三大变换总结

一、常用变换对

傅里叶变换		S 变换		Z 变换	
f(t)	F(jw)	f(t)	F(s)	f(k)	F(z)
$e^{-\alpha t}\varepsilon(t)(\alpha>0)$	$\frac{1}{jw+a}$	$e^{-at}\varepsilon(t)$	$\frac{1}{s+a}$,Re (s) >- a	$a^k\varepsilon(k)$	$\frac{z}{z-a}$, $\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$
$g_\tau(t)$	$\tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})$	$e^{-at}\sin(\omega_0 t)\varepsilon(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}, Re(s)>-a$	$\cos(\beta\mathrm{k})\varepsilon(k)$	$\frac{z(z-\cos\beta)}{z^2-2z\cos\beta+1}$, $\lvert z\rvert>1$
$\varepsilon(t)$	$\pi\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}\omega}$	$e^{-at}\cos(\omega_0 t)\varepsilon(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}, Re(s)>-a$	$sin(\beta\mathrm{k})\varepsilon(k)$	$\frac{z\,sin\beta}{z^2-2z\cos\beta+1}$, $\lvert z\rvert>1$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$	$t^n e^{-at}\varepsilon(t), n\in N^+$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}, Re(s)>-a$	$\frac{1}{(n-1)!}k(k-1)\cdots(k-n+2)a^{k-n+1}\varepsilon(k)$	$\frac{z}{(z-a)^n}$, $\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$
$\sin(\omega_0 t)$	$\mathrm{j}\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$	$\delta_T(t)\ \ t>=0$	$\frac{1}{1-e^{-sT}}$		
$\boldsymbol{\frac{\sin(2at)}{at}}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{a}g_{4a}(w), a>0}$				
$\boldsymbol{Sa(\frac{\tau}{2}t)}$	$\boldsymbol{\frac{2\pi}{\tau}g_\tau(w)}$				
$\boldsymbol{\frac{\tau}{2\pi}sa(\frac{\tau t}{2})}$	$\boldsymbol{g_\tau(w)}$				
$\boldsymbol{\frac{1}{\pi}cos(w_0 t-\varphi)}$	$\boldsymbol{\delta(w+w_0)e^{j\varphi}+\delta(w-w_0)e^{-j\varphi}}$				
$\boldsymbol{\frac{\tau}{\pi}Sa(\frac{\tau}{2}t)cos(w_0 t-\varphi)}$	$\boldsymbol{g_\tau(w+w_0)e^{j\varphi}+g_\tau(w-w_0)e^{-j\varphi}}$				

