张宇预测卷

第1套·填空选择题

考研数学错题本

A4标准版

”心无旁骛，行稳致远。”

学生

最后更新时间:2025年10月28日

目录

第 1 章 张宇预测卷·第 1 套

1.1 填空题和选择题

1. 设总体 $X \sim N(\mu,1)$, $H_0:\mu=0, H_1:\mu=1$. 来自总体 X 的样本容量为 9 的简单随机样本均值为 $\bar{X}$, 设拒绝域为 $W=\{\bar{X}\geq 0.55\}$, 则不犯第二类错误的概率为

A. $1-\Phi(1.35)$

B. $\Phi(1.35)$

C. $\Phi(1.65)$

D. $1-\Phi(1.65)$

解答

解题步骤

1. 理解第二类错误及其概率

- 第二类错误(Type II Error)是指原假设 H_0 不成立,但我们没有拒绝 H_0(即接受了 H_0)。
- 犯第二类错误的概率通常记为 β。
- $\beta = P(接受\ H_0|H_1\ 为真)$。
- 本题要求的是"不犯第二类错误的概率",这个概率就是统计检验中的**功效(Power)**,等于 $1-\beta$。
- 功效的定义是:当备择假设 H_1 为真时,我们能够正确地拒绝原假设 H_0 的概率。即 $1-\beta = P(拒绝\ H_0|H_1\ 为真)$。

2. 确定检验的条件

- 拒绝域为 $W=\{\bar{X}\geq 0.55\}$。
- 备择假设 H_1 为真,意味着总体的真实均值为 $\mu=1$。
- 总体方差 $\sigma^2=1$,样本容量 $n=9$。
- 根据中心极限定理,样本均值 $\bar{X}$ 的分布为 $\bar{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$。
- 当 H_1 为真时,$\mu=1$,所以 $\bar{X}\sim N(1,\frac{1}{9})$。

3. 计算不犯第二类错误的概率

- 我们需要计算 $P(\bar{X}\in W|\mu=1)$,即 $P(\bar{X}\geq 0.55|\mu=1)$。

- 标准化公式为 $Z=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$。
- 在这里，$\mu=1,\ \sigma=1,\ n=9$，所以标准差为 $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{9}}=\frac{1}{3}$。
- $P(\bar{X}\geq 0.55)=P\left(\frac{\bar{X}-1}{1/3}\geq\frac{0.55-1}{1/3}\right)=P(Z\geq -1.35)$
- 根据标准正态分布的对称性，$P(Z\geq -z)=P(Z\leq z)$。
- 所以，$P(Z\geq -1.35)=P(Z\leq 1.35)=\Phi(1.35)$。

最终答案：$B\left(\Phi(1.35)\right)$

2. $z=\arcsin y^x$ 在点 $(-1,2)$ 处的全微分为 $dz=$______.

解答

解题步骤

1. 全微分公式

函数 $z=f(x,y)$ 的全微分公式为：$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$。我们需要先求出 z 对 x 和 y 的偏导数。

2. 求偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$

将 y 视为常数，对 x 求导。根据链式法则和基本求导公式 $(\arcsin u)'=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$ 和 $(a^x)'=a^x\ln a$：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1-(y^x)^2}}\cdot\frac{\partial(y^x)}{\partial x}=\frac{y^x\ln y}{\sqrt{1-y^{2x}}}$$

3. 求偏导数 $\frac{\partial z}{\partial y}$

将 x 视为常数，对 y 求导。根据链式法则和基本求导公式 $(\arcsin u)'=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$ 和 $(y^n)'=ny^{n-1}$：

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{1-(y^x)^2}}\cdot\frac{\partial(y^x)}{\partial y}=\frac{xy^{x-1}}{\sqrt{1-y^{2x}}}$$

4. 计算在点 $(-1,2)$ 处的偏导数值

将 $x=-1,y=2$ 代入上述偏导数表达式：

- $\frac{\partial z}{\partial x}|_{(-1,2)}=\frac{2^{-1}\ln 2}{\sqrt{1-2^{-2}}}=\frac{\frac{1}{2}\ln 2}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}}=\frac{\frac{1}{2}\ln 2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\ln 2}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\ln 2$
- $\frac{\partial z}{\partial y}|_{(-1,2)}=\frac{(-1)\cdot 2^{-2}}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}}=\frac{-\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{1}{2\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{6}$

5. 写出全微分表达式

将计算出的偏导数值代入全微分公式。

最终答案：$dz=\frac{\sqrt{3}}{3}\ln 2\,dx-\frac{\sqrt{3}}{6}dy$

3. 设 $e^{ax}\geq 1+x$ 对任意实数 x 均成立，则 a 的取值范围为 ______.

