张宇预测卷

第1套·填空选择题

考研数学错题本

A4标准版

”心无旁骛，行稳致远。”

学生

最后更新时间：2025年10月28日

目录

第 1 章 张宇预测卷 · 第 1 套

1.1 填空题和选择题

1. 设总体 $X \sim N(\mu, 1)$, $H_0: \mu = 0, H_1: \mu = 1$. 来自总体 X 的样本容量为 9 的简单随机样本均值为 $\bar{X}$, 设拒绝域为 $W = \{\bar{X} \geq 0.55\}$, 则不犯第二类错误的概率为

A. $1 - \Phi(1.35)$

B. $\Phi(1.35)$

C. $\Phi(1.65)$

D. $1 - \Phi(1.65)$

解答

解题步骤

1. 理解第二类错误及其概率

- 第二类错误(Type II Error)是指原假设 H_0 不成立,但我们没有拒绝 H_0(即接受了 H_0)。
- 犯第二类错误的概率通常记为 β。
- $\beta = P(\text{接受 } H_0 | H_1 \text{ 为真})$。
- 本题要求的是" 不犯第二类错误的概率",这个概率就是统计检验中的**功效(Power)**,等于 $1 - \beta$。
- 功效的定义是:当备择假设 H_1 为真时,我们能够正确地拒绝原假设 H_0 的概率。即 $1 - \beta = P(\text{拒绝 } H_0 | H_1 \text{ 为真})$。

2. 确定检验的条件

- 拒绝域为 $W = \{\bar{X} \geq 0.55\}$。
- 备择假设 H_1 为真,意味着总体的真实均值为 $\mu = 1$。
- 总体方差 $\sigma^2 = 1$,样本容量 $n = 9$。
- 根据中心极限定理,样本均值 $\bar{X}$ 的分布为 $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$。
- 当 H_1 为真时,$\mu = 1$,所以 $\bar{X} \sim N(1, \frac{1}{9})$。

3. 计算不犯第二类错误的概率

- 我们需要计算 $P(\bar{X} \in W | \mu = 1)$,即 $P(\bar{X} \geq 0.55 | \mu = 1)$。
- 标准化公式为 $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$。
- 在这里,$\mu = 1, \sigma = 1, n = 9$,所以标准差为 $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$。
- $P(\bar{X} \geq 0.55) = P\left(\frac{\bar{X} - 1}{1/3} \geq \frac{0.55 - 1}{1/3}\right) = P(Z \geq -1.35)$
- 根据标准正态分布的对称性,$P(Z \geq -z) = P(Z \leq z)$。
- 所以,$P(Z \geq -1.35) = P(Z \leq 1.35) = \Phi(1.35)$。

2. $z=\arcsin y^x$ 在点 $(-1,2)$ 处的全微分为 $dz=$______.

解答

解题步骤

1. 全微分公式

函数 $z=f(x,y)$ 的全微分公式为：$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$。我们需要先求出 z 对 x 和 y 的偏导数。

2. 求偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$

将 y 视为常数，对 x 求导。根据链式法则和基本求导公式 $(\arcsin u)'=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$ 和 $(a^x)'=a^x\ln a$：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1-(y^x)^2}}\cdot\frac{\partial(y^x)}{\partial x}=\frac{y^x\ln y}{\sqrt{1-y^{2x}}}$$

3. 求偏导数 $\frac{\partial z}{\partial y}$

将 x 视为常数，对 y 求导。根据链式法则和基本求导公式 $(\arcsin u)'=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$ 和 $(y^n)'=ny^{n-1}$：

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{1-(y^x)^2}}\cdot\frac{\partial(y^x)}{\partial y}=\frac{xy^{x-1}}{\sqrt{1-y^{2x}}}$$

4. 计算在点 $(-1,2)$ 处的偏导数值

将 $x=-1,y=2$ 代入上述偏导数表达式：

- $\frac{\partial z}{\partial x}\big|_{(-1,2)}=\frac{2^{-1}\ln 2}{\sqrt{1-2^{-2}}}=\frac{\frac{1}{2}\ln 2}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}}=\frac{\frac{1}{2}\ln 2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\ln 2}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\ln 2$
- $\frac{\partial z}{\partial y}\big|_{(-1,2)}=\frac{(-1)\cdot 2^{-2}}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}}=\frac{-\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{1}{2\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{6}$

5. 写出全微分表达式

将计算出的偏导数值代入全微分公式。

最终答案：$dz=\frac{\sqrt{3}}{3}\ln 2\,dx-\frac{\sqrt{3}}{6}\,dy$

3. 设 $e^{ax} \geq 1+x$ 对任意实数 x 均成立，则 a 的取值范围为 ______.