二、常用性质

傅里叶变换		S 变换		Z 变换	
定义	$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$	定义	$F(s)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-st}dt$	f(k)	$F(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(k)z^{-k}$（序列$f(k)$的双边$z$变换）
对称性	$F(jt)\leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$				
尺度平移	$f(at+b)\leftrightarrow\frac{1}{\lvert a\rvert}F(j\frac{\omega}{a})e^{j\frac{b}{a}\omega}$	尺度平移	$f(at-b)\varepsilon(at-b),a>0b\geq 0\leftrightarrow\frac{1}{a}F(\frac{s}{a})e^{-\frac{b}{a}s}b>ab_0$	单边移位性质	$f(k-m),m>0$ $z^{-m}F(z)+\sum_{k=0}^{m-1}f(k-m)z^{-k},\lvert z\rvert>\alpha$
频移	$f(t)\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\omega_0 t}\leftrightarrow F[\mathrm{j}(\omega\pm\omega_0)]$	频移	$f(t)e^{s_0 t}\leftrightarrow\ F(s-s_0),\sigma>\sigma_0+Re(s_0)$		
用微分后频谱 求原信号频谱	$F(j\omega)=\pi[f(\infty)+f(-\infty)]\delta(\omega)+\frac{F_k(j\omega)}{(j\omega)^k}$				
频域微分	$F^{(n)}(\mathrm{j}\omega)\leftrightarrow(-jt)^n f(t)$	S 域微分	$-tf(t)\leftrightarrow\ F'(s),\sigma>\sigma_0$	Z 域微分	$Z[kf(k)]=-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dz}}F(z)$
能量定理	$E=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lvert F(\mathrm{j}\omega)\rvert^2\,\mathrm{d}\omega=\int_{-\infty}^{\infty}\lvert f(t)\rvert^2\,\mathrm{d}t$			能量定理	$E=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=-N}^{N}\lvert f(k)\rvert^2$
功率定理	$P=\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\mathrm{d}t=\left(\frac{A_0}{2}\right)^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}{A_n}^2=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\lvert F_n\rvert^2$			功率定理	$P=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N}\lvert f(k)\rvert^2$
初值定理		初值定理	$f(0_+)=\lim_{s\to\infty}sF(s)$ F(s)为真分式，若不是真分式，化为多项式+真分式的形式，仅带入真分式部分	初值定理	$f(M)=\lim_{z\to\infty}z^M F(z)$
终值定理		终值定理	$f(\infty)=\lim_{s\to\infty}sF(s)$ 1、极点在左半平面 2、极点只有单极点在原点，其余极点在左半平面	终值定理	$f(\infty)=\lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z}F(z)=\lim_{z\to 1}(z-1)F(z)$ 收敛域包含单位圆
				z 域尺度	$Z[a^k f(k)]=F(\frac{z}{\alpha}),(\alpha\lvert a\rvert<\lvert z\rvert<\beta\lvert a\rvert)$
				K 域反转	$f(-k)\leftrightarrow F(z^{-1}),\frac{1}{\beta}<\lvert z\rvert<\frac{1}{\alpha}$
				部分和	$g(k)=\sum_{i=-\infty}^{k}f(i)\leftrightarrow\frac{z}{z-1}F(z),\max(\alpha,1)<\lvert z\rvert<\beta$

三、小专题

1、冲激函数

$$\delta[f(t)]=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{|f'(t_i)|}\delta(t-t_i)$$

$$\delta^{(n)}(at)=\frac{1}{|a|}\frac{1}{a^n}\delta^{(n)}(t)$$

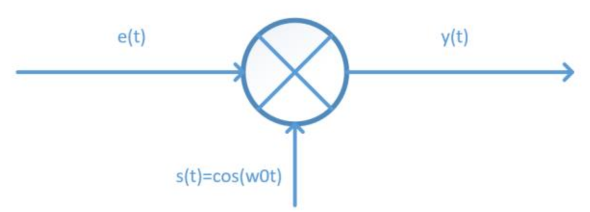
2、求周期由$T_1=\frac{a}{b},T_2=\frac{c}{d}$共同决定的周期 T

$$T=\frac{a\text{和}c\text{的最小公倍数}}{b\text{和}d\text{的最大公约数}}$$

3、信号的最大频率

信号的形式	对应的最高频率
f(t)	fm
f(at)	afm
f(bt)	bfm
f(at)+f(bt)	afm 和 bfm 中较大的频率
f(at)*f(bt)	afm 和 bfm 中较小的频率
f(at)・f(bt)	afm+bfm

4、对输入信号$e(t)$乘以$S(t)=cos(w_0t)$,输出信号$y(t)$输入信号$e(t)$的频域的$Y(jw)$与$E(jw)$的关系:



$y(t)=e(t)\cdot s(t)$

对上式进行双边傅里叶变换:

$$Y(jw)=\frac{1}{2\pi}E(jw)*S(jw)$$

$$Y(jw)=\frac{1}{2\pi}E(jw)*\pi[\delta(w+w_0)+\delta(w-w_0)]$$

$$Y(jw)=\frac{1}{2}E(jw)*[\delta(w+w_0)+\delta(w-w_0)]$$

发现:输出信号对应的频谱Y(jw)是对输入信号对应的频谱E(jw)

