

控制理论笔记

经典控制理论与现代控制理论

学习笔记

2025 年 10 月 27 日

目录

I	经典控制理论	7
1	自动控制系统的一般概念	7
1.1	控制系统的基本组成	7
1.2	控制系统的基本要求	7
2	自动控制系统的分类	7
2.1	按输入信号分类	7
2.2	按系统结构分类	7
2.3	按系统特性分类	8
3	拉普拉斯变换及其性质	8
3.1	拉普拉斯变换定义	8
3.2	基本函数的拉普拉斯变换	8
3.3	拉普拉斯变换的性质	8
4	微分方程和传递函数	9
4.1	传递函数定义	9
4.2	传递函数的性质	9
5	结构图与信号流图	9
5.1	结构图的基本元件	9
5.2	结构图的等效变换	10
5.3	信号流图	10
5.4	具体示例	11

6 梅森公式求传递函数	11
6.1 梅森增益公式	11
6.2 特征式的计算	11
7 时域性能指标	12
7.1 典型输入信号	12
7.2 时域性能指标	12
8 一阶系统时域分析	12
8.1 一阶系统的传递函数	12
8.2 一阶系统的单位阶跃响应	12
8.3 一阶系统的性能指标	12
9 二阶系统时域分析	13
9.1 二阶系统的标准形式	13
9.2 二阶系统的特征根	13
9.3 二阶系统的分类	13
9.4 欠阻尼二阶系统的性能指标	13
9.5 欠阻尼二阶系统的 s 平面分析	14
9.5.1 抽象参数表示	14
9.5.2 具体示例: $G(s) = \frac{25}{s^2 + 5s + 25}$	15
10 稳定性分析及劳斯稳定判据	15
10.1 系统稳定性的定义	15
10.2 劳斯稳定判据	15
10.3 特殊情况的处理	16
10.3.1 情况一: 第一列出现零元素	16
10.3.2 情况二: 某一行全为零	16
11 线性定常系统的稳态误差计算	17
11.1 误差信号和误差传递函数	17
11.2 系统类型	17
11.3 稳态误差系数	17
11.4 稳态误差	17
12 根轨迹基本概念及其绘制 (180°)	18
12.1 根轨迹的定义	18
12.2 根轨迹方程	18
12.3 绘制根轨迹的基本法则	18

12.4 绘制根轨迹	19
12.4.1 例 1: 二阶系统的根轨迹	19
12.4.2 例 2: 三阶系统的根轨迹	20
12.5 绘制根轨迹的步骤总结	20
13 0° 根轨迹	21
13.1 0° 根轨迹的相角条件	21
13.2 0° 根轨迹与 180° 根轨迹的区别	21
14 参数根轨迹	21
14.1 参数根轨迹的定义	21
14.2 参数根轨迹的绘制方法	21
15 频率特性基本概念	22
15.1 频率特性的定义	22
15.2 频率特性的物理意义	22
15.3 频率特性的计算	22
15.3.1 计算步骤	22
15.3.2 例题	23
16 奈奎斯特图绘制	24
16.1 奈奎斯特图的基本概念	24
16.1.1 什么是奈奎斯特图	24
16.1.2 奈奎斯特图的对称性	24
16.2 奈奎斯特图的绘制步骤	24
16.2.1 最小相位系统的绘制流程	24
16.2.2 系统类型对起始点的影响	25
16.2.3 I 型系统的渐近线计算	25
16.3 典型环节的奈奎斯特图	26
16.3.1 积分环节	26
16.3.2 惯性环节	26
16.3.3 微分环节	26
16.3.4 比例环节	27
16.3.5 二阶振荡环节	27
16.4 0 型系统的奈奎斯特图	28
16.4.1 绘制流程	28
16.4.2 例题	28
16.5 I 型系统的奈奎斯特图	29
16.5.1 绘制流程	29

16.5.2 例题	29
16.6 非最小相位系统的奈奎斯特图	30
16.6.1 非最小相位系统的特点	30
16.6.2 相角的特殊处理	30
16.6.3 例题	30
16.7 奈奎斯特稳定性判据	31
16.7.1 基本概念	31
16.7.2 奈奎斯特稳定性判据	31
16.7.3 稳定裕度	32
16.7.4 绘制方法	32
17 伯德图绘制	32
17.1 伯德图的定义	32
17.2 典型环节的伯德图	33
17.2.1 比例环节 K	33
17.2.2 积分环节 $\frac{1}{s}$	34
17.2.3 微分环节 s	34
17.2.4 惯性环节 $\frac{1}{1+Ts}$	35
17.2.5 一阶微分环节 $1+Ts$	36
17.2.6 振荡环节 $\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$	36
17.3 伯德图的基本概念	39
17.3.1 对数幅频图的转折频率	39
17.3.2 低频段渐近线的确定	39
17.3.3 例题：伯德图绘制示例	40
17.4 伯德图的绘制方法	40
17.4.1 伯德图绘制规则速查表	40
17.4.2 详细对照：关键差异速记	41
17.4.3 转折频率处的修正规则	41
17.4.4 伯德图绘制六步法	42
17.4.5 幅值近似原则（关键技巧）.	43
17.4.6 基本步骤（原有内容）.	43
17.4.7 转折频率处的修正	45
17.4.8 六步法综合例题	45
17.4.9 剪切频率的计算	46
17.4.10 绘图示例	47
17.5 伯德图的应用	49
17.5.1 由伯德图确定传递函数	49
17.5.2 稳定性分析	50

17.5.3 性能指标估算	50
II 现代控制理论	51
18 状态空间表达式及其建立	51
18.1 状态空间的基本概念	51
18.2 状态空间表达式	51
18.3 状态空间表达式的建立方法	51
19 状态空间表达式求传递函数	52
19.1 传递函数矩阵	52
19.2 单输入单输出系统	52
20 线性变换	52
20.1 线性变换的定义	52
20.2 变换后的状态方程	52
21 线性控制系统状态空间表达式的求解	53
21.1 齐次状态方程的解	53
21.2 状态转移矩阵的性质	53
21.3 状态转移矩阵的计算方法	53
21.4 非齐次状态方程的解	53
22 线性控制系统的能控性和能观测性	54
22.1 能控性定义	54
22.2 能控性判据	54
22.3 能观测性定义	54
22.4 能观测性判据	54
23 能控、能观标准型及其实现	54
23.1 能控标准型	54
23.2 能观测标准型	55
24 系统的结构分解——能控、能观性分解	55
24.1 系统的结构分解	55
24.2 卡尔曼分解	55
25 约当型实现	55
25.1 约当标准型	55

26 稳定性与李雅普诺夫方法	56
26.1 李雅普诺夫稳定性定义	56
26.2 李雅普诺夫第一方法（线性化方法）	56
26.3 李雅普诺夫第二方法（直接方法）	56
26.4 线性系统的李雅普诺夫方程	57
27 极点配置——状态反馈	57
27.1 状态反馈	57
27.2 极点配置定理	57
27.3 极点配置的方法	57
28 状态观测器	57
28.1 状态观测器的概念	57
28.2 全维状态观测器	58
28.3 观测器的设计	58
28.4 分离定理	58

Part I

经典控制理论

1 自动控制系统的一般概念

1.1 控制系统的基本组成

控制系统一般由以下几个基本组成部分构成：

- 被控对象（控制对象）：需要被控制的系统或装置
- 控制器：对输入信号进行处理，产生控制信号
- 传感器：检测被控量的实际值
- 执行器：接收控制信号，对被控对象施加控制作用

1.2 控制系统的基本要求

1. 稳定性：系统在扰动作用下能够恢复到平衡状态
2. 准确性：系统的稳态误差要小
3. 快速性：系统的动态响应要快

2 自动控制系统的分类

2.1 按输入信号分类

- 恒值控制系统：输入信号为常值
- 随动控制系统：输入信号为时变信号
- 程序控制系统：输入信号按预定程序变化

2.2 按系统结构分类

- 开环控制系统：控制装置与被控对象之间没有反馈回路
- 闭环控制系统：控制装置与被控对象之间存在反馈回路

2.3 按系统特性分类

- 线性系统与非线性系统
- 定常系统与时变系统
- 连续系统与离散系统
- 单变量系统与多变量系统

3 拉普拉斯变换及其性质

3.1 拉普拉斯变换定义

函数 $f(t)$ 的拉普拉斯变换定义为：

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

其中 $s = \sigma + j\omega$ 为复变量。

3.2 基本函数的拉普拉斯变换

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1 \quad (1)$$

$$\mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{s} \quad (2)$$

$$\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2} \quad (3)$$

$$\mathcal{L}[e^{-at}] = \frac{1}{s+a} \quad (4)$$

$$\mathcal{L}[\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (5)$$

$$\mathcal{L}[\cos(\omega t)] = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad (6)$$

3.3 拉普拉斯变换的性质

- 线性性质： $\mathcal{L}[af_1(t) + bf_2(t)] = aF_1(s) + bF_2(s)$
- 时移性质： $\mathcal{L}[f(t - \tau)] = e^{-s\tau} F(s)$
- 频移性质： $\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = F(s + a)$
- 微分性质： $\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0^-)$

- 积分性质: $\mathcal{L}[\int_0^t f(\tau)d\tau] = \frac{F(s)}{s}$
- 初值定理: $f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$
- 终值定理: $f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$ (当极限存在时)

4 微分方程和传递函数

4.1 传递函数定义

在零初始条件下, 线性定常系统输出量的拉普拉斯变换与输入量的拉普拉斯变换之比称为传递函数:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{a_ns^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}$$

4.2 传递函数的性质

- 传递函数是复变量 s 的有理真分式
- 传递函数的系数完全由系统的结构和参数决定
- 传递函数与输入信号无关
- 传递函数可以表征系统的动态特性

5 结构图与信号流程图

5.1 结构图的基本元件

- 方块: 表示系统或环节的传递函数
- 信号线: 表示信号的传输方向
- 相加点: 表示信号的相加或相减
- 分支点: 表示信号的分叉

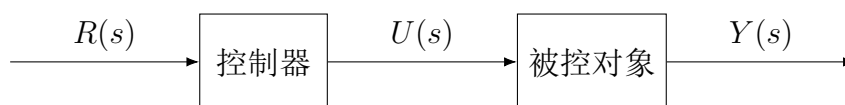


图 1: 开环控制系统示例

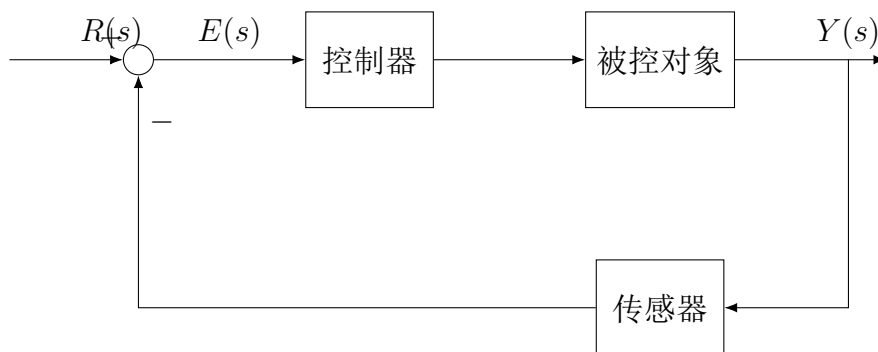


图 2: 闭环（反馈）控制系统示例

5.2 结构图的等效变换

- 串联: $G(s) = G_1(s)G_2(s)$
- 并联: $G(s) = G_1(s) + G_2(s)$
- 反馈: $G(s) = \frac{G_1(s)}{1 \pm G_1(s)H(s)}$