解答

解题步骤

1. 构造辅助函数

设函数 $f(x)=e^{ax}-1-x$。题目条件等价于 $f(x)\geq 0$ 对任意实数 x 恒成立。这意味着函数 $f(x)$ 的全局最小值必须大于或等于 0。

2. 求函数的最小值

对 $f(x)$ 求导以寻找极值点:

$$f'(x)=ae^{ax}-1$$

令 $f'(x)=0$,得到 $ae^{ax}=1$,即 $e^{ax}=\frac{1}{a}$。

- 要使该方程有解,必须有 $\frac{1}{a}>0$,即 $a>0$。
- 如果 $a=0$,不等式为 $1\geq 1+x$,化为 $x\leq 0$,不满足对任意 x 成立。
- 如果 $a<0$,则 $e^{ax}>0$ 而 $\frac{1}{a}<0$,方程无解。此时 $f'(x)=ae^{ax}-1$ 恒小于 0,函数单调递减,不可能恒大于等于 0。
- 因此,必须有 $a>0$。

3. 确定极值点和最小值

当 $a>0$ 时,解 $e^{ax}=\frac{1}{a}$ 得 $x_0=-\frac{\ln a}{a}$ 是唯一的驻点。
求二阶导数判断极值类型:$f''(x)=a^2e^{ax}>0$ 恒成立,所以 x_0 是全局最小点。

4. 建立关于 a 的不等式

函数 $f(x)$ 的最小值为:

$$f(x_0)=e^{-\ln a}-1+\frac{\ln a}{a}=\frac{1}{a}-1+\frac{\ln a}{a}\geq 0$$

化简得:$1-a+\ln a\geq 0$,即 $\ln a\geq a-1$。

5. 解关于 a 的不等式

分析函数 $g(a)=\ln a-(a-1)$ 在 $a>0$ 时的性质。

$$g'(a)=\frac{1}{a}-1$$

令 $g'(a)=0$,解得 $a=1$。当 $0<a<1$ 时,$g'(a)>0$;当 $a>1$ 时,$g'(a)<0$。因此 $a=1$ 是最大值点。
$g(a)$ 的最大值为 $g(1)=0$。因为 $g(a)$ 的最大值是 0,所以 $g(a)\geq 0$ 当且仅当 $a=1$。

最终答案:$a=1$

4. 已知 $\Omega=\{(x,y,z)|y^2+z^2\leq 1,0\leq x\leq 1\}$,$\Sigma$ 为 Ω 的边界面且取外侧,则 $\oiint_{\Sigma}(y^3+z\sin x)dydz+zdxdy=$______.

解答

解题步骤

1. 应用高斯散度定理

该积分是第二类曲面积分，区域 Ω 是封闭的，曲面 Σ 取外侧，满足高斯公式的应用条件。

2. 确定 P, Q, R 并计算散度

从积分表达式 $\oiint_{\Sigma} P dydz + Q dzdx + R dxdy$ 中：

- $P = y^3 + z\sin x$
- $Q = 0$
- $R = z$

计算散度：

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0 + 3y^2 + 1 = 3y^2 + 1$$

3. 转化为三重积分

由高斯公式：

$$\oiint_{\Sigma} P dydz + Q dzdx + R dxdy = \iiint_{\Omega} (3y^2+1) dV$$

4. 计算三重积分

先对 yz 平面上的圆盘 $D: y^2+z^2 \le 1$ 积分，再对 x 积分。使用极坐标变换：$y = r\cos\theta, z = r\sin\theta$。

$$\iint_D (3y^2+1) dydz = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (3r^2\cos^2\theta + 1) r\, dr\, d\theta$$

先对 r 积分：

$$\int_0^1 (3r^3\cos^2\theta + r) dr = \frac{3}{4}\cos^2\theta + \frac{1}{2}$$

再对 θ 积分，利用 $\cos^2\theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$：

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{4}\cos^2\theta + \frac{1}{2}\right) d\theta = \frac{7\pi}{4}$$

完成对 x 的积分：

$$\iiint_{\Omega} (3y^2+1) dV = \int_0^1 \frac{7\pi}{4} dx = \frac{7\pi}{4}$$

最终答案：$\frac{7\pi}{4}$

5. 设随机变量 $X \sim B(2, \frac{1}{2})$，则 $E(e^{2X}) =$ ______.