1、把E(jw)的幅值变为原来的$\frac{1}{2}$

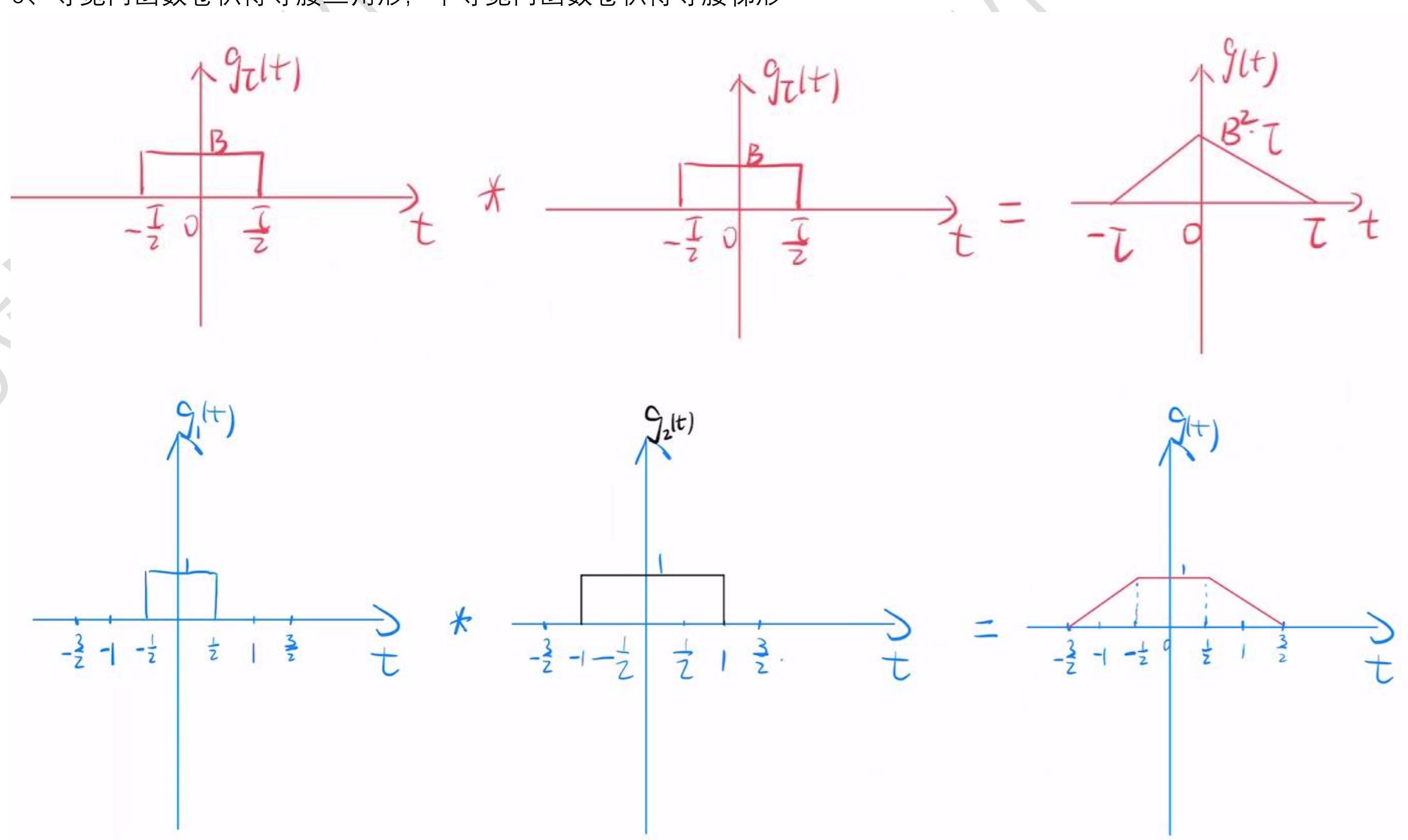
2、把$\frac{1}{2}$E(jw)的左右平移w_0

5、F_n和$F(jw)$有关系

$$F_n = \frac{F(jw)}{2\pi\delta(w-c)}$$

可方便计算幅频响应和相频响应

6、等宽门函数卷积得等腰三角形，不等宽门函数卷积得等腰梯形



7、求频率响应过程中，能进行$H(jw) = H(s)_{|s=jw}$ 和$H(e^{jw}) = H(z)_{|z=e^{jw}}$代换的前提？

$H(jw) = H(s)_{|s=jw}$ 要求$H(s)$收敛域包含jw轴

$H(e^{jw}) = H(z)_{|z=e^{jw}}$要求$H(z)$收敛域包含单位圆