5.3 信号流图

信号流图是用有向线段和节点组成的图形，用来表示系统各变量之间的关系。

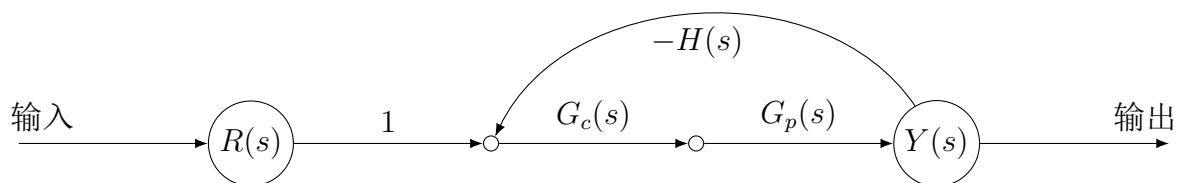


图 3: 包含控制器和传感器的信号流图示例

5.4 具体示例

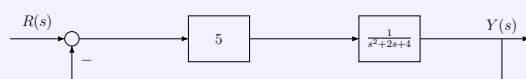
具体示例

结构图示例

系统开环传递函数为：

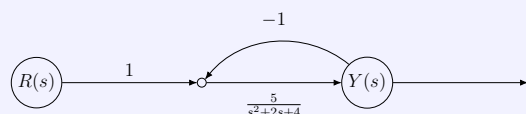
$$G(s) = \frac{5}{s^2 + 2s + 4}$$

反馈为单位负反馈 $H(s) = 1$ 。



信号流图示例

与上方系统等效的信号流图。前向通路增益为 $G(s)$ ，反馈回路增益为 $-H(s)$ 。



$$G(s) = \frac{5}{s^2 + 2s + 4} \quad H(s) = 1$$

6 梅森公式求传递函数

6.1 梅森增益公式

$$G(s) = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^N P_k \Delta_k$$

其中：

- P_k : 第 k 条前向通路的增益
- Δ : 信号流图的特征式
- Δ_k : 在信号流图中划去第 k 条前向通路后的特征式

6.2 特征式的计算

$$\Delta = 1 - \sum L_i + \sum L_i L_j - \sum L_i L_j L_k + \cdots$$

其中 L_i 为各个回路的增益，相互接触的回路不能同时出现在同一项中。

7 时域性能指标

7.1 典型输入信号

- 阶跃输入: $r(t) = A \cdot 1(t)$
- 斜坡输入: $r(t) = At$
- 抛物线输入: $r(t) = \frac{1}{2}At^2$
- 脉冲输入: $r(t) = A\delta(t)$

7.2 时域性能指标

对于单位阶跃响应, 主要性能指标包括:

- 上升时间 t_r : 响应从终值的 10
- 峰值时间 t_p : 响应达到第一个峰值的时间
- 调节时间 t_s : 响应进入并保持在终值 ± 2
- 超调量 $\sigma\% = \frac{h(t_p) - h(\infty)}{h(\infty)} \times 100\%$

8 一阶系统时域分析

8.1 一阶系统的传递函数

$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1}$$

其中 K 为增益, T 为时间常数。

8.2 一阶系统的单位阶跃响应

$$h(t) = K(1 - e^{-t/T})$$

8.3 一阶系统的性能指标

- 调节时间: $t_s = 3T$ (2%误差带) 或 $t_s = 4T$ (5%误差带)
- 无超调
- 上升时间: $t_r = 2.2T$

9 二阶系统时域分析

9.1 二阶系统的标准形式

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

其中：

- ω_n ：无阻尼自然频率
- ζ ：阻尼比

9.2 二阶系统的特征根

特征方程： $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$

特征根： $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$

9.3 二阶系统的分类

- $\zeta > 1$ ：过阻尼系统
- $\zeta = 1$ ：临界阻尼系统
- $0 < \zeta < 1$ ：欠阻尼系统
- $\zeta = 0$ ：无阻尼系统
- $\zeta < 0$ ：负阻尼系统（不稳定）

9.4 欠阻尼二阶系统的性能指标

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (7)$$

$$\sigma_{\%} = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\% \quad (8)$$

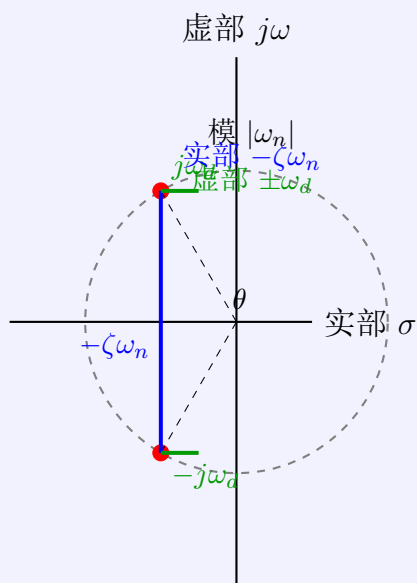
$$t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n} (2\% \text{误差带}) \quad (9)$$

9.5 欠阻尼二阶系统的 s 平面分析

9.5.1 抽象参数表示

特征根为 $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ ，在 s 平面上的几何意义如下：

欠阻尼二阶系统的特征根分布



参数几何意义：

- 模 $|\omega_n| \Rightarrow$ 原点到特征根距离 \Rightarrow 自然频率大小
- 实部 $-\zeta\omega_n \Rightarrow$ 衰减系数 \Rightarrow 衰减快慢
- 虚部 $\pm\omega_d \Rightarrow$ 振荡频率 \Rightarrow 振荡速度
- 角度 $\theta \Rightarrow \cos \theta = \zeta \Rightarrow$ 由阻尼比确定

9.5.2 具体示例: $G(s) = \frac{25}{s^2 + 5s + 25}$

具体例：欠阻尼二阶系统 $G(s)$

参数识别:

$\omega_n = 5 \text{ rad/s}$ (自然频率)

$\zeta = 0.5$ (阻尼比)

$\omega_d = 4.33 \text{ rad/s}$ (振荡频率)

性能指标:

$t_p = 0.725 \text{ s}$ (峰值时刻)

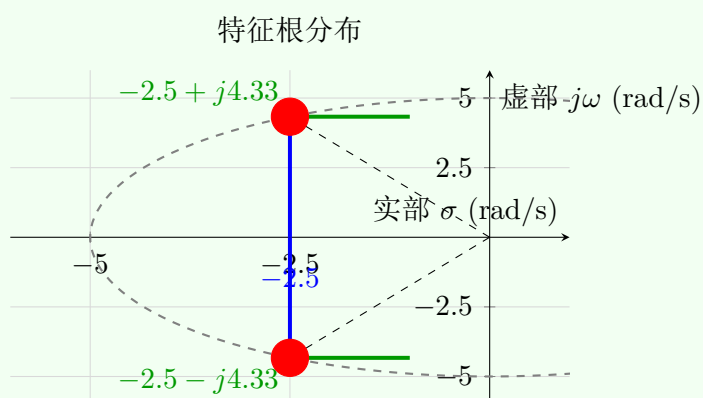
$\sigma\% = 16.3\%$ (超调量)

$t_s = 1.2 \text{ s}$ (稳定时间)

特征根位置:

$$s_{1,2} = -2.5 \pm j4.33$$

-2.5: 衰减速率 4.33: 振荡速度



10 稳定性分析及劳斯稳定判据

10.1 系统稳定性的定义

线性系统稳定的充分必要条件是：系统特征方程的所有根都具有负实部，即所有特征根都位于 s 平面的左半部分。

10.2 劳斯稳定判据

对于特征方程:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

构造劳斯表:

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	\cdots
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	\cdots
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	\cdots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots

其中: $b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$

劳斯稳定判据: 系统稳定的充分必要条件是劳斯表第一列的元素全部为正。

10.3 特殊情况的处理

- 第一列出现零元素：用小正数 ε 代替
- 某一行全为零：用前一行的辅助方程的导数代替

10.3.1 情况一：第一列出现零元素

当劳斯表第一列的某个元素为零，但该行其他元素不全为零时，用一个很小的正数 ε 代替该零元素，然后继续计算。最后根据 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ 的趋势来判断符号。

示例：系统的特征方程为 $s^4 + s^3 + 2s^2 + 2s + 3 = 0$ 。

劳斯表：

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 2 & 3 \\ s^3 & 1 & 2 & \\ s^2 & 0 \rightarrow \varepsilon & 3 & \\ s^1 & \frac{2\varepsilon-3}{\varepsilon} & & \\ s^0 & 3 & & \end{array}$$

当 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ 时，第一列的元素为 $1, 1, \varepsilon, \frac{2\varepsilon-3}{\varepsilon} (\approx -\infty), 3$ 。

由于第一列出现了两次符号变化（从 ε 到负无穷，再从负无穷到 3），因此系统不稳定，且在右半 s 平面有两个根。

10.3.2 情况二：某一行全为零

当劳斯表中出现某一行所有元素都为零时，表明系统存在关于原点对称的根（如纯虚根、大小相等符号相反的实根等）。

处理方法是：

1. 利用全零行的上一行构造辅助多项式 $A(s)$ 。
2. 对辅助多项式求导， $\frac{dA(s)}{ds}$ 。
3. 用求导后多项式的系数替换全零行，继续计算。

示例：系统的特征方程为 $s^3 + s^2 + s + 1 = 0$ 。

劳斯表：

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 1 \\ s^2 & 1 & 1 \\ s^1 & 0 & 0 \end{array}$$

s^1 行为全零行。利用其上一行（ s^2 行）构造辅助多项式：

$$A(s) = 1 \cdot s^2 + 1 \cdot s^0 = s^2 + 1$$

求导：

$$\frac{dA(s)}{ds} = 2s$$

用导数的系数 $[2, 0]$ 替换 s^1 行，得到新的劳斯表：

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 1 \\ s^2 & 1 & 1 \\ s^1 & 2 & 0 \\ s^0 & 1 & \end{array}$$

第一列元素 $[1, 1, 2, 1]$ 全部为正，说明在劳斯表剩下的部分没有符号变化，系统没有位于右半平面的根。全零行的出现说明系统存在关于原点对称的根，这些根由辅助方程 $A(s) = s^2 + 1 = 0$ 给出，即 $s = \pm j$ 。因此，系统是临界稳定的。

11 线性定常系统的稳态误差计算

11.1 误差信号和误差传递函数

误差信号： $E(s) = R(s) - H(s)Y(s)$

误差传递函数： $\Phi_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+G(s)H(s)}$

11.2 系统类型

根据开环传递函数 $G(s)H(s)$ 在原点处的极点个数确定系统类型：

$$G(s)H(s) = \frac{K \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{s^\nu \prod_{j=1}^n (s - p_j)}$$

ν 为系统的型别。

11.3 稳态误差系数

- 位置误差系数： $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)$
- 速度误差系数： $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G(s)H(s)$
- 加速度误差系数： $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \cdot G(s)H(s)$

11.4 稳态误差

- 单位阶跃输入： $e_{ss} = \frac{1}{1+K_p}$
- 单位斜坡输入： $e_{ss} = \frac{1}{K_v}$
- 单位抛物线输入： $e_{ss} = \frac{1}{K_a}$

12 根轨迹基本概念及其绘制 (180°)

12.1 根轨迹的定义

当系统中某一参数从零变化到无穷大时，闭环系统特征方程的根在 s 平面上的运动轨迹称为根轨迹。

12.2 根轨迹方程

闭环特征方程： $1 + KG(s)H(s) = 0$

根轨迹方程的两个条件：

- 幅值条件： $|G(s)H(s)| = \frac{1}{K}$
- 相角条件： $\angle G(s)H(s) = \pm 180^\circ(2k + 1), k = 0, 1, 2, \dots$

12.3 绘制根轨迹的基本法则

1. 根轨迹的分支数等于开环极点数 n 和开环零点数 m 中的较大者
2. 根轨迹起始于开环极点，终止于开环零点（有限零点或无限远零点）
3. 根轨迹关于实轴对称
4. 实轴上的根轨迹：实轴上某点右侧开环实零点和实极点总数为奇数
5. 根轨迹的渐近线：

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n - m} \quad (10)$$

$$\phi_a = \frac{(2k + 1)180^\circ}{n - m}, \quad k = 0, 1, \dots, n - m - 1 \quad (11)$$