解答

解题步骤

方法一：利用矩母函数（MGF）

- 随机变量 X 的矩母函数定义为 $M_X(t)=E(e^{tX})$。
- 对于服从二项分布 $B(n,p)$ 的随机变量，其矩母函数为 $M_X(t)=(1-p+pe^t)^n$。
- 本题中，$n=2, p=\frac{1}{2}$，所以 X 的矩母函数为：

$$M_X(t)=(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^t)^2=\left(\frac{1+e^t}{2}\right)^2$$

- 题目所求为 $E(e^{2X})$，这正好是矩母函数在 $t=2$ 处的值。
-

$$E(e^{2X})=M_X(2)=\left(\frac{1+e^2}{2}\right)^2=\frac{(1+e^2)^2}{4}$$

方法二：利用期望的定义

- $X\sim B(2,\frac{1}{2})$，所以 X 可能的取值为 $0,1,2$。
- 其概率分布：$P(X=0)=\frac{1}{4}$，$P(X=1)=\frac{1}{2}$，$P(X=2)=\frac{1}{4}$
- 根据期望的定义：

$$E(e^{2X})=e^0\cdot\frac{1}{4}+e^2\cdot\frac{1}{2}+e^4\cdot\frac{1}{4}=\frac{1+2e^2+e^4}{4}$$

- 分子是完全平方式：$(1+e^2)^2=1^2+2\cdot1\cdot e^2+(e^2)^2=1+2e^2+e^4$
- 所以，

$$E(e^{2X})=\frac{(1+e^2)^2}{4}$$

最终答案：$\frac{(1+e^2)^2}{4}$（或 $\frac{1+2e^2+e^4}{4}$）

6. 计算二重积分 $\int_0^1 dx\int_1^x(e^{-y^2}+e^y\sin y)dy=$ ______.

解答

解题步骤

1. 分析积分区域

这道题的关键在于：被积函数中的 e^{-y^2} 不存在初等函数原函数，不能直接对 y 进行积分，因此必须**交换积分次序**。

原积分为：$I=\int_0^1 dx\int_1^x(e^{-y^2}+e^y\sin y)dy$

观察积分限：当 $0\le x\le 1$ 时，$1\le y\le x$。由于在大部分区间内 $x<1$，所以积分上限小于下限，这是" 反向" 积分。

根据定积分的性质 $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$，将原积分改写为：

$$I=-\int_0^1 dx\int_x^1(e^{-y^2}+e^y\sin y)dy$$

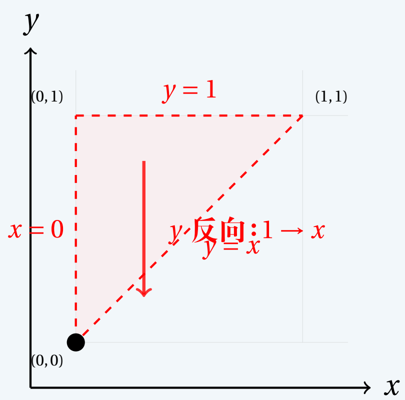
现在的积分区域 D 为：$0\le x\le 1, x\le y\le 1$

这是由直线 $x=0$、$y=1$、$y=x$ 围成的三角形区域，顶点为 $(0,0)$、$(0,1)$、$(1,1)$。

积分区域详细图示：

步骤 1:原题中的反向积分

$I=\int_0^1 dx\int_1^x(\dots)dy$,其中 $1\le y\le x$(反向)

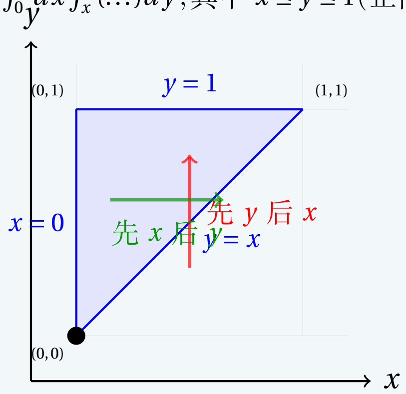


使用 $\int_a^b=-\int_b^a$

$\Downarrow$

步骤 2:转化后的正向积分

$I=-\int_0^1 dx\int_x^1(\dots)dy$,其中 $x\le y\le 1$(正向)



