张宇预测卷

# 第1套·填空选择题

## 考研数学错题本

A4标准版

"心无旁骛,行稳致远。"

学生

最后更新时间:2025年10月28日

# 目录

# 第 1 章 张宇预测卷 · 第 1 套

## 1.1 填空题和选择题

1. 设总体 $X \sim N(\mu, 1)$, $H_0: \mu = 0, H_1: \mu = 1$. 来自总体 $X$ 的样本容量为 9 的简单随机样本均值为 $\bar{X}$, 设拒绝域为 $W = \{\bar{X} \geq 0.55\}$, 则不犯第二类错误的概率为

A. $1 - \Phi(1.35)$

B. $\Phi(1.35)$

C. $\Phi(1.65)$

D. $1 - \Phi(1.65)$

**解答**

**解题步骤**

**1. 理解第二类错误及其概率**

- 第二类错误(Type II Error)是指原假设 $H_0$ 不成立, 但我们没有拒绝 $H_0$(即接受了 $H_0$)。
- 犯第二类错误的概率通常记为 $\beta$。
- $\beta = P(\text{接受 } H_0 | H_1 \text{ 为真})$。
- 本题要求的是"不犯第二类错误的概率", 这个概率就是统计检验中的**功效(Power)**, 等于 $1 - \beta$。
- 功效的定义是: 当备择假设 $H_1$ 为真时, 我们能够正确地拒绝原假设 $H_0$ 的概率。即 $1 - \beta = P(\text{拒绝 } H_0 | H_1 \text{ 为真})$。

**2. 确定检验的条件**

- 拒绝域为 $W = \{\bar{X} \geq 0.55\}$。
- 备择假设 $H_1$ 为真, 意味着总体的真实均值为 $\mu = 1$。
- 总体方差 $\sigma^2 = 1$, 样本容量 $n = 9$。
- 根据中心极限定理, 样本均值 $\bar{X}$ 的分布为 $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$。
- 当 $H_1$ 为真时, $\mu = 1$, 所以 $\bar{X} \sim N(1, \frac{1}{9})$。

**3. 计算不犯第二类错误的概率**

- 我们需要计算 $P(\bar{X} \in W | \mu = 1)$, 即 $P(\bar{X} \geq 0.55 | \mu = 1)$。

- 标准化公式为 $Z=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$。
- 在这里，$\mu=1,\ \sigma=1,\ n=9$，所以标准差为 $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{9}}=\frac{1}{3}$。
- $P(\bar{X}\geq 0.55)=P\left(\frac{\bar{X}-1}{1/3}\geq\frac{0.55-1}{1/3}\right)=P(Z\geq -1.35)$
- 根据标准正态分布的对称性，$P(Z\geq -z)=P(Z\leq z)$。
- 所以，$P(Z\geq -1.35)=P(Z\leq 1.35)=\Phi(1.35)$。

**最终答案**：$B\left(\Phi(1.35)\right)$

2. $z=\arcsin y^x$ 在点 $(-1,2)$ 处的全微分为 $dz=$______.

**解答**

**解题步骤**

**1. 全微分公式**

函数 $z=f(x,y)$ 的全微分公式为：$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$。我们需要先求出 $z$ 对 $x$ 和 $y$ 的偏导数。

**2. 求偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$**

将 $y$ 视为常数，对 $x$ 求导。根据链式法则和基本求导公式 $(\arcsin u)'=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$ 和 $(a^x)'=a^x\ln a$：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1-(y^x)^2}}\cdot\frac{\partial(y^x)}{\partial x}=\frac{y^x\ln y}{\sqrt{1-y^{2x}}}$$

**3. 求偏导数 $\frac{\partial z}{\partial y}$**

将 $x$ 视为常数，对 $y$ 求导。根据链式法则和基本求导公式 $(\arcsin u)'=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$ 和 $(y^n)'=ny^{n-1}$：

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{1-(y^x)^2}}\cdot\frac{\partial(y^x)}{\partial y}=\frac{xy^{x-1}}{\sqrt{1-y^{2x}}}$$

**4. 计算在点 $(-1,2)$ 处的偏导数值**

将 $x=-1,y=2$ 代入上述偏导数表达式：

- $\frac{\partial z}{\partial x}|_{(-1,2)}=\frac{2^{-1}\ln 2}{\sqrt{1-2^{-2}}}=\frac{\frac{1}{2}\ln 2}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}}=\frac{\frac{1}{2}\ln 2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\ln 2}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\ln 2$
- $\frac{\partial z}{\partial y}|_{(-1,2)}=\frac{(-1)\cdot 2^{-2}}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}}=\frac{-\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{1}{2\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{6}$