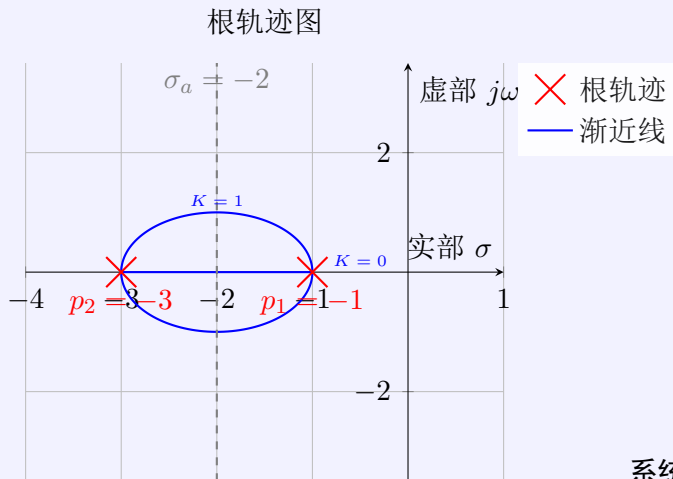
6. 分离点的计算： $\frac{d}{ds}[G(s)H(s)] = 0$

7. 与虚轴的交点：利用劳斯判据

12.4 绘制根轨迹

12.4.1 例 1：二阶系统的根轨迹

例 1：二阶系统



系统信息：

- 开环传递函数： $G(s)H(s) = \frac{K}{(s+1)(s+3)}$
- 极点： $p_1 = -1$, $p_2 = -3$
- 零点：无

根轨迹特征：

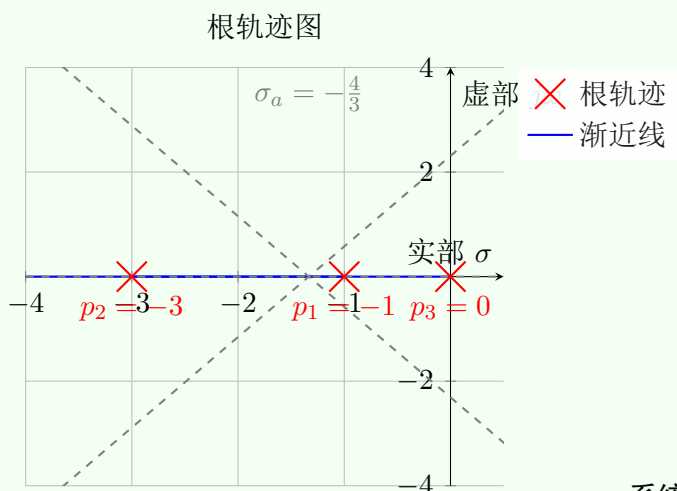
- 渐近线中心： $\sigma_a = \frac{-1 + (-3)}{2} = -2$
- 根轨迹类型：实轴线段 + 圆形轨迹
- 分支数：2

分析：

- $K = 0$ 时，根在开环极点处
- 实轴部分： $[-3, -1]$ 区间
- 复平面部分形成圆形
- 系统始终稳定

12.4.2 例 2：三阶系统的根轨迹

例 2：三阶系统



系统信息：

- 开环传递函数： $G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+3)}$
- 极点： $p_1 = -1$, $p_2 = -3$, $p_3 = 0$
- 零点：无

根轨迹特征：

- 极点数 $n = 3$, 零点个数 $m = 0$
- 分支数：3
- 渐近线中心： $\sigma_a = -\frac{4}{3}$

渐近线角度：

$$\phi_a = \frac{(2k+1) \times 180^\circ}{3}$$

- $60^\circ, 180^\circ, 300^\circ$

稳定性：

- 存在从虚轴穿过的点
- 系统有临界增益

12.5 绘制根轨迹的步骤总结

1. 确定开环极点和零点：在复平面上标记（极点用 \times 表示，零点用 \circ 表示）

2. 绘制实轴部分：满足 相角条件 的实轴线段

- 实轴上某点右侧的开环零点和极点总数为奇数时，该点在根轨迹上

3. 绘制渐近线：

$$\sigma_a = \frac{\sum p_i - \sum z_j}{n - m}$$

$$\phi_a = \frac{(2k + 1) \times 180^\circ}{n - m}, \quad k = 0, 1, \dots, n - m - 1$$

4. 计算分离点和汇合点：解方程 $\frac{d}{ds}[G(s)H(s)] = 0$

5. 确定与虚轴的交点：使用劳斯判据或代入 $s = j\omega$

6. 绘制完整轨迹：连接各部分形成光滑曲线

13 0° 根轨迹

13.1 0° 根轨迹的相角条件

$$\angle G(s)H(s) = \pm 360^\circ k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

13.2 0° 根轨迹与 180° 根轨迹的区别

- 实轴上的根轨迹：实轴上某点右侧开环实零点和实极点总数为偶数
- 渐近线角度： $\phi_a = \frac{360^\circ k}{n - m}$

14 参数根轨迹

14.1 参数根轨迹的定义

当系统中某一参数变化时，系统特征方程根的变化轨迹。

14.2 参数根轨迹的绘制方法

1. 将特征方程整理成 $1 + K_h H(s) = 0$ 的形式
2. 将参数 K_h 视为可变增益
3. 按照常规根轨迹绘制方法进行

15 频率特性基本概念

15.1 频率特性的定义

对于一个稳定的线性时不变系统，当输入一个正弦信号 $r(t) = A_{\text{in}} \sin(\omega t)$ 时，其稳态输出 $y_{\text{ss}}(t)$ 必然是同频率的正弦信号，形式为：

$$y_{\text{ss}}(t) = A_{\text{out}} \sin(\omega t + \phi)$$

线性定常系统的频率特性是指系统稳态输出与输入的复数比：

$$G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega} = |G(j\omega)|e^{j\phi(\omega)}$$

其中：

- 幅频特性 $A(\omega)$ ：输出响应的稳态分量幅值与输入信号幅值之比。

$$A(\omega) = \frac{A_{\text{out}}}{A_{\text{in}}} = |G(j\omega)|$$

- 相频特性 $\phi(\omega)$ ：输出响应的稳态分量与输入信号的相位之差。

$$\phi(\omega) = \angle G(j\omega)$$

幅频特性 $A(\omega)$ 和相频特性 $\phi(\omega)$ 统称为频率特性。

15.2 频率特性的物理意义

- 幅频特性表示不同频率正弦输入信号通过系统后幅值的变化
- 相频特性表示不同频率正弦输入信号通过系统后相位的变化

15.3 频率特性的计算

15.3.1 计算步骤

1. 将传递函数 $G(s)$ 中的 s 替换为 $j\omega$ ，得到 $G(j\omega)$
2. 计算幅频特性： $A(\omega) = |G(j\omega)|$
3. 计算相频特性： $\phi(\omega) = \angle G(j\omega)$

15.3.2 例题

例 1: 已知传递函数为 $G(s) = \frac{4(s+1)}{s(s+2)}$, 写出该传递函数的频率特性。

解:

1. 将 s 替换为 $j\omega$:

$$G(j\omega) = \frac{4(j\omega + 1)}{j\omega(j\omega + 2)}$$

2. 计算幅频特性 $A(\omega)$:

$$A(\omega) = |G(j\omega)| = \frac{|4(1 + j\omega)|}{|j\omega||2 + j\omega|} = \frac{4\sqrt{1^2 + \omega^2}}{\omega\sqrt{2^2 + \omega^2}} = \frac{4\sqrt{1 + \omega^2}}{\omega\sqrt{4 + \omega^2}}$$

3. 计算相频特性 $\phi(\omega)$:

$$\begin{aligned}\phi(\omega) &= \angle G(j\omega) = \angle 4 + \angle(1 + j\omega) - \angle(j\omega) - \angle(2 + j\omega) \\ &= 0^\circ + \arctan(\omega) - 90^\circ - \arctan\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ &= \arctan(\omega) - \arctan\left(\frac{\omega}{2}\right) - 90^\circ\end{aligned}$$

例 2: 某单位负反馈的开环传递函数为 $G(s) = \frac{4}{s(s+2)}$ 。若输入信号 $r(t) = 2\sin(2t)$, 试求系统的稳态输出。

解:

1. 求闭环传递函数 $\Phi(s)$:

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{\frac{4}{s(s+2)}}{1 + \frac{4}{s(s+2)}} = \frac{4}{s^2 + 2s + 4}$$

2. 分析输入信号: 幅值 $A = 2$, 角频率 $\omega = 2 \text{ rad/s}$

3. 计算闭环系统在 $\omega = 2$ 处的频率响应 $\Phi(j2)$:

$$\Phi(j2) = \frac{4}{(j2)^2 + 2(j2) + 4} = \frac{4}{-4 + j4 + 4} = \frac{4}{j4} = -j$$

4. 计算幅值和相角:

$$\begin{aligned}|\Phi(j2)| &= |-j| = 1 \\ \angle\Phi(j2) &= \angle(-j) = -90^\circ\end{aligned}$$

5. 写出稳态输出 $c_{ss}(t)$:

$$\begin{aligned}c_{ss}(t) &= A \cdot |\Phi(j2)| \cdot \sin(\omega t + \angle\Phi(j2)) \\ &= 2 \cdot 1 \cdot \sin(2t - 90^\circ) \\ &= 2\sin(2t - 90^\circ) = -2\cos(2t)\end{aligned}$$

16 奈奎斯特图绘制

16.1 奈奎斯特图的基本概念

16.1.1 什么是奈奎斯特图

奈奎斯特图 (Nyquist Plot) 是开环频率响应 $G(j\omega)$ 在复平面上的图形表示。

- **定义:** 以 $G(j\omega)$ 的实部为横坐标, 虚部为纵坐标, 当 ω 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 变化时 $G(j\omega)$ 在复平面上的轨迹
- **向量形式:** $G(j\omega) = A(\omega)\angle\phi(\omega)$, 其中 $A(\omega)$ 是幅值, $\phi(\omega)$ 是相角
- **复数形式:** $G(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$, 其中 $P(\omega)$ 是实部, $Q(\omega)$ 是虚部

16.1.2 奈奎斯特图的对称性

- 当 ω 从 0 变化到 $+\infty$ 时, 得到的曲线为**实线部分**
- 当 ω 从 0 变化到 $-\infty$ 时, 对应的轨迹与实线部分**关于实轴对称**
- 通常只需绘制 $\omega: 0 \rightarrow +\infty$ 的部分, 然后关于实轴做镜像

16.2 奈奎斯特图的绘制步骤

16.2.1 最小相位系统的绘制流程

最小相位系统是指开环传递函数在 s 平面右半部分没有零点和极点的系统。

通用绘制步骤:

1. 将 $G(s)$ 中的 s 全部替换为 $j\omega$, 得到 $G(j\omega)$
2. 写出幅值表达式 $A(\omega) = |G(j\omega)|$ 和相角表达式 $\phi(\omega) = \angle G(j\omega)$
3. 分析关键频率点:
 - $\omega = 0$: 起点幅值和相角
 - $\omega \rightarrow \infty$: 终点幅值和相角
4. 计算坐标轴交点 (可选但有助于精确绘图):
 - 令虚部 $\text{Im}[G(j\omega)] = 0$, 求与实轴交点
 - 令实部 $\text{Re}[G(j\omega)] = 0$, 求与虚轴交点
 - 或用相角法: $\phi(\omega) = k \cdot 90^\circ$ (k 为整数)

5. 根据幅值和相角的变化趋势，绘制曲线
6. 对于 I 型及更高型系统，补全虚线部分（无穷大圆弧）
7. 最后做实轴对称，得到完整的奈奎斯特图

16.2.2 系统类型对起始点的影响

• 0 型系统:

- 起点: $(K, 0)$ (正实轴)
- 终点: 原点 $(0, 0)$
- 无渐近线

• I 型系统:

- $\omega = 0$: 幅值 ∞ , 相角 0° (仅看非积分项)
- $\omega = 0^+$: 幅值 ∞ , 相角 -90°
- 有垂直的低频渐近线
- 终点: 原点 $(0, 0)$

• II 型系统:

