT}$  (非线性映射)
- 极点映射:  $s = \sigma + j\omega \rightarrow z = e^{\sigma T} e^{j\omega T}$
- 稳定性映射: 左半平面  $\rightarrow$  单位圆内 (几何形状完全改变)
- 频率混叠:  $\omega$  和  $\omega + 2\pi/T$  映射到同一个  $z$  (采样定理的根源)

### 3. 设计方法论 (Design Methodology)

数字控制器设计流程 (五步法):

#### 1. 采样周期选择

- 估计系统时间常数  $\tau$  (从阶跃响应或传递函数)
- 选择  $T = 0.1\tau \sim 0.5\tau$  (快速系统用小值, 慢速系统用大值)
- 验证:  $T < \frac{\pi}{\omega_{max}}$  (采样定理)

#### 2. 离散模型获取

- 连续模型: 已知  $G_p(s)$
- 加 ZOH:  $G(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s} G_p(s)$
- 离散化:  $G(z) = \mathcal{Z}\{G(s)\}$  或用双线性变换



### 3. 控制器设计

- 数字 PID：位置式或速度式（最常用）
- 最少拍：性能最优但设计复杂
- 根轨迹/频域：类似连续系统方法

### 4. 稳定性验证

- 计算闭环极点（求根或 Jury 判据）
- 确认所有极点  $|z_i| < 1$
- 检查稳态误差（终值定理）

### 5. 实现与调试

- 写差分方程（递推关系）
- 编程（C/Python）：通常 2-5 行代码
- 硬件测试：考虑量化、延迟、中断

## 深层分析（Critical Analysis）

为什么稳定域变成单位圆？（几何直觉）

观察映射  $z = e^{sT} = e^{\sigma T} \cdot e^{j\omega T}$ ：

- 模长： $|z| = e^{\sigma T}$ 
  - 若  $\sigma < 0$ （稳定） $\rightarrow |z| < 1$ （单位圆内）
  - 若  $\sigma = 0$ （边界） $\rightarrow |z| = 1$ （单位圆上）
  - 若  $\sigma > 0$ （不稳定） $\rightarrow |z| > 1$ （单位圆外）
- 相位： $\angle z = \omega T$ （频率信息）

结论：单位圆是左半平面的“——稳定性判据的形式变了，但物理意义不变（衰减 vs 发散）。

离散化为何改变系统特性？

例子：连续系统  $G(s) = \frac{1}{s+1}$ ，时间常数  $\tau = 1\text{s}$

- 采样周期  $T = 0.1\text{s}$ ：  $G(z) = \frac{0.0952}{z-0.9048}$ ，极点  $z = 0.9048$ （接近单位圆，响应快）
- 采样周期  $T = 1\text{s}$ ：  $G(z) = \frac{0.632}{z-0.368}$ ，极点  $z = 0.368$ （远离单位圆，响应慢）

洞察： $T$  越大，离散系统与连续系统差异越大！采样周期选择直接影响控制性能。

数字 PID vs 模拟 PID：本质区别



	模拟 PID	数字 PID
积分	连续积分 $\int e(t)dt$	累加求和 $T \sum e(k)$
微分	瞬时导数 $\frac{de}{dt}$	后向差分 $\frac{e(k)-e(k-1)}{T}$
参数	$K_p, K_i, K_d$ 独立	$K_i, K_d$ 显式依赖 $T$
调参	物理旋钮（难）	软件修改（易）
问题	器件漂移、噪声	量化、延迟、数值误差

**关键：**数字 PID 的  $K_i, K_d$  不是模拟 PID 参数的直接复制，需要根据  $T$  重新调整！

### 常见误区与陷阱（Common Pitfalls）

概念误区：

- **误区 1：**“连续系统采样一下”
- **正确：**离散系统在采样间隔内的行为由**零阶保持器**决定（阶梯波），与连续系统本质不同
- **误区 2：**“采样定理只是理论，实践中可以违反”
- **正确：**违反采样定理导致**不可恢复**的频谱混叠（aliasing），控制系统会看到错误的频率信息
- **误区 3：**“提高采样频率总是更好”
- **正确：**过高采样频率增加计算成本、功耗、电磁干扰，且收益递减（ $T < 0.01\tau$  几乎无意义）
- **误区 4：**“Z 变换和拉普拉斯变换完全一样”
- **正确：**形式类似但映射  $z = e^{sT}$  是**非线性**的，导致稳定域、频率响应都不同

计算易错点：

- 直接用  $s$  平面极点判断离散系统稳定性
- **正确：**必须通过  $z = e^{sT}$  映射到  $z$  平面，或用 Jury 判据
- 计算  $G(z)$  时忽视零阶保持器  $\frac{1-e^{-Ts}}{s}$
- **正确：** $G(z) = \mathcal{Z} \left\{ \frac{1-e^{-Ts}}{s} G_p(s) \right\} = (1-z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{G_p(s)}{s} \right\}$
- 用欧拉法离散化连续 PID 后不重新调参
- **正确：**积分增益要乘  $T$ ，微分增益要除  $T$ （查看差分方程）



- 忘记检查数字控制器的**物理可实现性**（最少拍设计常见）
- 正确：  $D(z)$  的分子阶数不能高于分母（非因果系统无法实现）

#### 设计陷阱：

- 根据连续系统带宽选择采样周期（忽视系统时间常数）
- 正确：应根据**最慢**系统模态的时间常数选择（ $T \sim 0.1\tau_{max}$ ）
- 在  $z$  平面设计时忘记考虑输入信号的频率
- 正确：输入频率接近 Nyquist 频率  $\pi/T$  时性能严重下降
- 忽视计算延迟和量化误差的累积效应
- 正确：这是理论计算与实际系统性能差异的**主要来源**