2. 交换积分次序

观察三角形区域:

- y 的取值范围:$0\le y\le 1$
- 对于固定的 y,x 的范围:$0\le x\le y$(从左边界 $x=0$ 到斜边 $x=y$)

交换积分次序后:

$$I=-\int_0^1 dy\int_0^y (e^{-y^2}+e^y\sin y)dx$$

3. 计算新的积分

第一步:计算内层对 x 的积分

被积函数对 x 积分时可视为常数:

$$\int_0^y (e^{-y^2}+e^y\sin y)dx=(e^{-y^2}+e^y\sin y)\cdot y=ye^{-y^2}+ye^y\sin y$$

第二步:计算外层对 y 的积分

$$I=-\int_0^1 (ye^{-y^2}+ye^y\sin y)dy=-\left[\int_0^1 ye^{-y^2}dy+\int_0^1 ye^y\sin y\,dy\right]$$

计算积分 A:$\int_0^1 ye^{-y^2}dy$

令 $u=-y^2$,则 $du=-2y\,dy$,故 $y\,dy=-\frac{1}{2}du$。

当 $y=0$ 时,$u=0$;当 $y=1$ 时,$u=-1$。

$$\int_0^1 ye^{-y^2}dy=\int_0^{-1} e^u\left(-\frac{1}{2}\right)du=\frac{1}{2}\int_{-1}^0 e^u\,du$$
$$=\frac{1}{2}[e^u]_{-1}^0=\frac{1}{2}(1-e^{-1})=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)$$

计算积分 B:$\int_0^1 ye^y\sin y\,dy$

先计算 $\int e^y\sin y\,dy$(分部积分两次):

$$\int e^y\sin y\,dy=\frac{1}{2}e^y(\sin y-\cos y)+C$$

对 $\int ye^y\sin y\,dy$ 用分部积分:令 $u=y,dv=e^y\sin y\,dy$

$$v=\frac{1}{2}e^y(\sin y-\cos y)$$

$$\int ye^y\sin y\,dy=\frac{1}{2}ye^y(\sin y-\cos y)-\frac{1}{2}\int e^y(\sin y-\cos y)dy$$

其中 $\int e^y\sin y\,dy=\frac{1}{2}e^y(\sin y-\cos y)$,$\int e^y\cos y\,dy=\frac{1}{2}e^y(\sin y+\cos y)$

代入计算得:

$$\int ye^y\sin y\,dy=\frac{1}{2}ye^y(\sin y-\cos y)+\frac{1}{2}e^y\cos y$$

计算定积分：

$$\begin{aligned}\int_0^1 ye^y\sin y\,dy &= \left[\frac{1}{2}ye^y(\sin y-\cos y)+\frac{1}{2}e^y\cos y\right]_0^1\\ &=\left[\frac{e}{2}(\sin 1-\cos 1)+\frac{e}{2}\cos 1\right]-\left[0+\frac{1}{2}\right]\\ &=\frac{e}{2}\sin 1-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

第三步：合并结果

$$\begin{aligned}I&=-\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)+\frac{e}{2}\sin 1-\frac{1}{2}\right]\\ &=-\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2e}+\frac{e}{2}\sin 1-\frac{1}{2}\right]\\ &=-\left[-\frac{1}{2e}+\frac{e}{2}\sin 1\right]\\ &=\frac{1}{2e}-\frac{e\sin 1}{2}\end{aligned}$$

最终答案：$\frac{1}{2e}-\frac{e\sin 1}{2}$（或 $\frac{1}{2e}-\frac{e\sin 1}{2}$）

7. 设 $y=y(x)$ 满足 $x^2y'+(x^2-3)y^2=0$ 且 $y(1)=1$。

(1) 求 $y=y(x)$ 的表达式；(2) 计算 $\int_0^3 y^2(x)dx$。

解答

解题步骤

(1)求 $y=y(x)$ 的表达式

第一步：分离变量

原方程为：$x^2y'+(x^2-3)y^2=0$

整理得：$x^2y'=-(x^2-3)y^2=(3-x^2)y^2$

当 $y\neq 0$ 时，两边同时除以 x^2y^2 并整理：

$$\frac{dy}{y^2}=\frac{3-x^2}{x^2}dx$$

第二步：两边积分

左边：$\int y^{-2}dy=-\frac{1}{y}$

右边：$\int \frac{3-x^2}{x^2}dx = \int\left(\frac{3}{x^2}-1\right)dx = -\frac{3}{x}-x+C$