- 起点: 负实轴无穷远处, 相角 -180°
- 终点: 原点 $(0, 0)$
- 有无穷大圆弧补全虚线部分

16.2.3 I 型系统的渐近线计算

对于标准形式 $G(s) = K \frac{\prod(T_{zi}s+1)}{\prod(T_{pi}s+1) \cdot s}$, 当 $\omega \rightarrow 0^+$ 时, 对应的垂直渐近线为:

$$x = K \left(\sum T_{zi} - \sum T_{pi} \right)$$

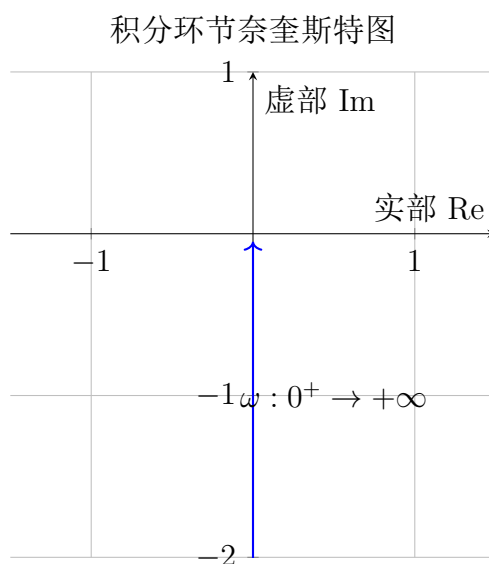
其中:

- $\sum T_{zi}$: 分子所有一阶项的时间常数之和
- $\sum T_{pi}$: 分母所有一阶项的时间常数之和 (不含积分项)

16.3 典型环节的奈奎斯特图

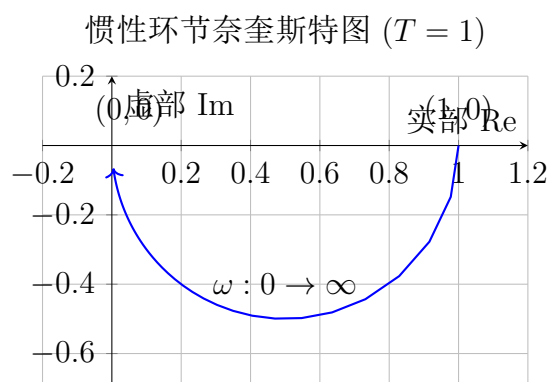
16.3.1 积分环节

积分环节的传递函数为 $G(s) = \frac{1}{s}$ ，其频率特性为 $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = -\frac{j}{\omega}$ 。当 ω 从 0^+ 变化到 $+\infty$ 时，奈奎斯特图是沿着负虚轴从 $-\infty$ 到原点的一条直线。



16.3.2 惯性环节

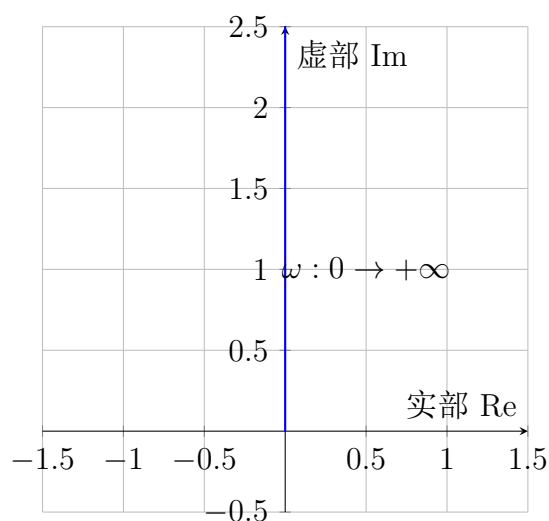
惯性环节的传递函数为 $G(s) = \frac{1}{Ts+1}$ ，其频率特性为 $G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T}$ 。奈奎斯特图是一个起点为 $(1, 0)$ ($\omega = 0$)，终点为原点 ($\omega = \infty$) 的半圆。



16.3.3 微分环节

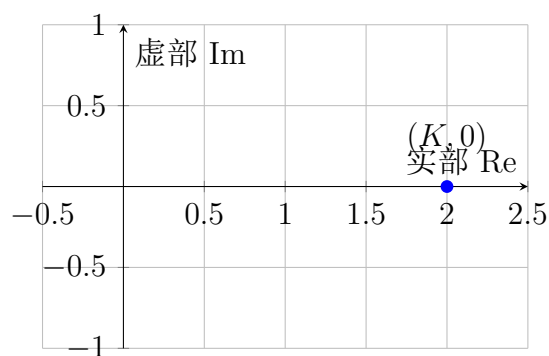
微分环节的传递函数为 $G(s) = s$ ，其频率特性为 $G(j\omega) = j\omega$ 。奈奎斯特图是沿着正虚轴从原点到 $+\infty$ 的一条直线。

微分环节奈奎斯特图



16.3.4 比例环节

比例环节的传递函数为 $G(s) = K$ ($K > 0$)，其频率特性为 $G(j\omega) = K$ 。奈奎斯特图是实轴上从原点到 K 的一个点。

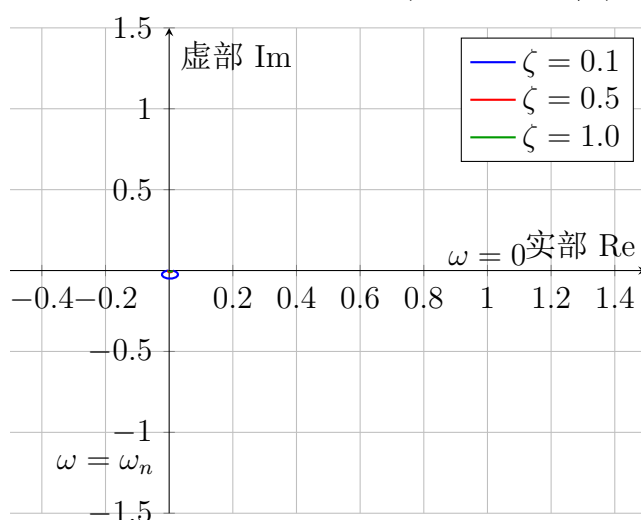
比例环节奈奎斯特图 ($K = 2$)

16.3.5 二阶振荡环节

二阶振荡环节的传递函数为 $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$ ，其频率特性为：

$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 - \omega^2 + 2j\omega\zeta\omega_n}$$

奈奎斯特图为一圆弧或更复杂的曲线，形状随阻尼比 ζ 变化。

二阶振荡环节奈奎斯特图 ($\omega_n = 10 \text{ rad/s}$)

16.4 0 型系统的奈奎斯特图

16.4.1 绘制流程

1. 将 $G(s)$ 中的 s 换成 $j\omega$
2. 写出幅值 $A(\omega)$ 和相角 $\phi(\omega)$ 表达式
3. 分析起点 ($\omega = 0$) 和终点 ($\omega = \infty$)
4. 根据相角变化趋势绘制曲线

16.4.2 例题

例：绘制 $G(s)H(s) = \frac{6}{s^2+3s+2}$ 的幅相特性曲线。

解：

1. 变换与分解：

$$G(s)H(s) = \frac{6}{(s+1)(s+2)} \Rightarrow G(j\omega)H(j\omega) = \frac{6}{(1+j\omega)(2+j\omega)}$$

2. 幅相表达式：

$$A(\omega) = \frac{6}{\sqrt{1+\omega^2}\sqrt{4+\omega^2}}$$

$$\phi(\omega) = -\arctan(\omega) - \arctan\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

3. 起点/终点分析：

$$\text{起点 } (\omega = 0) : A(0) = \frac{6}{1 \cdot 2} = 3, \quad \phi(0) = 0^\circ$$

$$\text{终点 } (\omega = \infty) : A(\infty) = 0, \quad \phi(\infty) = -90^\circ - 90^\circ = -180^\circ$$

4. 趋势与绘制:

- 起点为 $(3, 0)$, 终点为原点 $(0, 0)$
- 相角从 0° 单调减小到 -180°
- 曲线从起点出发, 顺时针旋转, 经第四象限, 从负实轴方向趋近于原点

16.5 I 型系统的奈奎斯特图

16.5.1 绘制流程

1. 将 $G(s)$ 中的 s 替换为 $j\omega$
2. 写出幅值 $A(\omega)$ 和相角 $\phi(\omega)$ 表达式
3. 【特殊】分析 $\omega = 0$ 和 $\omega = 0^+$ 时的幅值和相角
4. 【特殊】计算垂直渐近线 (仅 I 型系统有)
5. 根据趋势绘制实线部分
6. 补全虚线部分 (从 $\omega = 0$ 的方向经过无穷大圆弧连到 $\omega = 0^+$ 的方向)

16.5.2 例题

例: 绘制 $G(s)H(s) = \frac{250}{s(s+5)(s+15)}$ 的幅相特性曲线。

解:

1. 变换:

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{250}{j\omega(j\omega + 5)(j\omega + 15)}$$

2. 幅相表达式:

$$A(\omega) = \frac{250}{\omega\sqrt{\omega^2 + 25}\sqrt{\omega^2 + 225}}$$

$$\phi(\omega) = -90^\circ - \arctan\left(\frac{\omega}{5}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{15}\right)$$

3. 关键频率点:

$$\omega = 0: \quad A(0) = \infty, \quad \phi(0) = 0^\circ \text{ (虚线用)}$$

$$\omega = 0^+: \quad A(0^+) = \infty, \quad \phi(0^+) = -90^\circ \text{ (实线起点)}$$

$$\omega = \infty: \quad A(\infty) = 0, \quad \phi(\infty) = -270^\circ \text{ (或 } +90^\circ)$$

4. 渐近线计算:

- 化为标准型: $G(s) = \frac{250}{s \cdot 5(0.2s+1) \cdot 15(s/15+1)}$
- 提取参数: $K = \frac{10}{3}$, $\sum T_z = 0$, $\sum T_p = 0.2 + \frac{1}{15}$
- 渐近线位置: $x = \frac{10}{3}(0 - 0.2 - 1/15) = -\frac{8}{9} \approx -0.89$

5. 趋势与绘制:

- 实线部分从负虚轴无穷远处开始 ($\phi = -90^\circ$)
- 逼近左侧垂直渐近线 $x \approx -0.89$
- 相角持续减小至 -270° , 因此会穿越负实轴
- 终点为原点
- 虚线部分是从 $\phi = 0^\circ$ 到 $\phi = -90^\circ$ 的无穷大顺时针圆弧, 连接 $\omega = 0$ 和 $\omega = 0^+$

16.6 非最小相位系统的奈奎斯特图

16.6.1 非最小相位系统的特点

非最小相位系统在右半平面有零点或极点 (如 $(s - a)$ 或 $(T_z s - 1)$ 的项), 这会深刻影响相角计算。

16.6.2 相角的特殊处理

对于右半平面的项, 例如 $(s - a)$ ($a > 0$), 其相角为:

$$\angle(j\omega - a) = \angle(-a + j\omega) = 180^\circ - \arctan\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

结论:

- 传递函数中每出现一个分母的非最小相位项, 总相角就要减去 $(180^\circ - \arctan(\dots))$
- 每出现一个分子的非最小相位项, 总相角就要加上 $(180^\circ - \arctan(\dots))$

16.6.3 例题

例: 绘制非最小相位 I 型系统 $G(s)H(s) = \frac{10}{s(s-1)}$ 的幅相特性曲线。

解:

1. 变换:

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{10}{j\omega(j\omega - 1)}$$

2. 幅相表达式:

$$\begin{aligned}
 A(\omega) &= \frac{10}{\omega\sqrt{\omega^2 + 1}} \\
 \phi(\omega) &= -\angle(j\omega) - \angle(j\omega - 1) \\
 &= -90^\circ - (180^\circ - \arctan(\omega)) \\
 &= \arctan(\omega) - 270^\circ
 \end{aligned}$$

3. 关键频率点:

$$\begin{aligned}
 \omega = 0: \quad A(0) &= \infty, \quad \phi(0) = -180^\circ \text{ (分母 } s(s-1) \rightarrow s(-1)) \\
 \omega = 0^+: \quad A(0^+) &= \infty, \quad \phi(0^+) = \arctan(0) - 270^\circ = -270^\circ \text{ (或 } +90^\circ) \\
 \omega = \infty: \quad A(\infty) &= 0, \quad \phi(\infty) = 90^\circ - 270^\circ = -180^\circ
 \end{aligned}$$