解答

解题步骤

1. 构造辅助函数

设函数 $f(x)=e^{ax}-1-x$。题目条件等价于 $f(x)\geq 0$ 对任意实数 x 恒成立。这意味着函数 $f(x)$ 的全局最小值必须大于或等于 0。

2. 求函数的最小值

对 $f(x)$ 求导以寻找极值点：

$$f'(x)=ae^{ax}-1$$

令 $f'(x)=0$，得到 $ae^{ax}=1$，即 $e^{ax}=\frac{1}{a}$。

- 要使该方程有解，必须有 $\frac{1}{a}>0$，即 $a>0$。
- 如果 $a=0$，不等式为 $1\geq 1+x$，化为 $x\leq 0$，不满足对任意 x 成立。
- 如果 $a<0$，则 $e^{ax}>0$ 而 $\frac{1}{a}<0$，方程无解。此时 $f'(x)=ae^{ax}-1$ 恒小于 0，函数单调递减，不可能恒大于等于 0。
- 因此，必须有 $a>0$。

3. 确定极值点和最小值

当 $a>0$ 时，解 $e^{ax}=\frac{1}{a}$ 得 $x_0=-\frac{\ln a}{a}$ 是唯一的驻点。
求二阶导数判断极值类型：$f''(x)=a^2e^{ax}>0$ 恒成立，所以 x_0 是全局最小点。

4. 建立关于 a 的不等式

函数 $f(x)$ 的最小值为：

$$f(x_0)=e^{-\ln a}-1+\frac{\ln a}{a}=\frac{1}{a}-1+\frac{\ln a}{a}\geq 0$$

化简得：$1-a+\ln a\geq 0$，即 $\ln a\geq a-1$。

5. 解关于 a 的不等式

分析函数 $g(a)=\ln a-(a-1)$ 在 $a>0$ 时的性质。

$$g'(a)=\frac{1}{a}-1$$

令 $g'(a)=0$，解得 $a=1$。当 $0<a<1$ 时，$g'(a)>0$；当 $a>1$ 时，$g'(a)<0$。因此 $a=1$ 是最大值点。

$g(a)$ 的最大值为 $g(1)=0$。因为 $g(a)$ 的最大值是 0，所以 $g(a)\geq 0$ 当且仅当 $a=1$。

最终答案：$a=1$

4. 已知 $\Omega=\{(x,y,z)|y^2+z^2\le 1,0\le x\le 1\}$，$\Sigma$ 为 Ω 的边界面且取外侧，则 $\oiint_{\Sigma}(y^3+z\sin x)dydz+zdxdy=$______.

解答

解题步骤

1. 应用高斯散度定理

该积分是第二类曲面积分，区域 Ω 是封闭的，曲面 Σ 取外侧，满足高斯公式的应用条件。

2. 确定 P,Q,R 并计算散度

从积分表达式 $\oiint_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$ 中：

- $P=y^3+z\sin x$
- $Q=0$
- $R=z$

计算散度：

$$\nabla\cdot\mathbf{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0+3y^2+1=3y^2+1$$

3. 转化为三重积分

由高斯公式：

$$\oiint_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint_{\Omega}(3y^2+1)dV$$

4. 计算三重积分

先对 yz 平面上的圆盘 $D:y^2+z^2\le 1$ 积分，再对 x 积分。使用极坐标变换：$y=r\cos\theta,z=r\sin\theta$。

$$\iint_{D}(3y^2+1)dydz=\int_0^{2\pi}\int_0^1(3r^2\cos^2\theta+1)r\,dr\,d\theta$$

先对 r 积分：

$$\int_0^1(3r^3\cos^2\theta+r)dr=\frac{3}{4}\cos^2\theta+\frac{1}{2}$$

再对 θ 积分，利用 $\cos^2\theta=\frac{1+\cos(2\theta)}{2}$：

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{4}\cos^2\theta+\frac{1}{2}\right)d\theta=\frac{7\pi}{4}$$

完成对 x 的积分：

$$\iiint_{\Omega}(3y^2+1)dV=\int_0^1\frac{7\pi}{4}dx=\frac{7\pi}{4}$$

最终答案：$\frac{7\pi}{4}$

5. 设随机变量 $X \sim B(2, \frac{1}{2})$，则 $E(e^{2X}) =$ ______.

解答

解题步骤

方法一：利用矩母函数(MGF)

- 随机变量 X 的矩母函数定义为 $M_X(t) = E(e^{tX})$。
- 对于服从二项分布 $B(n, p)$ 的随机变量，其矩母函数为 $M_X(t) = (1 - p + pe^t)^n$。
- 本题中，$n = 2, p = \frac{1}{2}$，所以 X 的矩母函数为：
$$M_X(t) = (1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^t)^2 = \left(\frac{1+e^t}{2}\right)^2$$
- 题目所求为 $E(e^{2X})$，这正好是矩母函数在 $t = 2$ 处的值。
$$E(e^{2X}) = M_X(2) = \left(\frac{1+e^2}{2}\right)^2 = \frac{(1+e^2)^2}{4}$$

方法二：利用期望的定义

- $X \sim B(2, \frac{1}{2})$，所以 X 可能的取值为 $0, 1, 2$。
- 其概率分布：$P(X=0) = \frac{1}{4}$，$P(X=1) = \frac{1}{2}$，$P(X=2) = \frac{1}{4}$
- 根据期望的定义：
$$E(e^{2X}) = e^0 \cdot \frac{1}{4} + e^2 \cdot \frac{1}{2} + e^4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1 + 2e^2 + e^4}{4}$$
- 分子是完全平方式：$(1+e^2)^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot e^2 + (e^2)^2 = 1 + 2e^2 + e^4$
- 所以，
$$E(e^{2X}) = \frac{(1+e^2)^2}{4}$$

最终答案：$\frac{(1+e^2)^2}{4}$（或 $\frac{1+2e^2+e^4}{4}$）