因此得到通解：

$$-\frac{1}{y} = -\frac{3}{x}-x+C$$

或写成：

$$\frac{1}{y} = \frac{3}{x}+x+C_1$$

（其中 $C_1=-C$ 为新的常数）

第三步：利用初始条件确定常数

将 $y(1)=1$ 代入：

$$1 = 3+1+C_1 \implies C_1=-3$$

第四步：得到特解

代入 $C_1=-3$：

$$\frac{1}{y} = \frac{3}{x}+x-3$$

通分：

$$\frac{1}{y} = \frac{3+x^2-3x}{x} = \frac{x^2-3x+3}{x}$$

因此：

$$\boxed{y(x) = \frac{x}{x^2-3x+3}}$$

(2) 计算 $\int_0^3 y^2(x)dx$

关键观察：直接计算 $\int_0^3 \frac{x^2}{(x^2-3x+3)^2}dx$ 非常困难。这暗示我们应该进行巧妙的代数分解。

第一步：被积函数的分解

令 $D(x)=x^2-3x+3$，$D'(x)=2x-3$。

我们尝试将分子 x^2 表示为：

$$x^2 = A\cdot D(x)+B\cdot D'(x)+C$$

代入：

$$x^2 = A(x^2-3x+3)+B(2x-3)+C$$

比较系数：

- x^2 系数：$A=1$
- x 系数：$-3A+2B=0 \implies B=\frac{3}{2}$

- 常数项:$3A-3B+C=0 \implies C=\frac{3}{2}$

因此:

$$x^2=(x^2-3x+3)+\frac{3}{2}(2x-3)+\frac{3}{2}$$

第二步:拆分积分

$$I=\int_0^3 \frac{x^2}{(x^2-3x+3)^2}dx=\int_0^3 \frac{D(x)}{D(x)^2}dx+\frac{3}{2}\int_0^3 \frac{D'(x)}{D(x)^2}dx+\frac{3}{2}\int_0^3 \frac{1}{D(x)^2}dx$$

$$I=I_1+I_2+I_3$$

计算 $I_1=\int_0^3 \frac{1}{D(x)}dx$:

对 $D(x)=x^2-3x+3$ 配方:

$$D(x)=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

使用反正切积分公式 $\int \frac{1}{u^2+a^2}du=\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{u}{a}\right)$:

$$I_1=\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-3}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^3$$

$$I_1=\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan(\sqrt{3})-\arctan(-\sqrt{3})\right]=\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right]=\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$$

计算 $I_2=\frac{3}{2}\int_0^3 \frac{D'(x)}{D(x)^2}dx$:

令 $u=D(x)$,则 $du=D'(x)dx$:

$$I_2=\frac{3}{2}\left[-\frac{1}{D(x)}\right]_0^3=\frac{3}{2}\left[-\frac{1}{D(3)}+\frac{1}{D(0)}\right]$$

其中 $D(3)=9-9+3=3$,$D(0)=3$,所以:

$$I_2=\frac{3}{2}\left[-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right]=0$$

计算 $I_3=\frac{3}{2}\int_0^3 \frac{1}{D(x)^2}dx$:

使用三角代换。令 $x-\frac{3}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta$,则 $dx=\frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2\theta\, d\theta$。

当 $x=0$ 时,$\theta=-\frac{\pi}{3}$;当 $x=3$ 时,$\theta=\frac{\pi}{3}$。

分母变为：$D(x)^2=\left[\frac{3}{4}(\tan^2\theta+1)\right]^2=\frac{9}{16}\sec^4\theta$

$$I_3=\frac{3}{2}\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2\theta}{\frac{9}{16}\sec^4\theta}d\theta=\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{16}{9}\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\cos^2\theta\,d\theta$$

$$I_3=\frac{4\sqrt{3}}{3}\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\frac{1+\cos(2\theta)}{2}d\theta=\frac{2\sqrt{3}}{3}\left[\theta+\frac{\sin(2\theta)}{2}\right]_{-\pi/3}^{\pi/3}$$

$$I_3=\frac{2\sqrt{3}}{3}\left[\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right]=\frac{4\pi\sqrt{3}}{9}+1=\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}+1$$