4. 渐近线计算:

- $G(s) = \frac{-10}{s(1-s)}$, 参数为 $K = -10$, $T_p = -1$
- 渐近线: $x = (-10)(0 - (-1)) = -10$

5. 趋势与绘制:

- 实线起点在正虚轴无穷远处 ($\phi = -270^\circ$), 不同于最小相位系统
- 相角从 -270° 增大到 -180°
- 终点为原点
- 虚线部分是从 $\phi = -180^\circ$ 到 $\phi = -270^\circ$ 的无穷大顺时针圆弧

16.7 奈奎斯特稳定性判据

16.7.1 基本概念

对于开环传递函数 $G(s)H(s)$, 其中 $H(s)$ 通常为反馈传感器传递函数:

- 临界点: 奈奎斯特图中的点 $(-1, 0)$
- 包围: 奈奎斯特曲线绕临界点的圈数

16.7.2 奈奎斯特稳定性判据

对于闭环系统, 设开环传递函数为 $G(s)H(s)$, 其:

- 右半平面极点数为 P
- 奈奎斯特曲线逆时针绕 $(-1, 0)$ 点的圈数为 N

则闭环系统右半平面极点数为：

$$Z = P + N$$

稳定条件：系统稳定 $\Leftrightarrow Z = 0$ ，即 $N = -P$

特别地，当开环系统稳定（ $P = 0$ ）时：

- 稳定条件： $N = 0$ ，即奈奎斯特曲线不包围 $(-1, 0)$ 点
- 边界稳定：曲线经过 $(-1, 0)$ 点
- 不稳定：曲线包围 $(-1, 0)$ 点

16.7.3 稳定裕度

增益裕度（Gain Margin, GM） 从 $(-1, 0)$ 点到奈奎斯特曲线与负实轴的交点距离的倒数。若交点坐标为 $(-a, 0)$ ，则 $GM = \frac{1}{a}$ 或 $GM(\text{dB}) = 20 \lg \frac{1}{a}$

相位裕度（Phase Margin, PM） 奈奎斯特曲线与单位圆的交点对应的相位角与 -180° 的夹角。

16.7.4 绘制方法

1. 建立 $G(j\omega)$ 的实部和虚部表达式
2. 选择足够多的频率点 ω （从 0 到 $+\infty$ ）
3. 计算每个频率点对应的 $\text{Re}[G(j\omega)]$ 和 $\text{Im}[G(j\omega)]$
4. 在复平面上绘制这些点形成的轨迹
5. 检查轨迹是否包围 $(-1, 0)$ 点

17 伯德图绘制

17.1 伯德图的定义

伯德图（Bode Plot）是由亨德里克·韦德·伯德（Hendrik Wade Bode）提出的频率响应图示方法，由两个图组成：

- **幅频特性图（Magnitude Plot）：** $L(\omega) = 20 \lg |G(j\omega)| \text{ dB}$ vs $\lg \omega$
 - 纵轴：对数幅值（dB）
 - 横轴：对数频率（ $\lg \omega$ ）

- 相频特性图 (Phase Plot): $\phi(\omega) = \angle G(j\omega)$ vs $\lg \omega$

- 纵轴: 相位角 (度或弧度)
- 横轴: 对数频率 ($\lg \omega$)

伯德图的优点:

1. 频率范围广, 可表示从极低频到极高频的特性
2. 不同环节的伯德图可以直接相加 (叠加原理)
3. 可用渐近线逼近, 绘制简便
4. 便于分析系统的稳定性和性能指标

17.2 典型环节的伯德图

17.2.1 比例环节 K

传递函数: $G(s) = K$

频率响应: $G(j\omega) = K$

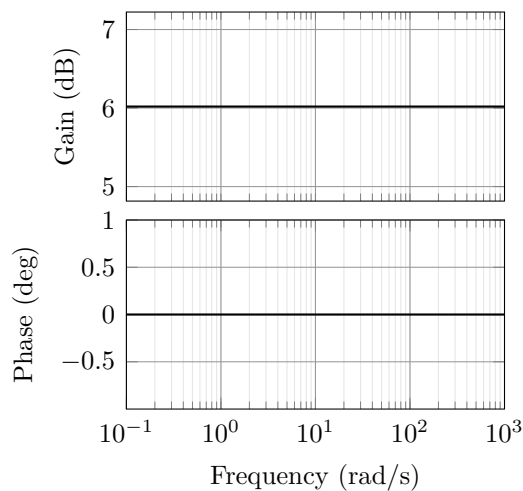
幅频特性:

$$L(\omega) = 20 \lg K \text{ dB (水平线)}$$

相频特性:

$$\phi(\omega) = \begin{cases} 0^\circ & K > 0 \\ 180^\circ & K < 0 \end{cases}$$

伯德图示例: $G(s) = 2$



17.2.2 积分环节 $\frac{1}{s}$

传递函数: $G(s) = \frac{1}{s}$

频率响应: $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$

幅频特性:

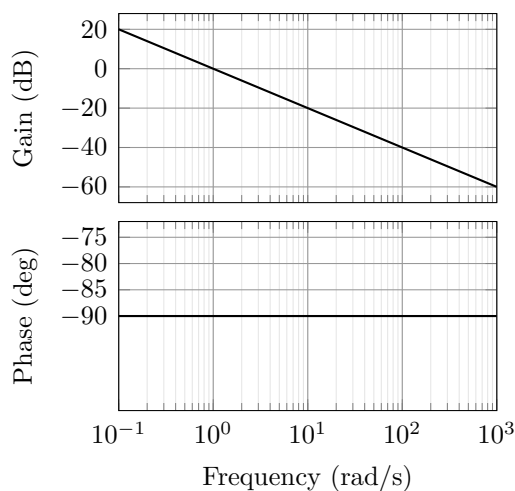
$$L(\omega) = 20 \lg \frac{1}{\omega} = -20 \lg \omega \text{ dB}$$

- 斜率: $-20 \text{ dB/十倍频 (decade)}$
- 当 $\omega = 1 \text{ rad/s}$ 时, $L(\omega) = 0 \text{ dB}$
- 当 ω 增大 10 倍时, $L(\omega)$ 下降 20 dB

相频特性:

$$\phi(\omega) = -90^\circ (\text{恒定})$$

伯德图示例: $G(s) = \frac{1}{s}$

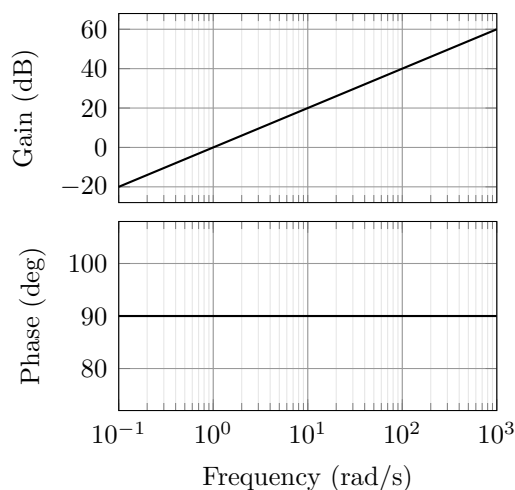


17.2.3 微分环节 s

与积分环节对称:

- $L(\omega) = 20 \lg \omega \text{ dB}$ (斜率 $+20 \text{ dB/十倍频}$)
- $\phi(\omega) = 90^\circ$

伯德图示例: $G(s) = s$



17.2.4 惯性环节 $\frac{1}{1+Ts}$

传递函数: $G(s) = \frac{1}{1+Ts}$

频率响应: $G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T}$

转折频率 (Corner Frequency): $\omega_c = \frac{1}{T}$ rad/s

幅频特性:

$$L(\omega) = 20 \lg |G(j\omega)| = -20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T^2}$$

渐近线:

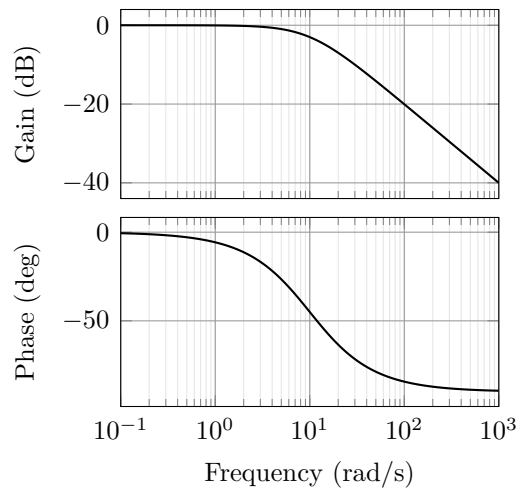
- 当 $\omega \ll \omega_c$: $L(\omega) \approx 0$ dB
- 当 $\omega \gg \omega_c$: $L(\omega) \approx -20 \lg(\omega T)$ dB (斜率 -20 dB/十倍频)
- 转折点 $\omega = \omega_c$: 精确值 $L(\omega_c) = -3$ dB

相频特性:

$$\phi(\omega) = -\arctan(\omega T)$$

- $\omega = 0.1\omega_c$: $\phi \approx -6^\circ$
- $\omega = \omega_c$: $\phi = -45^\circ$
- $\omega = 10\omega_c$: $\phi \approx -84^\circ$
- $\omega \rightarrow \infty$: $\phi \rightarrow -90^\circ$

伯德图示例: $G(s) = \frac{1}{1+0.1s}$ ($\omega_c = 10$ rad/s)

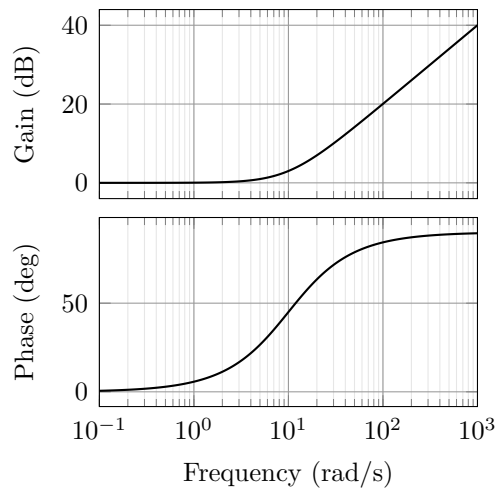


17.2.5 一阶微分环节 $1 + Ts$

与惯性环节对称：

- 幅频特性：低频 0 dB，高频斜率 +20 dB/十倍频
- 相频特性： $\phi(\omega) = \arctan(\omega T)$, $\phi(\omega_c) = 45^\circ$

伯德图示例： $G(s) = 1 + 0.1s$ ($\omega_c = 10 \text{ rad/s}$)



17.2.6 振荡环节 $\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$

传递函数标准形式：

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

其中：

- ω_n ：无阻尼自然频率

- ζ : 阻尼比 ($0 < \zeta < 1$)

频率响应:

$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 - \omega^2 + 2j\omega\zeta\omega_n}$$

幅频特性:

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}}$$

渐近线:

- 当 $\omega \ll \omega_n$: $L(\omega) \approx 0$ dB
- 当 $\omega \gg \omega_n$: $L(\omega) \approx -40 \lg(\omega/\omega_n)$ dB (斜率 -40 dB/十倍频)
- 转折频率: $\omega_c = \omega_n$

谐振峰值 (仅当 $\zeta < 0.707$ 时):

- 谐振频率: $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$
- 谐振峰值: $M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$
- 当 ζ 很小时, 谐振峰值很大

转折频率处的精确值:

