张宇预测卷

第1套·填空选择题

考研数学错题本

A4标准版

”心无旁骛,行稳致远。”

学生

最后更新时间:2025 年 10 月 28 日

目录

第 1 章　张宇预测卷·第 1 套

1.1 填空题和选择题

1. 设总体 $X \sim N(\mu,1)$, $H_0:\mu=0, H_1:\mu=1$. 来自总体 X 的样本容量为 9 的简单随机样本均值为 $\bar{X}$, 设拒绝域为 $W=\{\bar{X}\geq 0.55\}$, 则不犯第二类错误的概率为

A. $1-\Phi(1.35)$

B. $\Phi(1.35)$

C. $\Phi(1.65)$

D. $1-\Phi(1.65)$

解答

解题步骤

1. 理解第二类错误及其概率

- 第二类错误(Type II Error)是指原假设 H_0 不成立,但我们没有拒绝 H_0(即接受了 H_0)。
- 犯第二类错误的概率通常记为 β。
- $\beta = P(\text{接受 } H_0|H_1 \text{ 为真})$。
- 本题要求的是"不犯第二类错误的概率",这个概率就是统计检验中的**功效(Power)**,等于 $1-\beta$。
- 功效的定义是:当备择假设 H_1 为真时,我们能够正确地拒绝原假设 H_0 的概率。即 $1-\beta = P(\text{拒绝 } H_0|H_1 \text{ 为真})$。

2. 确定检验的条件

- 拒绝域为 $W=\{\bar{X}\geq 0.55\}$。
- 备择假设 H_1 为真,意味着总体的真实均值为 $\mu=1$。
- 总体方差 $\sigma^2=1$,样本容量 $n=9$。
- 根据中心极限定理,样本均值 $\bar{X}$ 的分布为 $\bar{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$。
- 当 H_1 为真时,$\mu=1$,所以 $\bar{X}\sim N(1,\frac{1}{9})$。

3. 计算不犯第二类错误的概率

- 我们需要计算 $P(\bar{X}\in W|\mu=1)$,即 $P(\bar{X}\geq 0.55|\mu=1)$。

- 标准化公式为 $Z=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$。
- 在这里，$\mu=1,\ \sigma=1,\ n=9$，所以标准差为 $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{9}}=\frac{1}{3}$。
- $P(\bar{X}\geq 0.55)=P\left(\frac{\bar{X}-1}{1/3}\geq\frac{0.55-1}{1/3}\right)=P(Z\geq -1.35)$
- 根据标准正态分布的对称性，$P(Z\geq -z)=P(Z\leq z)$。
- 所以，$P(Z\geq -1.35)=P(Z\leq 1.35)=\Phi(1.35)$。

最终答案：$B\left(\Phi(1.35)\right)$

2. $z=\arcsin y^x$ 在点 $(-1,2)$ 处的全微分为 $dz=$______.

解答

解题步骤

1. 全微分公式

函数 $z=f(x,y)$ 的全微分公式为：$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$。我们需要先求出 z 对 x 和 y 的偏导数。

2. 求偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$

将 y 视为常数，对 x 求导。根据链式法则和基本求导公式 $(\arcsin u)'=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$ 和 $(a^x)'=a^x\ln a$：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1-(y^x)^2}}\cdot\frac{\partial(y^x)}{\partial x}=\frac{y^x\ln y}{\sqrt{1-y^{2x}}}$$

3. 求偏导数 $\frac{\partial z}{\partial y}$

将 x 视为常数，对 y 求导。根据链式法则和基本求导公式 $(\arcsin u)'=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$ 和 $(y^n)'=ny^{n-1}$：

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{1-(y^x)^2}}\cdot\frac{\partial(y^x)}{\partial y}=\frac{xy^{x-1}}{\sqrt{1-y^{2x}}}$$

4. 计算在点 $(-1,2)$ 处的偏导数值

将 $x=-1,y=2$ 代入上述偏导数表达式：

- $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(-1,2)}=\frac{2^{-1}\ln 2}{\sqrt{1-2^{-2}}}=\frac{\frac{1}{2}\ln 2}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}}=\frac{\frac{1}{2}\ln 2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\ln 2}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\ln 2$
- $\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(-1,2)}=\frac{(-1)\cdot 2^{-2}}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}}=\frac{-\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{1}{2\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{6}$

5. 写出全微分表达式

将计算出的偏导数值代入全微分公式。

最终答案：$dz=\frac{\sqrt{3}}{3}\ln 2\,dx-\frac{\sqrt{3}}{6}dy$

3. 设 $e^{ax}\geq 1+x$ 对任意实数 x 均成立，则 a 的取值范围为 ______.