**5. 写出全微分表达式**

将计算出的偏导数值代入全微分公式。

**最终答案**：$dz=\frac{\sqrt{3}}{3}\ln 2\,dx-\frac{\sqrt{3}}{6}dy$

3. 设 $e^{ax}\geq 1+x$ 对任意实数 $x$ 均成立，则 $a$ 的取值范围为 ______.

**解答**

**解题步骤**

**1. 构造辅助函数**

设函数 $f(x)=e^{ax}-1-x$。题目条件等价于 $f(x)\ge 0$ 对任意实数 $x$ 恒成立。这意味着函数 $f(x)$ 的全局最小值必须大于或等于 0。

**2. 求函数的最小值**

对 $f(x)$ 求导以寻找极值点:

$$f'(x)=ae^{ax}-1$$

令 $f'(x)=0$,得到 $ae^{ax}=1$,即 $e^{ax}=\frac{1}{a}$。

- 要使该方程有解,必须有 $\frac{1}{a}>0$,即 $a>0$。
- 如果 $a=0$,不等式为 $1\ge 1+x$,化为 $x\le 0$,不满足对任意 $x$ 成立。
- 如果 $a<0$,则 $e^{ax}>0$ 而 $\frac{1}{a}<0$,方程无解。此时 $f'(x)=ae^{ax}-1$ 恒小于 0,函数单调递减,不可能恒大于等于 0。
- 因此,必须有 $a>0$。

**3. 确定极值点和最小值**

当 $a>0$ 时,解 $e^{ax}=\frac{1}{a}$ 得 $x_0=-\frac{\ln a}{a}$ 是唯一的驻点。

求二阶导数判断极值类型:$f''(x)=a^2e^{ax}>0$ 恒成立,所以 $x_0$ 是全局最小点。

**4. 建立关于 $a$ 的不等式**

函数 $f(x)$ 的最小值为:

$$f(x_0)=e^{-\ln a}-1+\frac{\ln a}{a}=\frac{1}{a}-1+\frac{\ln a}{a}\ge 0$$

化简得:$1-a+\ln a\ge 0$,即 $\ln a\ge a-1$。

**5. 解关于 $a$ 的不等式**

分析函数 $g(a)=\ln a-(a-1)$ 在 $a>0$ 时的性质。

$$g'(a)=\frac{1}{a}-1$$

令 $g'(a)=0$,解得 $a=1$。当 $0<a<1$ 时,$g'(a)>0$;当 $a>1$ 时,$g'(a)<0$。因此 $a=1$ 是最大值点。$g(a)$ 的最大值为 $g(1)=0$。因为 $g(a)$ 的最大值是 0,所以 $g(a)\ge 0$ 当且仅当 $a=1$。

**最终答案**:$a=1$

4. 已知 $\Omega=\{(x,y,z)|y^2+z^2\le 1,0\le x\le 1\}$,$\Sigma$ 为 $\Omega$ 的边界面且取外侧,则 $\oiint_\Sigma (y^3+z\sin x)dydz+zdxdy=$______.

**解答**

**解题步骤**

**1. 应用高斯散度定理**

该积分是第二类曲面积分，区域 $\Omega$ 是封闭的，曲面 $\Sigma$ 取外侧，满足高斯公式的应用条件。

**2. 确定 $P, Q, R$ 并计算散度**

从积分表达式 $\oiint_\Sigma P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy$ 中：

- $P = y^3 + z\sin x$
- $Q = 0$
- $R = z$

计算散度：

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0 + 3y^2 + 1 = 3y^2 + 1$$

**3. 转化为三重积分**

由高斯公式：

$$\oiint_\Sigma P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iiint_\Omega (3y^2+1)\,dV$$

**4. 计算三重积分**

先对 $yz$ 平面上的圆盘 $D: y^2+z^2 \le 1$ 积分，再对 $x$ 积分。使用极坐标变换：$y = r\cos\theta, z = r\sin\theta$。

$$\iint_D (3y^2+1)\,dydz = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (3r^2\cos^2\theta + 1)r\,dr\,d\theta$$