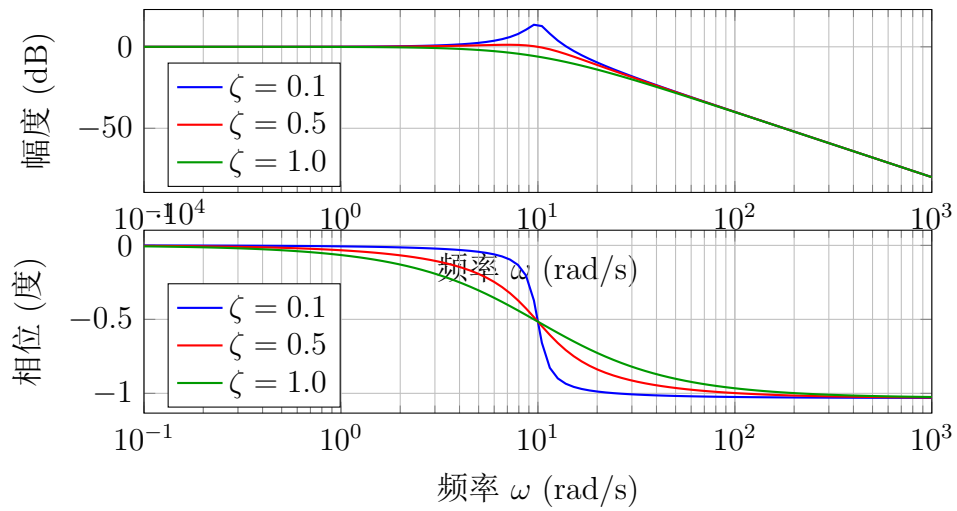
- $L(\omega_n) = -20 \lg(2\zeta)$ dB
- 当 $\zeta = 0.707$ 时, $L(\omega_n) = -3$ dB (无谐振)
- 当 $\zeta < 0.707$ 时, $L(\omega_n) > -3$ dB (有谐振)
- 当 $\zeta > 0.707$ 时, $L(\omega_n) < -3$ dB (过阻尼)

相频特性:

$$\phi(\omega) = -\arctan \frac{2\zeta\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2}$$

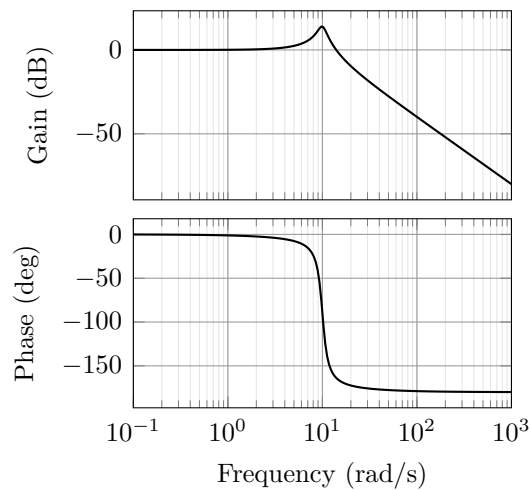
- $\omega = \omega_n$: $\phi = -90^\circ$ (与 ζ 无关)
- $\omega \rightarrow 0$: $\phi \rightarrow 0^\circ$
- $\omega \rightarrow \infty$: $\phi \rightarrow -180^\circ$
- ζ 越小, 相位变化越快

不同阻尼比的伯德图对比：

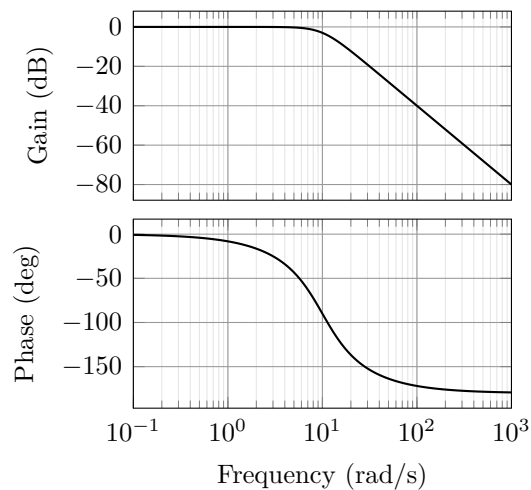


图中所有曲线对应 $\omega_n = 10$ rad/s, 不同阻尼比 ζ 。

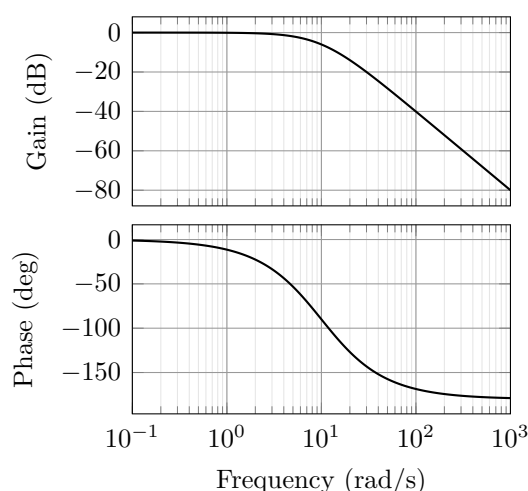
伯德图示例（欠阻尼，有谐振）： $G(s) = \frac{100}{s^2 + 2s + 100}$ ($\omega_n = 10$ rad/s, $\zeta = 0.1$)



伯德图示例（临界阻尼）： $G(s) = \frac{100}{s^2 + 14.14s + 100}$ ($\omega_n = 10$ rad/s, $\zeta = 0.707$)



伯德图示例（过阻尼）： $G(s) = \frac{100}{s^2 + 20s + 100}$ ($\omega_n = 10 \text{ rad/s}$, $\zeta = 1.0$)



17.3 伯德图的基本概念

伯德图由两个图组成，横坐标都是对数刻度的频率 ω ：

- 对数幅频图：纵坐标是系统幅值的对数 $L(\omega) = 20 \log_{10} A(\omega)$ ，单位为分贝 (dB)
- 对数相频图：纵坐标是系统相角 $\phi(\omega)$ ，单位为度 ($^\circ$)

17.3.1 对数幅频图的转折频率

典型环节类别	典型环节传递函数	转折频率及斜率变化
一阶环节	$\frac{1}{Ts + 1}$	$\omega_c = \frac{1}{T}$, 斜率 -20 dB/dec
	$Ts + 1$	$\omega_c = \frac{1}{T}$, 斜率 $+20 \text{ dB/dec}$
二阶环节	$\frac{1}{(s/\omega_n)^2 + 2\zeta(s/\omega_n) + 1}$	$\omega_c = \omega_n$, 斜率 -40 dB/dec
	$(s/\omega_n)^2 + 2\zeta(s/\omega_n) + 1$	$\omega_c = \omega_n$, 斜率 $+40 \text{ dB/dec}$

17.3.2 低频段渐近线的确定

对于标准型 $G(s) = K \frac{\prod(1+T_i s)}{\prod(1+T_j s)}$ （以及其高阶形式）：

- 低频段的斜率由系统型别 v （积分环节 s^v 的个数）决定，为 $-20v \text{ dB/dec}$
- 这条渐近线（或其延长线）必定经过点 $(1, 20 \log_{10} K)$
- 也可以通过点 $(\omega_0, 20 \lg K - 20v \lg \omega_0)$ 来确定直线

17.3.3 例题：伯德图绘制示例

例 1：绘制 $G(s) = \frac{2}{(2s+1)(8s+1)}$ 的开环对数幅频特性曲线。

解：

1. 标准型： $G(s) = \frac{2}{(2s+1)(8s+1)}$ 。开环增益 $K = 2$ ，系统为 0 型 ($v = 0$)

2. 转折频率：

$$T_1 = 2 \implies \omega_1 = \frac{1}{2} = 0.5 \text{ rad/s}$$
$$T_2 = 8 \implies \omega_2 = \frac{1}{8} = 0.125 \text{ rad/s}$$

按从小到大排列： $\omega_1 = 0.125 \text{ rad/s}$, $\omega_2 = 0.5 \text{ rad/s}$

3. 低频段 ($\omega < 0.125$):

- 斜率为 $-20 \times 0 = 0 \text{ dB/dec}$ (水平线)
- 幅值为 $L(\omega) = 20 \lg(2) \approx 6 \text{ dB}$

4. 中频段 1 ($0.125 < \omega < 0.5$):

- 经过第一个转折频率 $\omega_1 = 0.125$ (一阶极点)
- 斜率变为 $0 - 20 = -20 \text{ dB/dec}$

5. 高频段 ($\omega > 0.5$):

- 经过第二个转折频率 $\omega_2 = 0.5$ (一阶极点)
- 斜率变为 $-20 - 20 = -40 \text{ dB/dec}$

17.4 伯德图的绘制方法

17.4.1 伯德图绘制规则速查表

以下表格是伯德图绘制中各种典型环节的**快速参考**。对于更详细的分析、图示和计算示例，请参考前面“典型环节的伯德图”部分。

伯德图典型环节速查表				
环节	传递函数	转折频率	幅频特性	相频特性
比例	K	—	0 dB/dec	0° 或 180°
积分	$\frac{1}{s}$	—	-20 dB/dec	-90°
微分	s	—	+20 dB/dec	+90°
一阶极点	$\frac{1}{1+Ts}$	$\omega_c = \frac{1}{T}$	0 dB/dec ($\omega < \omega_c$) 或 -20 dB/dec ($\omega > \omega_c$)	-45° @ ω_c
一阶零点	$1 + Ts$	$\omega_c = \frac{1}{T}$	0 dB/dec ($\omega < \omega_c$) 或 +20 dB/dec ($\omega > \omega_c$)	+45° @ ω_c
二阶极点	$\frac{\omega_n^2}{(s/\omega_n)^2 + 2\zeta(s/\omega_n) + 1}$	$\omega_c = \omega_n$	0 dB/dec ($\omega < \omega_n$) 或 -40 dB/dec ($\omega > \omega_n$)	-90° @ ω_n
二阶零点	$(s/\omega_n)^2 + 2\zeta(s/\omega_n) + 1$	$\omega_c = \omega_n$	0 dB/dec ($\omega < \omega_n$) 或 +40 dB/dec ($\omega > \omega_n$)	+90° @ ω_n

快速参考提示：

- 转折点修正：一阶环节修正 ±3 dB，二阶环节修正 ±6 dB
- 极点：幅频向下（负斜率），相频向下（变负）
- 零点：幅频向上（正斜率），相频向上（变正）
- 积分/微分：无转折频率，斜率固定

17.4.2 关键修正值详表

注意：极点与零点总是”互为镜像”的，掌握以下规律能加快绘图速度。

特征	一阶/二阶极点	一阶/二阶零点
斜率变化	负值（衰减）	正值（增强）
相位变化方向	向下（越来越负）	向上（越来越正）
在转折点修正	减少 ±3 dB / ±6 dB	增加 ±3 dB / ±6 dB
谐振特征	可能出现谐振峰	可能出现谷值

17.4.3 修正值参考表 — 用于精化渐近线

用于将渐近线逼近精确曲线。在考试手绘时，可根据精度要求选择性使用。

一阶环节（极点和零点）

环节	频率点	修正值	说明
一阶极点 $\frac{1}{1+Ts}$	$0.5\omega_c$	-1 dB	稍低于渐近线
	ω_c	-3 dB	精确值
	$2\omega_c$	-1 dB	稍低于渐近线
一阶零点 $1+Ts$	$0.5\omega_c$	+1 dB	稍高于渐近线
	ω_c	+3 dB	精确值
	$2\omega_c$	+1 dB	稍高于渐近线

二阶极点 — 不同阻尼比下的谐振特性

阻尼比 ζ	在 $\omega = \omega_n$ 处	幅值 (dB)	特征分类
0.1 ~ 0.3	明显谐振峰	+3 到 +14 dB	强谐振
0.5	轻微谐振	≈ -1 dB	中等阻尼
0.707	临界点	-3 dB	临界阻尼
1.0 以上	过阻尼	-6 dB 以下	无谐振

提示：当 $\zeta > 0.707$ 时，二阶极点的行为接近两个一阶极点，可用叠加法求解。

17.4.4 伯德图绘制六步法

这是一套标准化、模板化的绘制流程，特别适合考试手绘：

第一步：化为“尾 1”标准型

将传递函数中所有的一阶和二阶环节都化为 $(Ts + 1)$ 或 $((s/\omega_n)^2 + 2\zeta(s/\omega_n) + 1)$ 的形式。这样可以方便地读出开环增益 K 和各转折频率。