第三步：合并结果

$$I=I_1+I_2+I_3=\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}+0+\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}+1=\frac{8\pi}{3\sqrt{3}}+1$$

分母有理化：

$$\frac{8\pi}{3\sqrt{3}}=\frac{8\pi\sqrt{3}}{9}$$

最终答案：

(1) $y(x)=\dfrac{x}{x^2-3x+3}$

(2) $\int_0^3 y^2(x)dx=\dfrac{8\pi\sqrt{3}}{9}+1$

8. 设一组两台机器同时启动开始制作产品，其独立工作时间 T_1,T_2 均服从参数为 1 的指数分布。X 表示两台机器较早出现故障的时间，且收益 $Y=\begin{cases}X-1, & X>1,\\ 0, & X\le 1.\end{cases}$

(1) 求 $P(Y>0)$；(2) 若有 N 组机器承接制作产品的任务，收益大于 0 的组数记为 M。记 $N\sim P(2e^2)$，在 $N=n\ (n\ge 1)$ 的条件下，$M\sim B(n,P(Y>0))$，求 M 的概率分布。

解答

解题步骤

(1)求 $P(Y>0)$

第一步：理解收益函数

由收益函数的定义，$Y>0$ 当且仅当 $X-1>0$，即 $X>1$。

因此，$P(Y>0)=P(X>1)$。

第二步:确定 X 的分布

$X=\min(T_1,T_2)$ 表示两台机器较早出现故障的时间。

已知 T_1,T_2 相互独立,都服从参数为 $\lambda=1$ 的指数分布。

根据指数分布的性质,两个独立指数分布随机变量的最小值仍然服从指数分布,其参数为两者参数之和:

$$X=\min(T_1,T_2)\sim \mathrm{Exp}(2)$$

指数分布 $\mathrm{Exp}(\lambda)$ 的分布函数为 $F(x)=1-e^{-\lambda x}(x>0)$。

第三步:计算概率

$$P(Y>0)=P(X>1)=1-F(1)=1-(1-e^{-2\cdot 1})=e^{-2}$$

答案: $\boxed{P(Y>0)=e^{-2}}$

(2)求 M 的概率分布

第一步:建立概率模型

这是一个条件概率的复合分布问题:

- 总组数: $N\sim P(2e^2)$,即 $P(N=n)=\dfrac{(2e^2)^n e^{-2e^2}}{n!}$, $n=0,1,2,\ldots$
- 在 $N=n$ 的条件下: $M\sim B(n,p)$,其中 $p=P(Y>0)=e^{-2}$
- 条件概率: $P(M=k|N=n)=\dbinom{n}{k}(e^{-2})^k(1-e^{-2})^{n-k}(0\le k\le n)$

第二步:利用全概率公式

$$\begin{aligned}P(M=k)&=\sum_{n=k}^{\infty}P(M=k|N=n)P(N=n)\\&=\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}(e^{-2})^k(1-e^{-2})^{n-k}\cdot\frac{(2e^2)^n e^{-2e^2}}{n!}\end{aligned}$$

第三步:化简求和式

$$\begin{aligned}P(M=k)&=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{n!}{k!(n-k)!}(e^{-2})^k(1-e^{-2})^{n-k}\frac{(2e^2)^n e^{-2e^2}}{n!}\\&=\frac{(e^{-2})^k e^{-2e^2}}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(1-e^{-2})^{n-k}(2e^2)^n}{(n-k)!}\end{aligned}$$

令 $j=n-k$,则 $n=j+k$,当 $n=k$ 时 $j=0$:

$$P(M=k)=\frac{(e^{-2})^k e^{-2e^2}}{k!}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(1-e^{-2})^j(2e^2)^{j+k}}{j!}$$

$$=\frac{e^{-2k}\cdot e^{-2e^2}\cdot(2e^2)^k}{k!}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{[(1-e^{-2})\cdot 2e^2]^j}{j!}$$

$$=\frac{2^k e^{-2e^2}}{k!}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{[2e^2-2]^j}{j!}$$

第四步:识别指数函数

注意到 $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\frac{x^j}{j!}=e^x$,因此:

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{[2e^2-2]^j}{j!}=e^{2e^2-2}$$

