



张宇预测卷

第1套·填空选择题 考研数学错题本

A4 标准版

”心无旁骛,行稳致远。”

学生

最后更新时间:2025 年 10 月 28 日

目录

第 1 章 张宇预测卷·第 1 套..... 1

1.1 填空题和选择题..... 2

第1章 张宇预测卷·第1套

1.1 填空题和选择题

1. 设总体 $X \sim N(\mu, 1)$, $H_0: \mu = 0$, $H_1: \mu = 1$. 来自总体 X 的样本容量为 9 的简单随机样本均值为 \bar{X} , 设拒绝域为 $W = \{\bar{X} \geq 0.55\}$, 则不犯第二类错误的概率为

- A. $1 - \Phi(1.35)$
- B. $\Phi(1.35)$
- C. $\Phi(1.65)$
- D. $1 - \Phi(1.65)$

解答

解题步骤

1. 理解第二类错误及其概率

- 第二类错误 (Type II Error) 是指原假设 H_0 不成立, 但我们没有拒绝 H_0 (即接受了 H_0)。
- 犯第二类错误的概率通常记为 β 。
- $\beta = P(\text{接受 } H_0 | H_1 \text{ 为真})$ 。
- 本题要求的是“不犯第二类错误的概率”, 这个概率就是统计检验中的**功效 (Power)**, 等于 $1 - \beta$ 。
- 功效的定义是: 当备择假设 H_1 为真时, 我们能够正确地拒绝原假设 H_0 的概率。即 $1 - \beta = P(\text{拒绝 } H_0 | H_1 \text{ 为真})$ 。

2. 确定检验的条件

- 拒绝域为 $W = \{\bar{X} \geq 0.55\}$ 。
- 备择假设 H_1 为真, 意味着总体的真实均值为 $\mu = 1$ 。
- 总体方差 $\sigma^2 = 1$, 样本容量 $n = 9$ 。
- 根据中心极限定理, 样本均值 \bar{X} 的分布为 $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ 。
- 当 H_1 为真时, $\mu = 1$, 所以 $\bar{X} \sim N(1, \frac{1}{9})$ 。

3. 计算不犯第二类错误的概率

- 我们需要计算 $P(\bar{X} \in W | \mu = 1)$, 即 $P(\bar{X} \geq 0.55 | \mu = 1)$ 。

- 标准化公式为 $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ 。
- 在这里, $\mu = 1, \sigma = 1, n = 9$, 所以标准差为 $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$ 。
- $P(\bar{X} \geq 0.55) = P\left(\frac{\bar{X}-1}{1/3} \geq \frac{0.55-1}{1/3}\right) = P(Z \geq -1.35)$
- 根据标准正态分布的对称性, $P(Z \geq -z) = P(Z \leq z)$ 。
- 所以, $P(Z \geq -1.35) = P(Z \leq 1.35) = \Phi(1.35)$ 。

最终答案: $B(\Phi(1.35))$

2. $z = \arcsin y^x$ 在点 $(-1, 2)$ 处的全微分为 $dz = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解答

解题步骤

1. 全微分公式

函数 $z = f(x, y)$ 的全微分公式为: $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$ 。我们需要先求出 z 对 x 和 y 的偏导数。

2. 求偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$

将 y 视为常数, 对 x 求导。根据链式法则和基本求导公式 $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$ 和 $(a^x)' = a^x \ln a$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-(y^x)^2}} \cdot \frac{\partial (y^x)}{\partial x} = \frac{y^x \ln y}{\sqrt{1-y^{2x}}}$$

3. 求偏导数 $\frac{\partial z}{\partial y}$

将 x 视为常数, 对 y 求导。根据链式法则和基本求导公式 $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$ 和 $(y^n)' = ny^{n-1}$:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1-(y^x)^2}} \cdot \frac{\partial (y^x)}{\partial y} = \frac{xy^{x-1}}{\sqrt{1-y^{2x}}}$$

4. 计算在点 $(-1, 2)$ 处的偏导数值

将 $x = -1, y = 2$ 代入上述偏导数表达式:

- $\frac{\partial z}{\partial x}|_{(-1,2)} = \frac{2^{-1} \ln 2}{\sqrt{1-2^{-2}}} = \frac{\frac{1}{2} \ln 2}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} = \frac{\frac{1}{2} \ln 2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\ln 2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \ln 2$
- $\frac{\partial z}{\partial y}|_{(-1,2)} = \frac{(-1) \cdot 2^{-2}}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{6}$

5. 写出全微分表达式

将计算出的偏导数值代入全微分公式。

最终答案: $dz = \frac{\sqrt{3}}{3} \ln 2 dx - \frac{\sqrt{3}}{6} dy$

3. 设 $e^{ax} \geq 1 + x$ 对任意实数 x 均成立, 则 a 的取值范围为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

解答

解题步骤

1. 构造辅助函数

设函数 $f(x) = e^{ax} - 1 - x$ 。题目条件等价于 $f(x) \geq 0$ 对任意实数 x 恒成立。这意味着函数 $f(x)$ 的全局最小值必须大于或等于 0。