标准形式为：

$$G(s) = K \frac{\prod(1 + T_{zi}s) \prod((s/\omega_{ni})^2 + 2\zeta_i(s/\omega_{ni}) + 1)}{s^v \prod(1 + T_{pi}s) \prod((s/\omega_{nj})^2 + 2\zeta_j(s/\omega_{nj}) + 1)}$$

第二步：列出系统的转折频率

转折频率（交接频率）是渐近线斜率发生改变的点：

- 一阶环节 $(Ts \pm 1)$ ：转折频率为 $\omega_c = \frac{1}{T}$
- 二阶环节 $((s/\omega_n)^2 + \dots)$ ：转折频率为 $\omega_c = \omega_n$

将所有转折频率从小到大排列。

第三步：确定开环增益 K

从“尾 1”标准型中直接读出比例项 K 。

第四步：求与横轴的交点（剪切频率 ω_{gc} ）

横轴（0dB 线）代表 $|G(j\omega)| = 1$ 。需要求解方程 $|G(j\omega_{gc})| = 1$ ，利用下面的“幅值近似原则”。

第五步：绘制低频段渐近线

低频段渐近线由以下三个性质唯一确定：

1. **斜率**：由系统型别 v （积分环节 s^v 的个数）决定，斜率为 $-20v$ dB/dec
2. **定位点 1**：低频段渐近线（或其延长线）**必过点** $(\omega = 1, 20 \log_{10} K)$
3. **定位点 2**（ $v \geq 1$ 时）：低频段渐近线（或其延长线）与 0dB 横轴相交于点 $(\omega = \sqrt[v]{K}, 0 \text{ dB})$

第六步：依次绘制后续曲线

从最低的转折频率开始，每经过一个转折频率，渐近线的斜率发生一次改变：

典型环节	位置	斜率变化
一阶环节	分母	-20 dB/dec
	分子	+20 dB/dec
二阶环节	分母	-40 dB/dec
	分子	+40 dB/dec

【最终验证】：绘制完成后，检查最后一个频段的斜率是否等于 $-20(n-m)$ dB/dec，其中 n 是分母阶次， m 是分子阶次。

17.4.5 幅值近似原则（关键技巧）

在手绘伯德图和计算剪切频率时，使用的是近似幅值而非精确值。这是加快计算的关键：

一阶环节 $(Ts + 1)$ 的近似：

- 在转折频率前（ $\omega < 1/T$ ）：虚部 $T\omega < 1$ ，**保留常数项 1**。环节幅值近似为 1
- 在转折频率后（ $\omega > 1/T$ ）：虚部 $T\omega > 1$ ，**保留虚部项 $T\omega$** 。环节幅值近似为 $T\omega$

二阶环节 $((s/\omega_n)^2 + \dots)$ 的近似：

- 在转折频率前（ $\omega < \omega_n$ ）：**保留常数项 1**。环节幅值近似为 1
- 在转折频率后（ $\omega > \omega_n$ ）：**保留平方项 $(s/\omega_n)^2$** 。环节幅值近似为 $(\omega/\omega_n)^2$

17.4.6 基本步骤（原有内容）

1. 将传递函数化为标准形式

$$G(s) = \frac{K \prod (1 + T_i s) \prod (\frac{s^2}{\omega_{ni}^2} + \frac{2\zeta_i}{\omega_{ni}} s + 1)}{s^v \prod (1 + T_j s) \prod (\frac{s^2}{\omega_{nj}^2} + \frac{2\zeta_j}{\omega_{nj}} s + 1)}$$

2. 识别各个典型环节

- 比例环节 K
- 积分/微分环节 $s^{\pm v}$
- 一阶环节 $(1 + Ts)^{\pm 1}$
- 二阶环节 $(\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta s}{\omega_n} + 1)^{\pm 1}$

3. 确定转折频率

- 一阶环节: $\omega_c = \frac{1}{T}$
- 二阶环节: $\omega_c = \omega_n$
- 按从小到大排列所有转折频率

4. 绘制低频渐近线

- 起始点: 选择 $\omega = 1 \text{ rad/s}$ 或最小转折频率的 $\frac{1}{10}$
- 起始斜率: 由积分环节数 v 决定 ($-20v \text{ dB/十倍频}$)
- 起始幅值: $L(\omega_0) = 20 \lg K - 20v \lg \omega_0$

5. 绘制各段渐近线

- 每经过一个转折频率, 斜率改变
- 零点 (分子): 斜率增加
 - 一阶零点: $+20 \text{ dB/十倍频}$
 - 二阶零点: $+40 \text{ dB/十倍频}$
- 极点 (分母): 斜率减少
 - 一阶极点: -20 dB/十倍频
 - 二阶极点: -40 dB/十倍频

6. 修正转折频率附近的误差

- 一阶环节在 $\omega = \omega_c$ 处: -3 dB (极点) 或 $+3 \text{ dB}$ (零点)
- 二阶环节: 根据阻尼比 ζ 修正

7. 绘制相频特性

- 每个环节的相位直接相加
- 注意各环节的相位贡献

17.4.7 转折频率处的修正

一阶环节 $\frac{1}{1+Ts}$ 的修正:

频率	渐近线误差	精确值修正
$0.5\omega_c$	0 dB	-1 dB
ω_c	0 dB	-3 dB
$2\omega_c$	0 dB	-1 dB

二阶环节的修正

取决于阻尼比 ζ ，在 $\omega = \omega_n$ 处:

- $\zeta = 0.1$: 谐振峰值约 +14 dB
- $\zeta = 0.2$: 谐振峰值约 +7 dB
- $\zeta = 0.3$: 谐振峰值约 +3 dB
- $\zeta = 0.5$: 误差约 -1 dB
- $\zeta = 0.707$: 误差 -3 dB (临界阻尼)
- $\zeta = 1.0$: 误差 -6 dB (过阻尼)

17.4.8 六步法综合例题

例 1: 绘制 $G(s) = \frac{8(\frac{s}{0.1}+1)}{s(s^2+s+1)(\frac{s}{2}+1)}$ 的开环对数幅频特性曲线。

解:

1. 化为标准型:

$$G(s) = \frac{8(10s+1)}{s(s^2+s+1)(0.5s+1)}$$

2. 转折频率:

- 分子一阶: $T_z = 10 \Rightarrow \omega_1 = \frac{1}{10} = 0.1 \text{ rad/s}$ (零点, +20 dB/dec)
- 分母二阶: 由 $s^2+s+1=0$ 得 $2\zeta\omega_n=1, \omega_n^2=1$, 所以 $\omega_n=1 \text{ rad/s}$ (极点, -40 dB/dec)
- 分母一阶: $T_p = 0.5 \Rightarrow \omega_3 = \frac{1}{0.5} = 2 \text{ rad/s}$ (极点, -20 dB/dec)

- 排序: 0.1, 1, 2

3. 开环增益: $K = 8$

4. 低频段 ($\omega < 0.1$):

- 系统为 I 型 ($v = 1$), 斜率为 -20 dB/dec
- 与 0dB 轴交于 $\omega = \sqrt[4]{K} = 8$ rad/s
- 但 $8 > 0.1$, 说明交点不在低频段
- 可用定位点: 在 $\omega = 1$ 处, 幅值为 $L(1) = 20 \lg 8 - 20 \times 1 = 18.06$ dB

5. 各频段渐近线:

- $0.1 < \omega < 1$: 经过 $\omega_1 = 0.1$ (分子一阶零点), 斜率变为 $-20 + 20 = 0$ dB/dec
- $1 < \omega < 2$: 经过 $\omega_2 = 1$ (分母二阶极点), 斜率变为 $0 - 40 = -40$ dB/dec
- $\omega > 2$: 经过 $\omega_3 = 2$ (分母一阶极点), 斜率变为 $-40 - 20 = -60$ dB/dec

6. 最终验证:

- 分子阶次 $m = 1$ (一阶零点)
- 分母阶次 $n = 4$ (1 个一阶 + 1 个二阶 + 1 个积分 = 4)
- 最终斜率应为 $-20(n - m) = -20(4 - 1) = -60$ dB/dec, 正确

17.4.9 剪切频率的计算

剪切频率 (增益穿越频率 ω_{gc}) 是幅值等于 1 (0 dB) 的频率, 通过求解 $|G(j\omega_{gc})| = 1$ 得到。

计算方法: 利用幅值近似原则

1. 在不同频段, 根据主导环节使用近似幅值
2. 在所有转折频率处分别计算幅值, 判断穿越点在哪一段
3. 在该频段内使用简化的近似幅值公式求解

典型例子: $G(s) = \frac{2}{(2s+1)(8s+1)}$

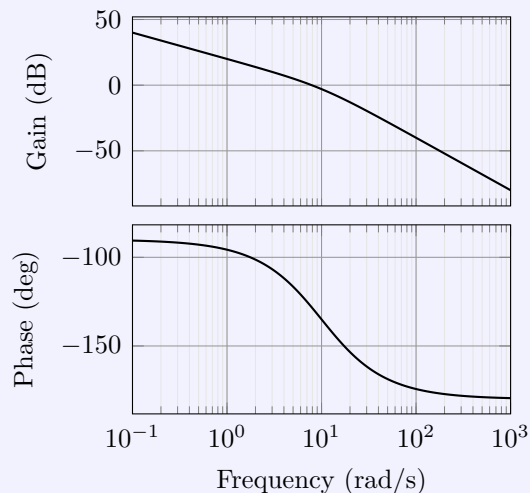
设 $\omega_1 = 0.125, \omega_2 = 0.5$, 则:

- 低频 $\omega < 0.125$: $|G(j\omega)| \approx 2$ (> 1), 不包含穿越点
- 中频 $0.125 < \omega < 0.5$: $|G(j\omega)| \approx \frac{2}{8\omega}$
 - 令 $\frac{2}{8\omega} = 1 \implies \omega = 0.25$
 - 由于 $0.125 < 0.25 < 0.5$, 假设成立, 所以 $\omega_{gc} = 0.25$
- 高频验证: 若需更精确, 可用精确公式验证

17.4.10 绘图示例

例 1: 绘制 $G(s) = \frac{10}{s(1+0.1s)}$ 的伯德图

例 1 求解过程与伯德图

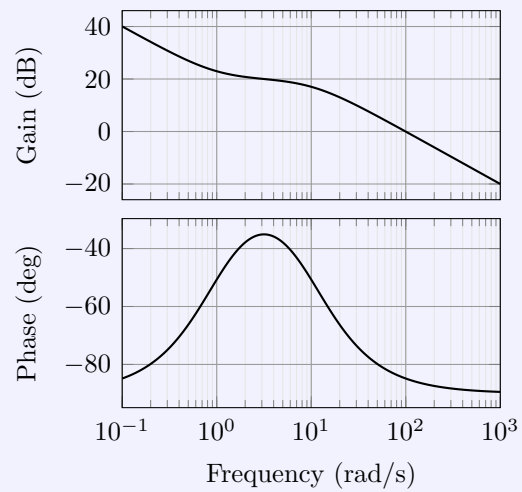


解:

1. 标准形式: $G(s) = \frac{10}{s(1+0.1s)}$, $K = 10$
2. 环节识别:
 - 积分环节: $\frac{1}{s}$ ($v = 1$)
 - 惯性环节: $\frac{1}{1+0.1s}$, $T = 0.1$
3. 转折频率: $\omega_c = \frac{1}{T} = 10 \text{ rad/s}$
4. 幅频特性:
 - 起点: $L(1) = 20 \text{ dB}$
 - $\omega < 10$: -20 dB/十倍频
 - $\omega > 10$: -40 dB/十倍频
 - 修正: $-3 \text{ dB @ } \omega = 10$
5. 相频特性:
 - $\phi(\omega) = -90^\circ - \arctan(0.1\omega)$
 - @ $\omega = 10$: $\phi = -135^\circ$