解答

解题步骤

1. 构造辅助函数

设函数 $f(x)=e^{ax}-1-x$。题目条件等价于 $f(x)\geq 0$ 对任意实数 x 恒成立。这意味着函数 $f(x)$ 的全局最小值必须大于或等于 0。

2. 求函数的最小值

对 $f(x)$ 求导以寻找极值点:

$$f'(x)=ae^{ax}-1$$

令 $f'(x)=0$,得到 $ae^{ax}=1$,即 $e^{ax}=\frac{1}{a}$。

- 要使该方程有解,必须有 $\frac{1}{a}>0$,即 $a>0$。
- 如果 $a=0$,不等式为 $1\geq 1+x$,化为 $x\leq 0$,不满足对任意 x 成立。
- 如果 $a<0$,则 $e^{ax}>0$ 而 $\frac{1}{a}<0$,方程无解。此时 $f'(x)=ae^{ax}-1$ 恒小于 0,函数单调递减,不可能恒大于等于 0。
- 因此,必须有 $a>0$。

3. 确定极值点和最小值

当 $a>0$ 时,解 $e^{ax}=\frac{1}{a}$ 得 $x_0=-\frac{\ln a}{a}$ 是唯一的驻点。
求二阶导数判断极值类型:$f''(x)=a^2e^{ax}>0$ 恒成立,所以 x_0 是全局最小点。

4. 建立关于 a 的不等式

函数 $f(x)$ 的最小值为:

$$f(x_0)=e^{-\ln a}-1+\frac{\ln a}{a}=\frac{1}{a}-1+\frac{\ln a}{a}\geq 0$$

化简得:$1-a+\ln a\geq 0$,即 $\ln a\geq a-1$。

5. 解关于 a 的不等式

分析函数 $g(a)=\ln a-(a-1)$ 在 $a>0$ 时的性质。

$$g'(a)=\frac{1}{a}-1$$

令 $g'(a)=0$,解得 $a=1$。当 $0<a<1$ 时,$g'(a)>0$;当 $a>1$ 时,$g'(a)<0$。因此 $a=1$ 是最大值点。
$g(a)$ 的最大值为 $g(1)=0$。因为 $g(a)$ 的最大值是 0,所以 $g(a)\geq 0$ 当且仅当 $a=1$。

最终答案:$a=1$

4. 已知 $\Omega=\{(x,y,z)|y^2+z^2\leq 1,0\leq x\leq 1\}$,$\Sigma$ 为 Ω 的边界面且取外侧,则 $\oiint_{\Sigma}(y^3+z\sin x)dydz+zdxdy=$______.

解答

解题步骤

1. 应用高斯散度定理

该积分是第二类曲面积分，区域 Ω 是封闭的，曲面 Σ 取外侧，满足高斯公式的应用条件。

2. 确定 P,Q,R 并计算散度

从积分表达式 $\oiint_\Sigma P dydz + Q dzdx + R dxdy$ 中：

- $P = y^3 + z\sin x$
- $Q = 0$
- $R = z$

计算散度：

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0 + 3y^2 + 1 = 3y^2 + 1$$

3. 转化为三重积分

由高斯公式：

$$\oiint_\Sigma P dydz + Q dzdx + R dxdy = \iiint_\Omega (3y^2+1)dV$$

4. 计算三重积分

先对 yz 平面上的圆盘 $D: y^2+z^2 \le 1$ 积分，再对 x 积分。使用极坐标变换：$y = r\cos\theta, z = r\sin\theta$。

$$\iint_D (3y^2+1)dydz = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (3r^2\cos^2\theta+1)r\,dr\,d\theta$$

先对 r 积分：

$$\int_0^1 (3r^3\cos^2\theta + r)dr = \frac{3}{4}\cos^2\theta + \frac{1}{2}$$

再对 θ 积分，利用 $\cos^2\theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$：

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{4}\cos^2\theta + \frac{1}{2}\right)d\theta = \frac{7\pi}{4}$$

完成对 x 的积分：

$$\iiint_\Omega (3y^2+1)dV = \int_0^1 \frac{7\pi}{4}dx = \frac{7\pi}{4}$$

最终答案：$\frac{7\pi}{4}$

5. 设随机变量 $X \sim B(2, \frac{1}{2})$，则 $E(e^{2X}) =$ ______.

解答

解题步骤

方法一:利用矩母函数(MGF)

- 随机变量 X 的矩母函数定义为 $M_X(t)=E(e^{tX})$。
- 对于服从二项分布 $B(n,p)$ 的随机变量,其矩母函数为 $M_X(t)=(1-p+pe^t)^n$。
- 本题中,$n=2,p=\frac{1}{2}$,所以 X 的矩母函数为:

$$M_X(t)=(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^t)^2=\left(\frac{1+e^t}{2}\right)^2$$

- 题目所求为 $E(e^{2X})$,这正好是矩母函数在 $t=2$ 处的值。
- $$E(e^{2X})=M_X(2)=\left(\frac{1+e^2}{2}\right)^2=\frac{(1+e^2)^2}{4}$$

方法二:利用期望的定义

- $X\sim B(2,\frac{1}{2})$,所以 X 可能的取值为 0,1,2。
- 其概率分布:$P(X=0)=\frac{1}{4}$,$P(X=1)=\frac{1}{2}$,$P(X=2)=\frac{1}{4}$
- 根据期望的定义:

$$E(e^{2X})=e^0\cdot\frac{1}{4}+e^2\cdot\frac{1}{2}+e^4\cdot\frac{1}{4}=\frac{1+2e^2+e^4}{4}$$

- 分子是完全平方式:$(1+e^2)^2=1^2+2\cdot1\cdot e^2+(e^2)^2=1+2e^2+e^4$
- 所以,

$$E(e^{2X})=\frac{(1+e^2)^2}{4}$$

最终答案:$\frac{(1+e^2)^2}{4}$(或 $\frac{1+2e^2+e^4}{4}$)