# Степени и корни

## Оглавление

1. **Степени с натуральными показателями.** Пусть $a$ - произвольное действительное число, а $n$ - натуральное число. Произведение n сомножителей, равных a, называется n-й степенью числа a и обозначается через $a^n$. При этом $a$ называется *основанием*. А n - показателем степени. Таким образом, степень $a^n$ определяется при любых натуральных значениях n. Поскольку действие возведения в натуральную степень определено через умножение, то оо рассматривается как рациональное (арифметическое) действие. Отметим некоторые свойства этого действия:

1) При любых натуральных n, m:

$$a^n a^m = a^{n+m}$$

Таким образом, при умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели степени складываются.

2)Если n>m и a $\neq 0$, то

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

Действительно, это следует из равенства

$$a^n = a^{m+(n-m)} = a^m a^{n-m}.$$

3)При любых натуральных m и n

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

По свойству 1)

$$(a^m)^n = a^{m+m+...+m} = a^{mn},$$

Итак при возведении степени в степень показатели степени перемножаются.

4) $$(ab)^n = a^n b^n$$

5) $$(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Доказательства свойств 4) и 5) предоставляются читателю в качестве упражнения.

---

**2. Степени с целыми показателями.** Свойство 2) п.1 установлено при n > m. При n = m или n< m его правая часть не определена, но левая часть сохраняет смысл. Нулевую степень числа a ≠ 0 полагают по определению равной единице:

$$a^0 = 1$$

Таким образом, равенство (1.2) становится верным и при n = m. Степень числа a ≠ 0 с отрицательным показателем - k определяется равенством

$$a^{-k} = \frac{1}{a^k}$$

Нулевая и отрицательная степени числа 0 не определяются.

Определение 2.2 делает равенство 1.2 верным и при n<m. Так, если m = n + k, то имеем

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{a^n}{a^{n+k}} = \frac{a^n}{a^n a^k} = \frac{1}{a^k} = a^{-k} = a^{n-m}$$

---

3. Корни. Если $m > 1$ -натуральное число, а $a$ и $b$ -- действительные числа, причем

$$b^n = a$$

то число b называется корнем п-й степени из числа $a$. Таким образом, кормем n-й степени из числа $a$ называется каждое число $b$ такое, что его $n$-я степень равна $a$. Действие отыскания корня из числа $a$ называется действием извлечения корня $n$-й степени из $a$. Действие извлечения корня степени $n$ является действием, обратным по отношению к действию возведения числа в степень $n$.

Если $n$ --нечетное число, то, как можно доказать, для любого действительного числа a существует единственное значение корня степени $n$.

Если $n$ - четное, то действие извлечения корня степени $n$ из отрицательного числа невозможно, так как четная степень любого числа неотрицательна. Можно показать, что для любого положительного числа $a$ корень четной степени $n$ имеет два значения, равных по абсолютной величине и противоположных по знаку. Например, числа + 3, - 3 суть корпи квадратные из числа 9. Положительный корень четной степени из положительного числа называется арифметическим корнем (или арифметическим значением корня). Его единственость видна из такого соображения. Если бы имелось два положительных корня $b_1$ и $b_2$, то одно из чисел $b_1$ , $b_2$ было бы больше другого, например, $b_1 > b_2$ .Но тогда $b_1^n > b_2^n$ т. е. оба числа не могли бы быть корнями степени n из одного и того же числа $a$. Это рассуждение и к случаю корней нечетной степени.

Корень степени n обозначается с помощью знака радикала $\sqrt[n]{\ }$ ; при этом для придания символу $\sqrt[n]{a}$ вполне определенного смысла условимся понимать под $\sqrt[n]{a}$:

1) единственное значение корня в случае нечетного $n$ ($a$ в этом случае - любое действительное число)

2) арифметический корень степени $n$ из а в случае четного $n$ (в этом случае $a > 0$).

Корень из нуля при любом показателе $n$ равен нулю.

В случае, если мы хотим рассматривать оба значения корня четной степени из положительного числа, то пишем $\pm\sqrt[n]{a}$; если перед корнем четной степени знак не написан, то всегда имеют ввиду арифметическое значение корня.

В случае корня степени 2(квадратного корня) пишут просто $\sqrt{a}$. Например $\sqrt{9} = 3$. Корень третьей степени называют *кубическим корнем*.

Если $a$ - произвольное действительное число, то

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

При нечетном n и

$$\sqrt[n]{a^n} = |a|$$

При четном n (в частности, в случае квадратного корня). Так, например,

$$\sqrt[3]{(-3)^3} = -3 \text{ , но } \sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3.$$

Укажем основные правила действий над корнями; для простоты предположим, что числа под знаком корня - положительные.

<u>1) Извлечение корня из произведения.</u> Корень из произведения равен произведению корней из сомножителей:

$$\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}$$

<u>2) Возведение корня в степень.</u> Для возведения корня в степень достаточно возвести в эту степень покоренное выражение сохраняя показатель корня.

$$(\sqrt[m]{a})^k = \sqrt[m]{a^k}$$

<u>3)Извлечение корня из частного.</u> Корень из частного равен частному от деления корня из числителя на корень из знаменателя.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

4)<u>Извлечение корня из степени.</u> При извлечении корня из степени показатель степени следует разделить на показатель корня.

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/_k} = a^k$$

Пусть в общем случае m не является кратным n; выполним деление $m$ на $n$ с остатком: $m = nq + r$. Тогда

$$\sqrt[n]{a^{nq+r}} = a^q\sqrt[n]{a^r}$$

Действительно, применяя уже найденные правила, получим:

$$\sqrt[n]{a^{nq+r}} = \sqrt[n]{a^{nq}a^r} = \sqrt[n]{a^{nq}}\sqrt[n]{a^r} = a^q\sqrt[n]{a^r}$$