例 2: 绘制 $G(s) = \frac{100(s+1)}{s(s+10)}$ 的伯德图

例 2 求解过程与伯德图



解：

1. 标准形式: $G(s) = \frac{10(1+s)}{s(1+0.1s)}$, $K = 10$

2. 环节识别:

- 积分环节: $\frac{1}{s}$
- 一阶零点: $(1+s)$
- $\omega_{c1} = 1 \text{ rad/s}$
- 一阶极点: $\frac{1}{1+0.1s}$
- $\omega_{c2} = 10 \text{ rad/s}$

3. 转折频率: 1 rad/s (零点), 10 rad/s (极点)

4. 幅频特性:

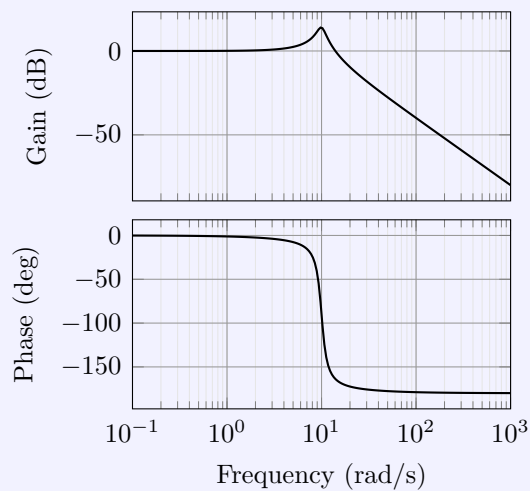
- 低频 $\omega < 1$: -20 dB/十倍频
- 中频 $1 < \omega < 10$: 0 dB/十倍频
- 高频 $\omega > 10$: -20 dB/十倍频

5. 相频特性:

- $\phi(\omega) = -90^\circ + \arctan(\omega)$
- $-\arctan(0.1\omega)$

例 3: 二阶系统 $G(s) = \frac{100}{s^2 + 2s + 100}$

例 3 求解过程与伯德图



解:

1. 标准形式:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

2. 参数识别:

- $\omega_n = 10 \text{ rad/s}$
- $\zeta = 0.1$
- 极点: $-1 \pm 9.95j$

3. 特性分析:

- 转折频率: 10 rad/s
- $\zeta < 0.707$, 有谐振
- 谐振频率: $\approx 9.9 \text{ rad/s}$
- 谐振峰值: ≈ 5.03 (14 dB)

17.5 伯德图的应用

17.5.1 由伯德图确定传递函数

根据伯德图的幅频特性, 可以反推传递函数:

1. 从低频渐近线斜率确定积分环节数 v
2. 从转折频率确定各环节的时间常数

3. 从低频幅值确定增益 K
4. 从斜率变化确定零极点类型

17.5.2 稳定性分析

增益裕度 (Gain Margin, GM):

$$GM = -L(\omega_g) \text{ dB}$$

其中 ω_g 为相位穿越频率 ($\phi(\omega_g) = -180^\circ$)

相位裕度 (Phase Margin, PM):

$$PM = 180^\circ + \phi(\omega_c)$$

其中 ω_c 为幅值穿越频率 ($L(\omega_c) = 0 \text{ dB}$)

稳定性判据:

- 稳定条件: $GM > 0 \text{ dB}$ 且 $PM > 0^\circ$
- 一般要求: $GM \geq 6 \text{ dB}$, $PM \geq 30^\circ$
- 良好性能: $GM \geq 10 \text{ dB}$, $PM \geq 45^\circ$

17.5.3 性能指标估算

- 带宽频率 ω_b : $L(\omega_b) = -3 \text{ dB}$ 对应的频率
 - 带宽越大, 系统响应越快
- 谐振峰值 M_r : 幅频特性的最大值
 - M_r 越大, 超调量越大
 - 一般要求 $M_r < 1.3$ (即 $< 2.3 \text{ dB}$)
- 低频增益: 反映稳态精度
 - 型别越高, 低频增益越大, 稳态误差越小
- 中频段斜率: 影响稳定性
 - 斜率为 -20 dB/十倍频 时系统一般稳定
 - 斜率为 -40 dB/十倍频 时需检查相位裕度

Part II

现代控制理论

18 状态空间表达式及其建立

18.1 状态空间的基本概念

- 状态：系统在某一时刻的状态是指确定系统该时刻以后行为所必需的最少信息
- 状态变量：描述系统状态的一组变量
- 状态向量：由状态变量组成的向量
- 状态空间：以状态变量为坐标的 n 维空间

18.2 状态空间表达式

线性定常系统的状态空间表达式：

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (12)$$

$$\dot{y}(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (13)$$

其中：

- $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ：状态向量
- $u(t) \in \mathbb{R}^p$ ：输入向量
- $y(t) \in \mathbb{R}^q$ ：输出向量
- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ：系统矩阵
- $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ：输入矩阵
- $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$ ：输出矩阵
- $D \in \mathbb{R}^{q \times p}$ ：前馈矩阵

18.3 状态空间表达式的建立方法

1. 根据物理规律建立微分方程组
2. 选择状态变量（通常选择能量存储元件的变量）

3. 将高阶微分方程化为一阶微分方程组
4. 写出输出方程

19 状态空间表达式求传递函数

19.1 传递函数矩阵

从状态空间表达式求传递函数矩阵：

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

19.2 单输入单输出系统

对于单输入单输出系统：

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

其中 $(sI - A)^{-1}$ 称为系统的解析矩阵。

20 线性变换

20.1 线性变换的定义

设 x 和 z 是两组状态变量，如果存在非奇异矩阵 P ，使得：

$$x = Pz$$

则称此变换为线性变换或坐标变换。

20.2 变换后的状态方程

原系统：

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (14)$$

$$y = Cx + Du \quad (15)$$

变换后的系统：

$$\dot{z} = \bar{A}z + \bar{B}u \quad (16)$$

$$y = \bar{C}z + Du \quad (17)$$

其中：

$$\bar{A} = P^{-1}AP \quad (18)$$

$$\bar{B} = P^{-1}B \quad (19)$$

$$\bar{C} = CP \quad (20)$$

21 线性控制系统状态空间表达式的求解

21.1 齐次状态方程的解

齐次状态方程 $\dot{x} = Ax$ 的解为：

$$x(t) = e^{At}x(0)$$

其中 e^{At} 称为状态转移矩阵，记为 $\Phi(t)$ 。

21.2 状态转移矩阵的性质

1. $\Phi(0) = I$
2. $\Phi(t_1 + t_2) = \Phi(t_1)\Phi(t_2)$
3. $\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t)$
4. $\frac{d\Phi(t)}{dt} = A\Phi(t) = \Phi(t)A$

21.3 状态转移矩阵的计算方法

1. 级数展开法： $e^{At} = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \dots$
2. 拉普拉斯变换法： $e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]$
3. 对角化方法：当 A 可对角化时
4. 约当标准形方法：当 A 不可对角化时

21.4 非齐次状态方程的解

非齐次状态方程的完全解：

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

22 线性控制系统的能控性和能观测性

22.1 能控性定义

系统 (A, B) 在时刻 t_0 是状态能控的, 如果存在有限时间 $t_1 > t_0$ 和控制输入 $u(t)$, 使得系统能从任意初态 $x(t_0)$ 转移到任意终态 $x(t_1)$ 。

22.2 能控性判据

系统 (A, B) 完全能控的充要条件是能控性矩阵:

$$W_c = [B \quad AB \quad A^2B \quad \cdots \quad A^{n-1}B]$$

满足 $\text{rank}(W_c) = n$ 。

22.3 能观测性定义

系统 (A, C) 在时刻 t_0 是状态能观测的, 如果能够根据有限时间区间 $[t_0, t_1]$ 内的输出 $y(t)$ 和输入 $u(t)$ 唯一地确定初始状态 $x(t_0)$ 。

22.4 能观测性判据

系统 (A, C) 完全能观测的充要条件是能观测性矩阵:

$$W_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

满足 $\text{rank}(W_o) = n$ 。

23 能控、能观标准型及其实现

23.1 能控标准型

对于单输入系统, 能控标准型为:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

23.2 能观测标准型

对于单输出系统，能观测标准型为：

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

24 系统的结构分解——能控、能观性分解

24.1 系统的结构分解

一般线性系统可分解为四个子系统：

- 能控且能观测部分
- 能控但不能观测部分
- 不能控但能观测部分
- 不能控且不能观测部分

24.2 卡尔曼分解

通过适当的线性变换，可将系统分解为：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & 0 \\ 0 & 0 & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

25 约当型实现

25.1 约当标准型

当系统矩阵 A 的特征值不同时，可化为对角形：

$$J = P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

当有重根时，化为约当标准型：

$$J = P^{-1}AP = \text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_k)$$

其中 J_i 为约当块：

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{bmatrix}$$

26 稳定性与李雅普诺夫方法

26.1 李雅普诺夫稳定性定义

考虑自治系统 $\dot{x} = f(x)$ ，设 x_e 为平衡点：

- **稳定：** 对任意 $\varepsilon > 0$ ，存在 $\delta > 0$ ，当 $\|x(0) - x_e\| < \delta$ 时，有 $\|x(t) - x_e\| < \varepsilon$ ， $\forall t \geq 0$
- **渐近稳定：** 稳定且 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_e$
- **大范围渐近稳定：** 渐近稳定且吸引域为整个状态空间

26.2 李雅普诺夫第一方法（线性化方法）

对于线性系统 $\dot{x} = Ax$ ，系统渐近稳定的充要条件是矩阵 A 的所有特征值都具有负实部。

26.3 李雅普诺夫第二方法（直接方法）

李雅普诺夫定理： 如果存在标量函数 $V(x)$ 满足：

1. $V(x)$ 连续且有连续的一阶偏导数
2. $V(x_e) = 0$ ，当 $x \neq x_e$ 时 $V(x) > 0$ （正定）
3. $\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) \leq 0$ （半负定）

则平衡点 x_e 稳定。

若进一步有 $\dot{V}(x) < 0$ （负定），则平衡点渐近稳定。

26.4 线性系统的李雅普诺夫方程

对于线性系统 $\dot{x} = Ax$ ，选择二次型李雅普诺夫函数：

$$V(x) = x^T P x$$

其中 P 为正定矩阵。稳定的充要条件是李雅普诺夫方程：

$$A^T P + P A = -Q$$

对于给定的正定矩阵 Q ，存在唯一的正定解 P 。

27 极点配置——状态反馈

27.1 状态反馈

状态反馈控制律：

$$u = -Kx + v$$

其中 K 为反馈增益矩阵， v 为参考输入。

闭环系统：

$$\dot{x} = (A - BK)x + Bv$$

27.2 极点配置定理

对于单输入系统，若 (A, B) 完全能控，则对于任意给定的 n 个复数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ （复数成对共轭出现），存在反馈增益矩阵 K ，使得闭环系统矩阵 $A - BK$ 的特征值恰好为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 。

27.3 极点配置的方法

1. 直接方法：解特征方程 $\det(sI - A + BK) = 0$
2. 变换方法：将系统化为能控标准型后配置极点
3. 阿克曼公式： $K = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] W_c^{-1} \alpha_c(A)$

其中 $\alpha_c(s)$ 为期望的特征多项式， W_c 为能控性矩阵。

28 状态观测器

28.1 状态观测器的概念

当系统的状态不能直接测量时，需要根据系统的输入输出信息来估计状态变量，这种估计装置称为状态观测器。

28.2 全维状态观测器

全维状态观测器的方程：

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})$$

其中 \hat{x} 为状态估计值， L 为观测器增益矩阵。

28.3 观测器的设计

观测误差： $e = x - \hat{x}$

观测误差动态方程：

$$\dot{e} = (A - LC)e$$

观测器设计就是选择 L ，使得 $A - LC$ 的特征值位于左半平面。

观测器设计定理：若 (A, C) 完全能观测，则可任意配置观测器的极点。

28.4 分离定理

状态反馈与状态观测器可以分别独立设计，即：

- 先设计状态反馈增益 K ，配置闭环系统的极点
- 再设计观测器增益 L ，配置观测器的极点

基于观测器的状态反馈系统的特征多项式等于控制器特征多项式与观测器特征多项式的乘积。