2. 求函数的最小值

对 $f(x)$ 求导以寻找极值点：

$$f'(x) = ae^{ax} - 1$$

令 $f'(x) = 0$, 得到 $ae^{ax} = 1$, 即 $e^{ax} = \frac{1}{a}$ 。

- 要使该方程有解, 必须有 $\frac{1}{a} > 0$, 即 $a > 0$ 。
- 如果 $a = 0$, 不等式为 $1 \geq 1 + x$, 化为 $x \leq 0$, 不满足对任意 x 成立。
- 如果 $a < 0$, 则 $e^{ax} > 0$ 而 $\frac{1}{a} < 0$, 方程无解。此时 $f'(x) = ae^{ax} - 1$ 恒小于 0, 函数单调递减, 不可能恒大于等于 0。
- 因此, 必须有 $a > 0$ 。

3. 确定极值点和最小值

当 $a > 0$ 时, 解 $e^{ax} = \frac{1}{a}$ 得 $x_0 = -\frac{\ln a}{a}$ 是唯一的驻点。

求二阶导数判断极值类型: $f''(x) = a^2 e^{ax} > 0$ 恒成立, 所以 x_0 是全局最小点。

4. 建立关于 a 的不等式

函数 $f(x)$ 的最小值为:

$$f(x_0) = e^{-\ln a} - 1 + \frac{\ln a}{a} = \frac{1}{a} - 1 + \frac{\ln a}{a} \geq 0$$

化简得: $1 - a + \ln a \geq 0$, 即 $\ln a \geq a - 1$ 。

5. 解关于 a 的不等式

分析函数 $g(a) = \ln a - (a - 1)$ 在 $a > 0$ 时的性质。

$$g'(a) = \frac{1}{a} - 1$$

令 $g'(a) = 0$, 解得 $a = 1$ 。当 $0 < a < 1$ 时, $g'(a) > 0$; 当 $a > 1$ 时, $g'(a) < 0$ 。因此 $a = 1$ 是最大值点。 $g(a)$ 的最大值为 $g(1) = 0$ 。因为 $g(a)$ 的最大值是 0, 所以 $g(a) \geq 0$ 当且仅当 $a = 1$ 。

最终答案: $a = 1$

4. 已知 $\Omega = \{(x, y, z) | y^2 + z^2 \leq 1, 0 \leq x \leq 1\}$, Σ 为 Ω 的边界面且取外侧, 则 $\oint_{\Sigma} (y^3 + z \sin x) dy dz + z dx dy = \underline{\hspace{2cm}}$.

解答

解题步骤

1. 应用高斯散度定理

该积分是第二类曲面积分, 区域 Ω 是封闭的, 曲面 Σ 取外侧, 满足高斯公式的应用条件。

2. 确定 P, Q, R 并计算散度

从积分表达式 $\oint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$ 中:

$$\bullet P = y^3 + z \sin x$$

$$\bullet Q = 0$$

$$\bullet R = z$$

计算散度:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0 + 3y^2 + 1 = 3y^2 + 1$$

3. 转化为三重积分

由高斯公式:

$$\oint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint_{\Omega} (3y^2 + 1) dV$$

4. 计算三重积分

先对 yz 平面上的圆盘 $D: y^2 + z^2 \leq 1$ 积分, 再对 x 积分。使用极坐标变换: $y = r \cos \theta, z = r \sin \theta$ 。

$$\iint_D (3y^2 + 1) dydz = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (3r^2 \cos^2 \theta + 1) r dr d\theta$$

先对 r 积分:

$$\int_0^1 (3r^3 \cos^2 \theta + r) dr = \frac{3}{4} \cos^2 \theta + \frac{1}{2}$$

再对 θ 积分, 利用 $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$:

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{4} \cos^2 \theta + \frac{1}{2} \right) d\theta = \frac{7\pi}{4}$$

完成对 x 的积分:

$$\iiint_{\Omega} (3y^2 + 1) dV = \int_0^1 \frac{7\pi}{4} dx = \frac{7\pi}{4}$$

最终答案: $\frac{7\pi}{4}$

5. 设随机变量 $X \sim B(2, \frac{1}{2})$, 则 $E(e^{2X}) = \underline{\hspace{2cm}}$.

解答

解题步骤

方法一：利用矩母函数(MGF)

- 随机变量 X 的矩母函数定义为 $M_X(t) = E(e^{tX})$ 。
- 对于服从二项分布 $B(n, p)$ 的随机变量, 其矩母函数为 $M_X(t) = (1 - p + pe^t)^n$ 。
- 本题中, $n = 2, p = \frac{1}{2}$, 所以 X 的矩母函数为:

$$M_X(t) = (1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^t)^2 = \left(\frac{1+e^t}{2}\right)^2$$

- 题目所求为 $E(e^{2X})$, 这正好是矩母函数在 $t = 2$ 处的值。

•

$$E(e^{2X}) = M_X(2) = \left(\frac{1+e^2}{2}\right)^2 = \frac{(1+e^2)^2}{4}$$

方法二：利用期望的定义

- $X \sim B(2, \frac{1}{2})$, 所以 X 可能的取值为 $0, 1, 2$ 。
- 其概率分布: $P(X=0) = \frac{1}{4}, P(X=1) = \frac{1}{2}, P(X=2) = \frac{1}{4}$
- 根据期望的定义:

$$E(e^{2X}) = e^0 \cdot \frac{1}{4} + e^2 \cdot \frac{1}{2} + e^4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1+2e^2+e^4}{4}$$

- 分子是完全平方式: $(1+e^2)^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot e^2 + (e^2)^2 = 1+2e^2+e^4$
- 所以,

$$E(e^{2X}) = \frac{(1+e^2)^2}{4}$$

最终答案: $\frac{(1+e^2)^2}{4}$ (或 $\frac{1+2e^2+e^4}{4}$)