先对 $r$ 积分：

$$\int_0^1 (3r^3\cos^2\theta + r)\,dr = \frac{3}{4}\cos^2\theta + \frac{1}{2}$$

再对 $\theta$ 积分，利用 $\cos^2\theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$：

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{4}\cos^2\theta + \frac{1}{2}\right)d\theta = \frac{7\pi}{4}$$

完成对 $x$ 的积分：

$$\iiint_\Omega (3y^2+1)\,dV = \int_0^1 \frac{7\pi}{4}\,dx = \frac{7\pi}{4}$$

**最终答案**：$\frac{7\pi}{4}$

5. 设随机变量 $X \sim B(2, \frac{1}{2})$，则 $E(e^{2X}) =$ ______.

**解答**

**解题步骤**

**方法一：利用矩母函数（MGF）**

- 随机变量 $X$ 的矩母函数定义为 $M_X(t)=E(e^{tX})$。
- 对于服从二项分布 $B(n,p)$ 的随机变量，其矩母函数为 $M_X(t)=(1-p+pe^t)^n$。
- 本题中，$n=2, p=\frac{1}{2}$，所以 $X$ 的矩母函数为：

$$M_X(t)=(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^t)^2=\left(\frac{1+e^t}{2}\right)^2$$

- 题目所求为 $E(e^{2X})$，这正好是矩母函数在 $t=2$ 处的值。
-

$$E(e^{2X})=M_X(2)=\left(\frac{1+e^2}{2}\right)^2=\frac{(1+e^2)^2}{4}$$

**方法二：利用期望的定义**

- $X\sim B(2,\frac{1}{2})$，所以 $X$ 可能的取值为 $0,1,2$。
- 其概率分布：$P(X=0)=\frac{1}{4}$，$P(X=1)=\frac{1}{2}$，$P(X=2)=\frac{1}{4}$
- 根据期望的定义：

$$E(e^{2X})=e^0\cdot\frac{1}{4}+e^2\cdot\frac{1}{2}+e^4\cdot\frac{1}{4}=\frac{1+2e^2+e^4}{4}$$

- 分子是完全平方式：$(1+e^2)^2=1^2+2\cdot1\cdot e^2+(e^2)^2=1+2e^2+e^4$
- 所以，

$$E(e^{2X})=\frac{(1+e^2)^2}{4}$$

**最终答案**：$\frac{(1+e^2)^2}{4}$（或 $\frac{1+2e^2+e^4}{4}$）

6. 计算二重积分 $\int_0^1 dx\int_1^x(e^{-y^2}+e^y\sin y)dy=$______.

**解答**

**解题步骤**

**1. 分析积分区域**

这道题的关键在于：被积函数中的 $e^{-y^2}$ 不存在初等函数原函数，不能直接对 $y$ 进行积分，因此必须**交换积分次序**。

原积分为：$I=\int_0^1 dx\int_1^x(e^{-y^2}+e^y\sin y)dy$

观察积分限：当 $0\le x\le 1$ 时，$1\le y\le x$。由于在大部分区间内 $x<1$，所以积分上限小于下限，这是" 反向" 积分。

根据定积分的性质 $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$，将原积分改写为：

$$I=-\int_0^1 dx\int_x^1(e^{-y^2}+e^y\sin y)dy$$

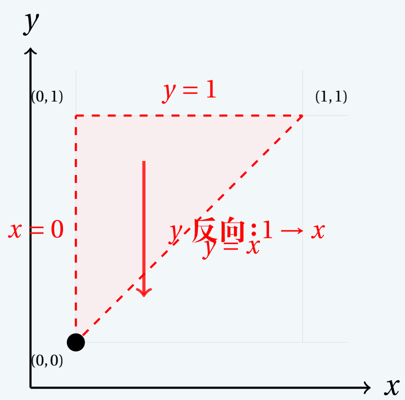
现在的积分区域 $D$ 为：$0\le x\le 1, x\le y\le 1$

这是由直线 $x=0$、$y=1$、$y=x$ 围成的三角形区域，顶点为 $(0,0)$、$(0,1)$、$(1,1)$。

**积分区域详细图示：**

## 步骤 1:原题中的反向积分

$I = \int_0^1 dx \int_1^x (\ldots) dy$,其中 $1 \le y \le x$(反向)