代入得:

$$P(M=k)=\frac{2^k e^{-2e^2}}{k!}\cdot e^{2e^2-2}$$

$$=\frac{2^k e^{-2e^2+2e^2-2}}{k!}$$

$$=\frac{2^k e^{-2}}{k!}$$

第五步:识别分布

这正是参数为 $\lambda=2$ 的泊松分布的概率质量函数。

答案:$\boxed{M\sim P(2)}$,即 $P(M=k)=\frac{2^k e^{-2}}{k!}$,$k=0,1,2,\ldots$

关键观察:复合分布问题通过全概率公式展开后,通常会出现指数函数的泰勒级数,这是识别最终分布的重要线索。

9. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&2&0\\a&0&3\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}1&b&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ 相似,且方程 $Ax=x+(b,-b,2b)^T$ 的一个解为 $(0,-1,1)^T$。

(1) 求 a,b 的值;(2) 求 A^{100}。

解答

解题步骤

(1)求 a,b 的值

利用相似矩阵性质求 a

相似矩阵的行列式相同,因此 $\det(A)=\det(B)$。

计算 $\det(B)$(上三角矩阵):

$$\det(B)=1\cdot1\cdot2=2$$

计算 $\det(A)$,按第二列展开:

$$\det(A)=2\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}-1&1\\a&3\end{vmatrix}=2(-3-a)=-6-2a$$

由 $\det(A)=\det(B)$:

$$-6-2a=2\implies a=-4$$

利用方程条件求 b

原方程:$Ax=x+(b,-b,2b)^T$,整理得:

$$(A-I)x=\begin{pmatrix}b\\-b\\2b\end{pmatrix}$$

将 $x=(0,-1,1)^T$ 和 $a=-4$ 代入。计算:

$$A-I=\begin{pmatrix}-2&0&1\\1&1&0\\-4&0&2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-2&0&1\\1&1&0\\-4&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

比较两边：$\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b\\-b\\2b\end{pmatrix}$

因此 $\boxed{a=-4,\quad b=1}$

(2)求 A^{100}

第一步：求特征值

特征方程 $\det(\lambda I-A)=0$：

$$\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda+1&0&-1\\-1&\lambda-2&0\\4&0&\lambda-3\end{vmatrix}$$

按第二列展开：

$$=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda+1&-1\\4&\lambda-3\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)[(\lambda+1)(\lambda-3)+4]$$

$$=(\lambda-2)(\lambda^2-2\lambda+1)=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$$

特征值：$\lambda_1=2$（代数重数 1），$\lambda_2=1$（代数重数 2）

第二步：求特征向量

对 $\lambda_1=2$，解 $(A-2I)x=0$：

$$\begin{pmatrix}-3&0&1\\1&0&0\\-4&0&1\end{pmatrix}\Longrightarrow\vec{v}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

对 $\lambda_2=1$，解 $(A-I)x=0$：

$$\begin{pmatrix}-2&0&1\\1&1&0\\-4&0&2\end{pmatrix}\Longrightarrow\vec{v}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

第三步：求广义特征向量（约当链）

因为 $\lambda=1$ 的几何重数为 1 小于代数重数 2，故 A 不可对角化，需用约当标准型。

求广义特征向量 $\vec{v}_3$ 满足 $(A-I)\vec{v}_3=\vec{v}_2$：

$$\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ -4 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 2\end{pmatrix}$$

取 $x_1=0$，得 $\vec{v}_3=\begin{pmatrix}0\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$

第四步：构造相似变换

$$P=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & -1\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix},\quad J=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

约当标准型中，$\lambda=1$ 对应的 2×2 约当块：$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

第五步：计算 J^{100}

$$J^{100}=\begin{pmatrix}2^{100} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 100\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

（注：约当块 $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{100}=\begin{pmatrix}1 & 100\\ 0 & 1\end{pmatrix}$）

第六步：求 P^{-1}

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

第七步:计算 $A^{100} = PJ^{100}P^{-1}$

$$PJ^{100} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^{100} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 100 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 100 \\ 2^{100} & -1 & -101 \\ 0 & 2 & 201 \end{pmatrix}$$

$$A^{100} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 100 \\ 2^{100} & -1 & -101 \\ 0 & 2 & 201 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \boxed{\begin{pmatrix} -199 & 0 & 100 \\ 201 - 2^{100} & 2^{100} & 2^{100} - 101 \\ -400 & 0 & 201 \end{pmatrix}}$$

关键要点:

- 相似矩阵的行列式相同是求 a 的关键
- 矩阵不可对角化时,必须使用约当标准型
- 约当块 $J_2(1)$ 的幂:$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$