### 学习检查清单（Self-Assessment Checklist）

#### 理论理解（Understanding）：

- ☐ 能用自己的话解释为什么需要离散系统（计算机的本质）
- ☐ 理解采样定理的物理意义（信息保存 vs 丢失的边界）
- ☐ 理解  $z = e^{sT}$  映射如何改变稳定域（左半平面  $\rightarrow$  单位圆）
- ☐ 知道零阶保持器的作用（不是简单的“采样”）
- ☐ 理解为什么离散化会改变系统特性（采样周期的影响）

#### 计算能力（Skills）：

- ☐ 会计算简单序列的 Z 变换（查表或定义）
- ☐ 会从连续模型  $G_p(s)$  计算离散模型  $G(z)$ （考虑 ZOH）
- ☐ 会用 Jury 判据或求根判定离散系统稳定性
- ☐ 会设计位置式/速度式数字 PID 控制器
- ☐ 会将传递函数  $D(z)$  转换为差分方程（递推式）

#### 工程应用（Application）：

- ☐ 能根据系统时间常数选择合适的采样周期
- ☐ 能从差分方程写出可执行的 C/Python 代码



- 能分析采样周期对控制性能的影响
- 理解实际产品中的数字控制如何工作（嵌入式系统）
- 能解释连续设计在离散实现中为何失效

#### 深入思考 (Critical Thinking):

- 为什么模拟控制器在 20 世纪 90 年代几乎完全被数字控制器取代?
- 采样和量化, 哪个对控制性能影响更大? 为什么?
- 当采样频率趋于无穷大时, 离散系统会怎样趋近连续系统?
- 为什么无人机、机器人通常用 1-10ms 采样周期? (平衡什么?)

#### 与课程其他章节的衔接 (Course Integration)

##### 向后回顾 (Prerequisites):

- 第 20 章 (传递函数):  $G(z)$  是  $G(s)$  的离散类比, 物理意义相同
- 第 19 章 (状态空间): 离散状态方程  $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$  结构相同
- 第 27 章 (李雅普诺夫稳定性):
  - 第 28.3 节专门讲解离散李雅普诺夫方法
  - 稳定性判据从左半平面改为单位圆内, 但本质 (能量衰减) 不变
  - 离散李雅普诺夫方程  $A^T P A - P = -Q$  是本章稳定性分析的理论基础
  - 包含完整的状态空间形式稳定性判断例题
- 第 23 章 (能控能观性): 判据在离散系统中完全适用 (只需替换  $A, B, C$ )

##### 前向展望 (Applications):

- 这是现代控制理论在实际系统中的最终形态
- 所有实际控制系统 (无人机、机器人、自动驾驶) 都是离散实现
- 下一步深化方向:
  - 自适应控制 (参数在线调整)
  - 预测控制 (MPC, 利用模型预测未来)
  - 强化学习控制 (数据驱动, 无需模型)



## 实践建议与工程智慧 (Practical Wisdom)

### 采样周期选择的工程经验：

- 快速系统 ( $\tau < 0.1s$ , 如伺服电机):  $T = 1-5ms$
- 中速系统 ( $\tau \sim 1s$ , 如温度控制):  $T = 0.1-0.5s$
- 慢速系统 ( $\tau > 10s$ , 如大型化工过程):  $T = 1-10s$
- 原则: “不要为了理论完美牺牲实用性”—— $T$  够用即可

### 数字 PID 调参技巧：

1. 先在连续域设计 PID (用 Ziegler-Nichols 或频域方法)
2. 离散化:  $K_i^{digital} = K_i^{continuous} \times T$ ,  $K_d^{digital} = K_d^{continuous} / T$
3. 实际测试: 通常需要微调 ( $\pm 20\%$ )
4. 警惕积分饱和: 离散 PID 更容易出现 (加积分限幅)

### 调试常见问题与解决：

- 问题: 理论稳定但实际振荡
- 原因: 计算延迟 (1-2 个采样周期) 未考虑
- 解决: 在  $z$  域模型中加  $z^{-1}$  或  $z^{-2}$  延迟项, 重新设计
- 问题: 数字 PID 性能远不如模拟 PID
- 原因: 采样周期过大, 或参数未重新调整
- 解决: 减小  $T$  至  $0.1\tau$ , 或使用速度式 PID 减小计算量

## 结束语 (Concluding Thoughts)

离散系统理论是控制工程从“黑板”走向“芯片”的关键桥梁。它不仅仅是数学变换的游戏, 而是深刻反映了**数字计算的本质**:

“所有的连续都是理想化的抽象; 真实世界的计算都是离散的。”

当你理解了为什么**稳定域**从左半平面变成单位圆, 为什么**采样定理**不可违反, 为什么**零阶保持器**改变系统动态——你就真正理解了数字控制的精髓。

### 最后的提醒：

- 离散化不是连续系统的简单替代品, 而是一个新的设计空间



- 采样周期  $T$  是离散系统设计中**最关键的参数**——选错了，其他都白费
- 传递函数只是起点；差分方程才是终点（可执行的代码）
- **理论计算永远比实际乐观**——量化、延迟、干扰是不可避免的

掌握离散系统，你就掌握了现代控制工程的**实践钥匙**。从算法到芯片，从理论到产品，离散系统理论是**最后一公里**。

**记住：**每一个工作的控制系统，背后都是一行行差分方程在**离散的时刻**默默执行——这就是离散系统的力量！