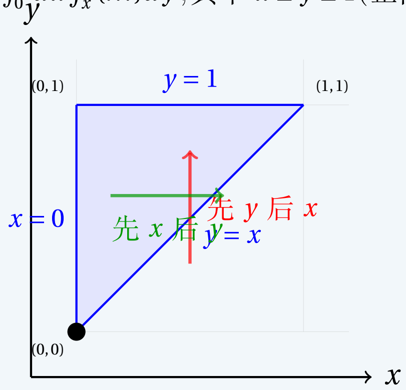



使用 $\int_a^b = -\int_b^a$

$\Downarrow$

## 步骤 2:转化后的正向积分

$I = -\int_0^1 dx \int_x^1 (\ldots) dy$,其中 $x \le y \le 1$(正向)




**2. 交换积分次序**

观察三角形区域:

- $y$ 的取值范围:$0 \le y \le 1$
- 对于固定的 $y$,$x$ 的范围:$0 \le x \le y$(从左边界 $x = 0$ 到斜边 $x = y$)

交换积分次序后：

$$I=-\int_0^1 dy\int_0^y (e^{-y^2}+e^y\sin y)dx$$

**3. 计算新的积分**

**第一步：计算内层对 $x$ 的积分**

被积函数对 $x$ 积分时可视为常数：

$$\int_0^y (e^{-y^2}+e^y\sin y)dx=(e^{-y^2}+e^y\sin y)\cdot y=ye^{-y^2}+ye^y\sin y$$

**第二步：计算外层对 $y$ 的积分**

$$I=-\int_0^1 (ye^{-y^2}+ye^y\sin y)dy=-\left[\int_0^1 ye^{-y^2}dy+\int_0^1 ye^y\sin y\,dy\right]$$

**计算积分 A：$\int_0^1 ye^{-y^2}dy$**

令 $u=-y^2$，则 $du=-2y\,dy$，故 $y\,dy=-\frac{1}{2}du$。

当 $y=0$ 时，$u=0$；当 $y=1$ 时，$u=-1$。

$$\begin{aligned}\int_0^1 ye^{-y^2}dy&=\int_0^{-1} e^u\left(-\frac{1}{2}\right)du=\frac{1}{2}\int_{-1}^0 e^u\,du\\&=\frac{1}{2}[e^u]_{-1}^0=\frac{1}{2}(1-e^{-1})=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)\end{aligned}$$

**计算积分 B：$\int_0^1 ye^y\sin y\,dy$**

先计算 $\int e^y\sin y\,dy$（分部积分两次）：

$$\int e^y\sin y\,dy=\frac{1}{2}e^y(\sin y-\cos y)+C$$

对 $\int ye^y\sin y\,dy$ 用分部积分：令 $u=y,dv=e^y\sin y\,dy$

$$v=\frac{1}{2}e^y(\sin y-\cos y)$$

$$\int ye^y\sin y\,dy=\frac{1}{2}ye^y(\sin y-\cos y)-\frac{1}{2}\int e^y(\sin y-\cos y)dy$$

其中 $\int e^y\sin y\,dy=\frac{1}{2}e^y(\sin y-\cos y)$，$\int e^y\cos y\,dy=\frac{1}{2}e^y(\sin y+\cos y)$

代入计算得：

$$\int ye^y\sin y\,dy=\frac{1}{2}ye^y(\sin y-\cos y)+\frac{1}{2}e^y\cos y$$

计算定积分：

$$\int_0^1 ye^y\sin y\,dy=\left[\frac{1}{2}ye^y(\sin y-\cos y)+\frac{1}{2}e^y\cos y\right]_0^1$$
$$=\left[\frac{e}{2}(\sin 1-\cos 1)+\frac{e}{2}\cos 1\right]-\left[0+\frac{1}{2}\right]$$
$$=\frac{e}{2}\sin 1-\frac{1}{2}$$

**第三步：合并结果**

$$I=-\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)+\frac{e}{2}\sin 1-\frac{1}{2}\right]$$
$$=-\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2e}+\frac{e}{2}\sin 1-\frac{1}{2}\right]$$
$$=-\left[-\frac{1}{2e}+\frac{e}{2}\sin 1\right]$$
$$=\frac{1}{2e}-\frac{e\sin 1}{2}$$

**最终答案**：$\frac{1}{2e}-\frac{e\sin 1}{2}$（或 $\frac{1}{2e}-\frac{e\sin 1}{2}$）